

Exercício Programa - Parte 2

Um problema inverso para a equação do calor



Disciplina: MAP3121 - Métodos Numéricos e Aplicações (2020)

Grupo:

Matheus Bordin Gomes - 9838028 - Turma 2

João Ferreira Cysne - 10774020 - Turma 3

1 Introdução

Esse trabalho tem como objetivo resolver o problema inverso para a equação de calor, ou seja, a partir de uma distribuição final de temperatura, determinar a intensidade das fontes de calor aplicadas em posições conhecidas da barra. Nesse sentido, optou-se por utilizar a linguagem de programação C para implementar a resolução dos problemas propostos no enunciado deste Exercício Programa, com base no método de Crank-Nicolson, implementado anteriormente. O programa entregue em anexo a este relatório implementa as três tarefas propostas, ou seja, a resolução do problema inverso para a equação de calor, e também resolve os quatro testes propostos, de acordo com a escolha do usuário. Pode-se encontrar mais informações sobre o programa no arquivo *"LEIAME.txt"*, que trás tanto uma explicação mais detalhada sobre o código, como o passo-a-passo para a utilização do mesmo.

2 Tarefas

Exercício a)

Essa tarefa foi implementada com a resolução da equação do calor, utilizando-se o método de Crank-Nicolson de forma que $N = M$, nf vezes. Em cada resolução k , foi utilizada uma fonte de calor posicionada em p_k e com uma intensidade dada por $f(t, x) = r(t)g_h^k(x)$, tal que $r(t) = 10(1 + \cos(5t))$, $g_h^k(x) = \frac{1}{h}$ se $p_k - \frac{h}{2} \leq x \leq p_k + \frac{h}{2}$ e $g_h^k(x) = 0$ caso contrário. Dessa forma, pode-se obter nf soluções $u_k(T, x_i)$, cada uma referente a uma fonte de calor pontual. Essas soluções serão utilizadas como funções aproximadoras no método dos mínimos quadrados, conforme explicado a seguir.

Exercício b)

Nessa tarefa, foi implementada uma função que monta o sistema normal do método dos mínimos quadrados, dadas as soluções $u_k(T, x_i)$ e a distribuição de calor gerada por todas as fontes $u_T(x_i)$. Como a matriz A do sistema normal é simétrica, foram calculados apenas os produtos internos entre as soluções de forma a preencher a metade superior da matriz. A metade inferior da matriz foi preenchida com a cópia dos elementos diagonalmente opostos. Já o vetor b foi preenchido com os produtos normais entre as soluções e a distribuição de calor final, como pode ser visto na equação 40 do enunciado.

Exercício c)

Com o sistema normal montado, foi necessário implementar uma rotina para a resolução desse sistema linear. Como a matriz normal não é tridiagonal simétrica, como a gerada pelo método de Crank-Nicolson, não foi possível utilizar as rotinas de decomposição LDL^t e de resolução do sistema $LDL^t x = b$ otimizadas já implementadas. Para a decomposição LDL^t da matriz simétrica foi utilizado o algoritmo 1.

Algorithm 1: Decomposição LDL^t .

```
L = zeros(N,N);
D = zeros(N,1);
for  $i$  from 0 to  $N-1$  do
    for  $j$  from 0 to  $N-1$  do
        if  $i=j$  then
             $L[i][j] = 1$ ;
        end
    end
end
for  $i$  from 0 to  $N-1$  do
     $D[i] = A[i][i] - \sum_{k=0}^{i-1} L[i][k]^2 D[k]$ ;
    for  $j$  from  $i+1$  to  $N-1$  do
         $L[j][i] = (A[j][i] - \sum_{k=0}^{i-1} L[j][k] L[i][k] D[k]) / D[i]$ ;
    end
end
```

Por fim, o algoritmo utilizado que foi utilizado para realizar a resolução do sistema do tipo $LDL^t x = b$ pode ser visto no algoritmo 2.

Algorithm 2: Resolução do sistema $LDL^t x = b$

```
x = zeros(N-1,1);
y = zeros(N-1,1);
z = zeros(N-1,1);
 $y(0)=b(0)$ ;
for  $i$  from 1 to  $N-1$  do
     $y[i] = b[i] - \sum_{j=0}^{i-1} L[i][j] * y[j]$ ;
end
for  $i$  from 0 to  $N-1$  do
     $z[i] = y[i] / D[i]$ ;
end
 $x(N-1)=z(N-1)$ ;
for  $i$  from  $N-2$  to 0 do
     $x[i] = z[i] - \sum_{j=i+1}^{N-1} L[j][i] * x[j]$ ;
end
```

3 Testes

Em todos os testes, foi utilizado $T = 1$, $M = N$ e $r(t) = 10(1 + \cos(5t))$.

Exercício a)

Nesse exercício, foi utilizado $N = 128$ e apenas uma fonte pontual ($nf = 1$) posicionada em $p_1 = 0.35$. Definiu-se $u_T(x_i) = 7u_1(T, x_i)$, tal que $u_1(T, x_i)$ é a resolução da equação do calor para a fonte pontual dada.

Esse caso é simples, pois resulta em apenas uma equação com solução trivial. O resultado obtido pode ser visto na tabela 1. Além disso, calculou-se $E_2 = 0.0000000000$, de forma que foi possível chegar à solução exata para a precisão dada. O gráfico com as distribuições de calor $u_T(x_i)$ e $a_1 u_1(T, x_i)$ pode ser visto na figura 1, onde se nota a sobreposição visual das duas distribuições.

Intensidade	Valor exato	Valor encontrado
a_1	7	7.0000000000

Tabela 1: Resultados obtidos na resolução do item a.

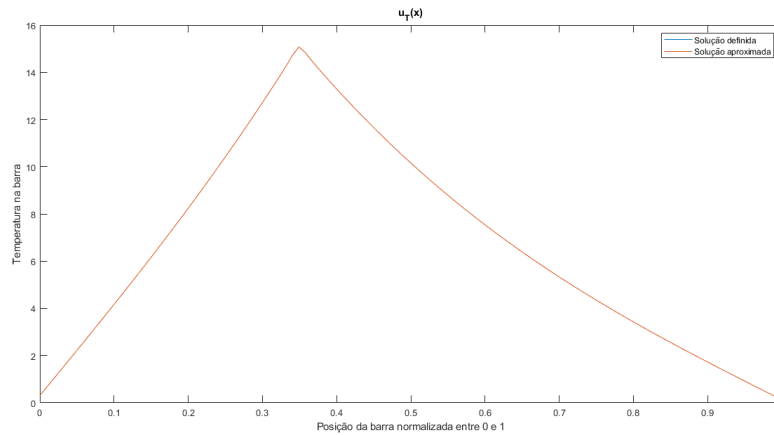


Figura 1: Distribuições de temperatura na barra $u_T(x_i)$ no item a definida no enunciado e calculada com a solução obtida.

Exercício b)

Nesse segundo teste, foi utilizado $N = 128$ novamente e quatro fontes pontuais ($nf = 4$), posicionadas em $p_1 = 0.15$, $p_2 = 0.3$, $p_3 = 0.7$ e $p_4 = 0.8$. Definiu-se $u_T(x_i) = 2.3u_1(T, x_i) + 3.7u_2(T, x_i) + 0.3u_3(T, x_i) + 4.2u_4(T, x_i)$, tal que $u_k(T, x_i)$ são as resoluções da equação do calor para cada uma das fontes pontuais dadas. Nesse caso, o sistema normal será 4×4 .

A solução obtida pelo programa nesse caso pode ser vista na tabela 2. Além disso, obteve-se $E_2 = 0.0000000000$. Dessa forma, novamente foi possível chegar na solução exata do problema.

Intensidade	Valor exato	Valor encontrado
a_1	2.3	2.3000000000
a_2	3.7	3.7000000000
a_3	0.3	0.3000000000
a_4	4.2	4.2000000000

Tabela 2: Resultados obtidos na resolução do item b dos testes propostos.

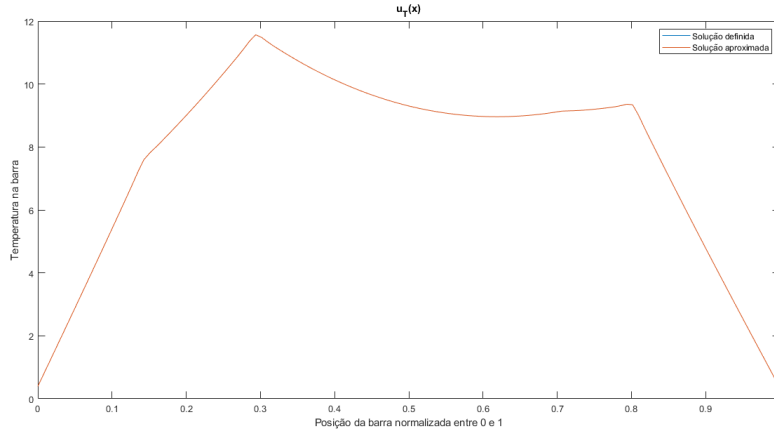


Figura 2: Distribuições de temperatura na barra $u_T(x_i)$ no item b definida no enunciado e calculada com a solução obtida.

Exercício c)

Nesse caso, foram utilizados os dados referentes a distribuição de calor $u_T(x_i)$ disponibilizados no arquivo "teste.txt". Os dados foram gerados com dez fontes pontuais de calor ($nf = 10$), nas posições também dadas no arquivo. Os dados foram gerados com $N = 2048$, porém foram realizados cinco testes para $N = 128$, $N = 256$, $N = 512$, $N = 1024$ e $N = 2048$, utilizando-se amostras dos dados com espaçamentos adequados.

Pode-se ver os resultados encontrados para os coeficientes de intensidade a_k para os diversos valores de N na tabela 3. Já os valores calculados do erro quadrático E_2 podem ser vistos na tabela 4. Nota-se, primeiramente, que o erro quadrático foi nulo para o caso em que $N = 2048$. Dessa forma, podemos considerar que os coeficientes de intensidade a_k obtidos para $N = 2048$ são os exatos.

	N=128	N=256	N=512	N=1024	N=2048
a_1	1.2091231792	0.9045010343	0.9286883785	1.0072813221	1.0000000000
a_2	4.8392587157	5.0775726356	5.0537078445	4.9924430125	5.0000000000
a_3	1.8872408558	2.1008535955	2.0437010489	1.9858767276	2.0000000000
a_4	1.5833999319	1.4141556851	1.4676706729	1.5132584652	1.5000000000
a_5	2.2145040463	2.2292450131	2.1967633320	2.1926928377	2.2000000001
a_6	3.1212947788	3.1046138570	3.0911311689	3.0951528759	3.1000000000
a_7	0.3773402864	0.5094525974	0.6375875164	0.6523266477	0.6000000000
a_8	1.4923482881	1.3865087905	1.2716872153	1.2537898891	1.3000000000
a_9	3.9751388016	3.9498786462	3.8780948673	3.8796670569	3.9000000000
a_{10}	0.4041451536	0.4148931283	0.5305567786	0.5297366253	0.5000000000

Tabela 3: Resultados obtidos na resolução do item c dos testes propostos para diversos valores de N .

	N=128	N=256	N=512	N=1024	N=2048
E_2	0.0244534038	0.0123634640	0.0084766283	0.0037793105	0.0000000000

Tabela 4: Valores do erro quadrático E_2 obtidos no teste c para diversos valores de N .

Por fim, nas figuras 3, 4, 5, 6 e 7 é possível observar os gráficos das soluções obtidas em comparação com a distribuição $u_T(x_i)$ dada no arquivo "teste.txt" para $N = 128$, $N = 256$, $N = 512$, $N = 1024$ e $N = 2048$, respectivamente. Pode-se observar visualmente que, apesar dos erros cometidos na solução dos coeficientes de intensidade para N menor do que 2048, a solução obtida é muito

próxima da distribuição original. Isso pode ser comprovado numericamente pelos erros quadráticos, todos menores do que 0.025.

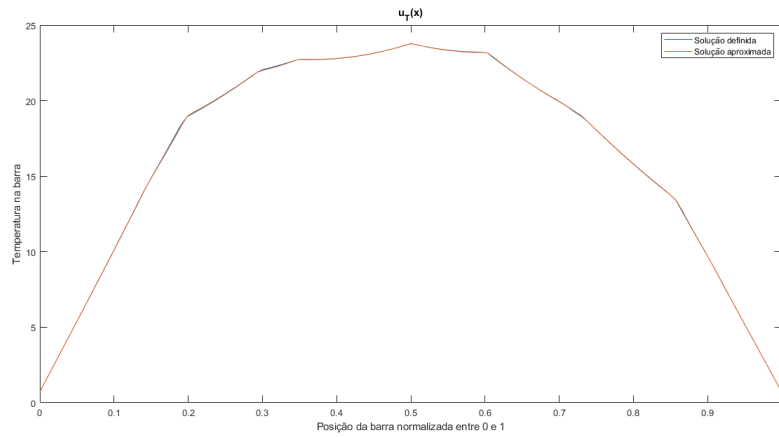


Figura 3: Distribuições de temperatura na barra $u_T(x_i)$ no item c definida no arquivo de teste e calculada com a solução obtida para $N = 128$.

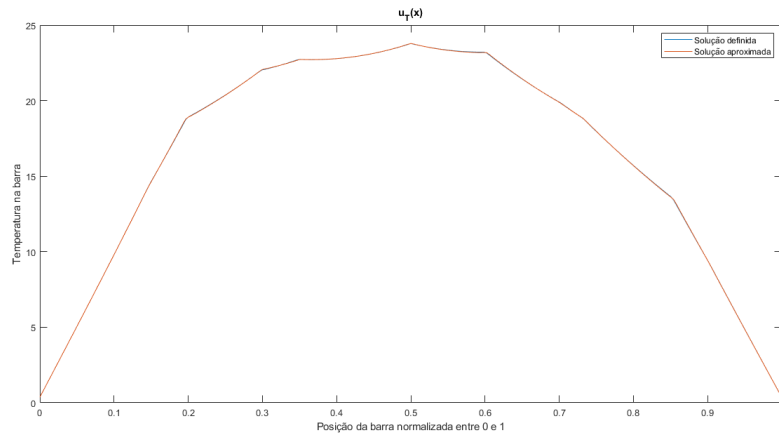


Figura 4: Distribuições de temperatura na barra $u_T(x_i)$ no item c definida no arquivo de teste e calculada com a solução obtida para $N = 256$.

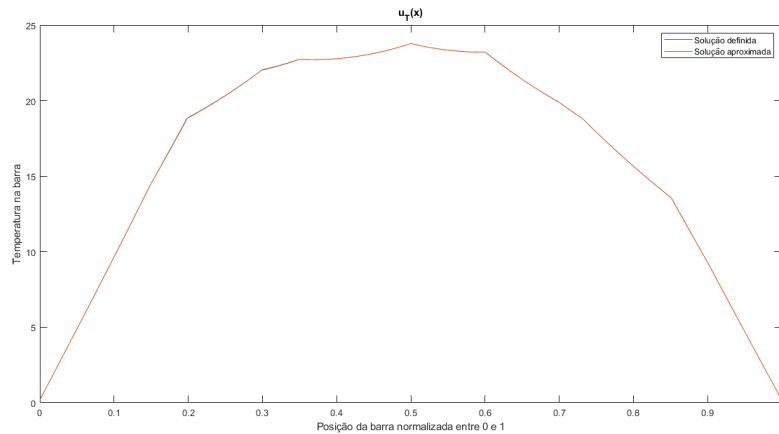


Figura 5: Distribuições de temperatura na barra $u_T(x_i)$ no item c definida no arquivo de teste e calculada com a solução obtida para $N = 512$.

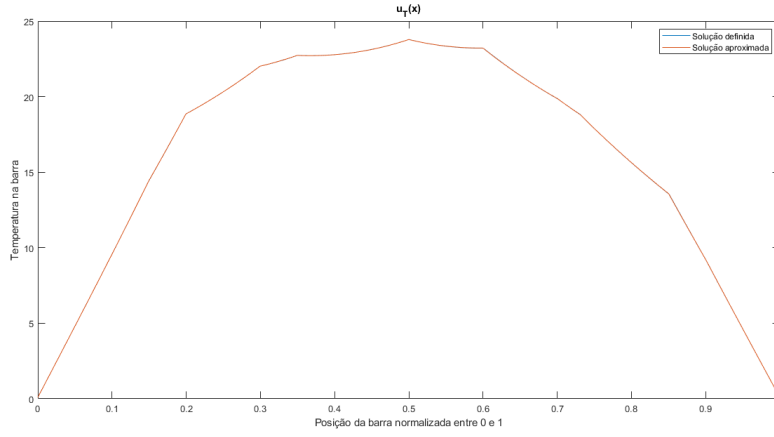


Figura 6: Distribuições de temperatura na barra $u_T(x_i)$ no item c definida no arquivo de teste e calculada com a solução obtida para $N = 1024$.

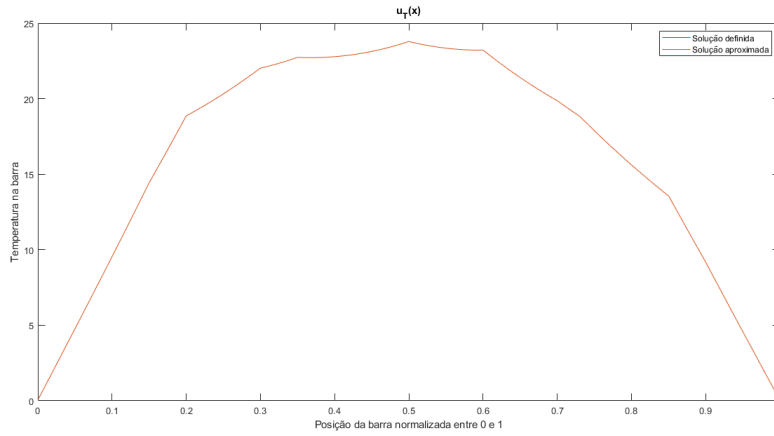


Figura 7: Distribuições de temperatura na barra $u_T(x_i)$ no item c definida no arquivo de teste e calculada com a solução obtida para $N = 2048$.

Exercício d)

Nesse teste, as condições do item c foram repetidas com apenas uma diferença, foi adicionado um ruído no sinal lido $u_T(x_i)$. Esse ruído foi obtido da seguinte forma: $u_T(x_i) = u_T(x_i)(1 + r\epsilon) = u_T(x_i) + r\epsilon u_T(x_i)$, tal que $\epsilon = 0.001$ e r é um número randômico entre -1 e 1. Vale notar que esse ruído é proporcional a amplitude do próprio sinal, já que ele está multiplicando o próprio sinal. Ou seja, a amplitude do ruído tenderá a ser maior quando a temperatura assumir valores maiores.

Os resultados obtidos para os coeficientes de intensidade a_k para diversos valores de N podem ser vistos na tabela 5. Já os valores calculados do erro quadrático E_2 para os diversos valores de N , estão disponíveis na tabela 6. Observa-se que os resultados obtidos para os coeficientes de intensidade convergiram para valores próximos aos exatos, enquanto todos os erros quadráticos ficaram próximos de 0.01. Esses resultados não foram tão bons quanto os obtidos no item c, mas isso era esperado ao se adicionar um ruído na distribuição original. Entretanto, o resultado foi satisfatório tanto por um erro quadrático relativamente baixo quanto pela solução obtida eliminar o efeito do ruído de medição.

	N=128	N=256	N=512	N=1024	N=2048
a_1	1.0183535094	0.8647538607	0.9464886872	0.9438862242	0.9988156041
a_2	5.1169245696	5.1561295554	5.0763657440	5.0935296901	5.0050129334
a_3	1.8011698902	2.0383761243	1.9200099531	1.9005673168	1.9995914113
a_4	1.5360085800	1.4516600299	1.5771322314	1.5517665875	1.4962070465
a_5	2.2268185357	2.1434436600	2.1654746687	2.1959633479	2.1942172453
a_6	3.1324036232	3.2448693374	3.0714791627	3.0895280270	3.1290960652
a_7	0.3257735754	0.2354188137	0.7691709442	0.7527031755	0.5400907202
a_8	1.6042099732	1.6032437979	1.1805773808	1.1294962072	1.3387056656
a_9	3.9169088691	3.8914928327	3.8412442292	3.9269437511	3.9004690293
a_{10}	0.4075955777	0.4700164171	0.5532854316	0.5135579486	0.5015160985

Tabela 5: Resultados obtidos na resolução do item d dos testes propostos para diversos valores de N .

	N=128	N=256	N=512	N=1024	N=2048
E_2	0.1030910459	0.1019712604	0.1076860834	0.1043691222	0.1039774126

Tabela 6: Valores do erro quadrático E_2 obtidos no teste d para diversos valores de N .

Pode-se observar nas figuras 8, 9, 10, 11 e 12 os gráficos das soluções obtidas em comparação com a distribuição $u_T(x_i)$ dada no arquivo "teste.txt" com o ruído de medição adicionado para $N = 128$, $N = 256$, $N = 512$, $N = 1024$ e $N = 2048$, respectivamente. É notável a presença do ruído que foi adicionado na distribuição dada no arquivo. Também é possível notar os fatos de que desse ruído é proporcional a amplitude do sinal e de que sua frequência de variação aumenta junto com o aumento de N . Por fim, os resultados obtidos foram bons, visto que aproximaram muito bem a distribuição original e eliminaram o ruído que foi adicionado.

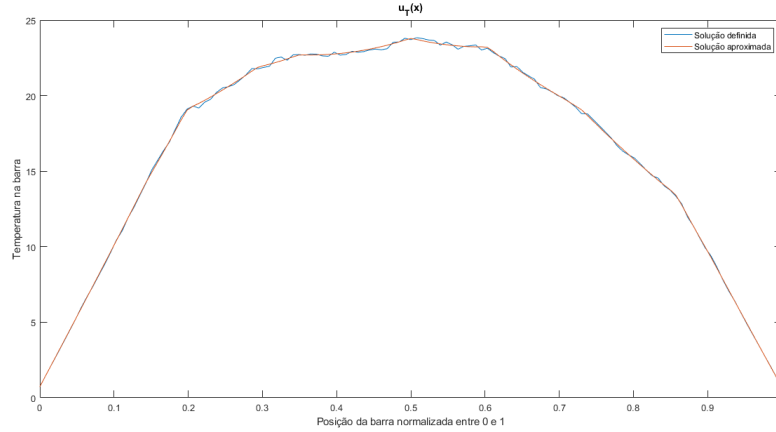


Figura 8: Distribuições de temperatura na barra $u_T(x_i)$ no item d definida no arquivo de teste com adição do ruído de medida e calculada com a solução obtida para $N = 128$.

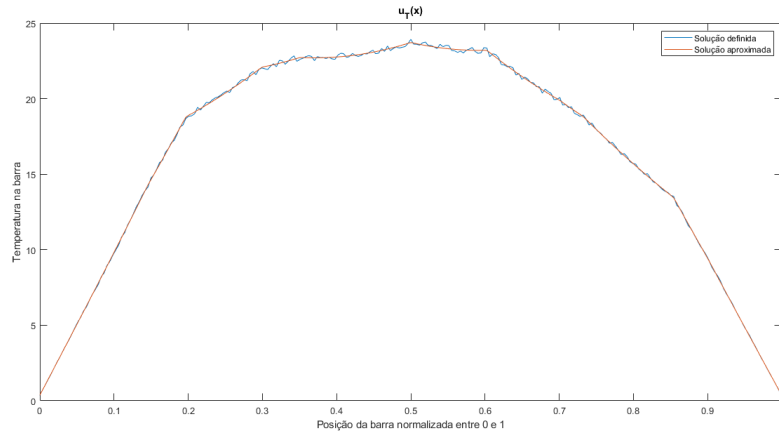


Figura 9: Distribuições de temperatura na barra $u_T(x_i)$ no item d definida no arquivo de teste com adição do ruído de medida e calculada com a solução obtida para $N = 256$.

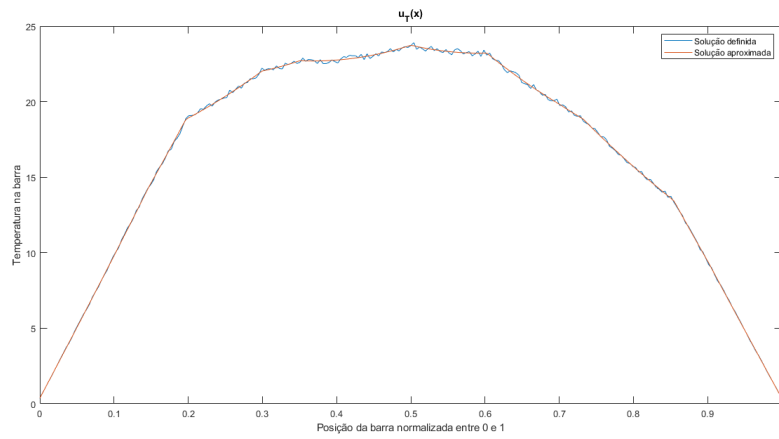


Figura 10: Distribuições de temperatura na barra $u_T(x_i)$ no item d definida no arquivo de teste com adição do ruído de medida e calculada com a solução obtida para $N = 512$.

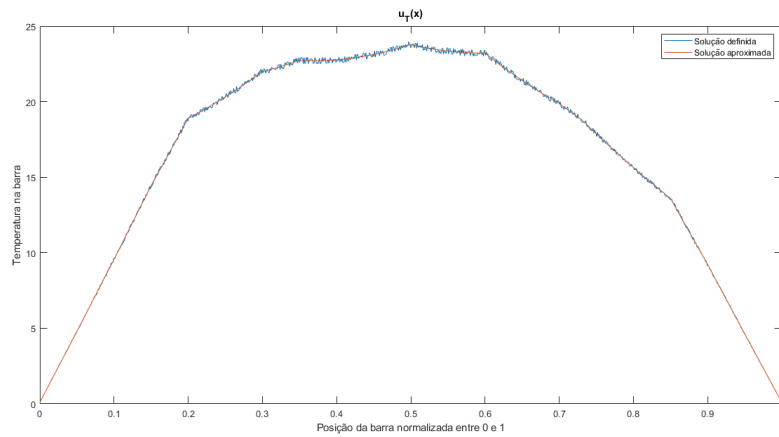


Figura 11: Distribuições de temperatura na barra $u_T(x_i)$ no item d definida no arquivo de teste com adição do ruído de medida e calculada com a solução obtida para $N = 1024$.

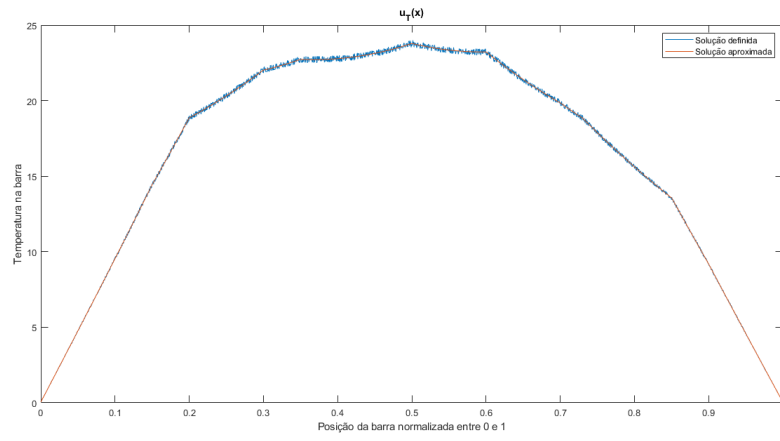


Figura 12: Distribuições de temperatura na barra $u_T(x_i)$ no item d definida no arquivo de teste com adição do ruído de medida e calculada com a solução obtida para $N = 2048$.