

# Exercício Programa - Parte 1

## Um problema inverso para obtenção de distribuição de Temperatura



**Disciplina:** MAP3121 - Métodos Numéricos e Aplicações (2020)

**Grupo:**

Matheus Bordin Gomes - 9838028 - Turma 2

João Ferreira Cysne - 10774020 - Turma 3

# 1 Introdução

Esse trabalho tem como objetivo resolver o problema inverso para obtenção da distribuição de temperatura, a partir da resolução numérica da equação do calor. Nesse sentido, optou-se por utilizar a linguagem de programação C para implementar a resolução dos problemas propostos no enunciado desse trabalho. O programa entregue em anexo a esse relatório resolve as duas tarefas propostas, de forma que o usuário deve escolher qual tarefa e qual item ser executado. Além disso, o arquivo "*LEIAME.txt*" trás tanto uma explicação mais detalhada sobre o programa, como o passo a passo para utilizar o programa.

## 2 Primeira Tarefa

Para a primeira tarefa, foi necessário implementar o Método de Diferenças Finitas para resolver a equação de calor. Esse método, basicamente, discretiza a equação o calor e isola o termo relativo a temperatura no estado seguinte. Dessa forma, é possível calcular a temperatura em cada ponto com base na temperatura do próprio ponto e dos pontos vizinhos no instante anterior.

Dessa forma, o algoritmo percorre, para cada instante discretizado de tempo, todos os pontos anteriores da barra resolvendo a equação discretizada do calor. Nesse contexto, o erro de truncamento é definido como o erro cometido na resolução dessa equação em cada ponto. A saída impressa pelo programa entregue é o maior erro de truncamento cometido no penúltimo instante, visto que também é necessária a solução no instante seguinte para calcular esse erro no instante atual. Já o erro foi definido como  $e_{max} = \max\{|u_{exata}(i, M) - u_{calculada}(i, M)|\}$ .

### Exercício a)

Nesse exercício, foram propostos dois problemas, o primeiro como um teste para o método implementado - o qual será chamado de "Problema de teste" - e o segundo como o problema que obrigatoriamente deveria ser resolvido - o qual será chamado de "Problema obrigatório".

#### - Problema de teste

Nesse exercício, utilizamos  $T = 1$ , a fonte como  $f(t, x) = 10^2(x - 1) - 60xt + 20t$ , a condição inicial como  $u_0(x) = 0$  e, por fim, as condições de fronteira também nulas. Já a solução ideal nesse caso é  $u(t, x) = 10tx^2(x - 1)$ . Os valores de  $N$  e de  $\lambda$  foram variados para realizar comparações entre os resultados obtidos.

Vale notar que quando  $\lambda > 0.5$  o método irá divergir. Nos testes, quando utilizamos  $\lambda = 0.51$  e  $N = 10$ , o método convergiu e obteve como erro máximo  $e_{max} \approx 0.007499$ . Porém, ao aumentar o valor de  $N$  para  $N = 20$ , obtivemos um erro de  $e_{max} \approx 193.533966$ . E, ao aumentar mais uma vez o valor de  $N$  para  $N = 40$ , o erro obtido já foi de  $e_{max} \approx 3.289 * 10^{40}$ . Nos testes seguintes, o erro aumentou conforme o valor de  $N$  aumentou, até que ocorresse *overflow*. Dessa forma, é possível notar que para pequenos valores de  $N$ , mesmo com  $\lambda = 0.51$ , o método ainda converge. Porém, ao se aumentar o número de pontos, e consequentemente o número de contas realizadas, o método diverge. Por isso, não se deve utilizar  $\lambda > 0.5$ , visto que o método irá ficar instável.

Pode-se observar a evolução do erro para os testes feitos com  $N = 10, 20, 40, 80, 160$  e  $320$ , para  $\lambda = 0.5$  e  $0.25$ , na figura 1. Pode-se observar que o erro cai exponencialmente com o valor de  $N$ . Além disso, o erro reduz aproximadamente na mesma proporção que a redução valor de  $\lambda$ , que nesse caso foi de  $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{0.25}{0.5} = 0.5$ .

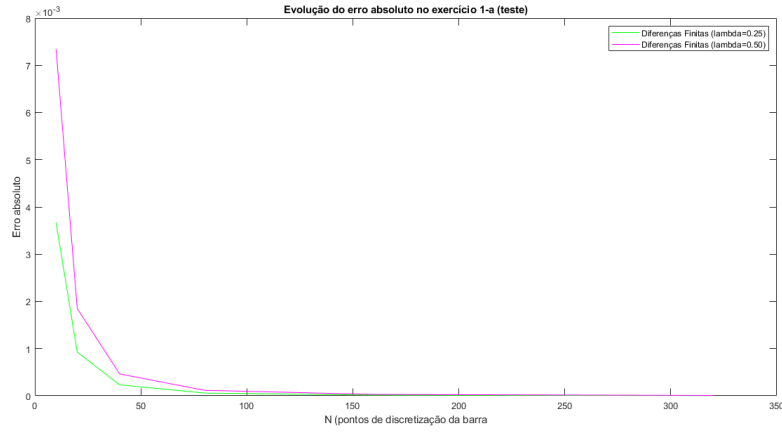


Figura 1: Gráfico da evolução do erro absoluto para o exercício a) (problema de teste).

Em relação ao erro de truncamento, podemos ver sua evolução sob as mesmas condições do teste anterior na figura 2. Como no caso anterior, o erro de truncamento também decai exponencialmente com o valor de N. E, também como no caso anterior, a redução do erro de truncamento segue aproximadamente a mesma proporção que a redução valor de  $\lambda$ , que nesse caso foi de  $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{0.25}{0.5} = 0.5$ .

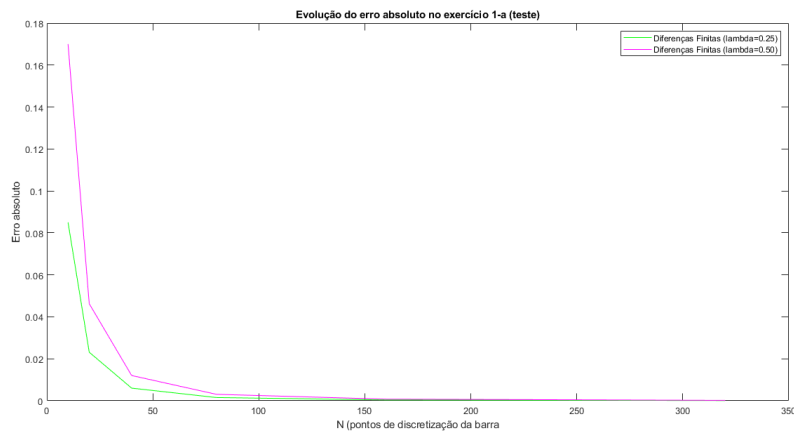


Figura 2: Gráfico da evolução do erro de truncamento para o exercício a) (problema de teste), utilizando o método de diferenças finitas.

Os gráficos mostrados nas figuras 3 e 4 apresentam a evolução da temperatura na barra, calculada com  $N = 320$  e  $\lambda = 0.25$ .

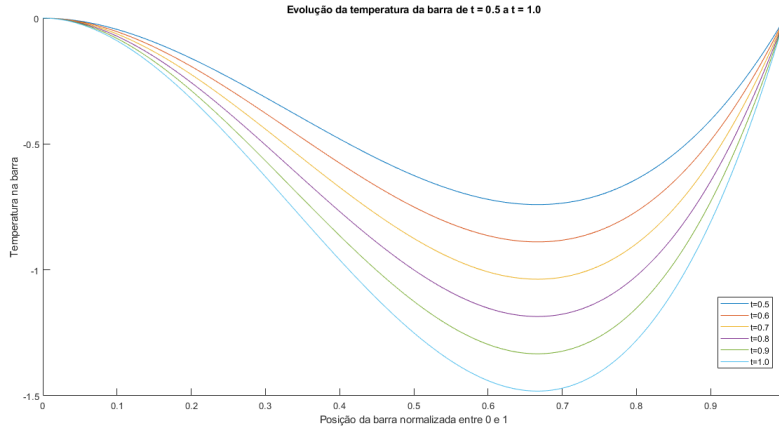


Figura 3: Gráfico de evolução de temperatura para o exercício a) (problema de teste), entre  $t=0.0$  e  $t=0.4$ .

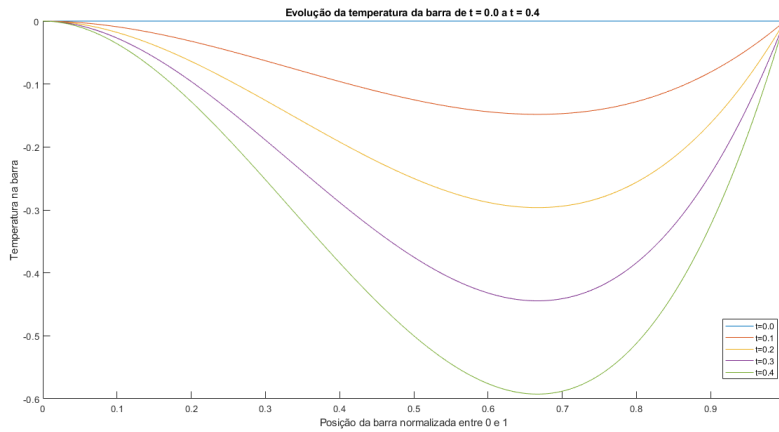


Figura 4: Gráfico de evolução de temperatura para o exercício a) (problema de teste), entre  $t=0.5$  e  $t=1.0$ .

### - Problema obrigatório

Para esse problema, como indicado no enunciado, usamos  $T = 1$ , a fonte como  $f(t, x) = 10\cos(10t)x^2(1-x)^2 - (1 + \sin(10t))(12x^2 - 12x + 2)$ , a solução exata dada por  $u(t, x) = (1 + \sin(10t))x^2(1-x)^2$ , condição inicial de  $u_0(x) = x^2(1-x)^2$  e as condições de fronteira nulas. Como no problema anterior, os valores de  $N$  e de  $\lambda$  foram variados para comparar os resultados obtidos.

O comportamento para  $\lambda > 0.5$  é o mesmo do problema teste, ou seja, instável. Para valores pequenos de  $N$  o método ainda converge, mas logo começa a divergir ao aumentar o valor de  $N$ . Por exemplo, nos testes realizados, para  $N = 10$  o método convergiu e para  $N \geq 20$  não. Para o problema obrigatório chegamos, então, na mesma conclusão: para valores de  $\lambda$  maiores que 0.5 o método de Diferenças Finitas não deve ser usado pois torna-se instável.

Observa-se no gráfico da figura 5 que o erro cai exponencialmente com o aumento do valor de  $N$ . O gráfico foi montado a partir dos testes feitos com os valores de  $N = 10, 20, 40, 80, 160$  e  $320$  e os valores de  $\lambda = 0.5$  e  $0.25$ . Podemos reparar também que a redução do erro de truncamento segue aproximadamente a proporção de redução do valor de  $\lambda$ , que nesse caso foi de  $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{0.5}{0.25} = 0.5$ .

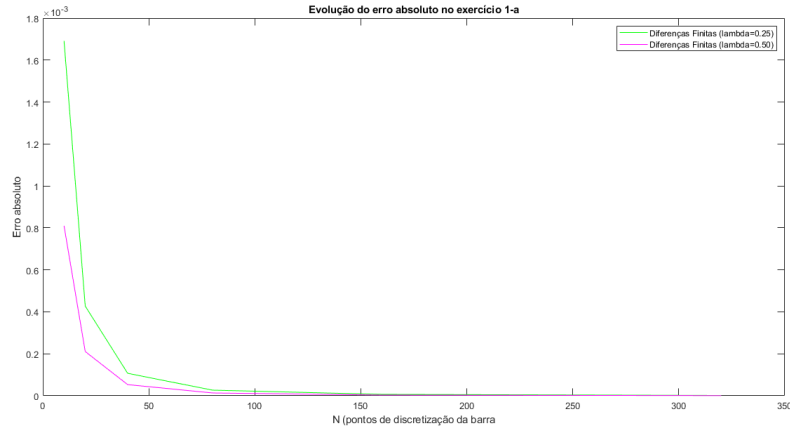


Figura 5: Gráfico da evolução do erro absoluto para o exercício a) (problema obrigatório) utilizando o método de diferenças finitas.

Analisando agora o erro de truncamento, que pode ser visto na figura 6, sob as mesmas condições do erro absoluto, reparamos que também decai exponencialmente com o aumento do valor de  $N$ . E reparamos também que novamente a redução do erro de truncamento segue aproximadamente a proporção de redução do valor de  $\lambda$ , nesse caso  $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{0.5}{0.25} = 0.5$ .

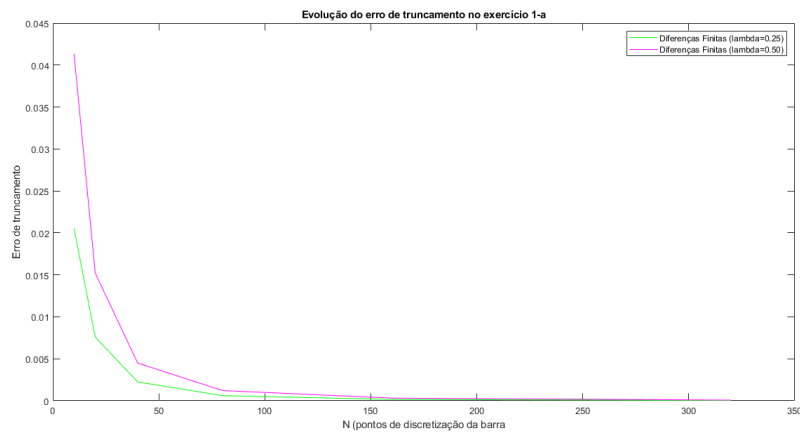


Figura 6: Gráfico da evolução do erro de truncamento para o exercício a) (problema obrigatório) utilizando o método de diferenças finitas.

Nas figuras 7 e 8, há dois gráficos da evolução de temperatura na barra, para  $N = 320$  e  $\lambda = 0.25$ .

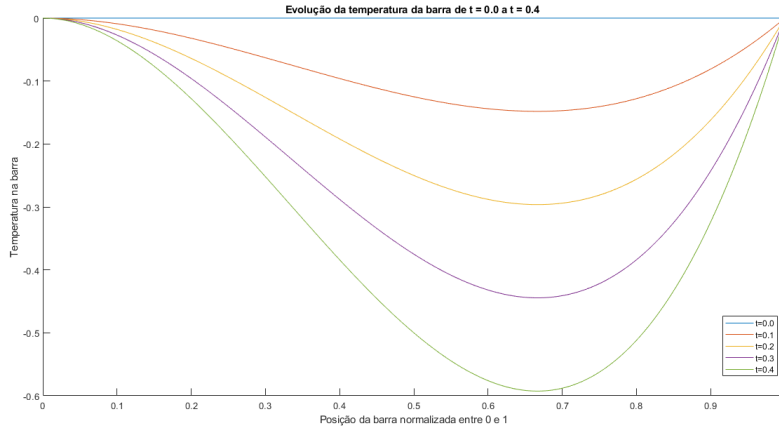


Figura 7: Gráfico de evolução de temperatura para o exercício a), entre  $t=0.0$  e  $t=0.4$ .

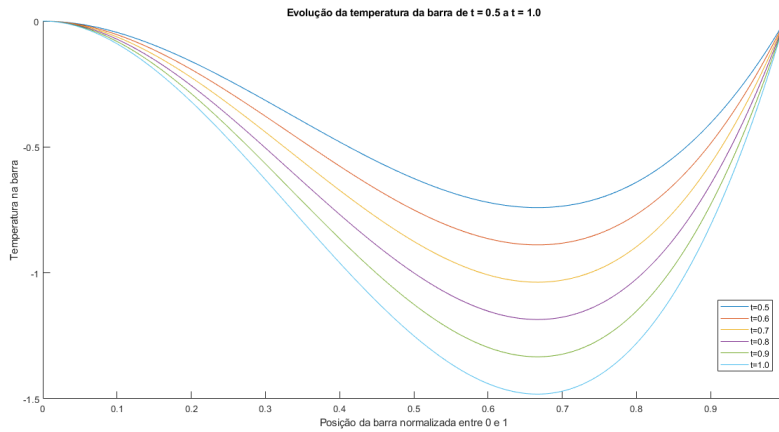


Figura 8: Gráfico de evolução de temperatura para o exercício a), entre  $t=0.5$  e  $t=1.0$ .

Por fim, é importante analisar a ordem de complexidade desse método. Temos que  $M = \text{round}(\frac{N^2}{\lambda})$ . E, a cada instante de tempo, a equação discretizada será realizada  $N$  vezes. Assim, essa equação terá que ser resolvida  $K = M * N = \frac{N^3}{\lambda}$  vezes. Portanto, se dobrarmos o número de discretizações no espaço, ou seja, de  $N$  para  $2N$ , será necessário resolver um adicional de  $\Delta K = \frac{7N^3}{\lambda}$  equações. Para  $N = 640$  e  $\lambda = 0.5$ , é necessário resolver  $K = 524.288 * 10^6$  de passos, sendo que cada passo é uma resolução da equação. E para  $N = 640$  e  $\lambda = 0.25$ , são necessários  $K = 1.0486 * 10^9$  passos. Se dobrarmos o número de passos para  $N = 1280$ , serão necessários  $K = 524.288 * 10^6 + \Delta K = 4.1943 * 10^9$  passos para  $\lambda = 0.5$  e  $K = 1.0486 * 10^9 + \Delta K = 8.3886 * 10^9$  passos para  $\lambda = 0.25$ . Dessa forma, esse método passa a ser computacionalmente inviável para valor altos valores de  $N$ . Nota-se que o valor de  $N$  considera apenas os  $N$  pontos internos da barra e o valor de  $M$  considera desconsidera o instante inicial, visto que já temos a solução nas fronteiras e a condição inicial.

### Exercício b)

Para esse exercício, foi necessário determinar as funções  $u_0(x)$ ,  $g_1(t)$ ,  $g_2(t)$  e  $f(t, x)$  de forma que a solução exata fosse dada por  $u(t, x) = e^{t-x} \cos(5tx)$ . Em sequência, realizou-se novamente os experimentos do exercício a).

As funções  $u_0(x)$ ,  $g_1(t)$  e  $g_2(t)$  podem ser obtidas facilmente da solução exata. Basta calcular a solução exata nos pontos  $(0, x)$ ,  $(t, 0)$  e  $(t, 1)$ , respectivamente. Dessa forma, obteve-se:

$$u_0(x) = u(0, x) = e^{-x}$$

$$g_1(t) = u(t, 0) = e^t$$

$$g_2(t) = u(t, 1) = e^{t-1} \cos(5t)$$

Para o cálculo de  $f(t, x)$  usaremos a equação 1:

$$u_t(t, x) = u_{xx}(t, x) + f(t, x) \quad \text{em } [0, T] \times [0, 1] \quad (1)$$

Tomamos a primeira derivada parcial de  $u(t, x)$  em relação a  $t$  (equação 2) e a segunda derivada parcial em relação a  $x$ , equações 2 e 3, respectivamente. De forma a obter:

$$u_t(t, x) = e^{t-x} (\cos(5tx) - 5x \sin(5tx)) \quad (2)$$

$$u_{xx}(t, x) = e^{t-x} ((1 - 25t^2) \cos(5tx) + 10t \sin(5tx)) \quad (3)$$

Por último, usamos as equações 2 e 3 na equação 1 e obtemos a função  $f(t, x)$ :

$$f(t, x) = 5e^{t-x} (5t^2 \cos(5tx) - (2t + x) \sin(5tx))$$

A seguir está a análise dos testes propostos no item *a*), refeitos com as funções encontradas anteriormente nesse item. Podemos analisar o erro absoluto e o erro de truncamento para esse exercício nas figuras figura 9 e figura 10, respectivamente. Observa-se que seguem a mesma tendência de decaimento exponencial com o valor de  $N$ . Porém, apenas o erro de truncamento teve seu valor reduzido na mesma proporção que a redução de  $\lambda$ , ou seja 0.5. O erro absoluto por sua vez, foi reduzido por um fator de  $red \approx 0.78958$  - em média, para um fator de redução de  $\lambda$  igual a 0.5.

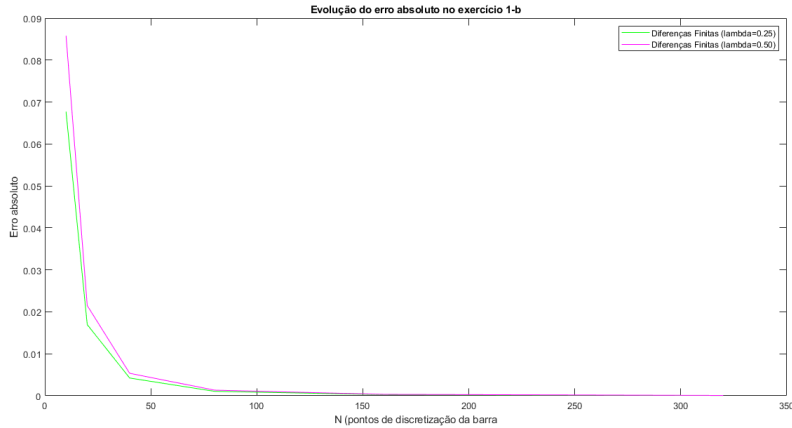


Figura 9: Gráfico da evolução do erro absoluto para o exercício b).

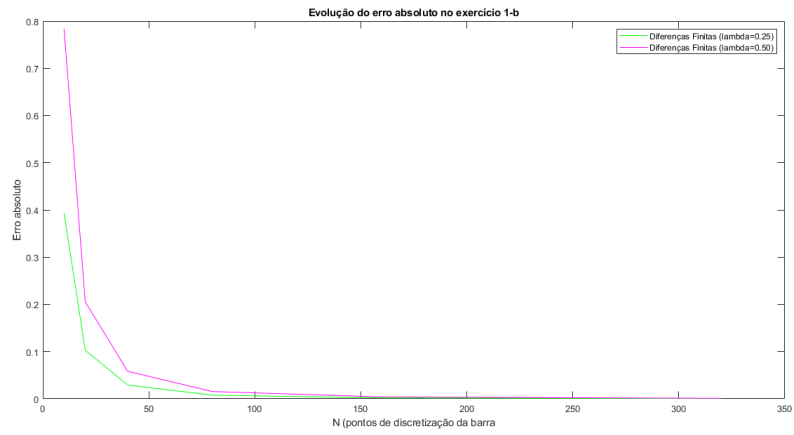


Figura 10: Gráfico da evolução do erro de truncamento para o exercício b) utilizando o método de diferenças finitas.

Por fim, foram gerados dois gráficos com a evolução da temperatura na barra, disponíveis nas figuras 11 e 12, gerados com  $N = 320$  e  $\lambda = 0.25$ .

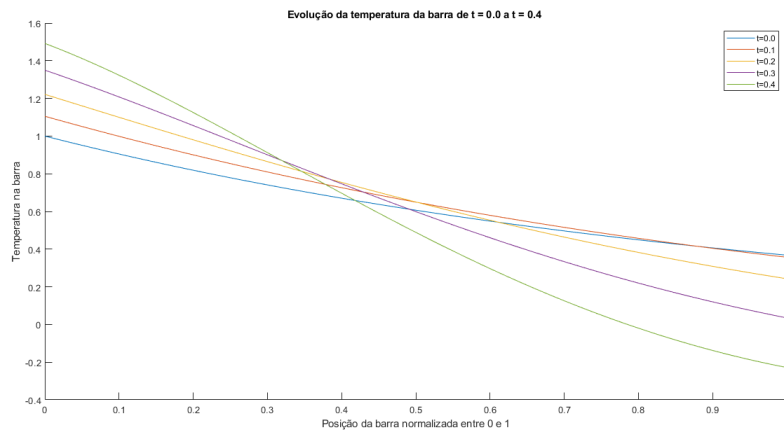


Figura 11: Gráfico de evolução de temperatura para o exercício b), entre  $t=0.0$  e  $t=0.4$ .

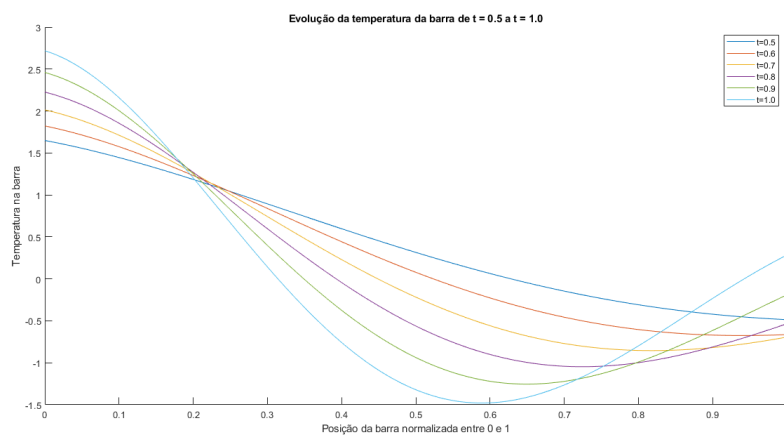


Figura 12: Gráfico de evolução de temperatura para o exercício b), entre  $t=0.5$  e  $t=1.0$ .



### Exercício c)

Nesse exercício, foi necessário implementar uma fonte pontual localizada num ponto  $p = 0.25$ , com intensidade variando ao longo do tempo dada por  $r(t) = 10000 \cdot (1 - 2t^2)$ . O método utilizado para reproduzir o efeito de uma fonte pontuada foi criar um intervalo de pontos de comprimento  $h = \Delta x$  com intensidade  $int = \frac{r(t)}{h}$ . Dessa maneira, os parâmetros utilizados foram:

- $T = 1$ ;
- Condição inicial nula ( $u_0(x) = 0$ );
- Condições de fronteiras nulas ( $g_1(t) = g_2(t) = 0$ );
- $g_h(x) = \frac{1}{h}$ , se  $\frac{p-h}{2} \leq x \leq \frac{p+h}{2}$  e  $g_h(x) = 0$  caso contrário;
- $f(t, x) = r(t)g_h(x)$ , com  $h = \Delta x$

Esse exercício não possui uma solução analítica, ou seja, não temos a equação da solução exata. É importante notar que, por conta do modelo adotado para representar a fonte pontual, pode-se obter uma solução não tão precisa, pois os pontos que representam a fonte podem estar muito espaçados. Dessa forma, gerou-se os gráficos da solução obtida numericamente para  $N = 320$  e  $\lambda = 0.25$ , que podem ser vistos nas figuras 13 e 14. A título de comparação, também foram gerados os gráfico para a solução obtida numericamente para  $N = 10$  e  $\lambda = 0.5$ , que podem ser vistos nas figuras 15 e 16.

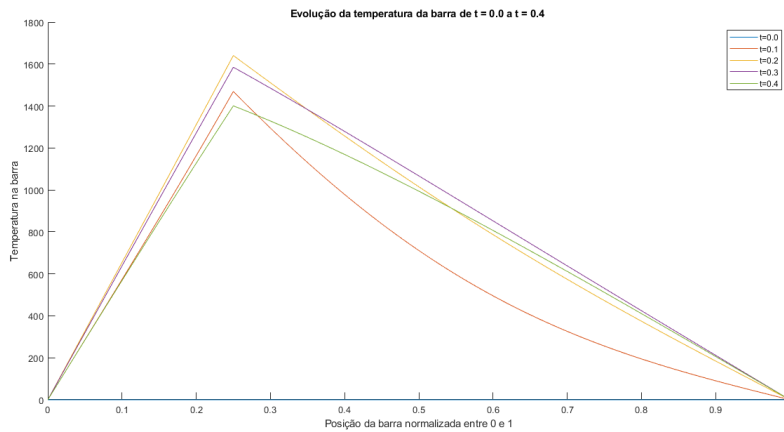


Figura 13: Gráfico de evolução de temperatura para o exercício c) para  $N = 320$  e  $\lambda = 0.25$ , entre  $t=0.0$  e  $t=0.4$ .

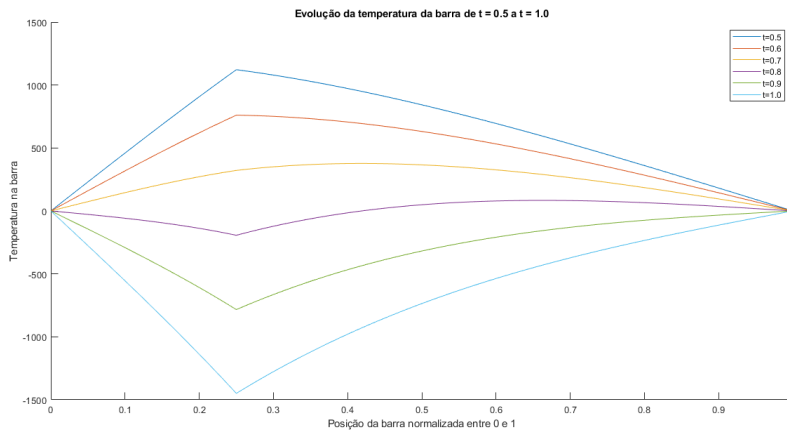


Figura 14: Gráfico de evolução de temperatura para o exercício c) para  $N = 320$  e  $\lambda = 0.25$ , entre  $t=0.5$  e  $t=1.0$ .

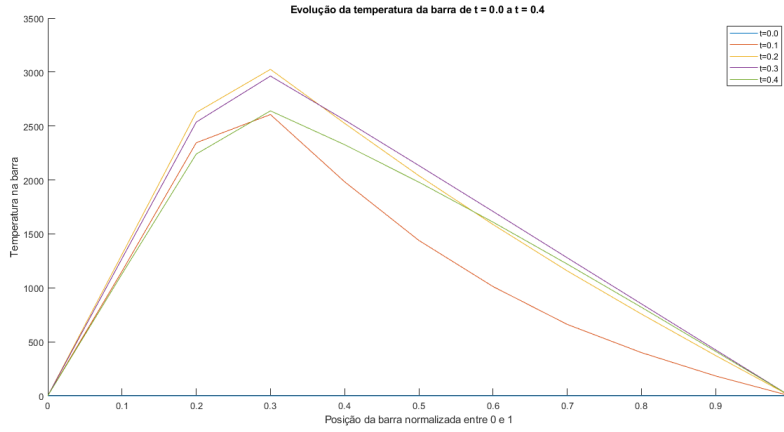


Figura 15: Gráfico de evolução de temperatura para o exercício c) para  $N = 10$  e  $\lambda = 0.5$ , entre  $t=0.0$  e  $t=0.4$ .

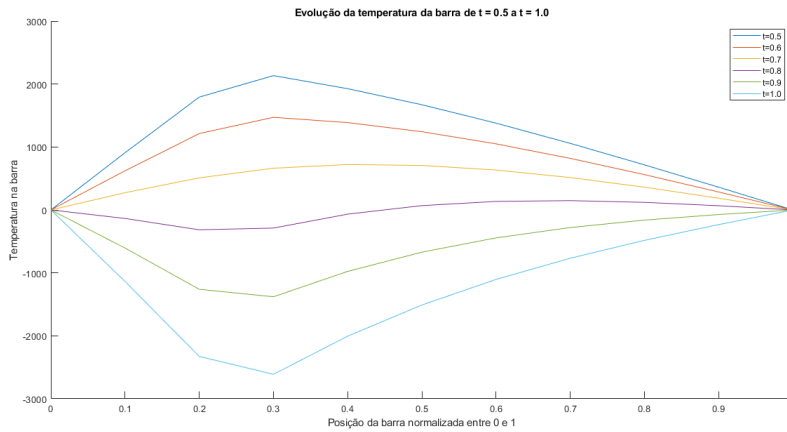


Figura 16: Gráfico de evolução de temperatura para o exercício c) para  $N = 10$  e  $\lambda = 0.5$ , entre  $t=0.5$  e  $t=1.0$ .

### 3 Segunda Tarefa

Nessa tarefa, foram implementados mais dois métodos para resolver o problema da distribuição de temperatura: o método de Euler implícito e o método de Crank-Nicolson. A maior vantagem desses métodos é que eles são incondicionalmente estáveis. Além disso, o método de Crank-Nicolson possui convergência de ordem 2 tanto em  $\Delta x$  e em  $\Delta t$ .

Esses métodos exigem a resolução de um sistema tridiagonal simétrico. Para isso, foi implementada a decomposição  $LDL^t$ , para que o sistema resolvido passasse de  $Ax = b$  para  $LDL^t x = b$ , que pode ser resolvido muito mais facilmente.

Os itens a seguir trazem detalhes sobre a implementação da resolução do sistema tridiagonal simétrico e sobre os dois métodos aqui discutidos. Além disso, esses métodos foram utilizados para refazer os exercícios propostos na primeira tarefa e realizar comparações entre os três métodos implementados.

#### Exercício a)

Tanto no método de Euler implícito quanto o método de Crank-Nicolson, há necessidade da resolução de um sistema tridiagonal simétrico. Para isso, foi implementada uma rotina de decomposição  $LDL^t$  da matriz tridiagonal simétrica em questão. Essa rotina foi implementada de maneira otimizada, para que as matrizes  $L$  e  $D$  fossem armazenadas em um vetor cada, de tamanho  $N-1$ , respectiva-

mente. Já a matriz  $A$  foi implementada em uma matriz  $2 \times N-1$ . Dessa forma, tanto a quantidade de memória necessária durante os cálculos como a quantidade de operações realizadas foram reduzidas. Para adaptar o algoritmo, as contas foram simplificadas para eliminar *loops* desnecessários com a solução dos vetores, além de contas que resultariam em zero para uma matriz tridiagonal simétrica.

Os passos da decomposição  $LDL^t$  implementada podem ser vistos no algoritmo 1.

---

**Algorithm 1:** Decomposição  $LDL^t$

---

```

L = zeros(N-1,1);
D = zeros(N-1,1);
for  $i$  from 0 to  $N-1$  do
     $D(i) = A(0, i) - L(i)^2 * D(i - 1);$ 
    if  $(i+1) < N$  then
         $L(i + 1) = A(1, i + 1)/D(i);$ 
    end
end

```

---

Por fim, o algoritmo utilizado que foi utilizado para realizar a resolução do sistema do tipo  $LDL^t x = b$  pode ser visto no algoritmo 2.

---

**Algorithm 2:** Resolução do sistema  $LDL^t x = b$

---

```

x = zeros(N-1,1);
y = zeros(N-1,1);
z = zeros(N-1,1);
 $y(0)=b(0);$ 
for  $i$  from 1 to  $N-1$  do
     $y(i) = b(i) - L(i) * y(i - 1);$ 
end
for  $i$  from 0 to  $N-1$  do
     $z(i) = y(i)/D(i);$ 
end
 $x(N-1)=z(N-1);$ 
for  $i$  from  $N-2$  to 0 do
     $x(i) = z(i) - L(i + 1) * x(i + 1);$ 
end

```

---

### Exercício b)

O método de Euler implícito foi implementado da forma mostrada no enunciado, assim como o cálculo para o erro de truncamento. Além disso, como é pedido que seja utilizado  $\Delta t = \Delta x$  e temos que  $T = 1$  em todos os exercícios, foi utilizado  $M = N$  nesse método, tal que o  $N$  pode ser escolhido pelo usuário.

A cada instante de tempo, é necessário resolver um sistema de equações para achar as temperaturas nos pontos da barra. Para isso, a matriz  $A$  é montada previamente uma única vez, e em sequência, a cada instante de tempo é montada a matriz  $b$  e resolve-se o sistema de equações.

Por fim, esse método apresenta a vantagem de ser incondicionalmente convergente. Assim, possui uma eficiência computacional superior em relação ao método de diferenças finitas, visto que pode resolver o problema da distribuição de calor em menos instantes de tempo para um determinado número de pontos  $N$  da barra e ainda assim convergir para a solução exata.

### Exercício c)

O método de Crank-Nicolson possui a grande vantagem de ter convergência de ordem 2 tanto em  $\Delta x$  como em  $\Delta t$ . Nesse método, a cada instante de tempo, é necessário resolver o seguinte sistema de equações para achar as temperaturas nos pontos da barra  $Ax = b$ , tal que:

$$A = \begin{bmatrix} 1 + \lambda & -\frac{\lambda}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{\lambda}{2} & 1 + \lambda & -\frac{\lambda}{2} & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -\frac{\lambda}{2} & 1 + \lambda & -\frac{\lambda}{2} \\ 0 & \cdots & 0 & -\frac{\lambda}{2} & 1 + \lambda \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} u_1^{k+1} \\ u_2^{k+1} \\ \vdots \\ u_{N-2}^{k+1} \\ u_{N-1}^{k+1} \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} u_1^k + \frac{\lambda}{2}(g_1(t_k) - 2u_1^k + u_2^k) + \frac{\Delta t}{2}(f(x_1, t_k) + f(x_1, t_{k+1})) + \frac{\lambda}{2}g_1(t_{k+1}) \\ u_2^k + \frac{\lambda}{2}(u_1^k - 2u_2^k + u_3^k) + \frac{\Delta t}{2}(f(x_2, t_k) + f(x_2, t_{k+1})) \\ \vdots \\ u_{N-2}^k + \frac{\lambda}{2}(u_{N-3}^k - 2u_{N-2}^k + u_{N-1}^k) + \frac{\Delta t}{2}(f(x_{N-2}, t_k) + f(x_{N-2}, t_{k+1})) \\ u_{N-1}^k + \frac{\lambda}{2}(u_{N-2}^k - 2u_{N-1}^k + g_2(t_k)) + \frac{\Delta t}{2}(f(x_{N-1}, t_k) + f(x_{N-1}, t_{k+1})) + \frac{\lambda}{2}g_2(t_{k+1}) \end{bmatrix}$$

Além disso, o erro de truncamento pode ser facilmente obtido da expressão (35) dada no enunciado desse Exercício Programa. Esse erro será o resultado pela subtração do lado esquerdo da equação pelo lado direito, ou ao contrário. Ou seja, há um erro na resolução dessa equação devido ao truncamento. Dessa forma, o erro de truncamento será dado por:

$$\tau(\Delta t, \Delta x) = \frac{2(u_i^{k+1} - u_i^k)}{\Delta t} - \frac{(u_{i-1}^{k+1} - 2u_i^{k+1} + u_{i+1}^{k+1}) + (u_{i-1}^k - 2u_i^k + u_{i+1}^k)}{\Delta x^2} - (f(x_i, t_k) + f(x_i, t_{k+1}))$$

A resolução dos exercícios propostos na Primeira Tarefa com esse método, em conjunto com a comparação dos resultados obtidos entre os três métodos, está disponível no item a seguir. Constatase aqui que é pedido que seja utilizado  $\Delta t = \Delta x$  e temos que  $T = 1$  em todos os exercícios, foi utilizado  $M = N$  nesse método, tal que o  $N$  pode ser escolhido pelo usuário.

### Primeira Tarefa com os novos métodos

Nos itens seguintes, foram resolvidos os exercícios propostos na Primeira Tarefa tanto com o método de Euler implícito como com o método de Crank-Nicolson. Além disso, são apresentadas comparações entre os resultados obtidos entre esses dois métodos e os resultados obtidos para o método de diferenças finitas.

### Exercício a) (Problema de teste)

Nesse exercício, como feito na Primeira Tarefa, utilizamos  $T = 1$ , a fonte como  $f(t, x) = 10^2(x - 1) - 60xt + 20t$ , a condição inicial como  $u_0(x) = 0$  e, por fim, as condições de fronteira também nulas. Já a solução ideal nesse caso é  $u(t, x) = 10tx^2(x - 1)$ . Os valores de  $N$  foram variados para realizar comparações entre os resultados obtidos. O valor de  $M$  foi escolhido como  $M = N$ , visto que foi pedido que se utilizasse  $\Delta t = \Delta x$  e  $T = 1$ . Como os métodos de Euler implícito e Crank-Nicolson são incondicionalmente convergentes, o resultado dessa escolha é um número muito menor de operações a serem realizadas. Assim, nesses métodos, não há a restrição de  $\lambda > 0.5$ , como no método de diferenças-finitas.

Pode-se observar a comparação da evolução do erro entre os três métodos implementados para  $N = 10, 20, 40, 80, 160$  e  $320$  na figura 17. Nesse caso, o erro para os métodos implementados na segunda

tarefa foi nulo, com a precisão utilizada. Ou seja, esses métodos obtiveram uma convergência muito mais rápida do que o método de diferenças finitas, além terem um custo computacional menor.

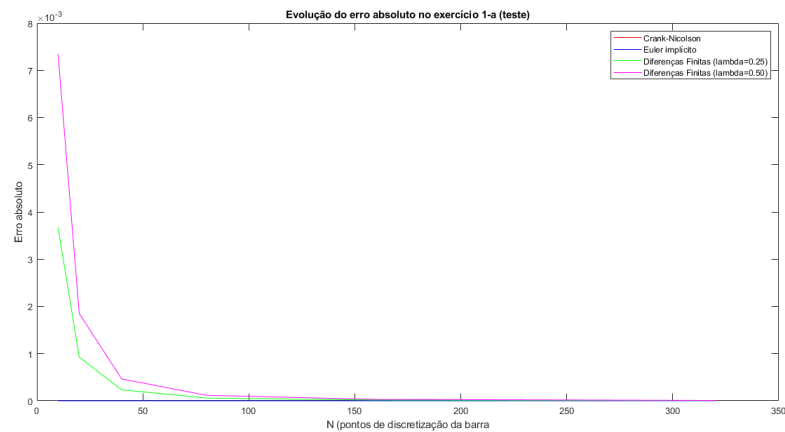


Figura 17: Gráfico da evolução do erro absoluto para o exercício a) (problema de teste), comparando os três métodos utilizados.

Quanto ao erro de truncamento, pode-se ver a comparação da sua evolução entre os diferentes métodos implementados na figura 18. Já a figura 19 mostra a evolução do erro de truncamento dos métodos de Euler implícito e de Crank-Nicolson. É interessante notar que o erro de truncamento aumenta com o aumento do valor de N. Isso se deve ao fato de que o aumento do número de N implica no aumento do número de contas, aumentando também o erro de arredondamento.

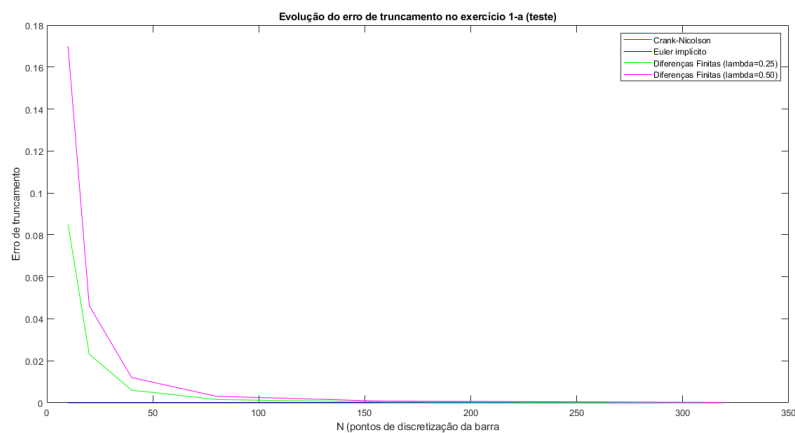


Figura 18: Gráfico da evolução do erro de truncamento para o exercício a) (problema de teste), comparando os três métodos implementados.

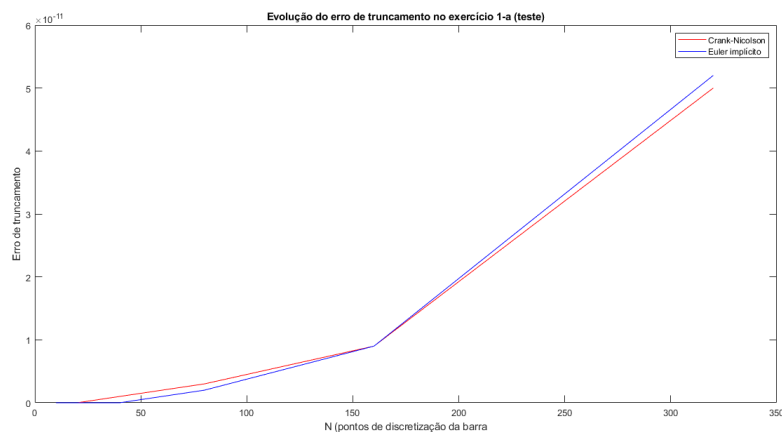


Figura 19: Gráfico da evolução do erro de truncamento para o exercício a) (problema de teste), utilizando o método de Euler implícito e o método de Crank-Nicolson.

Por fim, os gráficos mostrados nas figuras 20 e 21 apresentam a evolução da temperatura na barra, obtida com o método de Euler implícito com  $N = 320$ . Enquanto as figuras 22 e 23 apresentam os resultados obtidos com o método de Crank-Nicolson para  $N = 320$ .

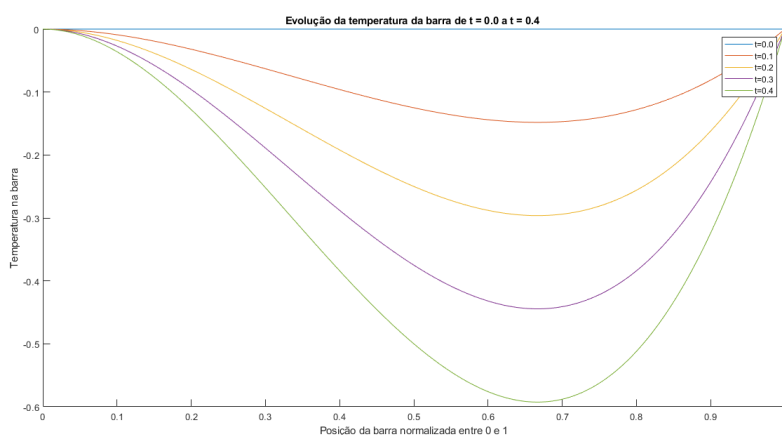


Figura 20: Gráfico de evolução de temperatura para o exercício a) (problema teste) para o método Euler implícito, entre  $t=0.0$  e  $t=0.4$

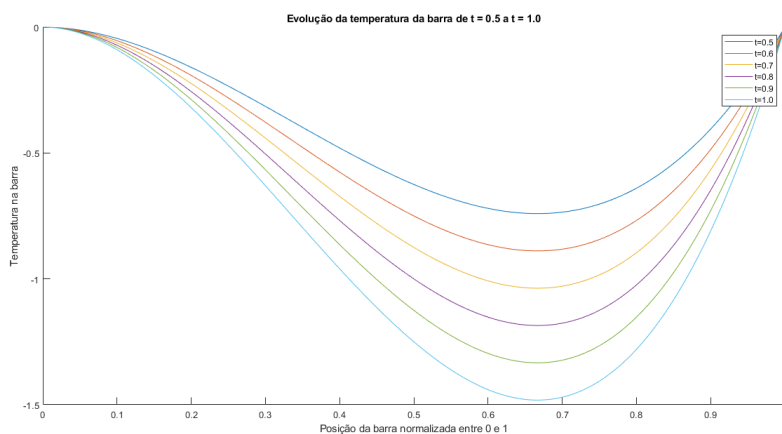


Figura 21: Gráfico de evolução de temperatura para o exercício a) (problema teste) para o método Euler implícito, entre  $t=0.5$  e  $t=1.0$

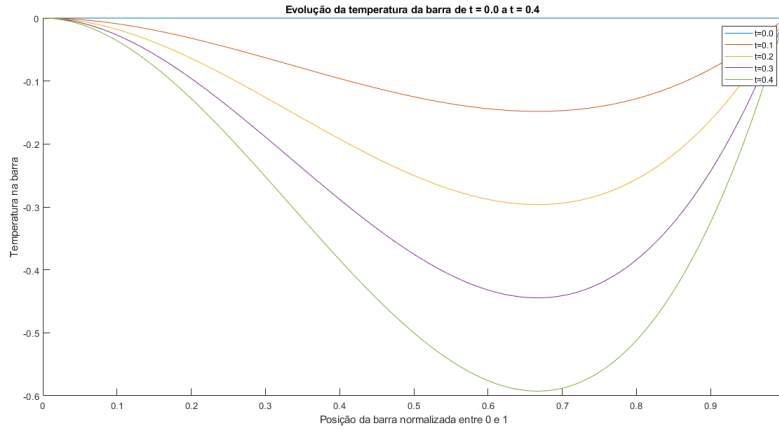


Figura 22: Gráfico de evolução de temperatura para o exercício a) (problema teste) para o método de Crank-Nicolson, entre  $t=0.0$  e  $t=0.4$

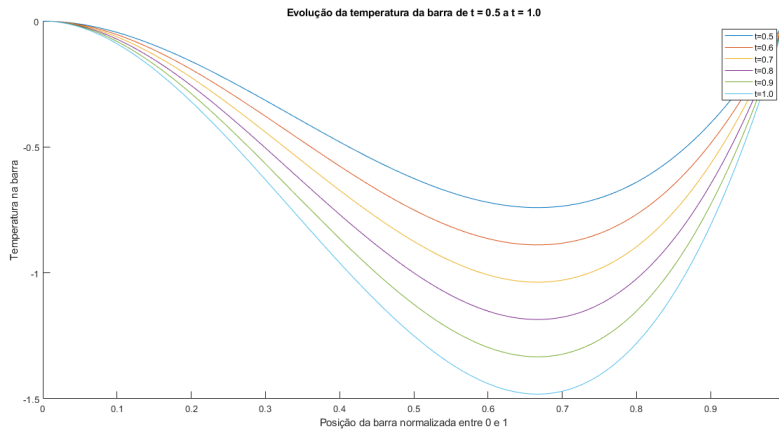


Figura 23: Gráfico de evolução de temperatura para o exercício a) (problema teste) para o método de Crank-Nicolson, entre  $t=0.5$  e  $t=1.0$

### Exercício a) (Problema obrigatório)

O problema obrigatório também foi feito como na Primeira Tarefa, utilizamos  $T = 1$ , a fonte como  $f(t, x) = 10\cos(10t)x^2(1-x)^2 - (1 + \sin(10t))(12x^2 - 12x + 2)$ , a solução exata dada por  $u(t, x) = (1 + \sin(10t))x^2(1-x)^2$ , condição inicial de  $u_0(x) = x^2(1-x)^2$  e as condições de fronteira nulas. Os valores de  $N$  foram variados para realizar comparações entre os resultados obtidos. Como no problema teste para a Segunda Tarefa, o valor de  $M$  foi atribuído como  $M = N$ .

Pode-se observar a comparação da evolução do erro entre os três métodos implementados para  $N = 10, 20, 40, 80, 160$  e  $320$  na figura 24. Neste caso, para valores pequenos de  $N$ , os erros para os métodos implementados na segunda tarefa deram maiores que os erros da primeira tarefa. O método de Crank-Nicolson converge rapidamente para zero, porém não tão rápido quanto o método de diferenças finitas, enquanto o método de Euler implícito demora bem mais para convergir, pode-se observar no gráfico que para valores de  $N = 300$ , ele ainda não convergiu. Apesar disso, os métodos dessa segunda tarefa continuam requerindo menos custo computacional.

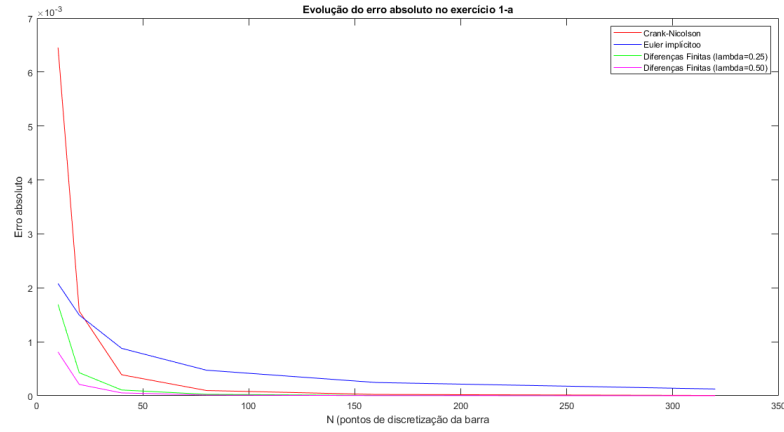


Figura 24: Gráfico da evolução do erro absoluto para o exercício a) (problema obrigatório), comparando os três métodos utilizados.

Quanto ao erro de truncamento, pode-se ver a comparação da sua evolução entre os diferentes métodos implementados na figura 25. Para os métodos implementados na segunda tarefa, o erro de truncamento foi nulo.

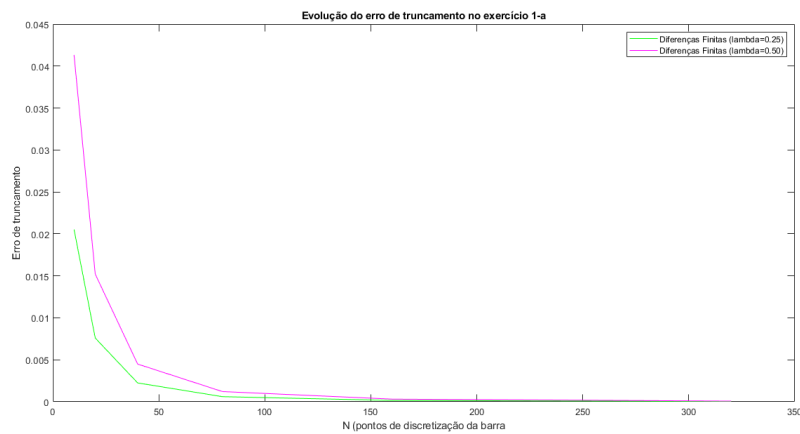


Figura 25: Gráfico da evolução do erro de truncamento para o exercício a) (problema obrigatório), comparando os três métodos implementados.

Por fim, os gráficos mostrados nas figuras 26 e 27 apresentam a evolução da temperatura na barra, obtida com o método de Euler implícito com  $N = 320$ . Enquanto as figuras 28 e 29 apresentam os resultados obtidos com o método de Crank-Nicolson para  $N = 320$ .



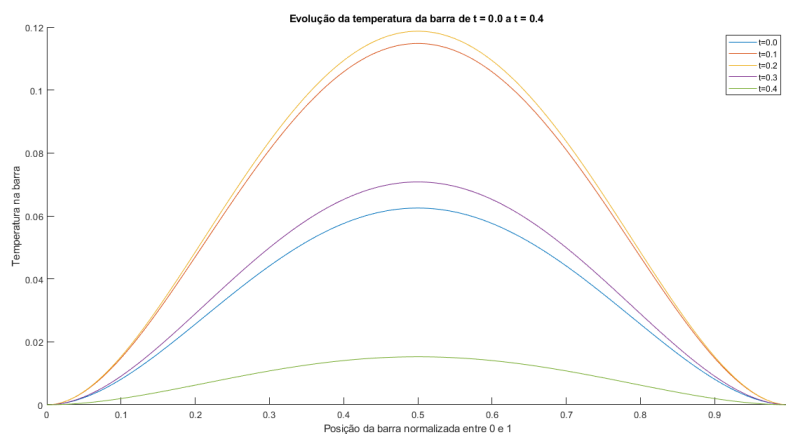


Figura 26: Gráfico de evolução de temperatura para o exercício a) (problema obrigatório) para o método Euler implícito, entre  $t=0.0$  e  $t=0.4$

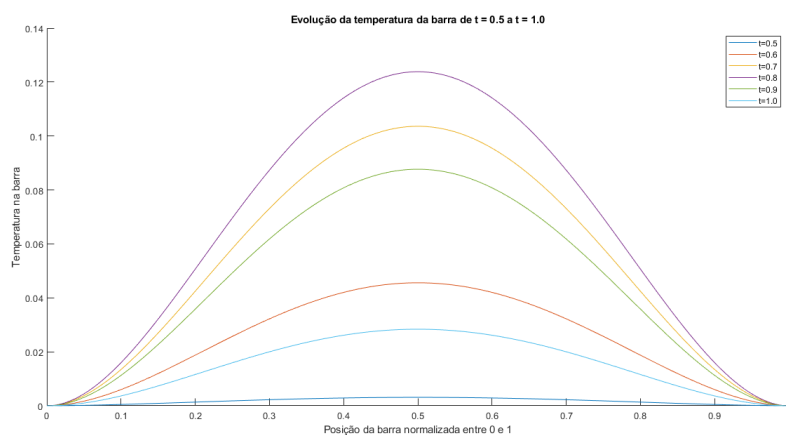


Figura 27: Gráfico de evolução de temperatura para o exercício a) (problema obrigatório) para o método Euler implícito, entre  $t=0.5$  e  $t=1.0$

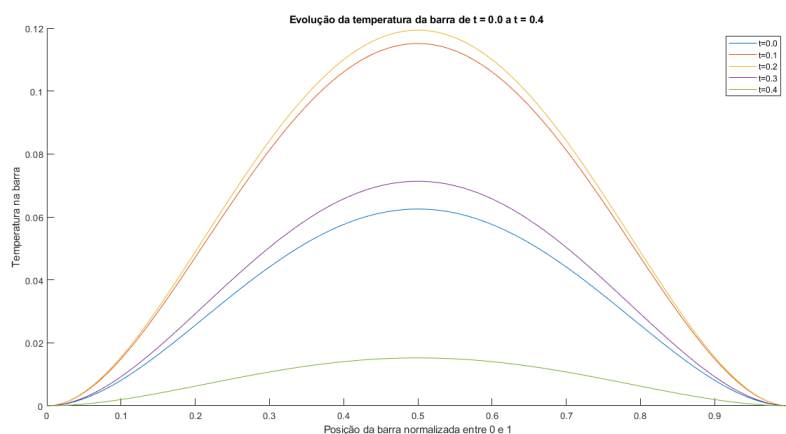


Figura 28: Gráfico de evolução de temperatura para o exercício a) (problema obrigatório) para o método de Crank-Nicolson, entre  $t=0.0$  e  $t=0.4$

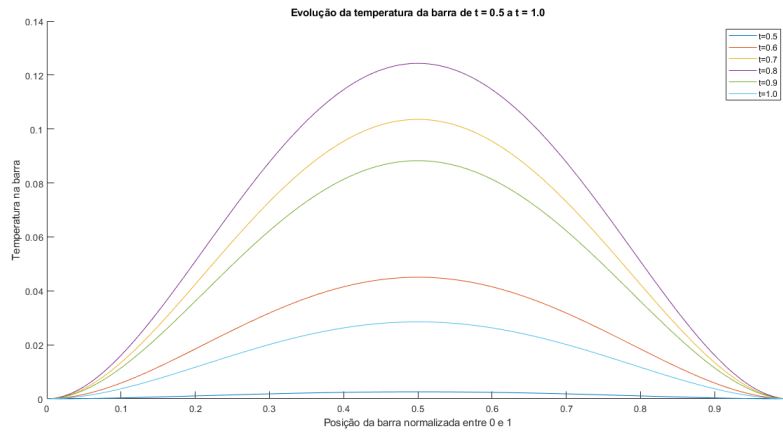


Figura 29: Gráfico de evolução de temperatura para o exercício a) (problema obrigatório) para o método de Crank-Nicolson, entre  $t=0.5$  e  $t=1.0$

### Exercício b)

Para esse exercício, foi utilizado:

- $T = 1$ ;
- $M = N$ , tal que os valores de  $N$  foram variados para realizar comparações dos resultados;
- Solução exata:  $u(t, x) = e^{t-x} \cos(5tx)$ ;
- Condição inicial:  $u_0(x) = u(0, x) = e^{-x}$ ;
- Condições de fronteira:  $g_1(t) = u(t, 0) = e^t$  e  $g_2(t) = u(t, 1) = e^{t-1} \cos(5t)$ ;
- Fonte:  $f(t, x) = 5e^{t-x}(5t^2 \cos(5tx) - (2t + x) \sin(5tx))$ .

Observa-se na figura 30 a comparação da evolução do erro entre os três métodos implementados para  $N = 10, 20, 40, 80, 160$  e  $320$ . Para valores pequenos de  $N$ , os erros absolutos dos métodos implementados na segunda tarefa deram menores que o da primeira. Nesse exercício b), o método de Crank-Nicolson foi o que convergiu mais rapidamente, enquanto o método de Euler implícito foi o que demorou mais para convergir.

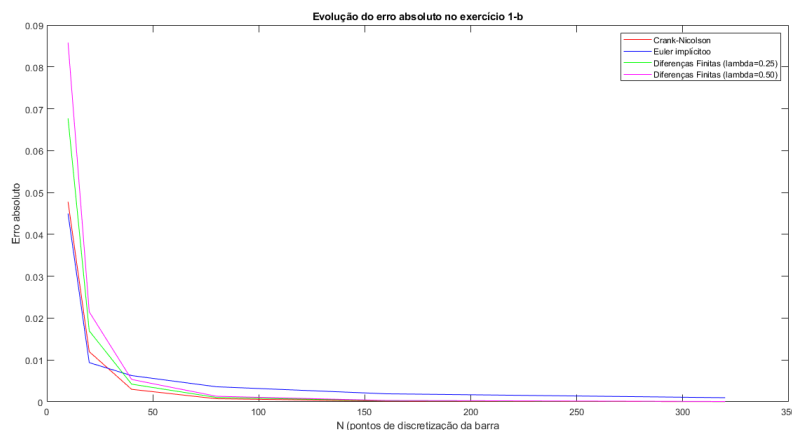


Figura 30: Gráfico da evolução do erro absoluto para o exercício b), comparando os três métodos implementados.

Analisando, agora, o erro de truncamento na figura 31, observa-se que em comparação com os métodos da primeira tarefa, os erro de truncamento dos métodos Crank-Nicolson e Euler implícitos são bem inferiores, quase nulos. Na figura 32 podemos analisar mais de perto os métodos da segunda tarefa e vemos que o erro de truncamento aumenta com o valor de  $N$ , isso se deve ao fato de que o aumento de  $N$  implica no aumento do número de contas, aumentando também o erro de arredondamento.

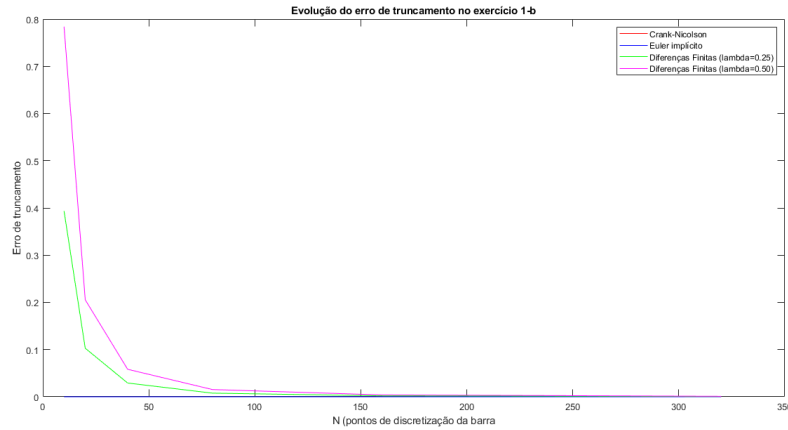


Figura 31: Gráfico da evolução do erro de truncamento para o exercício b), comparando os três métodos implementados.

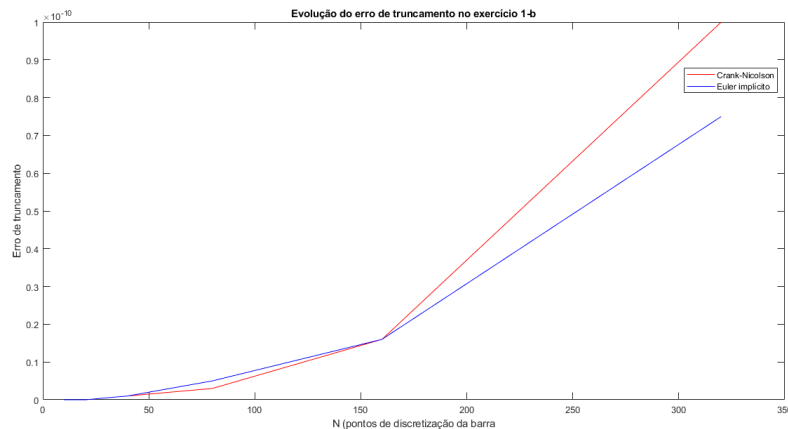


Figura 32: Gráfico da evolução do erro de truncamento para o exercício b), utilizando o método de Euler implícito e o método de Crank-Nicolson.

Por fim, os gráficos mostrados nas figuras 33 e 34 apresentam a evolução da temperatura na barra, obtida com o método de Euler implícito com  $N = 320$ . Enquanto as figuras 35 e 36 apresentam os resultados obtidos com o método de Crank-Nicolson para  $N = 320$ .

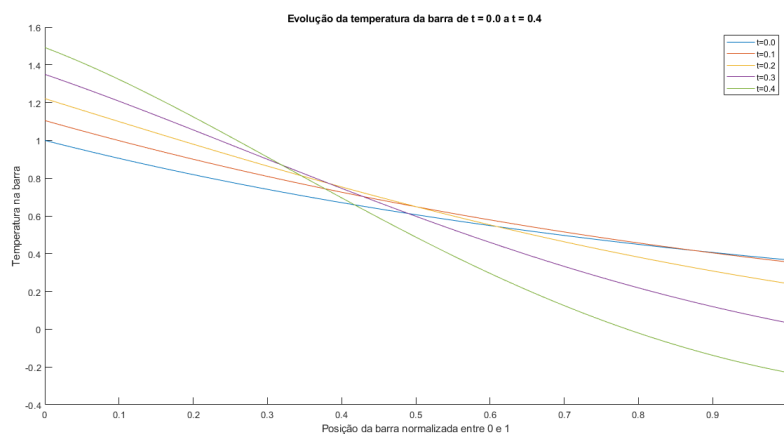


Figura 33: Gráfico de evolução de temperatura para o exercício b) para o método Euler implícito, entre  $t=0.0$  e  $t=0.4$

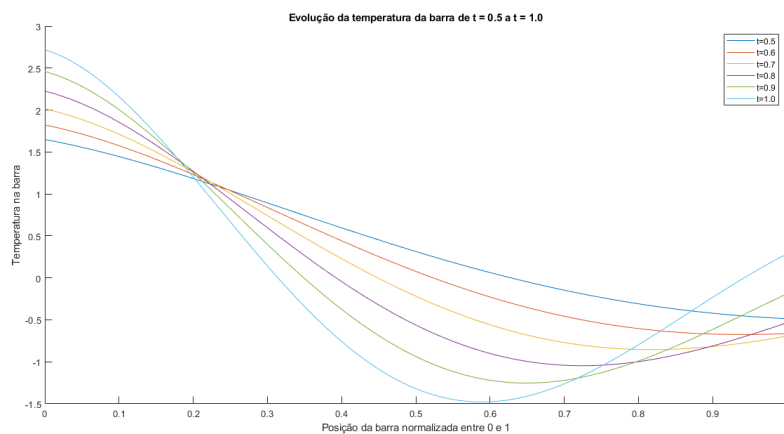


Figura 34: Gráfico de evolução de temperatura para o exercício b) para o método Euler implícito, entre  $t=0.5$  e  $t=1.0$

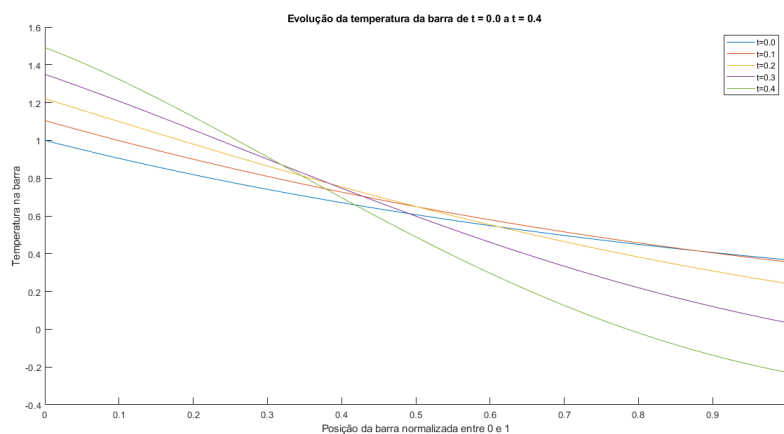


Figura 35: Gráfico de evolução de temperatura para o exercício b) para o método de Crank-Nicolson, entre  $t=0.0$  e  $t=0.4$

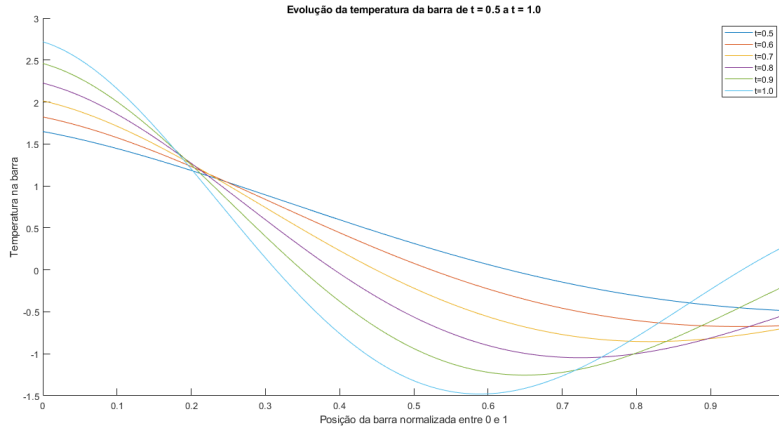


Figura 36: Gráfico de evolução de temperatura para o exercício b) para o método de Crank-Nicolson, entre  $t=0.5$  e  $t=1.0$

### Exercício c)

Nesse exercício foram utilizados os seguintes parâmetros:

- $T = 1$ ;
- $M = N$ ;
- Condição inicial nula ( $u_0(x) = 0$ );
- Condições de fronteiras nulas ( $g_1(t) = g_2(t) = 0$ );
- $g_h(x) = \frac{1}{h}$ , se  $\frac{p-h}{2} \leq x \leq \frac{p+h}{2}$  e  $g_h(x) = 0$  caso contrário;
- $f(t, x) = r(t)g_h(t)$ , com  $h = \Delta x$

Como mencionado anteriormente, esse exercício não possui uma solução analítica, ou seja, não temos a equação da solução exata. Dessa forma, a solução foi obtida utilizando os métodos implementados na segunda tarefa. Primeiramente, pode-se observar a solução obtida com o método de Euler nas figuras 37 e 38. Já a solução obtida com o método de Crank-Nicolson pode ser vista nas figuras 39 e 40. Como o método de Crank-Nicolson possui convergência quadrática tanto em  $\Delta x$  como em  $\Delta t$ , a solução obtida com esse método é a com menor erro entre os métodos implementados.

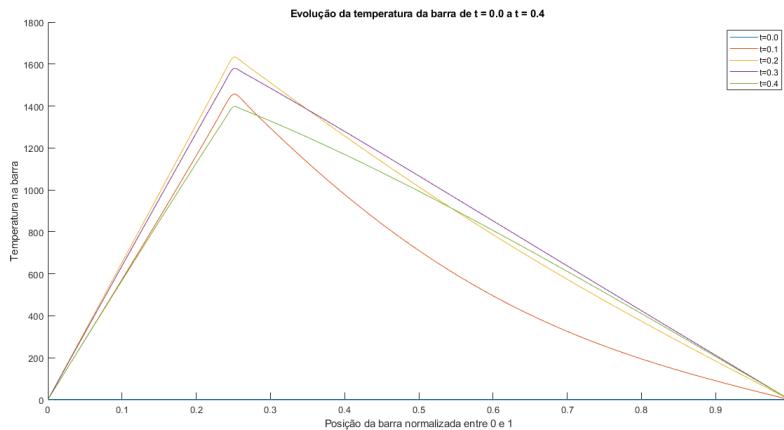


Figura 37: Gráfico de evolução de temperatura para o exercício c) para o método Euler implícito, entre  $t=0.0$  e  $t=0.4$

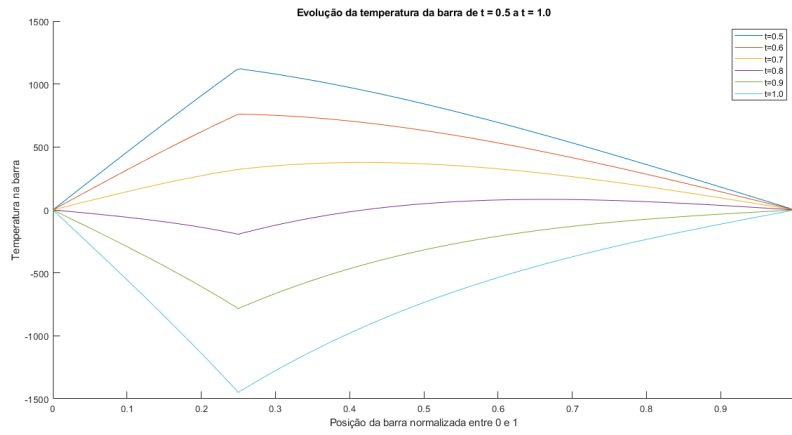


Figura 38: Gráfico de evolução de temperatura para o exercício c) para o método Euler implícito, entre  $t=0.5$  e  $t=1.0$

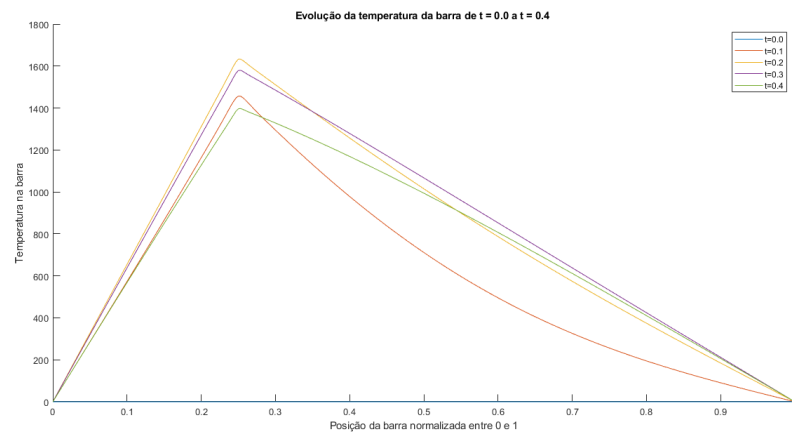


Figura 39: Gráfico de evolução de temperatura para o exercício c) para o método de Crank-Nicolson, entre  $t=0.0$  e  $t=0.4$

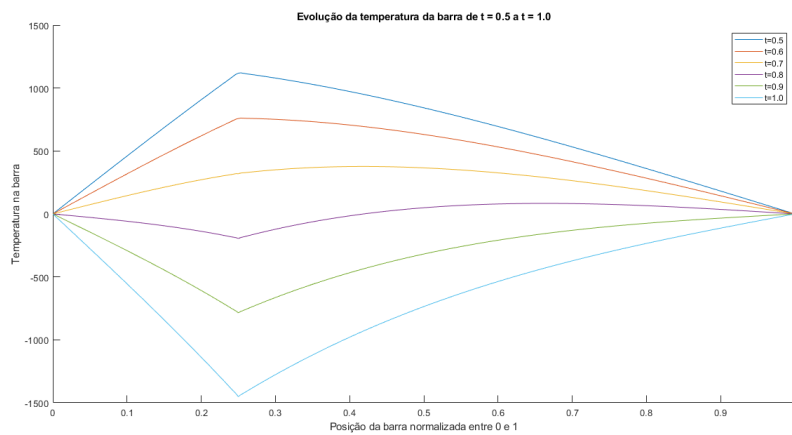


Figura 40: Gráfico de evolução de temperatura para o exercício c) para o método de Crank-Nicolson, entre  $t=0.5$  e  $t=1.0$