PSI-3531 Aplicações de Filtragem Adaptativa

Experiência 4: Rastreamento

Nesta experiência vamos investigar como o algoritmo LMS reage quando o vetor de parâmetros desconhecido varia com o tempo. Para isto, vamos supor que os dados observados sejam relacionados por

$$d[n] = x[n]h_0[n] + x[n-1]h_1[n] + \cdots + x[n-M+1]h_{M-1}[n] + v[n],$$

em que os elementos $h_i[n]$ agora variam com o tempo, de acordo com os modelos

a) Caminho aleatório: este modelo é muito usado em teoria de filtragem adaptativa, pois é relativamente simples expandir os resultados teóricos vistos anteriormente. Neste modelo, supõe-se que cada um dos coeficientes $h_i[n]$ é modificado a cada instante por uma pequena perturbação aleatória:

$$h_i[n+1] = h_i[n] + q_i[n],$$

em que $q_i[n] \sim N(0, \sigma_q^2)$ são variáveis iid, independentes entre si, de $x[m]$ e de $v[m]$ para todo m, n. Supondo que $v[n]$ também seja independente de $x[m]$ para todo m, n e que o número de coeficientes do filtro adaptativo seja exatamente M, ou seja, que

$$w_{\rm o}[n] = \begin{bmatrix} h_0[n] \\ h_1[n] \\ \vdots \\ h_{M-1}[n] \end{bmatrix},$$

e definindo $\boldsymbol{\Delta w}[n] = \boldsymbol{w}_{\rm o}[n] - \boldsymbol{w}[n]$, pode-se mostrar que (veja que nas condições acima, $\sigma_{\rm o}^2 = \sigma_v^2$):

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}\{\boldsymbol{\Delta w}[n]\} \approx \mathbf{0},$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}\{e^2[n]\} \approx \sigma_v^2 + \frac{1}{2}\mu\sigma_v^2 \,\mathrm{Tr}(\boldsymbol{R}_x) + \frac{M\sigma_q^2}{2\mu},$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}\{\|\boldsymbol{\Delta w}\|^2\} \approx \frac{1}{2}\mu M\sigma_v^2 + \frac{1}{2\mu}\sigma_q^2 \,\mathrm{Tr}\{\boldsymbol{R}_x^{-1}\}.$$

b) O outro modelo para variação dos coeficientes que vamos testar é mais simples: assuma que todos os coeficientes $h_i[n]$ sejam iguais entre si, com

$$h_i[n] = \sin(\omega_0 n),$$

em que ω_0 é uma constante.

Para verificar o funcionamento do algoritmo, faça simulações com os parâmetros a seguir

1. Usando o modelo a), e supondo

(a) $x[n] = N(0,\sigma_x^2)$ iid com $\sigma_x^2 = 1$;

(b) $v[n] = N(0, \sigma_v^2)$, iid e independente de $x[n]$ com $\sigma_v^2 = 0{,}01$;

(c) $h_0[0] = 1$, $h_1[0] = 0{,}5$, use dois coeficientes para o vetor $\boldsymbol{W}[n]$.

(d) $\sigma_q^2 = 10^{-4}$,

estime experimentalmente as curvas de EMSE e MSD em regime em função do passo de adaptação (lembre-se que o EMSE é o MSE menos σ_0^2). Para escolher os valores de passo para usar, note que o modelo teórico prevê que haverá um passo para o qual o EMSE mínimo.

Compare os valores obtidos por simulação com os valores teóricos, usando a aproximação para passo pequeno usada anteriormente.

2. Repita o exercício anterior, mas agora defina o sinal de entrada $x[n]$ como sendo a saída de um filtro $G(z) = \sqrt{1-a^2}/(1-az^{-1})$, com $a = 0{,}9$, e com entrada um ruído branco $u[n]$ iid com distribuição $N(0,1)$.

3. Repita o exercício 1, mas agora usando o modelo b) para a variação dos coeficientes verdadeiros $h_i[n]$. Use $\omega_0 = 0{,}01\pi$ rad/amostra e $\omega_0 = 0{,}2\pi$ rad/amostra, e passo igual a 0,01. Não é necessário comparar com o modelo teórico neste caso.