Seminari d'Àlgebra Lineal **1er. de grau en Matemàtiques**
Exercicis per entregar **Curs 2019–2020**

---

1. Considereu la matriu
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & -4 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$
Feu canvis elementals per files i columnes per convertir-les a la forma $S = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ amb I_r una matriu identitat de mida $r \times r$. Trobeu P i Q tals que $PAQ = S$.

2. Sigui $A \in M_{m\times\ell}(K)$ i $B \in M_{\ell\times n}(K)$. Demostreu que
$$AB = \sum_{k=1}^{\ell} A_{*k}B_{k*}.$$
Demostreu també que el rang de cadascun dels summands és com a molt 1. (Nota: donada una matriu C, denotem per C_{i*} la seva fila i-èssima i per C_{*j} la seva columna j-èssima.).

3. Demostreu que si $A \in M_{m\times n}(K)$ té rang exactament n, aleshores es pot trobar una PAQ-reducció d'A amb $Q = I_n$, la identitat de mida n.