Seminari d'Àlgebra Lineal **1er. de grau en Matemàtiques**
Exercicis per entregar **Curs 2019–2020**

---

1. Sigui E l'$\mathbb{R}$-espai vectorial dels polinomis amb coeficients reals de grau menor o igual que 3, és a dir, $E = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \mid \operatorname{gr}(p(x)) \leq 3\}$. Siguin

$$F = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \in E \mid -a_0 + a_1 + a_3 = 0\},$$

$$G = \langle 1 - x - x^2 + x^3, 2 + x - x^2 \rangle.$$

   (a) Calculeu la dimensió i una base de F, G, $F \cap G$, $G + F$.

   (b) Amplieu la base de $F \cap G$ que heu trobat a una base de F i a una base de G.

2. Sigui p un primer, i sigui $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ el cos amb p elements, i considerem l'espai vectorial format pels polinomis $\mathbb{F}_p[x]$.

   (a) Donat un polinomi $f(x) \in \mathbb{F}_p[x]$, sigui $(f) = \{h(x) \in \mathbb{F}_p[x] \mid h(x)$ és múltiple de $f(x)\}$. Demostreu que (f) és un subespai de $\mathbb{F}_p[x]$.

   (b) Sigui $L = \mathbb{F}_p[x]/(f)$ l'espai quocient. Trobeu la dimensió i una base de L. Quants elements té L? Comproveu que a L el producte de classes definit a partir del producte de representants ($[g] \cdot [h] = [gh]$) està ben definit.

   (c) Suposem ara que f és irreductible a $\mathbb{F}_p[x]$ (és a dir, que no factoritza com a producte de dos polinomis de grau estrictament menor que el de f). Demostreu que la multiplicació de classes dona una estructura de cos a L. (Indicació: Per $[g] \neq 0$ considereu l'aplicació $\Phi_{[g]} : L \longrightarrow L$ donada per $\Phi_{[g]}([h]) = [gh]$ i demostreu que és bijectiva).