**Линейные дифференциальные уравнения -го порядка**

Линейные уравнения являются одним из наиболее важных классов дифференциальных уравнений, т.к., во-первых, они обладают разработанной стройной теорией, во-вторых – очень важны их приложения в физике, механике; например, многие вопросы, связанные с колебаниями, приводят к линейным дифференциальным уравнениям.

**1. Основные понятия**

**Определение.** Уравнение вида



линейное относительно функции  и ее производных называется *линейным дифференциальным уравнением* *****-го порядка (ЛДУ)*.

Здесь  – известные функции, определенные на  и называемые коэффициентами уравнения. Не ограничивая общности, можно считать коэффициент при старшей производной равным единице. Действительно, в противном случае можно разделить обе части уравнения на  в . В результате получим уравнение вида

. (1)

**Теорема о существовании и единственности решения ЛДУ.**

*Если коэффициенты уравнения*  *и*  *являются непрерывными на* , *то уравнение (1) имеет единственное решение , определенное на том же отрезке и удовлетворяющее начальным условиям:*

*,*

*где* .

**Определение.**Если в уравнении (1) , то уравнение называется *линейным однородным дифференциальным уравнением (ЛОДУ).* В противном случае, оно называется *линейным неоднородным дифференциальным уравнением (ЛНДУ).*

Запишем уравнение (1) кратко в виде , где

.

* называется линейным дифференциальным оператором*. Он показывает, какие действия надо произвести над , чтобы получить левую часть уравнения (1).

**2. Свойства линейного дифференциального оператора**

1) Постоянный множитель можно выносить за знак линейного дифференциального оператора, то есть .

2) Линейный дифференциальный оператор от суммы функций равен сумме

линейных дифференциальных операторов от слагаемых, то есть

.

При доказательстве этих свойств пользуемся соответствующими свойствами производной. Например, докажем первое свойство:

*►* . ◄

**3. Общие свойства линейных дифференциальных уравнений**

Отметим следующие два свойства ЛДУ: инвариантность ЛДУ относительно произвольной замены независимой переменной и относительно линейной замены искомой функции.

1. Линейное уравнение остается линейным при любой замене независимой переменной.

► Положим , где  – произвольная функция от , непрерывно-дифференцируемая на  ** раз, производная которой  на , причем . Эти условия будут обеспечивать существование обратной функции  и ее производной

.

Чтобы в уравнении (1) заменить независимую переменную  другой независимой переменной , надо выразить все производные от  по  через производные от  по .

Находим

,



.

Вторая производная от  по  заменяется функцией линейной и однородной относительно производных от  по , содержащей производные не выше 2-го порядка. ММИ можно убедиться, что любая производная -го порядка  выразится в виде линейной и однородной функции, зависящей от

.

Заменяя в уравнении (1)  через , а производные от  по  соответствующими выражениями, и умножая обе части полученного уравнения на , получим уравнение -го порядка, линейное, с новым аргументом . При этом однородное уравнение будет преобразовано в однородное уравнение.

Если удастся найти общее решение преобразованного уравнения, то заменяя в нем  через , мы получим решение исходного уравнения. ◄

2. Линейное уравнение остается линейным при любой линейной замене искомой функции по формуле , где  – произвольная функция, -раз непрерывно-дифференцируемая, а  – новая искомая функция.

► Используя формулу Лейбница для производных высших порядков от произведения функций, запишем, каким выражением будут заменяться

производные

.

Замечаем, что  является линейной однородной функцией относительно

. Поэтому, заменяя функцию и ее производные по соответствующим формулам, получим линейное уравнение -го порядка, причем, если исходное уравнение было однородным, то преобразованное уравнение также будет однородным. ◄

**Линейные однородные дифференциальные уравнения**

**с переменными коэффициентами**

**1. О решениях ЛОДУ**

**Теорема 1.**

*Если  – решения ЛОДУ (1), то любая линейная комбинация этих решений с произвольными постоянными*

*,*

*также является решением уравнения (1).*

*►* Рассмотрим .

Так как , то , а поэтому  – решение уравнения (1). ◄

Пусть мы нашли  частных решений  ЛОДУ -го порядка. Тогда по теореме 1 ** (2), где  – произвольные постоянные, также есть решение уравнения (1). Известно, что общее решение уравнения -го порядка содержит  произвольных постоянных. Возникает вопрос, будет ли решение **, составленное из любых  частных решений, общим решением уравнения (1).

Убедимся в том, что решение, составленное из любых  частных решений,

не всегда будет общим. Например, если возьмем , то функция (2) в этом

случае примет вид . Так как  есть произво-

льная постоянная, которая может быть обозначена просто через , то функция будет содержать  произвольных постоянных и поэтому не является общим решением. Ясно, что функция (2) не всегда дает общее решение. Возникает вопрос, какими функциями должны быть частные решения, чтобы формула (2) давала общее решение. Этот вопрос разрешается в связи с понятием линейной зависимости функций.

**2. Условие линейной независимости**

**(зависимости) системы функций.**

**Определение.** Система функций  называется линейно зависимой на отрезке , если существуют  НЕРОН, такие, что имеет место тождество  на отрезке . В противном случае эта система называется линейно независимой.

**Пример.**

**1.** Функции **** **** линейно зависимы на . Действительно, существуют постоянные  такие, что имеет место тождество .

**2.** Функции  линейно независимы на , так как условие



не может выполняться тождественно, когда не все . Действительно, это равенство есть алгебраическое уравнение, оно может быть справедливо не более как для  значений .

*Система из двух функций , является линейно зависимой, если*

,

*если же*

* на ,*

*то система функций линейно независимая на отрезке .*

**Определение.** *Определителем Вронского,* составленным для функций  на отрезке , называется определитель вида

.

**Теорема 2.** *Для того, чтобы система функций , являющихся решением ЛОДУ, была линейно независимой на  необходимо и достаточно, чтобы определитель Вронского, составленный для этих функций, был отличен от нуля при любых .*

**3. Структура общего решения ЛОДУ**

**с переменными коэффициентами**

**Теорема 3.** *Пусть дано уравнение -го порядка (ЛОДУ)*

*,* (1)

*где  – непрерывны на стрезке . Общее решение уравнения (1) является линейной комбинацией*

 (2)

* линейно независимых частных решений  этого уравнения с произвольными постоянными *.

► Если  придавать произвольные действительные значения (из области допустимых значений), то по теореме 1 из (2) будут получаться всевозможные частные решения уравнения (1). Но на основании этого еще нельзя утверждать, тчо (2) – общее решение. Надо показать, что из формулы (2) при cоответствующем подборе  получаются **все** решения данного уравнения

или другими словами – решения, удовлетворяющие любым начальным условиям.

Для этого зададим **произвольные** начальные условия и покажем, что найдутся такие , при которых (2) будет частным решением, удовлетворяющим

заданным начальным условиям:

,

 (3)

Требуя, чтобы (2) удовлетворяло условиям (3), получаем следующую

систему равенств:

(4)

Хотя бы одно из чисел в правой части системы не должно равняться нулю, в противном случае начальные условия будут соответствовать тривиальному решению уравнения (1) . Система (4) – это система  линейных неоднородных уравнений относительно неизвестных . Определителем этой системы является определитель

.

Данный определитель является определителем Вронского, составленным для функций  в точке . Так как по условию теоремы система функций ** линейно независимая на отрезке **, то  имеем . Следовательно, система уравнений (4) имеет единственное решение

 (5). Подставляя (5) в формулу (2), получаем  – частное решение, удовлетворяющее

заданным начальным условиям (3).

Так как начальные условия (3) были произвольными, то доказано, что из

(2) может быть получено любое частное решение данного уравнения. Следовательно, функция (2) – общее решение уравнения (1) . ◄

**4. Фундаментальная система решений**

**Определение.** *Любые -линейно независимых частных решений ЛОДУ -го порядка называются его фундаментальной системой решений.*

**Пример.** Найти общее решение уравнения .

► Уравнение имеет очевидные частные решения: **.** Составим определитель Вронского для этих функций:

.

Следовательно, – фундаментальная система решений. По теореме 3 общее

решение имеет вид: . ◄

**Замечание.** Всякое линейное однородное уравнение имеет фундаментальную систему решений.

► Согласно ТСЕ будет существовать частное решение  уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям:

при 

По ТСЕ существует решение , удовлетворяющее следующим начальным условиям в той же точке , и так далее. На -ом шаге по ТСЕ будет существовать решение , удовлетворяющее начальным условиям:

при  

Получили  частных решений  уравнения (1). Составим определитель Вронского для этой системы функций в точке :

на *.*

Следовательно, ** – фундаментальная система решений уравнения (1). Очевидно, можно получить бесконечное множество таких систем из  решений уравнения, для которых . Это говорит о том, что ЛОДУ имеет бесконечное множество фундаментальных систем решений. ◄

**Линейные неоднородные дифференциальные уравнения**

**с переменными коэффициентами**

**1. Структура общего решения ЛНДУ**

Пусть дано линейное неоднородное дифференциальное уравнение

** (1)

**Определение.** Линейное однородное дифференциальное уравнение

* (*2)

левая часть которого совпадает с левой частью уравнения (1) называется ЛОДУ, соответствующим данному ЛНДУ (1).

**Теорема 4.** *Пусть дано уравнение (1) с коэффициентами , непрерывными на отрезке . Общее решение ЛНДУ (1) есть сумма общего решения соответствующего ему ЛОДУ и некоторого частного решения данного ЛНДУ.*

► Пусть  – общее решение ЛОДУ (2),  – частное решение уравнения (1), тогда общее решение уравнения (1) имеет вид

. (3)

Докажем, что (3) является решением ЛНДУ. В силу свойства линейного оператора имеем

,

а это означает, что  – решение ЛНДУ.

Докажем, что (3) является общим решением уравнения (1). Пусть

** - фундаментальная система решений ЛОДУ (2), тогда решение (3)уравнения (1) примет вид

. (3)

Дальнейшие рассуждения такие же, как в теореме 3. Задаем произвольные нача-

льные условия ,

 (4) и покажем, что из (3) при соответствующем подборе произвольных постоянных получается решение, удовлетворяющее этим началь-

ным условиям. Чтобы функция (3) была решением уравнения (1), удовлетворя-

ющим начальным условиям (4), должны выполняться следующие равенства:

 (5)

Система (4) является линейной неоднородной системой уравнений относительно неизвестных . Определителем этой системы является определитель Вронского, составленный для функций  в точке . Так как по условию теоремы система функций ** линейно независимая на отрезке **, то  имеем . Следовательно, система уравнений (5) имеет единственное решение  (6). Подставляя (6) в формулу (3), получаем  – частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям (4).

Так как начальные условия были произвольными, то можно утверждать, что функция (3) позволяет решать любую задачу Коши, а поэтому (3) – общее решение уравнения (1). ◄

**2. Метод вариации произвольных постоянных**

**нахождения решения ЛНДУ**

Метод вариации произвольных постоянных – это есть метод нахождения решения (частного или общего) ЛНДУ, если известна фундаментальная система решений соответствующего ЛОДУ. Он состоит в варьировании произвольных постоянных в общем решении соответствующего ЛОДУ.

Рассмотрим метод вариации нахождения решения для ЛНДУ второго порядка. Для линейного уравнения -го порядка сохраняются те же рассуждения.

Пусть дано ЛНДУ

, (1)

и известна фундаментальная система решений  соответствующего ему ЛОДУ

. (2)

Общее решение ЛОДУ будет  (теорема 3). Так как левые части уравнений (1) и (2) совпадают, то естественно искать решение уравнения (1) в таком же виде, как и решение уравнения (2), немного изменив его, т.е. заменяя произвольные постоянные  пока неизвестными функциями  и , которые должны быть дважды дифференцируемыми.

Итак, решение уравнения (1) будем искать в виде:

. (3)

Нужно подобрать  и  таким образом, чтобы (3) было решением уравнения (1). Для этого подставим функцию (3) в уравнение (1). Получим равенство, содержащее неизвестные функции  и . Другое равенство, содержащее эти функции, можем задать произвольно. Предварительно найдем

.

Очевидно, что производная от этого выражения будет иметь довольно громоздкий вид. Чтобы производная , а следовательно и  имели более

простой вид, полагаем, что  и  удовлетворяют условию

. (4)

Тогда производные ,  примут вид

, (5)

. (6)

Подставляя (3), (5) и (6) в уравнение (1), получим



Далее, группируем слагаемые, содержащие  и , и выносим их за скобки:



Так как  – решения ЛОДУ (2), то выражения в скобках равны нулю. В итоге получаем равенство

 (7)

Равенство (7) является результатом подстановки функции (3) в уравнение (1) Но равенство (7) получено при условии выполнения (4). Итак, чтобы (3) было решением уравнения (1)  и должны быть решениями системы уравнений

 (8)

Данная система – система неоднородных линейных уравнений относительно неизвестных  и . Ее определитель



есть определитель Вронского, составленный для линейно независимых частных решений . Тогда по теореме 2 он отличен от 0 во всех рассматриваемых

точках и система (8) имеет единственное решение , .

Откуда



где  – произвольные постоянные. Подставляя найденные  в (3), получаем

 (9)

общее решение уравнения (1). Если положить в (9) , то получим частное решение ЛНДУ (1).

Для ЛНДУ -го порядка общее решение ищется в виде

,

где * –* фундаментальная система решений соответствующе-го ЛОДУ, а  определяются из следующей системы уравнений



Общее решение ЛНДУ запишется в виде

.

**3. Формула Лиувилля**

Формула Лиувилля позволяет выразить определитель Вронского решений ЛОДУ через коэффициенты уравнения.

Выведем эту формулу для ЛОДУ 2-го порядка:

 (1)

Пусть  – фундаментальная система решений уравнения (1). Вычислим определитель Вронского, составленный для этих функций:

.

Так как  – решения уравнения (1), то получаем следующие равенства:

 (2)

Будем рассматривать (2) как систему уравнений с неизвестными  и :

 ()

Из этой системы найдем . Для этого вычислим

,

.

Тогда



Разделяя переменные и интегрируя, получим

, ,

. (3)

Эта формула и называется формулой Лиувилля. Другая запись формулы:

.

Полагая , получим и формула Лиувилля принимает вид:

.

Для уравнения го порядка 

формула Лиувилля имеет такой же вид:

,

где  коэффициент при , и получена она может быть с помощью аналогичных рассуждений.

**4. Некоторые методы решения ЛОДУ**

**4.1 Применение формулы Лиувилля к интегрированию ЛОДУ**

Если известно какое-то частное решение уравнения

,

то, используя формулу Лиувилля, можно найти другое его частное решение линейно независимое с ним.

Пусть  – известное частное решение уравнения. Найдем еще одно частное решение . Учитывая, что

,

формула Лиувилля запишем в виде:

.

Данное уравнение является линейным дифференциальным уравнением первого порядка с неизвестной функцией . Но рациональнее его решать как уравнение в точных производных, предварительно умножив обе его части на функцию .

Получим

, , .

**4.2 Интегрирование ЛОДУ с помощью инварианта**

В однородном линейном уравнении

. (1)

линейной заменой искомой функции можно удалить член с первой производной.

Введем новую искомую функцию  по формуле  (2) и подберем  так, чтобы в преобразованном уравнении обратился в 0 коэффициент при . Подставляя производные ,  в уравнение (1) и группируя слагаемые, получим уравнение

. (3)

Приравниваем нулю коэффициент при : . Решая это уравнение с разделяющимися переменными, найдем функцию : . (4)

Подставляя функцию (4) в уравнение (3), получим уравнение

, (5)

в котором отсутствует член с первой производной. Функция  называется инвариантом уравнения. Если сможем решить уравнение (5) , то тогда получим и решение исходного уравнения (1). Действительно, подставляя общее решение уравнения (5)  в формулу (2), получим  - общее решение уравнения (1).

**Линейные однородные дифференциальные уравнения**

**с постоянными коэффициентами.**

Известно, что для нахождения общего решения ЛОДУ требуется знать  линейно независимых частных решений этого уравнения (т.3, п.3 §4).

**1. Характеристическое уравнение. Нахождение частных**

**решений ЛОДУ с постоянными коэффициентами**

**Определение***. Характеристическим уравнением* для ЛОДУ

, . (1)

называется уравнение вида , (2) которое

получается из (1), если производные заменить соответствующими степенями . При этом  заменим на .

**Лемма 1.** Если  – корень характеристического уравнения (2), то  – решение ЛОДУ (1).

► Найдем . Так как  – корень характеристического уравнения, то . Следовательно, функция

 будет решением уравнения (1). ◄

**2. Структура общего решения ЛОДУ**

**с постоянными коэффициентами**

Согласно лемме 1 (п.1 §6) зная корни характеристического уравнения, можно найти  частных решений ЛОДУ

, . (1)

Выясним, какой вид будет иметь общее решение уравнения (1) в зависимости корней характеристического уравнения (действительные, комплексные, различные, кратные).

► **1) Все корни характеристического уравнения (2) различны и действительные, т.** **е. , если .**

По лемме 1(п.1 §6) будут существовать - различных решений уравнения (1):

. (3).

Убедимся, что эти решения составляют фундаментальную систему на . Рассмотрим определитель Вронского:



.

Определитель, стоящий в правой части равенства, является определителем Вандермонда и, как известно, равен . Поэтому

,

так как по условию  при . Тогда по теореме 2 (п.2 §4) система функций (3) – линейно независима и по теореме 3 (п.3 §4) общее решение уравнения (1) представится в виде:



или

.

**Пример 1.** Проинтегрировать уравнение .

Характеристическое уравнение



имеет корни: . Поэтому общее решение уравнения:

**.**

**2) Все корни характеристического уравнения (2) различны, но среди них имеются комплексные.**

Отметим что, так как характеристическое уравнение с действительными коэффициентами, то комплексные корни будут появляться лишь сопряженными

парами. Пусть  и все корни различные.

По лемме 1 уравнение имеет -различных частных решений:

 . (4)

Эта система функций будет линейно независимой. Действительно, так как в рассуждениях о линейной независимости системы функций (3) предыдущего пункта существенным было только то, что корни характеристического уравнения различные, то все умозаключения первого пункта остаются справедливыми и для системы функций (4). В принципе задача решена, то есть найдена фундаментальная система решений уравнения (1), но нас не устраивает то, что некоторые частные решения являются комплексно значными функциями. Поэтому поставим задачу заменить эти решения другими, которые были бы действительными функциями. Используя формулы Эйлера , преобразуем функции  следующим образом:

,

.

**Лемма 2.** Если функция  – решение ЛОДУ (1), то  и  тоже будут решениями этого уравнения.

► По условию имеет равенство . Но

.

Следовательно,  и  являются решениями уравнения (1). ◄

Тогда по лемме 2 функции  и  являются решениями уравнения (1).

Заменяя  и  в (4) функциями  получим систему  различных частных решений уравнения (1):

, , . (5)

Докажем, что эта система функций – фундаментальна.

Преобразуем определитель Вронского для функций (5) так, чтобы он выражался через определитель Вронского, составленный для системы функций (4). Для этого складывая и вычитая функции , выразим функции  через . Затем вынесем  и к 1-му столбцу прибавим 2-ой. Далее из 2-го столбца вычитаем 1-ый. В результате получим





По доказанному выше , поэтому и . Следовательно, система функций (5) является фундаментальной и общее решение уравнения (1) может быть записано в следующем виде:

.

Итак, каждой паре комплексно-сопряженных корней  в общем решении будет соответствовать группа слагаемых вида:

.

**Пример 2.** Пусть корни характеристического многочлена для некоторого

ЛОДУ следующие: .

Общее решение этого уравнения:

.

**3) Все корни характеристического уравнения (2) действительные, но среди корней имеются кратные.**

Пусть какой-то корень  характеристического уравнения имеет кратность . Тогда этот корень позволяет составить только одно решение , поэтому надо искать недостающие  решений.

**Докажем утверждение**: Каждому корню  характеристического уравнения кратности  отвечает  различных решений дифференциального уравнения (1): .

► **а)** Предположим вначале, что характеристическое уравнение имеет корень  кратности . Тогда характеристическое уравнение имеет вид

,

а соответствующее линейное однородное уравнение будет иметь вид

.

Легко догадаться, что это уравнение имеет частные решения: . В этом случае утверждение доказано.

**б)** Пусть теперь характеристическое уравнение имеет корень  кратности . Сделаем в уравнении (1) замену искомой функции по формуле  (6). В силу свойств ЛДУ (п.3.§3) замена искомой функции приведет снова к линейному однородному уравнению -го порядка. Покажем, что это будет ЛДУ с постоянными коэффициентами. Используя формулу Лейбница для производных высших порядков от произведения двух функций, найдем производные от функции (6):

. (7)

Заменяя в уравнении (1) функцию  и ее производные соответствующими выражениями (6) и (7), получим относительно функции  линейное однородное

уравнение -го порядка с постоянными коэффициентами:

. (8)

Пусть

, (9),

, (10)

характеристические уравнения соответственно для уравнения (1) и преобразо-

ванного уравнения (8). Так как зависимость между решениями уравнений (1) и (8) задается формулой (6), то имеем равенство:. Отсюда получаем зависимость между корнями характеристических уравнен ий (9) и (10):. Поэтому, если , то . Причем кратность корня сохраняется. Так как характеристическое уравнение (10) имеет корень  кратности , то согласно пункту а) уравнение (8) будет иметь следующие частные решения . Тогда в силу формулы (6) уравнение (1) будет иметь решения

. ◄

**Докажем, что найденные таким образом решения составляют фундаментальную систему.**

► Допустим, что характеристическое уравнение для (1) имеет следующие корни:  - кратности ,  - кратности  и так далее,  - кратности , причем, . Согласно установленному выше дифференциальное уравнение имеет в этом случае  решений:

,

 (11)

.

Докажем, что полученная система функций линейно независимая. Это можно сделать, рассматривая определитель Вронского, составленный для функций. Но мы докажем иначе, пользуясь методом от противного. Допустим, что полученная система функций – линейно зависимая. Тогда существуют коэффициенты



(не все равные нулю) такие, что имеют место тождества

, (12)

или

. (13)

 – многочлены степени не выше , не равные тождественно нулю.

Действительно, если какой-либо из , то мы можем соответствующий член отбросить в тождестве (13). Все же , так как по допущению не все коэффициенты  равны нулю.

Разделив обе части тождества (13) на , получим

. (14)

Продифференцируем (14)  раз. Предварительно заметим, что

,

где  – многочлен той же степени, что и . В результате дифференцирования первое слагаемое, которое имеет степень не выше , исчезнет, остальные члены после дифференцирования будут представлять произведение многочленов тех же степеней, что и до дифференцирования, на соответствующие показательные функции. Тождество примет вид:

,

Далее, делим на : . После диф-

ференцирования  раз, исчезнет многочлен , и так далее. В итоге, получим

.

Пришли к противоречию, так как многочлен  обращается в нуль не более чем в  точках. Полученное противоречие доказывает, что система – линейно независима. ◄

Согласно теореме 3(п.3§4) общее решение в рассматриваемом случае запишется в следующем виде :

 (14)

**Пример 3.** Проинтегрировать уравнение .

Характеристическое уравнение  имеет корень  кратности 3. Поэтому общее решение уравнения:

.

**4. Среди корней характеристического уравнения имеются кратные** **комплексные корни.**

Так как в рассуждениях предыдущего пункта не использовался тот факт, что корень характеристического уравнения есть действительное число, то очевидно, что все результаты о кратных корнях характеристического уравнения будут относится и к случаю кратных комплексных корней.

Допустим характеристическое уравнение имеет пару комплексно сопряженных корней  кратности . Тогда в силу результатов предыдущего пункта им будет отвечать  решений:

,

. (15)

Согласно лемме 2 (п.2 §6), утверждаем, что характеристическому корню  будут отвечать  действительных решений:

 (16)

которые являются соответственно действительными и мнимыми частями решений: . Решения уравнения, соответствующие характеристическому корню  не дадут никаких новых решений и нам достаточно  решений, которые соответствуют характеристическому корню . Поэтому систему функций (15) можно заменить системой (16), состоящей из  действительных решений уравнения.

Итак, в общем решении уравнения (1) паре комплексных сопряженных корней  кратности  будет соответствовать группа слагаемых

.

**Пример 4.** Пусть характеристический многочлен для некоторого

ЛОДУ имеет корень  кратности 2.

Общее решение этого уравнения:

.

**3. Уравнения, приводящиеся к ЛОДУ**

**с постоянными коэффициентами. Уравнение Эйлера.**

**Определение.** *Уравнением Эйлера* *называется уравнение вида*

, где .

Уравнение Эйлера – это ЛОДУ с переменными коэффициентами, которое сводится заменой независимой переменной к ЛОДУ с постоянными коэффициентами.

Ранее отмечалось, что при произвольной замене независимой переменной ( - дифференцируемая и обратимая функция) ЛОДУ преобразуется снова в ЛОДУ (§3 п.3).

Сделаем замену независимой переменной по формуле



Покажем, что при такой замене мы прейдем к ЛОДУ с постоянными коэффициентами. Для этого выразим все производные  через производные .

Имеем

.

Умножая обе части этого равенства на  получим

. (2)

Дифференцируем (2) по :

,

.

Умножая обе части этого равенства на  получим

. (3)

Методом математической индукции можно доказать, что

, где .

Заменяя в уравнении Эйлера произведения  соответствующими выражениями, получим ЛОДУ с постоянными коэффициентами:

. (4)

Решив его и заменяя в полученном решении , получим решение уравнения Эйлера.

**Пример.** Проинтегрировать уравнение .

Делая замену независимой переменной по формуле , придем к уравнению

.

Его общее решение:

.

Подставляя в эту функцию , получим общее решение исходного уравнения:

,

.

**Замечание.** На практике, при интегрировании уравнения Эйлера можно поступать иначе, то есть не записывать преобразованное уравнение с постоянными коэффициентами, а сразу искать решение исходного уравнения в виде . Действительно, .

Подставляя  в исходное уравнение и разделив на , получим нужное характеристическое уравнение:

,

,

.

Характеристическому корню  кратности 1 будет отвечать решение , так как .

Если  - корень, например, кратности 2 и , то в общем решении уравнения ему отвечает выражение:

.

Если характеристическое уравнение имеет пару сопряженных комплексных корней , то им в общем решении отвечает выражение:

.

**Замечание.** Чтобы получить решение уравнения для **,** нужно решить

уравнение для  и заменить в полученном решении  на . Чтобы получить решение уравнения на всей числовой оси, необходимо  заменить на . Если перед  стоит , то эту замену можно не делать (в силу произвольности ), но, если в общем решении есть , то его необходимо заменить на .