Seminari d'Àlgebra Lineal **1er. de grau en Matemàtiques**
Exercicis per entregar **Curs 2019–2020**

---

1. Siguin
$$F_1 = \langle (1,-1,1,-1),(2,-2,1,1),(-3,3,0,1),(0,0,5,6)\rangle$$
$$F_2 = \langle (1,2,3,4),(-1,4,2,3)\rangle$$
subespais vectorials de $\mathbb{Q}^4$.

   (a) Calculeu la dimensió i una base dels subespais vectorials F_1, F_2, $F_1 \cap F_2$ i $F_1 + F_2$.

   (b) Amplieu la base de $F_1 \cap F_2$ que heu trobat a una base de F_1 i a una base de F_2.

   (c) Trobeu un sistema d'equacions lineal homogeni tal que F_1 sigui el conjunt de les solucions d'aquest sistema.

2. En aquest exercici estudiem $\mathbb{R}$ com a $\mathbb{Q}$-espai vectorial.

   (a) Siguin $m_1, \ldots, m_k$ enters lliures de quadrats (si un primer p divideix a m_i aleshores p^2 no el divideix) i coprimers dos a dos (els primers que divideixen m_i no divideixen m_j, per a tot i, j). Demostreu per inducció que el conjunt $\{\sqrt{m_1}, \ldots, \sqrt{m_k}\}$ és un conjunts d'elements $\mathbb{Q}$-linealment independents.

   (b) Demostreu que, per a tot $k \geq 0$, el conjunt $\{2, \sqrt{2}, \sqrt[4]{2}, \ldots, \sqrt[2^k]{2}\}$ és un conjunt $\mathbb{Q}$-linealment independent. Per fer-ho, podeu serguir els següents passos:

      i. Demostreu que per a tot $m \geq 1$ el polinomi $x^m - 2$ és irreductible a $\mathbb{Q}[x]$, és a dir que no es pot escriure com a producte de dos polinomis a $\mathbb{Q}[x]$ de grau $< k$. En particular, per qualsevol $k \geq 0$ el polinomi $x^{2^k} - 2$ és irreductible. (Indicació: trobeu primer les arrels complexes de $x^m - 2$, després escriviu $x^m - 2 = g(x)h(x)$, i raoneu per què els termes constant de $g(x)$ i $h(x)$ no poden ser enters).

      ii. Demostreu que una combinació lineal no trivial dels elements fins a $\sqrt[2^k]{2}$ dona lloc a un polinomi de grau dividint 2^{k-1} que té $\sqrt[2^k]{2}$ com a arrel.

      iii. Deduïu una contradicció fent servir els dos apartats anteriors (recordeu la divisió de polinomis: donats polinomis $a(x)$ i $b(x)$, existeixen polinomis $q(x)$ i $r(x)$ amb $\text{grau}(r(x)) < \text{grau}(b(x))$ tals que $a(x) = b(x)q(x) + r(x)$.)