Víctor Ballester
NIU:1570866
Març 2020

---

1. Sigui $f : E \longrightarrow E$ una aplicació lineal satisfent $f^2 = f$.

   (a) Demostreu que, si f és invertible, aleshores $f = \mathrm{id}_E$.
   Com que f és invertible, existeix una aplicació $g : E \longrightarrow E$ tal que $f \circ g = g \circ f = \mathrm{id}_E$. Llavors tenim que:

$$\begin{aligned} id_E &= f \circ g && \text{Per definició de la inversa.} \\ &= f^2 \circ g && \text{Per definició.} \\ &= f \circ (f \circ g) && \text{Per la propietat associativa} \\ &= f \circ id_E && \text{Per definició de la inversa.} \\ &= f \end{aligned}$$

□

   (b) Demostreu que $E = \text{Ker } f \oplus \text{Imf } f$.
   Sigui $v \in E$. Aquest vector v el podem escriure de la següent forma: $v = f(v) + (v - f(v))$. Veiem clarament que el primer terme de la dreta de l'expressió $(f(v))$ pertany a la imatge de f. Hem de veure que l'altre terme $(v - f(v))$ pertany al nucli. Definim $u = v - f(v)$ i vegem que $u \in \text{Ker } f$.

$$\begin{aligned} u &= v - f(v) \\ f(u) &= f(v - f(v)) \\ f(u) &= f(v) - f^2(v) \\ f(u) &= f(v) - f(v) \\ f(u) &= 0 \end{aligned}$$

   I, per tant, $u = v - f(v) \in \text{Ker } f$. Així, hem vist que $E = \text{Ker } f + \text{Imf } f$. Hem de veure ara que la suma és directa, és a dir, $\text{Ker } f \cap \text{Imf } f = 0$. Ho farem agafant un vector de la intersecció i veient que és el vector zero. Sigui $\omega \in \text{Ker } f \cap \text{Imf } f$. En particular com que $\omega \in \text{Ker } f$ tenim que $f(\omega) = 0$. A més, com que $\omega \in \text{Im } f$, $\exists\, v \mid f(v) = \omega$. Ara bé,

$$\begin{aligned} f(v) &= \omega \\ f^2(v) &= f(\omega) \\ f^2(v) &= 0 \\ f(v) &= 0 \end{aligned}$$

   I, per tant, comparant la primera i la última equació obtenim $\omega = 0$ com volíem. Finalment, $E = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$. □

   (c) Demostreu que, si E és de dimensió finita, aleshores existeix una base $\mathcal{B}$ de E tal que

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   on $k = \dim(\text{Im } f)$.
   Sigui $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ dues bases de E i siguin $[f]_{\mathcal{B}}, [f]_{\mathcal{B}'}$ les matrius associades a l'aplicació d'aquestes bases. Sabem que rang $[f]_{\mathcal{B}} =$ rang $[f]_{\mathcal{B}'} = \dim(\text{Im } f)$. A més, pel teorema de la PAQ-reducció existeixen matrius invertibles P, Q tals que $P[f]_{\mathcal{B}'}Q = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Si definim P com la matriu canvi de base de $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$, és a dir, $P = [\mathrm{id}]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$ i Q com la matriu canvi de base de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$, és

a dir, $Q = [\mathrm{id}]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ tenim que $P[f]_{\mathcal{B}'}Q = [f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Per tant, hem trobat una base $\mathcal{B}$ tal que a partir d'un base qualsevol $\mathcal{B}'$ i fent els canvis de base corresponents obtenim que la matriu associada a f en la base $\mathcal{B}$ és $\begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. (a) Doneu, per a tot $n \geq 2$, un exemple d'aplicació $f_n : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ que satisfaci $f_n^2 = f_n$, amb $f_n \neq \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}, 0_{\mathbb{R}^n}$.
Per a $n \geq 2$ considerem l'aplicació $f_n : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definida per $f_n(v_1, \dots, v_n) = (\frac{v_1+\dots+v_n}{n}, \dots, \frac{v_1+\dots+v_n}{n})$.

(b) Podeu trobar per cada $2 \leq k \leq n$ una aplicació $f_{k,n} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ diferent de la identitat tal que $f_{k,n}^k = f_{k,n}$ amb k la potència mínima? (És a dir, tal que $f_{k,n}^l \neq f_{k,n}$ per a tot $l < k$?
Agafem una $f_{k,n}$ tal que vagi permutant $k-1$ components d'un vector de $\mathbb{R}^n$, és a dir, definim la funció $f_{k,n}$ de la següent manera:

$$\begin{aligned} f_{k,n} : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (\alpha_1, \dots, \alpha_n) &\longmapsto (\alpha_{k-1}, \alpha_1 \dots, \alpha_{k-2}, \alpha_k, \dots, \alpha_n) \end{aligned}$$

Veiem clarament que per $n = 2$, obtindríem la identitat i, per tant, la funció $f_{k,n}$ només és vàlida per $n > 2$. Per $n = 2$ podem agafar la funció definida a l'apartat anterior, $f_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida per $f_2(x, y) = (\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2})$. Per l'únic valor possible de k, $k = 2$, aquesta funció verifica que $f_2^2 = f_2$.