

Relatório

# Experiência 1 - Filtros Adaptativos

PSI3531 - Processamento de Sinais Aplicado (2020)

Matheus Bordin Gomes - 9838028

Essa experiência consiste em três exercícios práticos relativos à temática de filtragem adaptativa. O primeiro exercício aborda eliminação de interferência em um sinal que se deseja medir. Já o segundo exercício trata de equalização adaptativa, para conseguir realizar o filtro inverso relativo a um canal de comunicação. Por fim, o terceiro exercício é sobre cancelamento de eco acústico.

## 1 - Eliminação de Interferências

a) A matriz de autocorrelação (R) do sinal  $u(n)$  é dada por:

$$R = E\{u(n)u(n)^t\} = E\left\{\begin{bmatrix} ru(0) & ru(1) \\ ru(1) & ru(0) \end{bmatrix}\right\} = E\left\{\begin{bmatrix} u(n)u(n) & u(n)u(n-1) \\ u(n-1)u(n) & u(n-1)u(n-1) \end{bmatrix}\right\}$$

Dessa forma, com auxílio da identidade trigonométrica indicada no enunciado, segue cálculo dos elementos da matriz R:

$$ru(0) = E\{u(n)u(n)\} = 5^2 * E\left\{\frac{1}{2} \cos(0) - \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2\pi n}{5} + 2\phi_u\right)\right\} = 25 * \frac{1}{2} = 12.5$$

$$ru(1) = E\{u(n)u(n-1)\} = 5^2 * E\left\{\frac{1}{2} \cos\left(\frac{2\pi}{10}\right) - \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2\pi(2n-1)}{10} + 2\phi_u\right)\right\} = 25 * 0.4045 = 10.1127$$

E a matriz de autocorrelação R do sinal u será:

$$R = \begin{bmatrix} 12.5 & 10.1127 \\ 10.1127 & 12.5 \end{bmatrix}$$

Assim, pode-se prosseguir com os cálculos. Em primeiro lugar, o vetor de coeficientes ótimos:  $w_o = R^{-1}p$ , onde p é o vetor de correlação cruzada entre o sinal u e o sinal desejada d. Segue o cálculo do vetor p:

$$p = E\{u(n)d(n)\} = E\left\{\begin{bmatrix} 5 \sin\left(\frac{2\pi n}{10} + \phi_u\right) [\sin\left(\frac{2\pi n}{10} + \frac{\pi}{6} + \phi_v\right) + \sigma_s] \\ 5 \sin\left(\frac{2\pi(n-1)}{10} + \phi_u\right) [\sin\left(\frac{2\pi n}{10} + \frac{\pi}{6} + \phi_v\right) + \sigma_s] \end{bmatrix}\right\} = E\left\{\begin{bmatrix} 2.1651 \\ 1.0168 \end{bmatrix}\right\}$$

Substituindo p na equação, o vetor de coeficientes ótimos será:

$$w_o = R^{-1}p = \begin{bmatrix} 0.3109 \\ -0.1701 \end{bmatrix}$$

Focando no erro quadrático mínimo da saída do filtro em relação ao sinal desejado, o qual é dado por  $J_{min} = \sigma_d^2 - p^t w_o$ . Pode-se notar que o erro quadrático será mínimo quando os coeficientes

do filtro forem os ideais e a saída do filtro for igual à interferência. Ou seja, o valor do erro quadrático mínimo é a variância do sinal que se deseja medir. Ou seja,  $J_{min} = \sigma_s = 0.01$ .

A resposta em frequência do filtro ótimo na frequência do sinal de interferência é:

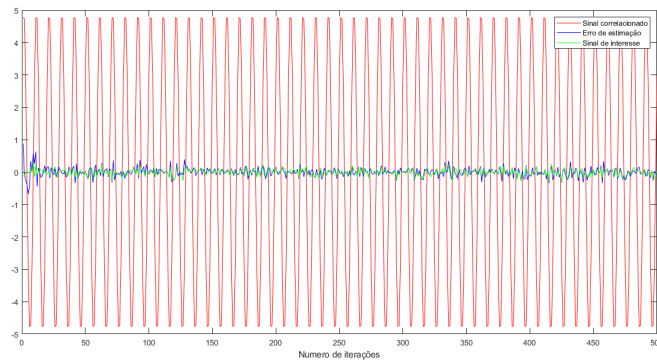
$$H(e^{j0.2\pi}) = 0.3109 - 0.1701 * e^{j0.2\pi} = 0.2001 \angle 29.9829^\circ \approx 0.2 \angle 30^\circ$$

O que é o esperado, já que é o inverso da amplitude do sinal de interferência  $x(n)$  com a mesma fase, mas negativa. De tal forma, o filtro cancelaria a interferência.

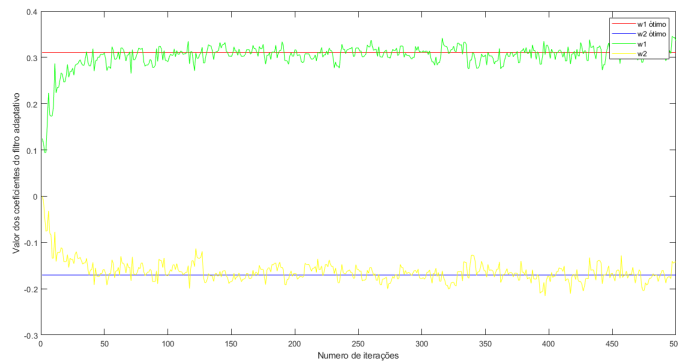
b) A faixa de valores teórica para o passo é:

$$0 < \mu < \frac{2}{\lambda_{max}} = 0.0884$$

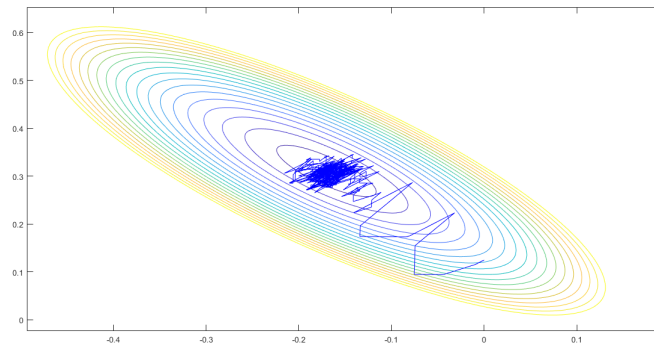
c) Os gráficos abaixo foram obtidos 500 iterações do algoritmo LMS com um passo  $\mu = 0.03$ .



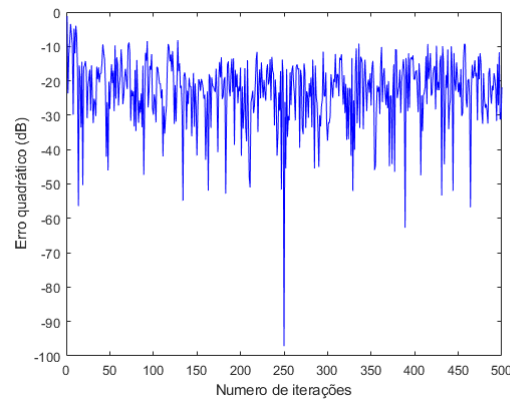
**Figura 1.** Sinais de entrada  $u(n)$ , de erro  $e(n)$  e que se deseja medir  $s(n)$ .



**Figura 2.** Coeficientes do filtro adaptativo ao longo das iterações em relação aos coeficientes ótimos.

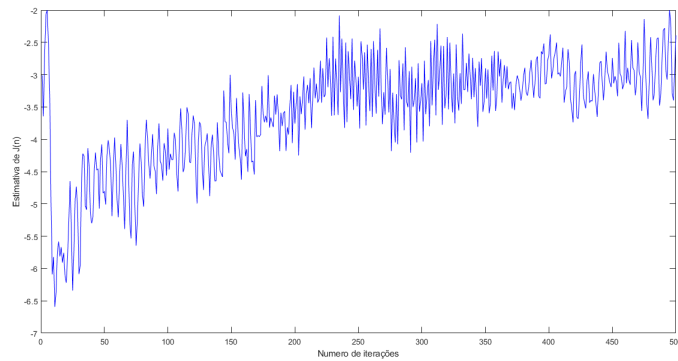


**Figura 3.** Trajetória dos coeficientes nas curvas de nível da superfície de erro.

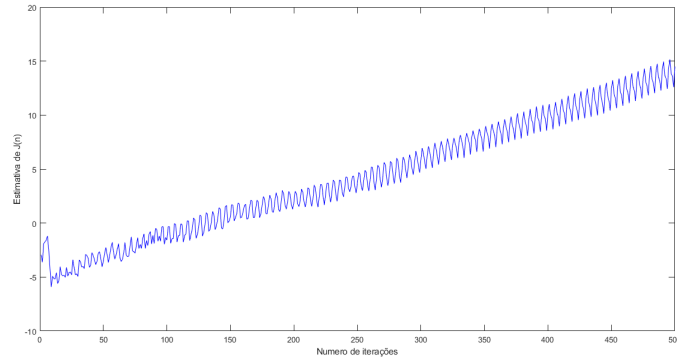


**Figura 4.** Curva de erro quadrático em dB.

- d) A faixa de valores que garante a convergência, determinada experimentalmente, é  $0 < \mu \leq 0.069$ . O valor máximo foi determinado pela análise de divergência ou não da média do erro quadrático de cem experimentos. Os resultados da estimativa de  $J(n)$  para  $\mu = 0.069$  e para  $\mu = 0.070$  podem ser vistos abaixo. O valor máximo experimental é menor do que o valor máximo teórico, pois o teórico é calculado assumindo sinal estacionário no sentido amplo e não utilizando um cálculo exato.



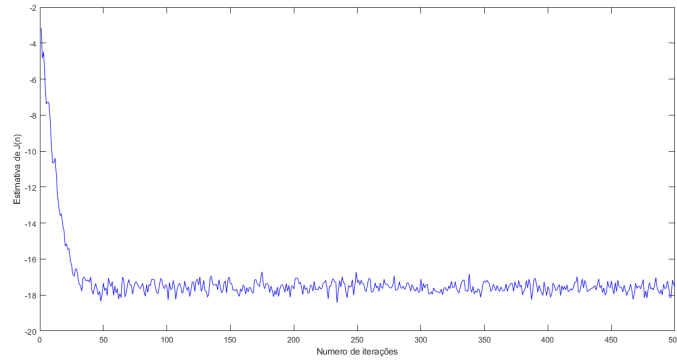
**Figura 5.** Estimativa de  $J(n)$  para  $\mu = 0.069$ .



**Figura 6.** Estimativa de  $J(n)$  para  $\mu = 0.070$ .

- e) Os cálculos a seguir foram feitos com base em quinhentas realizações do experimento, com um novo valor de  $\phi$  e um novo  $s(n)$  para cada realização.

O MSE foi calculado como a média dos últimos 10% dos valores de  $J(n)$  experimental. Isso resultou em  $MSE = 0.0174$ . Dessa forma, temos que  $EMSE = MSE - J_{min} = 0.0074$  e  $desajuste = 0.7388$ .



**Figura 7.** Estimativa de  $J(n)$  para  $\mu = 0.03$  e 500 realizações do experimento.

- f) A seguir estão as curvas de estimativa de  $J(n)$  para os passos  $\mu_1 = 0.01$ ,  $\mu_2 = 0.03$  e  $\mu_3 = 0.05$ . Ao se comparar os gráficos, é notável que quanto maior o passo utilizado, maior será a velocidade de convergência, porém maior será o erro cometido. E quanto menor o passo, menor será o erro, porém a velocidade de convergência também será menor. Assim, é preciso avaliar o compromisso entre velocidade e erro na escolha de um passo de acordo com a aplicação.

q	2.9	3.1	3.3	3.5
ru(0)	1.0963	1.1566	1.2264	1.3022
ru(1)	0.4388	0.5596	0.6729	0.7775
ru(2)	0.0481	0.0783	0.1132	0.1511
$\lambda_{max}$	2.0285	2.3751	2.7253	3.0697
$\lambda_{min}$	0.3329	0.2126	0.1246	0.0646
$\lambda_{max} / \lambda_{min}$	6.0934	11.1714	21.8795	47.5311

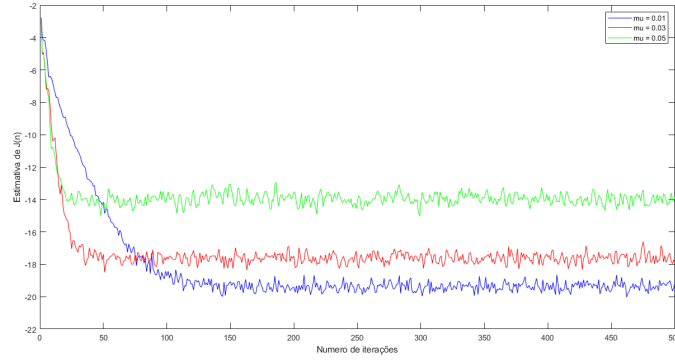


Figura 8. Comparação da estimativa de  $J(n)$  para os passos  $\mu_1 = 0.01$ ,  $\mu_2 = 0.03$  e  $\mu_3 = 0.05$ .

## 2 - Equalização Adaptativa

- a) Para preencher a tabela é necessário encontrar a matriz de autocorrelação do sinal  $u$ . Para isso, vamos considerar três amostras do sinal  $u$  nos instantes  $n$ ,  $n - 1$  e  $n - 2$ , para um  $q$  qualquer. Assim, temos que:

$$\begin{aligned}
 u(n) &= h_1 * a(n) + h_2 * a(n - 1) + h_3 * a(n - 2) + \eta(n) \\
 u(n - 1) &= h_1 * a(n - 1) + h_2 * a(n - 2) + h_3 * a(n - 3) + \eta(n - 1) \\
 u(n - 2) &= h_1 * a(n - 2) + h_2 * a(n - 3) + h_3 * a(n - 4) + \eta(n - 2) \\
 &\dots
 \end{aligned}$$

De tal forma podemos calcular a autocorrelação entre as amostras. É fácil notar de que a autocorrelação só será não nula entre amostras no mesmo sinal no mesmo instante de tempo. Como o modelo do canal só possui três coeficientes, amostras do sinal  $u$  com defasagem maior do que três amostras terão autocorrelação nula. Logo:

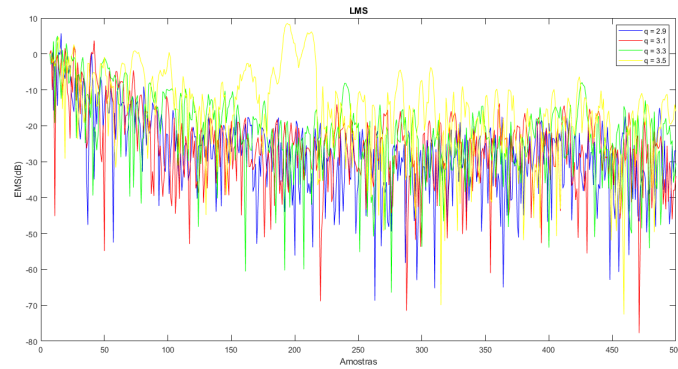
$$\begin{aligned}
 ru(0) &= E\{u^2(n)\} = h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 + \sigma_\eta^2 \\
 ru(1) &= E\{u(n)u(n - 1)\} = h_1h_2 + h_3h_2 \\
 ru(2) &= E\{u(n)u(n - 2)\} = h_1h_3 \\
 ru(3) &= E\{u(n)u(n - 3)\} = 0 \\
 &\dots
 \end{aligned}$$

De tal forma, é possível calcular as autocorrelações para cada valor de  $q$  e também achar os autovalores da matriz de autocorrelação com auxílio da função do MATLAB eig.m. Realizando as contas, encontra-se os seguintes valores:

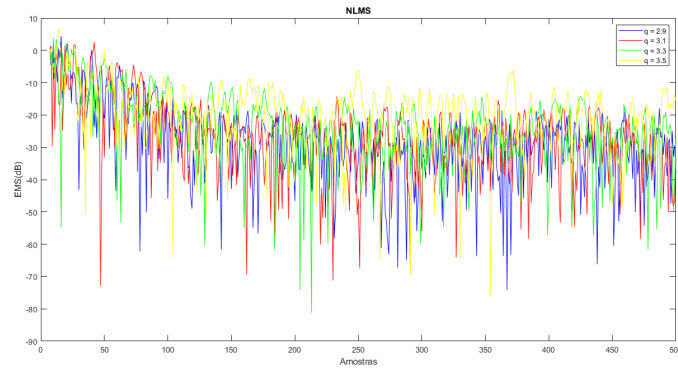
- b) Para que a resposta ao pulso unitário do equalizador seja simétrica, é preciso que o atraso seja exatamente a metade da soma do número de coeficientes dos filtros, subtraído de 1. Ou seja, o atraso será:

$$\eta_d = \frac{\text{ordem}(H(z)) - 1}{2} + \frac{\text{ordem}(\text{equalizador}) - 1}{2} = \frac{2 - 1}{2} + \frac{11 - 1}{2} = 6$$

- c) As curvas de erro quadrático médio (MSE) abaixo foram obtidas com os algoritmos LMS e NLMS, considerando  $M = 11$ ,  $q = 2.9$ ,  $\sigma_\eta^2 = 0.001$ ,  $\mu = 0.075$ ,  $\eta_d = 6$ ,  $\delta = 10^{-5}$  (para o NLMS), 500 iterações dos algoritmos e 100 experiências.

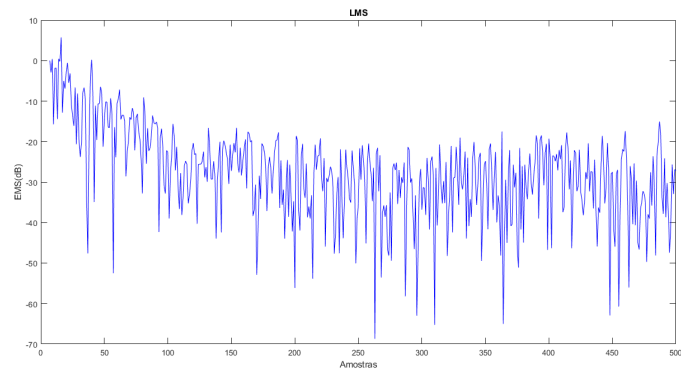


**Figura 9.** Curva de erro quadrático do algoritmo LMS.

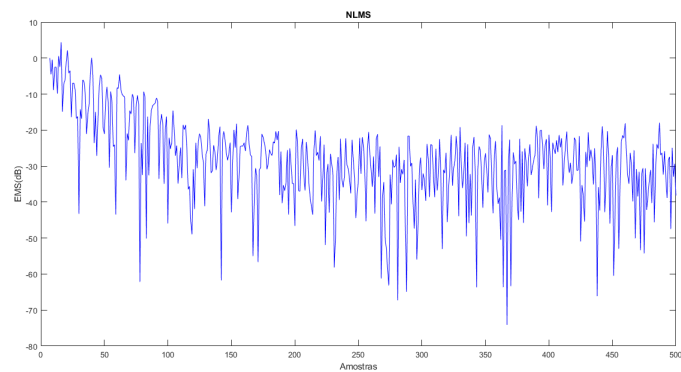


**Figura 10.** Curva de erro quadrático do algoritmo NLMS.

- d) Seguem os gráficos das curvas de erro quadrático médio (MSE), tanto para o LMS quanto para o NLMS, para os valores de  $q$  expressos na tabela acima.



**Figura 11.** Curvas de erro quadrático do algoritmo LMS para diversos valores de  $q$ .

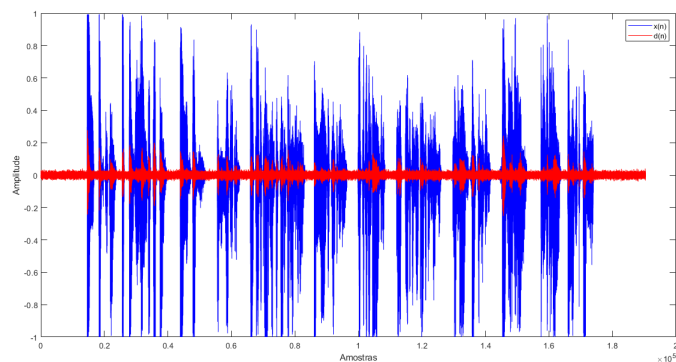


**Figura 12.** Curvas de erro quadrático do algoritmo NLMS para diversos valores de  $q$ .

- e) O algoritmo LMS possui uma convergência mais lenta, em relação ao algoritmo NLMS. Isso se explica pelo fato do passo do algoritmo NLMS ser adaptativo, que pode iniciar com passos maiores para uma convergência mais rápida. Já quanto ao patamar de erro, o algoritmo NLMS converge para um patamar de erro menor, já que ao chegar próximo à solução ótima, os passos são reduzidos. O algoritmo LMS, como possui um passo fixo, depois de uma determinada distância da solução ótima, não será possível se aproximar mais.

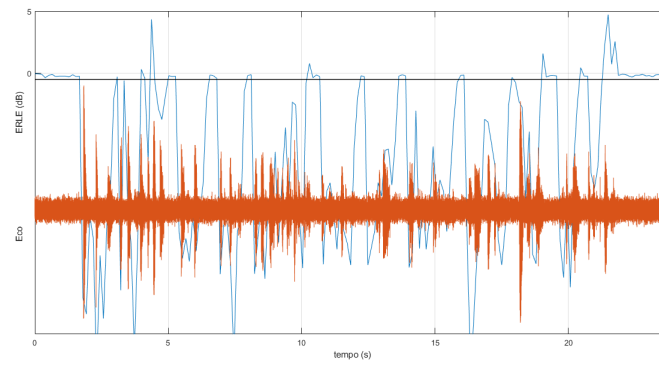
### 3 - Cancelamento de eco acústico

- a) Segue o gráfico dos sinais  $x(n)$  e  $d(n)$ , para o caso em que a interferência é um ruído branco.



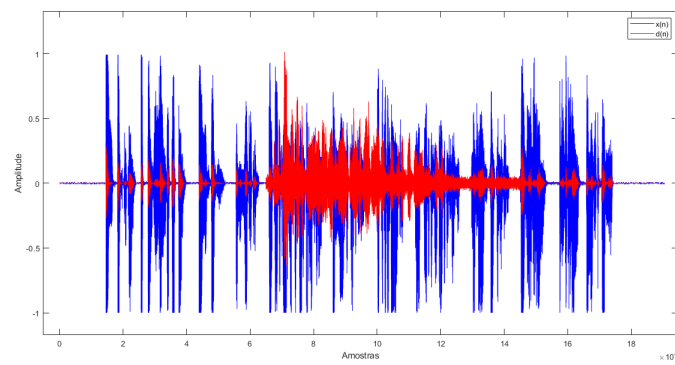
**Figura 13.** Gráficos dos sinais  $x(n)$  e  $d(n)$ .

b) Segue a curva ERLE para o sinal de erro do algoritmo NLMS.

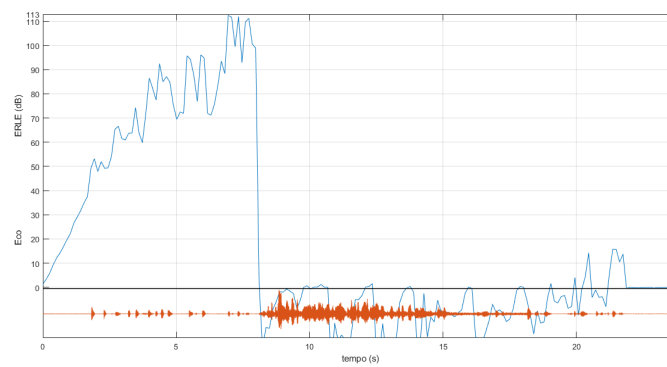


**Figura 14.** Curva ERLE.

c) Seguem as curvas dos sinais  $x(n)$  e  $d(n)$  e a curva ERLE para o caso com *double talk*.



**Figura 15.** Gráficos dos sinais  $x(n)$  e  $d(n)$  para caso com *double talk*.



**Figura 16.** Curva ERLE para caso com *double talk*.