Seminari d'Àlgebra Lineal — **1er. de grau en Matemàtiques**
Exercicis per entregar — **Curs 2019–2020**

L'objectiu dels exercicis següents és trobar una fórmula pel determinant del producte de dues matrius rectangulars de tamanys complementaris. Haureu de fer servir algun dels resultats vistos en el Seminari 2.

Considerem $A \in M_{m\times n}(K)$ i $B \in M_{n\times m}(K)$, on K és un cos arbitrari.

Notació: donat un subconjunt $S \subseteq \{1, \dots, n\}$ de tamany k, denotem per A_S la matriu $m \times k$ que s'obté en sel·leccionar les columnes d'A indicades pels elements de S. Similarment, B^S denota la matriu $k \times m$ que s'obté en sel·leccionar les files corresponents de B. També, si $C \in M_n(K)$, la submatriu de C principal d'ordre k associada a S és la submatriu quadrada $C_S^S \in M_k(K)$ obtinguda a partir de C escollint les entrades $c_{i,j}$ de C amb $i, j \in S$.

1. Demostreu que si $m > n$ aleshores $\det(AB) = 0$.

2. Trobeu matrius

$$D = \begin{pmatrix} I_m & D_1 \\ 0 & D_2 \end{pmatrix} \text{ i } E = \begin{pmatrix} E_2 & E_1 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \text{ tals que } \begin{pmatrix} I_m & -A \\ B & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ B & I_n \end{pmatrix} D = E \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ B & I_n \end{pmatrix}.$$

3. Useu l'anterior per concloure que $\det(I_m + AB) = \det(I_n + BA)$. Més en general, proveu que si $\lambda \in K \setminus \{0\}$, $\det(\lambda I_n + BA) = \lambda^{n-m} \det(\lambda I_m + AB)$.

4. Sigui $C \in M_n(K)$. Demostreu que per a tot $k \in \{1, \dots, n\}$ el coeficient de λ^{n-k} del polinomi $\det(\lambda I_n + C)$ és igual a

$$\sum_S \det C_S^S,$$

on la suma recorre tots els subconjunts $S \subseteq \{1, \dots, n\}$ de tamany k (n'hi ha $\binom{n}{k}$).

5. Demostreu que per a tot $S \subseteq \{1, \dots, n\}$ de tamany m es té

$$\det((BA)_S^S) = \det A_S \det B^S,$$

i deduïu la fórmula

$$\det(AB) = \sum_S \det(A_S) \det(B^S),$$

on la suma recorre tots els subconjunts $S \subseteq \{1, \dots, n\}$ de tamany m (n'hi ha $\binom{n}{m}$).