т.е. имеет место равенство(8.37). К этому можно лишь добавить, что из существования предела $\lim_{x\to x_0}\Psi(x)=1$ следует, что окрестность $U=U(x_0)$ можно выбрать таким образом, что для всех точек $x\in X\cap U$ будет выполняться неравенство $\Psi(x)\neq 0$, а из существования по множеству X предела $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ следует, что окрестность U может быть выбрана еще так, что для всех $x\in X\cap U$ будет выполняться неравенство $g(x)\neq 0$, так как частное $\frac{f(x)}{g(x)}$ должно быть определено на пересечении $X\cap U$ множества X с некоторой окрестностью U точки x_0. Поэтому все написанные выше выражения имеют смысл.

Обе части равенства(8.37) равноправны, поэтому из доказанной теоремы следует, что предел, стоящий в левой части, существует тогда и только тогда, когда существует предел в правой части, причем в случае их существования они совпадают. Это делает очень удобным применение теоремы 2 на практике: ее можно использовать для вычисления пределов, не зная заранее, существует или нет рассматриваемый предел.

8.4. Метод выделения главной части функции и его применение к вычислению пределов

Пусть заданы функции $\alpha : X\to\mathbf{R}$ и $\beta : X\to\mathbf{R}$. Если функция β для всех $x\in X$ представима в виде

$$\beta(x)=\alpha(x)+o(\alpha(x)), x\to x_0,$$

то функция α называется *главной частью* функции β при $x\to x_0$.

Примеры. 1. Главная часть функции $\sin x$ при $x\to 0$ равна x, ибо $\sin x = x+o(x)$ при $x\to 0$.

2. Если $P_n(x)=a_nx^n+...+a_1x+a_0, a_n\neq 0$, то функция a_nx^n является главной частью многочлена $P_n(x)$ при $x\to\infty$, так как $P_n(x)=a_nx^n+o(x^n)$ при $x\to\infty$.

Если задана функция β: $X \to \mathbf{R}$, то ее главная часть при $x \to x_0$ не определяется однозначно: согласно теореме 1, любая функция α, эквивалентная β при $x \to x_0$ является ее главной частью при $x \to x_0$

Например, пусть $\beta = x + x^2 + x^3$. Так как, с одной стороны, $x^2 + x^3 = o(x)$ при $x \to 0$, то $\beta = x + o(x)$ при $x \to 0$, а с другой стороны, $x^3 = o(x + x^2)$ при $x \to 0$, поэтому

$$\beta = x + x^2 + o(x + x^2), x \to 0.$$

В первом случае главной частью можно считать $\alpha = x$, во втором $\alpha = x + x^2$. Однако если задаваться определенным видом главной части, то при его разумном выборе можно добиться того, что главная часть указанного вида будет определена однозначно.

В частности справедлива следующая лемма.

ЛЕММА 5. *Пусть $X \subset \mathbf{R}, x_0 \in \mathbf{R}$ и x_0 – предельная точка множества X. Если функция β: $X \to \mathbf{R}$ обладает при $x \to x_0$ главной частью вида $A(x-x_0)^k, A \neq 0$, где A и k – постоянные, то среди всех главных частей такого вида она определяется единственным образом.*

Действительно, пусть при $x \to x_0$

$$\beta(x) = A(x - x_0)^k + o((x - x_0)^k), A \neq 0,$$

и

$$\beta(x) = A_1(x - x_0)^{k_1} + o((x - x_0)^{k_1}), A_1 \neq 0.$$

Тогда $\beta(x) \sim A(x-x_0)^k$ и $\beta(x) \sim A_1(x-x_0)^{k_1}$ при $x \to x_0, x \in X$. Поэтому $A(x - x_0)^k \sim A_1(x - x_0)^{k_1}, x \to x_0, x \in X$, т.е.

$$1 = \lim_{x \to x_0} \frac{A(x - x_0)^k}{A_1(x - x_0)^{k_1}} = \frac{A}{A_1} \lim_{x \to x_0} (x - x_0)^{k-k_1},$$

что справедливо лишь в случае $A = A_1$ и $k = k_1$.

Понятие главной части функции полезно при изучении бесконечно малых и бесконечно больших и с успехом используется при решении разнообразных задач математического анализа. Довольно часто удается бесконечно малую сложного аналитического вида заменить в окрестности данной точки с точностью до бесконечно малых более высокого порядка более простой (в каком-то смысле) функцией.Например, если $\beta(x)$ удается представить в виде $\beta(x) = A(x - x_0)^k + o((x - x_0)^k)$, то это означает, что с точностью до бесконечно малых более высокого порядка, чем $(x - x_0)^k$ при $x \to x_0$, бесконечно малая $\beta(x)$ ведет себя в окрестности точки x как степенна́я функция $A(x - x_0)^k$.

Покажем на примерах, как метод выделения главной части бесконечно малых применяется к вычислению пределов функций. При этом будем широко использовать полученные соотношения эквивалентности (8.26).

Пусть требуется найти предел (а значит, и доказать, что он существует)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1 + x + x^2) + \arcsin 3x - 5x^3}{\sin 2x + \operatorname{tg}^2 x + (e^x - 1)^5}.$$

Используя доказанную выше (см. соотношения (8.26)) эквивалентность $\ln(1+u) \sim u$ при $u \to 0$, имеем $\ln(1+x+x^2) \sim$ $\sim x + x^2$ при $x \to 0$, поэтому (см. теорему 1) $\ln(1 + x + x^2) =$ $= x + x^2 + o(x + x^2)$. Однако $o(x + x^2) = o(x)$ (почему?) и $x^2 = o(x)$ при $x \to 0$, следовательно,

$$\ln(1 + x + x^2) = x + o(x) \text{ при } x \to 0.$$

Далее, $\arcsin 3x \sim 3x$, поэтому

$$\arcsin 3x = 3x + o(3x) = 3x + o(x).$$

Очевидно также, что $5x^3 = o(x)$. Из асимптотического равенства $\sin 2x \sim 2x$ получаем

$$\sin 2x = 2x + o(2x) = 2x + o(x),$$

из $\operatorname{tg}^2 x \sim x^2$ будем иметь

$$\operatorname{tg}^2 x = x^2 + o(x^2) = o(x),$$

а из $(e^x - 1)^5 \sim x^5$, аналогично,

$$(e^x - 1)^5 = x^5 + o(x^5) = o(x).$$