Entrega del Seminari Àlgebra Lineal **1er. de grau en Matemàtiques**
Espai Dual **Curs 2019-2020**

---

1. Siguin E_1, E_2, E_3 espais vectorials sobre un cos K, i siguin f i g dues aplicacions lineals,

$$f\colon E_1 \to E_2, \quad g\colon E_2 \to E_3.$$

   (a) Demostreu que $\operatorname{Im} f = \ker g$ si, i només si, $\operatorname{Im} g^* = \ker f^*$.

   (b) Aprofiteu l'apartat anterior per veure que si V i W són dos espais vectorials i $\varphi\colon V \to W$ és una aplicació lineal, aleshores φ és injectiva si, i només si, φ^* és exhaustiva, i φ és exhaustiva si, i només si, φ^* és injectiva.

2. Sigui K un cos. Sigui $E = K_n[x] = \{p(x) \in K[x] \mid \text{grau}(p(x)) \leq n\}$.

   (a) Donat $a \in K$, proveu que l'aplicació $\omega\colon E \to K$ definida per $\omega(p(x)) = p(a)$ és un element de E^*. Determineu la dimensió i una base de $\operatorname{Ker}(\omega)$.

   (b) Per $i \in \{0, \dots, n\}$, considerem l'aplicació $\omega_i\colon E \to K$ $\omega_i(p(x)) = p(i)$. Proveu que $\mathcal{B} = (\omega_0, \dots, \omega_n)$ és una base de E^* si i només si K té característica 0 o característica $p > n$. Determineu una base $(p_0(x), \dots, p_n(x))$ de E tal que $\mathcal{B}$ sigui la base dual d'aquesta base.

   (c) Ara fixem $K = \mathbb{R}$, i suposem que $n > 0$. Considerem l'aplicació:

$$\begin{array}{rccc} \alpha\colon & \mathbb{R}_n[x] & \to & \mathbb{R} \\ & p(x) & \mapsto & \int_0^1 p(x)dx \end{array}$$

      (i) Demostreu que α és una forma lineal sobre $\mathbb{R}_n[x]$.

      (ii) Pel que hem vist anteriorment, tenim que $(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$ és una base de $\mathbb{R}_n[x]^*$ on $\alpha_i(p(x)) = p(i)$. Deduïu que existeixen escalars $\lambda_0, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ tals que per a tot $p \in \mathbb{R}_n[x]$,

$$\int_0^1 p(x)dx = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i p(i).$$

      (iii) Determineu els escalars λ_i per al cas $n = 2$.