Víctor Ballester
NIU:1570866
Maig 2020

Fixat $\alpha \in \mathbb{Q}$, sigui $f : M_2(\mathbb{Q}) \to M_2(\mathbb{Q})$ l'aplicació definida per:

$$f(A) = A \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & 1 \end{pmatrix} A$$

per a tota $A \in M_2(\mathbb{Q})$.

1. Calculeu el polinomi característic de f.

   Sigui $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ on $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$. Aleshores, per la definició de f, tenim:

$$f(A) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & \alpha a + b \\ d & \alpha c + d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha c & \alpha d \\ a + c & b + d \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} b - \alpha c & \alpha a + b - \alpha d \\ -a - c + d & -b + \alpha c \end{pmatrix}$$

   Ara calculem la matriu de f respecte la base canònica de $M_2(\mathbb{Q})$. Així obtenim:

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$f\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
$$f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -\alpha & 0 \\ -1 & \alpha \end{pmatrix}$$
$$f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   D'aquesta manera podem obtenim fàcilment la matriu de f respecte la base canònica:

$$A = [f]_{Can(M_2(\mathbb{Q}))} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\alpha & 0 \\ \alpha & 1 & 0 & -\alpha \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & \alpha & 0 \end{pmatrix}$$

   Ara ja podem calcular el polinomi característic de f.

$$p_f(x) = \det(A - xI_4) = \begin{vmatrix} -x & 1 & -\alpha & 0 \\ \alpha & 1-x & 0 & -\alpha \\ -1 & 0 & -1-x & 1 \\ 0 & -1 & \alpha & -x \end{vmatrix} \overset{F_1 \to F_1 + F_4}{=} \begin{vmatrix} -x & 0 & 0 & -x \\ \alpha & 1-x & 0 & -\alpha \\ -1 & 0 & -1-x & 1 \\ 0 & -1 & \alpha & -x \end{vmatrix} =$$
$$= -x \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ \alpha & 1-x & 0 & -\alpha \\ -1 & 0 & -1-x & 1 \\ 0 & -1 & \alpha & -x \end{vmatrix} \overset{C_4 \to C_4 - F_1}{=} -x \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 1-x & 0 & -2\alpha \\ -1 & 0 & -1-x & 2 \\ 0 & -1 & \alpha & -x \end{vmatrix} =$$
$$= -x \begin{vmatrix} 1-x & 0 & -2\alpha \\ 0 & -1-x & 2 \\ -1 & \alpha & -x \end{vmatrix} = -x[x(1-x)(1+x) + 2\alpha(1+x) - 2\alpha(1-x)] = -x[x(1-x^2) + 4\alpha x] =$$
$$= x^2(x^2 - 4\alpha - 1)$$

   Així el polinomi característic de f és $p_f(x) = x^2(x^2 - 4\alpha - 1) = x^4 - (4\alpha + 1)x^2$.

2. Per a quins valors de α és f diagonalitzable?

   Primer de tot, observem que f té un valor propi, el 0, amb multiplicitat algebraica 2 independent del valor de α. Sabem que perquè f sigui diagonalitzable, en particular, el polinomi característic de f no pot tenir factors irreductibles de grau major a 1. Per tant, en el nostre cas, perquè f sigui diagonalitzable hem de poder descompondre el polinomi $x^2 - 4\alpha - 1$ en producte de dos polinomis de grau 1 amb coeficients racionals. Així, tenim que si es compleix $x^2 - 4\alpha - 1 = (x - z)(x + z)$ per algun $z \in \mathbb{Q}$ tindrem que f diagonalitza. D'aquí és dedueix fàcilment que $z^2 = 4\alpha + 1$, és a dir, $\alpha = \frac{z^2-1}{4}$. Observem que si $z = 0$ ($\alpha = -1/4$), cal estudiar amb més detall el problema ja que aleshores f tindrà un sol valor propi, el 0, amb multiplicitat algebraica 4. Ara bé, sabem que si f serà diagonalitzable si $\dim(\ker(f - 0id)) = 4$. Per tant, per aquest cas particular, és suficient estudiar $\ker(f)$.

$$\ker(f) = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{Q} | A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \}$$

   Per calcular el $\ker(f)$ solucionem el sistema homogeni:

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1/4 & 0 \\ -1/4 & 1 & 0 & 1/4 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1/4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1/4 & 0 & 0 \\ -1/4 & 1 & 0 & 1/4 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1/4 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{\sim}{F_4 \to F_4 + F_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1/4 & 0 & 0 \\ -1/4 & 1 & 0 & 1/4 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{\sim}{C_1 \to C_1 + C_4}$$
$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{\sim}{F_2 \to F_2 - F_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{\sim}{F_3 \to F_3 - 4F_2}$$
$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{\sim}{F_1 \to F_1 + F_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & -1/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{\sim}{F_2 \to -4F_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

   Per tant, tenim que les solucions generals al sistema d'equacions són $(x, y, z, t) = (x, -t/4, t, t)$ i per tant, $\ker(f) = \langle (1, 0, 0, 0), (0, -1, 4, 4) \rangle$. Observem directament que $\dim(\ker(f)) = 2 \neq 4$ i, per tant, f no diagonalitza quan $\alpha = -1/4$ ($z = 0$). Per tant, tenim que els únics valors de α perquè f diagonalitzi són expressions del tipus $\alpha = \frac{z^2-1}{4}$ $\forall z \in \mathbb{Q}, z \neq 0$.