Víctor Ballester
NIU:1570866
Novembre 2019

---

1. Demostreu que si $m > n$ aleshores $\det(AB) = 0$.

   Sigui $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ i $B \in \mathcal{M}_{n\times m}(K)$. Sabem que $rang(A) \leq n$ i que $rang(B) \leq n$ tenint en compte que $n < m$. A més, les matrius A i B són de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nm} \end{pmatrix}$$

   Ara bé, podem reduir les matrius A i B, fent transformacions elementals, a unes matrius $A' = PA$ i $B' = BQ$ (amb $P \in \mathcal{M}_m(K)$ i $Q \in \mathcal{M}_m(K)$, matrius invertibles) de la forma $A' = \begin{pmatrix} I_r \\ 0 \end{pmatrix}$ i $B' = \begin{pmatrix} I_s & 0 \end{pmatrix}$ on r i s són els rangs de les matrius A' i B', respectivament i, per tant, també són els rangs de A i B. Llavors, el rang del producte AB serà el mateix que el del producte $A'B' = (PA)(BQ)$. Si anomenem $C = A'B'$, tenim que:

$$C = A'B' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

   on $C \in \mathcal{M}_m(K)$. Abans hem suposat que ambdues matrius (A i B) tenen rang màxim (ja que hem escrit n pivots a les seves respectives matrius esglaonades) així que com a màxim la matriu C tindrà $rang = n$. Però com que C és de mida $m \times m$ i $m > n$, aleshores $\det C = 0$. Llavors tenim que:

$$\begin{aligned} C = A'B' = (PA)(BQ) &= P(AB)Q \\ \det C &= \det[P(AB)Q] \\ \det C &= \det P \det(AB) \det Q \end{aligned}$$

   Com que P i Q són matrius invertibles, sabem que $\det P \neq 0$ i $\det Q \neq 0$. D'aquesta manera podem dividir ambdós costats de l'equació per $(\det P \det Q)$. Així doncs:

$$\begin{aligned} \det C &= \det P \det(AB) \det Q \\ 0 &= \det P \det(AB) \det Q \\ 0 &= \det(AB) \end{aligned}$$

$\square$

2. Trobeu matrius

   $D = \begin{pmatrix} I_m & D_1 \\ 0 & D_2 \end{pmatrix}$ i $E = \begin{pmatrix} E_2 & E_1 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$ tals que $\begin{pmatrix} I_m & -A \\ B & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ B & I_n \end{pmatrix} D = E \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ B & I_n \end{pmatrix}$.

   Per tal de simplificar el màxim possible les matrius D i E considerarem $m = n = 1$, per tant, $I_m, I_n, D_1, D_2, E_1, E_2, A, B \in \mathcal{M}_1(K)$. Considerem, a més, $F = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ B & I_n \end{pmatrix}$ i $C = \begin{pmatrix} I_m & -A \\ B & I_n \end{pmatrix}$.

Fixem inicialment els valors de la matriu D: $D_1 = 2$ i $D_2 = 1$. LLavors:

$$C = FD$$
$$\begin{pmatrix} I_m & -A \\ B & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ B & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m & D_1 \\ 0 & D_2 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -A \\ B & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ B & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De la definició de producte de matrius, operant sabem que $-A = 2$ i $1 = 2B + 1$. Per tant, tenim que $A = -2$ i $B = 0$. Procedint de manera anàloga per a la matriu E, tenim que:

$$C = EF$$
$$\begin{pmatrix} I_m & -A \\ B & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_2 & E_1 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ B & I_n \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_2 & E_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De la definició de producte de matrius, operant sabem que $E_2 = 1$ i $E_1 = 2$.

Finalment:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nota: Estrictament hauria de representar les matrius D i E com $D = \begin{pmatrix} (1) & (2) \\ (0) & (1) \end{pmatrix}$ i $E = \begin{pmatrix} (1) & (2) \\ (0) & (1) \end{pmatrix}$, ja que són matrius creades a parir d'altres matrius (en aquest cas de mida 1×1). Però com que ho hem volgut simplificar, hem agafat les submatrius de mida 1×1 que en realitat són els números tal i com els coneixem, per això les submatrius anteriors estan escrites sense els seus respectius parèntesis.

3. Useu l'anterior per concloure que $\det(I_m + AB) = \det(I_n + BA)$. Més en general, proveu que si $\lambda \in K \setminus \{0\}$, $\det(\lambda I_n + BA) = \lambda^{n-m} \det(\lambda I_m + AB)$.

   Ho demostrarem pel cas general. De manera general i agafant les matrius $C = \begin{pmatrix} \lambda I_m & -A \\ B & I_n \end{pmatrix}$ i $F = \begin{pmatrix} \lambda I_m & 0 \\ B & I_n \end{pmatrix}$, sabem pel seminari 1 que multiplicar matrius per blocs es procedeix de igual manera que multiplicar matrius amb coeficients. Per tant:

$$C = FD = \begin{pmatrix} \lambda I_m & 0 \\ B & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m & D_1 \\ 0 & D_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda I_m^2 & \lambda I_m D_1 \\ B I_m & BD_1 + I_n D_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda I_m & \lambda D_1 \\ B & BD_1 + D_2 \end{pmatrix}$$

$$C = EF = \begin{pmatrix} E_2 & E_1 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda I_m & 0 \\ B & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_2 \lambda I_m + E_1 B & E_1 I_n \\ I_n B & I_n^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda E_2 + E_1 B & E_1 \\ B & I_n \end{pmatrix}$$

   Ara igualant tots els termes de C tenim que:

$$C = FD = EF \tag{1}$$
$$\lambda I_m = \lambda I_m = \lambda E_2 + E_1 B \tag{2}$$
$$-A = \lambda D_1 = E_1 \tag{3}$$
$$B = B = B \tag{4}$$
$$I_n = BD_1 + D_2 = I_n \tag{5}$$

Combinant les equacions 2 i 3 i les equacions 5 i 3, tenim que:

$$\begin{aligned} \lambda I_m &= \lambda E_2 + E_1 B & I_n &= BD_1 + D_2 \\ \lambda I_m &= \lambda E_2 + (-A)B & I_n &= B(-\frac{1}{\lambda}A) + D_2 \\ \lambda E_2 &= \lambda I_m + AB & D_2 &= I_n + \frac{1}{\lambda}BA \\ \lambda E_2 &= \lambda I_m + AB & \lambda D_2 &= \lambda I_n + BA \end{aligned}$$

Però clar de l'equació 1 i, tenint en compte l'última igualtat i els conceptes sobre determinants en matrius per blocs del seminari 2, sabem que:

$$\begin{aligned} FD &= EF \\ \det(FD) &= \det(EF) \\ \det F \det D &= \det E \det F \\ \det D &= \det E \\ \det I_m \det D_2 &= \det E_2 \det I_n \\ \det D_2 &= \det E_2 \\ \lambda^n \lambda^m \det D_2 &= \lambda^n \lambda^m \det E_2 && \text{multiplicant ambdós termes de la igualtat per } \lambda^n\lambda^m. \\ \lambda^n \det D_2 &= \lambda^{n-m} \lambda^m \det E_2 \\ \det(\lambda D_2) &= \lambda^{n-m} \det(\lambda E_2) && \text{tenint en compte que } D_2 \text{ té } n \text{ files i que } E_2 \text{ té } m \text{ files.} \\ \det(\lambda I_n + BA) &= \lambda^{n-m} \det(\lambda I_m + AB) \end{aligned}$$

Ara si posem $\lambda = 1$, tenim que $\det(I_n + BA) = \det(I_m + AB)$ que és la primera igualtat que es volia demostrar.

$\square$

4. Sigui $C \in \mathcal{M}_n(K)$. Demostreu que $\forall k \in \{1, \dots, n\}$ el coeficient λ^{n-k} del polinomi $\det(\lambda I_n + C)$ és igual a

$$\sum_S \det C_S^S$$

on la suma recorre tots els subconjunts $S \subseteq \{1, \dots, n\}$ de tamany k (n'hi ha $\binom{n}{k}$).

Abans de demostrar-ho, volem deixar clar uns conceptes relacionats amb les propietats dels determinants:

Sigui $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Per calcular el determinant de la matriu $\lambda I_n + A$ procedirem de la següent manera:

$$\det(\lambda I_n + A) = \begin{vmatrix} a_{11}+\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}+\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}+\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}+\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}+\lambda \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}+\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn}+\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}+\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn}+\lambda \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \lambda & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & 0 & a_{33}+\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & a_{n3} & \cdots & a_{nn}+\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{32} & a_{33}+\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn}+\lambda \end{vmatrix} +$$

$$+\begin{vmatrix}\lambda & 0 & a_{13} & \cdots & a_{1n}\\ 0 & \lambda & a_{23} & \cdots & a_{2n}\\ 0 & 0 & a_{33}+\lambda & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & a_{n3} & \cdots & a_{nn}+\lambda\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix}\lambda & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & \lambda\end{vmatrix}$$

Així el polinomi $P(\lambda)$ serà de la forma $P(\lambda) = \det(\lambda I_n + A) = b_n\lambda^n + b_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + b_1\lambda + b_0$ amb $b_n = 1$ i $b_0 = \det A$.

Tornant al problema, demostrarem per inducció sobre l'enter n que el coeficient λ^{n-k} del polinomi $\det(\lambda I_n + C)$ és igual a

$$\sum_S \det C_S^S$$

on la suma recorre tots els subconjunts $S \subseteq \{1, \dots, n\}$ de tamany k.

El cas $n = 1$ és completament obvi, ja que la matriu $X = \lambda I_n + C = \big(\lambda + c_{11}\big)$ i el determinant d'aquesta matriu de mida 1×1 és l'únic element d'aquesta, per tant: $\det X = \lambda + c_{11}$. El coeficient de λ és 1 i fent $k = 0$ correspon a $\sum_S \det C_S^S = 1$, ja que subconjunts $S \subseteq \{1, \dots, n\}$ de tamany 0, n'hi ha exactament 1.

Ara fixem un enter α per el qual es verifica que el coeficient $\lambda^{\alpha-k}$ del polinomi $\det(\lambda I_\alpha + C)$, amb $C \in \mathcal{M}_\alpha(K)$, és igual a $\sum_S \det C_S^S$ on la suma recorre tots els subconjunts $S \subseteq \{1, \dots, \alpha\}$ de tamany k (n'hi ha $\binom{\alpha}{k}$). Ho demostrarem pel cas $\alpha + 1$.

Ara bé nosaltres podem esglaonar la matriu C fent transformacions elementals per files de manera que ens quedi una matriu $C^\sim$ de la forma:

$$C^\sim = \begin{pmatrix} c_{11}^\sim & * & \cdots & *\\ 0 & c_{22}^\sim & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & *\\ 0 & \cdots & 0 & c_{\alpha\alpha}^\sim\end{pmatrix}$$

Sabem que el polinomi $P(\lambda) = \det(\lambda I_\alpha + C) = \lambda^\alpha + c_{\alpha-1}\lambda^{\alpha-1} + \cdots + c_1\lambda + c_0$, on $c_0 = \prod_i^\alpha c_{ii}^\sim = \det C$. Multiplicant el polinomi $P(\lambda)$ per el un valor $\lambda + d$, podem crear un altre polinomi $P'(\lambda)$ de la forma:

$$P'(\lambda) = (\lambda + d)P(\lambda) = (\lambda + d)(\lambda^\alpha + c_{\alpha-1}\lambda^{\alpha-1} + \cdots + c_{\alpha-k}\lambda^{\alpha-k} + \cdots + c_1\lambda + c_0) = \lambda^{\alpha+1} +$$
$$+ d\lambda^\alpha + c_{\alpha-1}\lambda^\alpha + c_{\alpha-1}d\lambda^{\alpha-1} + \cdots + c_{\alpha-k}\lambda^{\alpha-k+1} + c_{\alpha-k}d\lambda^{\alpha-k} + \cdots + c_1\lambda^2 + c_1d\lambda + c_0\lambda + c_0d =$$
$$= \lambda^{\alpha+1} + (d + c_{\alpha-1})\lambda^\alpha + (c_{\alpha-1}d + c_{\alpha-2})\lambda^{\alpha-1} + \cdots + (c_{\alpha-k+1}d + c_{\alpha-k})\lambda^{\alpha-k+1} + \cdots + (c_1d + c_0)\lambda + c_0d$$

Pel que hem vist a la introducció d'aquest apartat, el coeficient $c_0d = \det C'$ amb $C' \in \mathcal{M}_{\alpha+1}(K)$. Però $c_0 = \det C$, per tant, podem escriure la matriu C', en la seva forma esglaonada ($C'^\sim$), de la següent manera:

$$C'^\sim = \begin{pmatrix} c_{11}'^\sim & * & * & \cdots & *\\ 0 & c_{22}'^\sim & * & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & *\\ \vdots & \ddots & \ddots & c_{\alpha\alpha}'^\sim & *\\ 0 & \cdots & 0 & 0 & d\end{pmatrix}$$

Tornant al polinomi $P'(\lambda)$, sabem per H.I. que el coeficient de $\lambda^{(\alpha+1)-k}$ ($c_{\alpha+1-k}^\sim$) és igual a $\sum_{S'} \det C_{S'}'^{S'}$, on la suma recorre tots els subconjunts $S' \subseteq \{1, \dots, \alpha + 1\}$ de tamany k (n'hi ha $\binom{\alpha+1}{k}$). Però clar, $c_{\alpha+1-k}^\sim = c_{\alpha-k+1}d + c_{\alpha-k} = c_{\alpha-(k-1)}d + c_{\alpha-k}$. Del primer terme de la dreta tenim $\binom{\alpha}{k-1}$ subsumands i del segon terme de la dreta en tenim $\binom{\alpha}{k}$. Aplicant la relació $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$, tenim que el terme de l'esquerra de l'equació té $\binom{\alpha+1}{k}$ subsumands, com havíem dit anteriorment. Ara falta veure que siguin els mateixos subsumads. Però això és directe ja que els sumands de $\sum_{S'} \det C'^{S'}_{S'}$ seran tots els sumands de $\sum_S \det C^S_S$ més la suma dels determinants obtinguts de combinar els elements c_{ii} de C, $i \in S$, en grups de $k-1$ elements i multiplicar-los tots per l'element d. Però això últim és exactament $c_{\alpha-k+1}d$, amb la qual cosa ja hem acabat.

$\square$

5. Demostreu que $\forall S \subseteq \{1, \ldots, n\}$ de tamany m es té

$$\det((BA)^S_S) = \det A_S \det B^S$$

i deduïu la fórmula

$$\det(AB) = \sum_S \det A_S \det B^S$$

on la suma recorre tots els subconjunts $S \subseteq \{1, \ldots, n\}$ de tamany m (n'hi ha $\binom{n}{m}$).

Considerem matrius $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ i $B \in \mathcal{M}_{n\times m}(K)$ de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nm} \end{pmatrix}$$

Donat un subconjunt $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_m\}$ fix, WLOG puc reorganitzar les matrius A i B de manera que em quedin de la forma següent:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1S_1} & a_{1S_2} & \cdots & a_{1S_m} & * & \cdots & * \\ a_{2S_1} & a_{2S_2} & \cdots & a_{2S_m} & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{mS_1} & a_{mS_2} & \cdots & a_{mS_m} & * & \cdots & * \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{S_11} & b_{S_12} & \cdots & b_{S_1m} \\ b_{S_21} & b_{S_22} & \cdots & b_{S_2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{S_m1} & b_{S_m2} & \cdots & b_{S_mm} \\ * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & * & \cdots & * \end{pmatrix}$$

és a dir:

$$A = \left(\begin{array}{c|ccc} \multirow{3}{*}{A_S} & * & \cdots & * \\ & \vdots & & \vdots \\ & * & \cdots & * \end{array}\right) \qquad B = \left(\begin{array}{ccc} & B^S & \\ \hline * & \cdots & * \\ \vdots & & \vdots \\ * & \cdots & * \end{array}\right)$$

on A_S denota la matriu $m \times m$ que s'obté en sel·leccionar les columnes de A indicades pels elements de S i B denota la matriu $m \times m$ que s'obté de sel·leccionar les files corresponents de B. Per tant, anomenant $C \in \mathcal{M}_n(K)$ a la matriu resultant del producte de matrius BA, aquesta serà de la forma:

$$C = BA = \left(\begin{array}{ccc} & B^S & \\ \hline * & \cdots & * \\ \vdots & & \vdots \\ * & \cdots & * \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|ccc} A_S & * & \cdots & * \\ & \vdots & & \vdots \\ & * & \cdots & * \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} & & & * & \cdots & * \\ & B^S A_S & & \vdots & & \vdots \\ & & & * & \cdots & * \\ \hline * & \cdots & * & * & \cdots & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & \cdots & * & * & \cdots & * \end{array}\right)$$

per la definicó de producte de matrius per blocs. Sel·leccionant la submatriu obtinguda escollint les entrades c_{ij} de C amb $i, j \in S$, ens trobem que és exactament $B^S A_S$.

Retocant la igualtat de l'enunciat, podem arribar a la següent igualtat:

$$\begin{aligned}\det((BA)_S^S) &= \det A_S \det B^S \\ \det((BA)_S^S) &= \det B^S \det A_S \\ \det((BA)_S^S) &= \det(B^S A_S)\end{aligned}$$

Fa un moment hem demostrat que $(BA)_S^S = B^S A_S$, per tant $\det((BA)_S^S) = \det(B^S A_S)$.

□

Per a la segona part volem demostrar que $\det(AB) = \sum_S \det A_S \det B^S$. Per a fer-ho, partim de la igualtat anterior:

$$\begin{aligned}\det((BA)_S^S) &= \det A_S \det B^S \\ \sum_S \det((BA)_S^S) &= \sum_S \det A_S \det B^S\end{aligned}$$

Ara bé, a l'apartat 4 hem vist que el coeficient de λ^{n-m} del polinomi $\det(\lambda I_n + BA)$ és igual a $\sum_S \det((BA)_S^S)$ on la suma recorre tots els subconjunts $S \subseteq \{1, \dots, n\}$ de tamany m. Però per l'apartat 3 sabem que $\det(\lambda I_n + BA) = \lambda^{n-m} \det(\lambda I_m + AB)$. D'aquesta manera, expandint els polinomis, tenim que:

$$\begin{aligned}\det(\lambda I_n + BA) &= \lambda^{n-m} \det(\lambda I_m + AB) \\ \lambda^n + (ba)_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + (ba)_1\lambda + (ba)_0 &= \lambda^{n-m}(\lambda^m + (ab)_{m-1}\lambda^{m-1} + \dots + (ab)_1\lambda + (ab)_0) \\ \lambda^n + (ba)_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + (ba)_1\lambda + (ba)_0 &= \lambda^m + (ab)_{m-1}\lambda^{n-1} + \dots + (ab)_1\lambda^{n-m+1} + (ab)_0\lambda^{n-m}\end{aligned}$$

Igualant els coeficients dels λ's amb mateix grau, tenim que $(ab)_0 = det(AB) = (ba)_{n-m} = \sum_S \det((BA)_S^S)$. Finalment:

$$\sum_S \det((BA)_S^S) = \det(AB) = \sum_S \det A_S \det B^S$$

□