

1. Sigui $f: E \rightarrow E$ una aplicació lineal satisfent $f^2 = f$.
 - (a) Demostreu que, si f és invertible, aleshores $f = \text{id}_E$.
 - (b) Demostreu que $E = \ker f \oplus \text{Im } f$.
 - (c) Demostreu que, si E és de dimensió finita, aleshores existeix una base \mathcal{B} de E tal que

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

on $k = \dim(\text{Im } f)$.

2.
 - (a) Doneu, per a tot $n \geq 2$, un exemple d'aplicació $f_n: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ que satisfaci $f_n^2 = f_n$, amb $f_n \neq \text{id}_{\mathbb{R}^n}, 0_{\mathbb{R}^n}$.
 - (b) Podeu trobar per cada $2 \leq k \leq n$ una aplicació $f_{k,n}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ diferent de la identitat tal que satisfaci $f_{k,n}^k = f_{k,n}$ amb k la potència mínima? (És a dir, tal que $f_{k,n}^\ell \neq f_{k,n}$ per a tot $\ell < k$).