Víctor Ballester
NIU:1570866
Abril 2020

---

1. Siguin E_1, E_2, E_3 espais vectorials sobre un cos K, i siguin f i g dues aplicacions lineals,

$$f : E_1 \longrightarrow E_2, \qquad g : E_2 \longrightarrow E_3.$$

   (a) Demostreu que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(g)$ si, i només si, $\mathrm{Im}(g^*) = \mathrm{Ker}(f^*)$.
   Considerem les aplicacions duals de f i g:

$$\begin{aligned} f^* : E_2^* &\longrightarrow E_1^* \\ z &\longmapsto z \circ f \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} g^* : E_3^* &\longrightarrow E_2^* \\ \omega &\longmapsto \omega \circ g \end{aligned}$$

   Sigui $n = \dim(E_2) = \dim(E_2^*)$, $A = [f]_{\mathcal{B}_f, \mathcal{B'}_f}$, $B = [f^*]_{\mathcal{B'}_f^*, \mathcal{B}_f^*}$, $C = [g]_{\mathcal{B}_g, \mathcal{B'}_g}$, $D = [g^*]_{\mathcal{B'}_g^*, \mathcal{B}_g^*}$. Sabem que $A = B^t$ i $C = D^t$.

   - $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(g) \implies \mathrm{Im}(g^*) = \mathrm{Ker}(f^*)$: Agafem un element del $\mathrm{Ker}(f^*)$ i vegem que es troba a també $\mathrm{Im}(g^*)$ i viceversa:
   $z \in \mathrm{Ker}(f^*) \iff f^*(z) = 0 \iff (z \circ f)(v) = 0 \ \ \forall v \in E_1 \iff z(f(v)) = 0 \ \ \forall v \in E_1 \iff z \in (\mathrm{Im}(f))^{\mathrm{inc}}$, ja que $(\mathrm{Im}(f))^{\mathrm{inc}} = \{z \in E_2^* : z(u) = 0 \ \ \forall u \in \mathrm{Im}(f)\} \iff z \in (\mathrm{Ker}(g))^{\mathrm{inc}}$, ja que $(\mathrm{Ker}(g))^{\mathrm{inc}} = \{z \in E_2^* : z(u) = 0 \ \ \forall u \in \mathrm{Ker}(g)\} \iff z(u) = 0, \forall u \in \mathrm{Ker}(g) \iff z(u) = \omega(0), \forall u \in \mathrm{Ker}(g)$ i per alguna $\omega \in E_3^* \iff z(u) = \omega(g(u)), \forall u \in \mathrm{Ker}(g)$ i per alguna $\omega \in E_3^* \iff z(u) = (\omega \circ g)(u), \forall u \in \mathrm{Ker}(g)$ i per alguna $\omega \in E_3^* \iff z = g^*(\omega)$, per alguna $\omega \in E_3^* \iff z \in \mathrm{Im}(g^*)$.
   A més, podem comprovar que $\dim(\mathrm{Ker}(f^*)) = \dim(\mathrm{Im}(g^*))$:

$$\begin{aligned} \dim(\mathrm{Ker}(f^*)) &= n - \dim(\mathrm{Im}(f^*)) \\ &= n - \mathrm{rang}(B) \\ &= n - \mathrm{rang}(B^t) \\ &= n - \mathrm{rang}(A) \\ &= n - \dim(\mathrm{Im}(f)) \\ &= n - \dim(\mathrm{Ker}(g)) \\ &= n - (n - \dim(\mathrm{Im}(g))) \\ &= \mathrm{rang}(C) \\ &= \mathrm{rang}(C^t) \\ &= \mathrm{rang}(D) \\ &= \dim(\mathrm{Im}(g^*)) \end{aligned}$$

   Per tant, $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(g) \implies \mathrm{Im}(g^*) = \mathrm{Ker}(f^*)$.
   - $\mathrm{Im}(g^*) = \mathrm{Ker}(f^*) \implies \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(g)$: Agafem un element del $\mathrm{Ker}(g)$ i vegem que es troba a també $\mathrm{Im}(f)$ i viceversa:
   $u \in \mathrm{Ker}(g) \iff g(u) = 0 \iff (\omega \circ g)(u) = 0, \forall \omega \in E_3^* \iff (g^*(\omega))(u) = 0, \forall \omega \in E_3^* \iff u \in (\mathrm{Im}(g^*))^{\mathrm{inc}}$, ja que $(\mathrm{Im}(g^*))^{\mathrm{inc}} = \{u \in E_2 : z(u) = 0 \ \ \forall z \in \mathrm{Im}(g^*)\} \iff z \in (\mathrm{Ker}(f^*))^{\mathrm{inc}}$, ja que $(\mathrm{Ker}(f^*))^{\mathrm{inc}} = \{u \in E_2 : z(u) = 0 \ \ \forall z \in \mathrm{Ker}(f^*)\} \iff z(u) = 0, \forall z \in \mathrm{Ker}(f^*) \iff z(u) = f^*(z), \forall z \in \mathrm{Ker}(f^*) \iff z(u) = (z \circ f)(v), \forall z \in \mathrm{Ker}(f^*)$ i per algun $u \in E_1 \iff z(u) = z(f(v)), \forall z \in \mathrm{Ker}(f^*)$ i per algun $u \in E_1 \iff u = f(v)$, per algun $u \in E_1 \iff u \in \mathrm{Im}(f)$.

A més, podem comprovar que $\dim(\mathrm{Ker}(g)) = \dim(\mathrm{Im}(f))$:

$$\begin{aligned}\dim(\mathrm{Ker}(g)) &= n - \dim(\mathrm{Im}(g)) \\ &= n - \mathrm{rang}(C) \\ &= n - \mathrm{rang}(C^t) \\ &= n - \mathrm{rang}(D) \\ &= n - \dim(\mathrm{Im}(g^*)) \\ &= n - \dim(\mathrm{Ker}(f^*)) \\ &= n - (n - \dim(\mathrm{Im}(f^*))) \\ &= \mathrm{rang}(B) \\ &= \mathrm{rang}(B^t) \\ &= \mathrm{rang}(A) \\ &= \dim(\mathrm{Im}(f))\end{aligned}$$

Per tant, $\mathrm{Im}(g^*) = \mathrm{Ker}(f^*) \implies \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(g)$.

$\square$

(b) Aprofiteu l'apartat anterior per veure que si V i W són dos espais vectorials i $\varphi : V \longrightarrow W$ és una aplicació lineal, aleshores φ és injectiva si, i només si, φ^* és exhaustiva, i φ és exhaustiva si, i només si, φ^* és injectiva.

Considerem l'aplicació $\phi : W \longrightarrow V$ definida per $\phi(v) = 0 \quad \forall v \in W$. Observem clarament que $\mathrm{Im}(\phi) = \{0\}$ i, per tant, $\mathrm{Ker}(\phi) = W$. Estudiem ara l'aplicació dual de ϕ, $\phi^* : V^* \longrightarrow W^*$, definida per $(\phi^*(\omega))(v) = (\omega \circ \phi)(v)$ on $\omega \in V^*$ i $v \in W$.

$$(\phi^*(\omega))(v) = (\omega \circ \phi)(v) = (\omega(\phi(v)) = \omega(0) = 0$$

Com que això és $\forall \omega \in V^*$ i $\forall v \in W$, és clar que $\mathrm{Im}(\phi^*) = \{0\}$ i, per tant, $\mathrm{Ker}(\phi^*) = V^*$. Dit això procedim a demostrar el què ens demanaven.

- φ injectiva $\iff \mathrm{Ker}(\varphi) = \{0\} = \mathrm{Im}(\phi) \iff \mathrm{Ker}(\phi^*) = V^* = \mathrm{Im}(\varphi^*) \iff \varphi^*$ exhaustiva.
- φ exhaustiva $\iff \mathrm{Im}(\varphi) = W = \mathrm{Ker}(\phi) \iff \mathrm{Im}(\phi^*) = \{0\} = \mathrm{Ker}(\varphi^*) \iff \varphi^*$ injectiva.

$\square$

2. Sigui K un cos. Sigui $E = K_n[x] = \{p(x) \in K_n[x] \mid \mathrm{grau}(p(x)) \leq n\}$.

(a) Donat un $a \in K$, proveu que l'aplicació $\omega : E \longrightarrow K$ definida per $\omega(p(x)) = p(a)$ és un element de E^*. Determineu la dimensió i una base de $\mathrm{Ker}(\omega)$.

Per veure que ω és element de E^* hem de veure que donats $p(x), q(x) \in E$ i $\lambda \in K$ tenim que $\omega(p(x) + q(x)) = \omega(p(x)) + \omega(q(x))$ i $\omega(\lambda p(x)) = \lambda\omega(p(x))$.

- Sigui $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in E$ i $q(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i \in E$ amb $a_i, b_i \in K$. Sabem per la propietat distributiva que:

$$p(x) + q(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i + \sum_{i=0}^{n} b_i x^i = \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) x^i = (p + q)(x).$$

Per tant, tenim que:

$$\begin{aligned}\omega(p(x) + q(x)) &= \omega((p + q)(x)) \\ &= (p + q)(a) \\ &= p(a) + q(a) \\ &= \omega(p(x)) + \omega(q(x)).\end{aligned}$$

- Sigui $p(x)=\sum_{i=0}^n a_ix^i \in \mathbb{R}_n[x]$ amb $a_i \in K$ i $\lambda \in \mathbb{R}$. Sabem per la propietat distributiva que
$$\lambda p(x)=\lambda\sum_{i=0}^n a_ix^i=\sum_{i=0}^n \lambda a_ix^i=(\lambda p)(x).$$
Per tant, tenim que:
$$\begin{aligned}\omega(\lambda p(x)) &= \omega((\lambda p)(x))\\ &= (\lambda p)(a)\\ &= \lambda p(a)\\ &= \lambda\omega(p(x)).\end{aligned}$$

□

Per calcular la dimensió del $\mathrm{Ker}(\omega)$ sabem que $\dim E=\dim(\mathrm{Im}(\omega))+\dim(\mathrm{Ker}(\omega))=n+1$. Però com que $\dim(\mathrm{Im}(\omega))\le \dim K=1$ tenim que la dimensió de la imatge és 1 o 0. Però és clar que $\dim(\mathrm{Im}(\omega))=1$ ja que sinó voldria dir que a és arrel de tots els polinomis, però sabem que existeixen polinomis per els quals a no és arrel d'aquests polinomis (polinomis constants, per exemple). Així tenim que $\dim(\mathrm{Ker}(\omega))=\dim E-\dim(\mathrm{Im}(\omega))=n+1-1=n$. Una base del $\mathrm{Ker}(\omega)$ és, per exemple, $\mathcal{B}=(x-a,(x-a)^2,\dots,(x-a)^n)$.

(b) Per $i\in\{0,\dots,n\}$, considerem l'aplicació $\omega_i : E \longrightarrow K \quad \omega_i(p(x))=p(i)$. Proveu que $\mathcal{B}=(\omega_0,\dots,\omega_n)$ és una base de E^* si, i només si, K té característica 0 o característica $p>n$. Determineu una base $(p_0(x),\dots,p_n(x))$ de E tal que $\mathcal{B}$ sigui una base dual d'aquesta base.

Considerem $\mathcal{B}_1=(1,x,\dots,x^n)$ la base canònica de E i $\mathcal{B}_1^*$ la seva base dual. Provem les dues inclusions:

- $\mathcal{B}=(\omega_0,\dots,\omega_n)$ base de $E^* \implies \mathrm{char}(K)=0$ o $\mathrm{char}(K)=p>n$:
Considerem $[\omega_i]_{\mathcal{B}_1^*}$, les coordenades de cada forma lineal de $\mathcal{B}$ expressades en la base $\mathcal{B}_1^*$. Tenim que per $i\in\{0,1,\dots,n\}$, $[\omega_i]_{\mathcal{B}_1^*}=(\omega_i(1),\omega_i(x),\dots,\omega_i(x^n))=(1,i,\dots,i^n)$. Veiem que si $1\le \mathrm{char}(K)=p\le n$ podem triar un $j=p+i\le n$ tal que si $i\ne j$ aleshores $[\omega_i]_{\mathcal{B}_1^*}=[\omega_j]_{\mathcal{B}_1^*}$, ja que en aquest cas tindríem que:
$$\begin{aligned}(1,i,\dots,i^n) &= (1,j,\dots,j^n)\\ &= (1,p+i,\dots,(p+i)^n)\\ &= (1,\underbrace{1+\ldots+1}_{p}+\underbrace{1+\ldots+1}_{i},\dots,(\underbrace{1+\ldots+1}_{p}+\underbrace{1+\ldots+1}_{i})^n)\\ &= (1,0+\underbrace{1+\ldots+1}_{i},\dots,(0+\underbrace{1+\ldots+1}_{i})^n)\\ &= (1,i,\dots,i^n)\end{aligned}$$
Així no totes les coordenades de les formes lineals són linealment independents i, en particular, això implica que $(\omega_0,\dots,\omega_n)$ no formen una base i, per tant, arribem a contradicció. En canvi, veiem clarament que si $\mathrm{char}(K)=0$ o $\mathrm{char}(K)=p>n$ tenim que si $i\ne j$ aleshores $[\omega_i]_{\mathcal{B}_1^*}\ne m[\omega_j]_{\mathcal{B}_1^*}$ per algun $m\in K$, és a dir, no són linealment dependents.
- $\mathcal{B}=(\omega_0,\dots,\omega_n)$ base de $E^* \impliedby \mathrm{char}(K)=0$ o $\mathrm{char}(K)=p>n$:
Per provar aquesta inclusió considerem els vectors
$$\begin{gathered}(1,0^1,\dots,0^n)\\ (1,1^1,\dots,1^n)\\ (1,2^1,\dots,2^n)\\ \vdots\\ (1,n^1,\dots,n^n)\end{gathered}$$

Veiem clarament que aquest vectors son linealment independents ja que $\mathrm{char}(K) = 0$ o $\mathrm{char}(K) = p > n$. Ara bé, tenim que:

$$\begin{aligned}
(1, 0^1, \ldots, 0^n) &= (q_0(0), q_1(0), \ldots, q_n(0)) \\
(1, 1^1, \ldots, 1^n) &= (q_0(1), q_1(1), \ldots, q_n(1)) \\
\vdots \quad &= \quad \vdots \\
(1, n^1, \ldots, n^n) &= (q_0(n), q_1(n), \ldots, q_n(n))
\end{aligned}$$

on els q_i són els respectius vectors de la base $\mathcal{B}_1$. Sabem que:

$$\begin{aligned}
(q_0(0), q_1(0), \ldots, q_n(0)) &= (\omega_0(q_0), \omega_0(q_1), \ldots, \omega_0(q_n) = [\omega_0]_{\mathcal{B}_1^*} \\
(q_0(1), q_1(1), \ldots, q_n(1)) &= (\omega_1(q_0), \omega_1(q_1), \ldots, \omega_1(q_n) = [\omega_1]_{\mathcal{B}_1^*} \\
\vdots \quad &= \quad \vdots \quad = \quad \vdots \\
(q_0(n), q_1(n), \ldots, q_n(n)) &= (\omega_n(q_0), \omega_n(q_1), \ldots, \omega_n(q_n) = [\omega_n]_{\mathcal{B}_1^*}
\end{aligned}$$

I com que els vectors inicials eren linealment independents, els vectors coordenades $([\omega_0]_{\mathcal{B}_1^*}, \ldots, [\omega_n]_{\mathcal{B}_1^*})$ també ho són i, en particular, també ho són les formes lineals $\omega_0, \ldots, \omega_n$. Com que n'hi ha $n + 1 = \dim(E^*)$ formen una base de E^*.

$\square$

Una base $\mathcal{B}' = (p_0(x), \ldots, p_n(x))$ tal que $\mathcal{B}'^* = \mathcal{B}$ és per exemple la definida per

$$p_i(x) = (-1)^i \frac{\prod_{j=0, j\neq i}^n (j - x)}{i!(n-i)!}$$

per $i = 0, \ldots, n$. Veiem clarament que $\omega_i(p_j(x)) = \delta_{ij}$.

(c) Ara fixem $K = \mathbb{R}$, i suposem que $n > 0$. Considerem l'aplicació:

$$\begin{aligned}
\alpha : \mathbb{R}_n[x] &\longrightarrow \mathbb{R} \\
p(x) &\longmapsto \int_0^1 p(x)dx
\end{aligned}$$

(i) Demostreu que α és una forma lineal sobre $\mathbb{R}_n[x]$.
Per veure que α és una forma lineal sobre $\mathbb{R}_n[x]$ hem de veure que donats $p(x), q(x) \in \mathbb{R}_n[x]$ i $\lambda \in \mathbb{R}$ tenim que $\alpha(p(x) + q(x)) = \alpha(p(x)) + \alpha(q(x))$ i $\alpha(\lambda p(x)) = \lambda\alpha(p(x))$.

- Sigui $p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i \in \mathbb{R}_n[x]$ i $q(x) = \sum_{i=0}^n b_i x^i \in \mathbb{R}_n[x]$ amb $a_i, b_i \in \mathbb{R}$. Sabem per la propietat distributiva que:

$$p(x) + q(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i + \sum_{i=0}^n b_i x^i = \sum_{i=0}^n (a_i + b_i) x^i = (p+q)(x).$$

  Per tant, tenim que:

$$\begin{aligned}
\alpha(p(x) + q(x)) &= \alpha((p+q)(x)) \\
&= \int_0^1 (p+q)(x)dx \\
&= \int_0^1 (p(x) + q(x))dx \\
&= \int_0^1 p(x)dx + \int_0^1 q(x)dx \qquad \text{Per les propietats de la integral.} \\
&= \alpha(p(x)) + \alpha(q(x)).
\end{aligned}$$

- Sigui $p(x)=\sum_{i=0}^n a_i x^i \in \mathbb{R}_n[x]$ $a_i \in \mathbb{R}$ i $\lambda \in \mathbb{R}$. Sabem per la propietat distributiva que

$$\lambda p(x) = \lambda \sum_{i=0}^n a_i x^i = \sum_{i=0}^n \lambda a_i x^i = (\lambda p)(x).$$

Per tant, tenim que:

$$\begin{aligned}
\alpha(\lambda p(x)) &= \alpha((\lambda p)(x)) \\
&= \int_0^1 (\lambda p)(x) dx \\
&= \int_0^1 \lambda p(x) dx \\
&= \lambda \int_0^1 p(x) dx \qquad \text{Per les propietats de la integral.} \\
&= \lambda \alpha(p(x)).
\end{aligned}$$

(ii) Pel que hem vist anteriorment, tenim que $(\alpha_0,\dots,\alpha_n)$ és una base de $\mathbb{R}_n[x]^*$ on $\alpha_i(p(x)) = p(i)$. Deduïu que existeixen escalars $\lambda_0,\dots,\lambda_n \in \mathbb{R}$ tals que $\forall p \in \mathbb{R}_n[x]$,

$$\int_0^1 p(x)dx = \sum_{i=0}^n \lambda_i p(i).$$

Sigui $\alpha \in \mathbb{R}_n[x]^*$ una forma lineal. Aleshores podem expressar α com $\alpha = \sum_{i=0}^n a_i \alpha_i$. Aplicant $p(x)$ a aquesta expressió on $p(x) \in \mathbb{R}_n[x]$ tenim que:

$$\begin{aligned}
\alpha(p(x)) &= \left(\sum_{i=0}^n a_i \alpha_i\right)(p(x)) \\
\int_0^1 p(x)dx &= \sum_{i=0}^n a_i \alpha_i(p(x)) \\
\int_0^1 p(x)dx &= \sum_{i=0}^n a_i p(i)
\end{aligned}$$

Ara anomenant $\lambda_i = a_i$ per $i=0,\dots,n$ hem trobat els escalars $\lambda_0,\dots,\lambda_n \in \mathbb{R}$ demanats.

(iii) Determineu els escalars λ_i per al cas $n=2$.
Per el cas $n=2$, donat un polinomi $p(x) \in \mathbb{R}_2[x]$ de la forma $p(x) = a+bx+cx^2$ tenim que:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 p(x)dx &= \sum_{i=0}^2 \lambda_i p(i) \\
ax + b\frac{x^2}{2} + c\frac{x^3}{3}\bigg|_0^1 &= \lambda_0 a + \lambda_1(a+b+c) + \lambda_2(a+2b+4c) \\
a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3} &= a(\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2) + b(\lambda_1+2\lambda_2) + c(\lambda_1+4\lambda_2)
\end{aligned}$$

D'aquí obtenim un sistema lineal d'equacions en les incògnites $\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2$. Solucionant-lo obtenim:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 4 & 1/3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 2 & -1/6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5/12 \\ 0 & 1 & 0 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1/12 \end{pmatrix}$$

i per tant, $\lambda_0 = \frac{5}{12}, \lambda_1 = \frac{2}{3}, \lambda_2 = -\frac{1}{12}$.