Víctor Ballester NIU: 1570866

ALG. e. ①

① Considereu la matriu: $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & -4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

Trobeu matrius P i Q tals que $PAQ=S$ on $S=\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ on I_r és la matriu identitat $r\times r$
invertibles

$$\left(\begin{array}{ccccc|cccc} 2 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -4 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|cccc} -1 & 2 & -1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -4 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|cccc} -1 & 2 & -1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -3 & -3 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 3 & 3 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -6 & 6 & 6 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccccc|cccc} 1 & -2 & +1 & -1 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 3 & 3 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 3 & 3 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -6 & 6 & 6 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|cccc} 1 & -2 & 1 & -1 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 3 & 3 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -6 & -6 & 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|cccc} 1 & -2 & 1 & -1 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 3 & 3 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1/6 & -1/6 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccccc|cccc} 1 & -2 & 0 & 0 & -1 & -1/6 & -5/6 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & +1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1/6 & -1/6 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 5/6 & 1/6 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1/6 & -1/6 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad P=\begin{pmatrix} 5/6 & 1/6 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/6 & -1/6 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Q=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad S=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$PAQ=S$$

② Sigui $A\in M_{m\times l}(K)$ i $B\in M_{l\times p}(K)$. Demostreu que: i que el rang dels sumands és com a molt 1.

$$AB=\sum_{K=1}^{l} A_{*K}B_{K*}$$

a) Siguin $A\in M_{m\times l}(K)$ i $B\in M_{l\times m}(K)$ volem provar que $AB=\sum_{K=1}^{l} A_{*K}B_{K*}$. Aleshores aquí A_{*K} seran matrius de dimensió $m\times 1$ i B_{K*} matrius de dimensió $1\times p$. Per tant podem assegurar que la matriu $AB\in M_{m\times p}(K)$. Com que $1\leq K\leq l$, aleshores hi haurà l matrius de dimensió $m\times p$ que sumades ens donin la matriu AB buscada. Si anomenem $C=(c_{ij})=AB_{ij}$, aleshores hem de demostrar que la suma dels c^K_{ij} és igual a c_{ij}, on c^K_{ij} amb $1\leq K\leq l$ és l'element de la matriu K-èssima en la posició ij. Per tant,

$$c_{ij}=\sum_{K=1}^{l} c^K_{ij}$$

Però l'element c^K_{ij} serà producte de dos elements (de A i B).

$$A_{*K}=\begin{pmatrix} a_{1K} \\ a_{2K} \\ \vdots \\ a_{mK} \end{pmatrix} \quad B_{K*}=(b_{K1}\, b_{K2} \cdots b_{Kp}) \Rightarrow A_{*K}B_{K*}=\begin{pmatrix} a_{1K}b_{K1} & a_{1K}b_{K2} & \cdots & a_{1K}b_{Kp} \\ a_{2K}b_{K1} & a_{2K}b_{K2} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{mK}b_{K1} & \cdots & \cdots & a_{mK}b_{Kp} \end{pmatrix}$$

Per tant $c^K_{ij}=a_{iK}b_{Kj} \Rightarrow c_{ij}=\sum_{K=1}^{l} a_{iK}b_{Kj}$ que és la definició de producte de matrius

QED.

b) Considerem les dues matrius definides anteriorment ($A \in \mathcal{M}_{m\times l}(K)$ i $B \in \mathcal{M}_{l\times p}(K)$) i $A_{*K} \in \mathcal{M}_{m\times 1}(K)$ i $B \in \mathcal{M}_{1\times p}(K)$, aleshores puc fer una PAQ-reducció i una $P'BQ'$-reducció, tal que en el cas de A_{*K}, esglaonant i reduint per files ens quedaria (per a $K=1$):

$$A_{*1} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \Rightarrow A'_{*1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ i } P = \begin{pmatrix} 1/a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_{21}/a_{11} & 1 & 0 & & \vdots \\ -a_{31}/a_{11} & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ -a_{m1}/a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow PA_{*1} = A'_{*1} \Rightarrow \underset{\text{(fórmula general)}}{PA_{*K} = A'_{*K}}$$

amb $P \in \mathcal{M}_{m\times m}(K)$ i $Q = (1)$, sent $Q \in \mathcal{M}_{1\times 1}(K)$

Nota: per als altres K, procedirem de la mateixa forma, deixant el pivot a la fila K-èssima de A'_{*K}

En el cas de B faríem una $P'BQ'$ tal que; esglaonant i reduint per columnes, ens quedaria (per a $K=1$)

$$B_{1*} = (b_{11}\ b_{21}\ b_{31} \cdots b_{p1}) \Rightarrow B'_{1*} = (1\ 0\ 0 \cdots 0) \text{ i } Q' = \begin{pmatrix} 1/b_{11} & -\frac{b_{21}}{b_{11}} & -\frac{b_{31}}{b_{11}} & \cdots & -\frac{b_{p1}}{b_{11}} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B_{1*}Q' = B'_{1*} \underset{\text{(fórmula general)}}{\Rightarrow} B_{K*}Q' = B'_{K*}$$

amb $Q' \in \mathcal{M}_{p\times p}(K)$ i $P' = (1)$ sent $P' \in \mathcal{M}_{1\times 1}(K)$

Nota: per als altres K, procedirem de la mateixa forma, deixant el pivot a la columna K-èssima de B'_{K*}

Aleshores tindrem $PA_{*K}Q = A'_{*K}$ i $P'B_{K*}Q' = B'_{K*}$

A'_{*K} i B'_{K*} són de la forma $\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$ on r és el rang de la matriu identitat i per tant també de A'_{*K} (o de B'_{K*}) i això implica que també ho sigui de A_{*K} (o de B_{K*}). En el nostre cas $r=1$ per tant A_{*K} i B_{K*} tenen rang $=1$. Però ara hem de veure que $A_{*K}B_{K*}$ té rang com a màxim 1, però això és directe ja que el producte de matrius de forma $\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$ és una nova matriu de forma $\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$ que òbviament té rang $=1$

Ex: Per a $K=1$

$$A_{1K}B_{K1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} (1\ 0 \cdots 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Nota: Per als altres K es procediria de forma anàloga.

QED.

③ Demostreu que si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ té rang n, aleshores es pot trobar una PAQ-reducció d'A amb $Q = I_n$, la identitat de mida n.

Sigui $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$. Fent una PAQ-reducció obtenim una matriu $A' = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$ on r és el rang de la identitat i per tant de A'. Però com que rang $A = n$, la matriu esglaonada i reduïda per files tindrà un pivot a cada columna, això són n pivots, per tant A' serà de la forma $\left(\begin{array}{c} I_n \\ \hline 0 \end{array}\right)$. Al ser n el rang de $A \Rightarrow m \geq n$ ja que sinó no seria possible que n fos el rang de A. Per tant amb aquesta condició, podem fer transformacions elementals a A amb l'objectiu de posar 1's a la diagonal principal tal que $PA = A'$ on $P \in \mathcal{M}_{m\times m}$ i és la matriu producte de transformacions elementals i $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ \vdots & & & 0 & 1 \\ 0 & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$ és la matriu de la forma $\left(\begin{array}{c} I_n \\ \hline 0 \end{array}\right)$. Però encara no em creat la matriu Q tal que la PAQ-reducció ens doni una matriu de forma $\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$, però com que abans de crear-la ja hem obtingut el resultat esperat, l'única opció que ens queda és que Q sigui una matriu de dimensió $n\times n$ amb 1's a la diagonal i 0's fora d'ella, és a dir, $Q = I_n$

$$PA = \left(\begin{array}{c} I_n \\ \hline 0 \end{array}\right) \text{ i } PAQ = \left(\begin{array}{c} I_n \\ \hline 0 \end{array}\right) \Rightarrow Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_n$$

QED.