Llista de problemes 1

Víctor Ballester Ribó
NIU: 1570866

Anàlisi Harmònica
Grau en Matemàtiques
Universitat Autònoma de Barcelona
Febrer de 2023

1. Escriviu les sèries de Fourier de sinus i de cosinus de la funció

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{3} & \text{si } x \in (0, \pi/3) \\ 0 & \text{si } x \in (\pi/3, 2\pi/3) \\ -\frac{\pi}{3} & \text{si } x \in (2\pi/3, \pi) \end{cases}$$

Per calcular la del sinus, fem l'extensió senar de f en $[-\pi, \pi]$ i llavors sabem que la seva sèrie de Fourier és

$$S_1 f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx)$$

on $b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin(kx)$. Tenim que:

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\pi}{3} \sin(kx) - \frac{2}{\pi} \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} \frac{\pi}{3} \sin(kx) \\ &= \frac{2}{3} \frac{1 + (-1)^k - \cos(k\pi/3) - \cos(2k\pi/3)}{k} \\ &= \frac{2}{3} \frac{1 + (-1)^k - 2\cos(k\pi/2)\cos(k\pi/6)}{k} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ és senar} \\ 0 & \text{si } k = 6\ell \\ \dfrac{1}{3\ell + 1} & \text{si } k = 6\ell + 2 \\ \dfrac{1}{3\ell + 2} & \text{si } k = 6\ell + 4 \end{cases} \end{aligned}$$

on hem usat la identitat trigonomètrica $\cos a + \cos b = 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$. Així doncs:

$$S_1 f(x) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{\sin((6\ell + 2)x)}{3\ell + 1} + \frac{\sin((6\ell + 4)x)}{3\ell + 2} \right)$$

Si ara fem l'extensió parell de f en $[-\pi, \pi]$ obtenim la seva sèrie de Fourier en termes del cosinus:

$$S_2 f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) \tag{1}$$

on $a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos(kx)$. Tenim que:

$$
\begin{aligned}
a_k &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\pi}{3}\cos(kx) - \frac{2}{\pi}\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} \frac{\pi}{3}\cos(kx)\\
&= \begin{cases} \frac{2}{3}\frac{\sin(k\pi/3)+\sin(2k\pi/3)}{k} & \text{si } k\neq 0\\ 0 & \text{si } k=0\end{cases}\\
&= \begin{cases} \frac{4}{3}\frac{\sin(k\pi/2)\cos(k\pi/6)}{k} & \text{si } k\neq 0\\ 0 & \text{si } k=0\end{cases}\\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ és parell}\\ \dfrac{2\sqrt{3}}{3(6\ell+1)} & \text{si } k=6\ell+1\\ 0 & \text{si } k=6\ell+3\\ -\dfrac{2\sqrt{3}}{3(6\ell+5)} & \text{si } k=6\ell+5\end{cases}
\end{aligned}
$$

on hem usat la identitat trigonomètrica $\sin a + \sin b = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$. Així doncs:

$$S_2 f(x) = \frac{2\sqrt{3}}{3}\sum_{\ell=0}^{\infty}\left(\frac{\cos((6\ell+1)x)}{6\ell+1} - \frac{\cos((6\ell+5)x)}{6\ell+5}\right)$$

2. **Sigui $f \in \mathcal{C}^k$ una funció 2π-periòdica. Demostreu que $\widehat{f}(n) = \mathrm{O}(|n|^{-k})$ quan $|n| \to \infty$ (i.e. existeix una constant $C > 0$ tal que $\left|\widehat{f}(n)\right| \leq C|n|^{-k}$).**

   Demostrem per inducció sobre k que
   $$\widehat{f^{(k)}}(n) = (\mathrm{i}n)^k \widehat{f}(n)$$
   El cas $k = 0$ és directe. Si suposem cert el cas $k-1$ tenim que:
   $$
   \begin{aligned}
   \widehat{f^{(k)}}(n) &= \left\langle f^{(k)}(x), \frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}\right\rangle\\
   &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^{(k)}(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\,\mathrm{d}x\\
   &= \frac{1}{2\pi} f^{(k-1)}(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{\mathrm{i}n}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^{(k-1)}(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\,\mathrm{d}x\\
   &= \mathrm{i}n\widehat{f^{(k-1)}}(n)\\
   &= (\mathrm{i}n)^k\widehat{f}(n)
   \end{aligned}
   $$
   on hem fet integració per parts i hem fet servir la continuïtat de $f^{(k-1)}$ en els punts "d'unió" ($f^{(k-1)}(-\pi) = f^{(k-1)}(\pi)$) i la hipòtesi d'inducció en l'última igualtat. Per tant, com que sempre tenim que
   $$|\widehat{g}(n)| \leq \frac{1}{2\pi}\|g\|_1$$
   i $\left\|f^{(k)}\right\|_1 = C < \infty$ perquè $f^{(k)}$ és contínua, deduïm que:
   $$\left|\widehat{f}(n)\right| = \left|\frac{\widehat{f^{(k)}}(n)}{(\mathrm{i}n)^k}\right| \leq C|n|^{-k}$$

3. **A l'interval $[-\pi, \pi]$ considereu la funció**
   $$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } |t| > \delta\\ 1 - \frac{|t|}{\delta} & \text{si } |t| \leq \delta\end{cases}$$
   Demostreu que
   $$f(t) = \frac{\delta}{2\pi} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos(n\delta)}{n^2\pi\delta}\cos(nt)$$

La funció $f(t)$ és parella, per tant la seva sèrie de Fourier només tindrà els termes del cosinus. Aquests són els següents:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\delta}\left(1-\frac{t}{\delta}\right)\cos(nt)\,\mathrm{d}t \\ &= \begin{cases} 2\dfrac{1-\cos(n\delta)}{\pi n^2\delta} & \text{si } n\neq 0 \\ \frac{\delta}{\pi} & \text{si } n = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

D'aquí (i recordant l'expressió (1)) es desprèn automàticament el resultat ja que f és contínua i derivable excepte a un nombre finit de punts i la derivada està acotada. De fet, per aquest motiu la convergència de Sf a f és uniforme.

4. **Proveu que els coeficients de Fourier es poden escriure com**

$$a_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[f(x) - f\left(x-\frac{\pi}{k}\right)\right]\cos(kx)\,\mathrm{d}x \qquad b_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[f(x) - f\left(x-\frac{\pi}{k}\right)\right]\sin(kx)\,\mathrm{d}x$$

Deduïu que si f satisfà una condició Hölder d'ordre α, i.e. $|f(x)-f(y)| \leq L|x-y|^{\alpha}$, llavors els coeficients de Fourier satisfan

$$|a_k| \leq L\frac{\pi^{\alpha}}{k^{\alpha}} \qquad |b_k| \leq L\frac{\pi^{\alpha}}{k^{\alpha}}$$

Per demostrar les igualtats és suficient veure que

$$a_k = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(x-\frac{\pi}{k}\right)\cos(kx)\,\mathrm{d}x \qquad b_k = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(x-\frac{\pi}{k}\right)\sin(kx)\,\mathrm{d}x$$

Fent el canvi $y = x - \frac{\pi}{k}$ tenim que:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(x-\frac{\pi}{k}\right)\cos(kx)\,\mathrm{d}x &= -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi-\frac{\pi}{k}}^{\pi-\frac{\pi}{k}} f(y)\cos(ky+\pi)\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi-\frac{\pi}{k}}^{\pi-\frac{\pi}{k}} f(y)\cos(ky)\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\cos(ky)\,\mathrm{d}y \\ &= a_k \end{aligned}$$

La penúltima igualtat es deu al fet que si g és T-periòdica i integrable, aleshores $\forall x\in\mathbb{R}$ tenim

$$\int_x^{x+T} g(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^T g(x)\,\mathrm{d}x$$

Similarment:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(x-\frac{\pi}{k}\right)\sin(kx)\,\mathrm{d}x &= -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi-\frac{\pi}{k}}^{\pi-\frac{\pi}{k}} f(y)\sin(ky+\pi)\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi-\frac{\pi}{k}}^{\pi-\frac{\pi}{k}} f(y)\sin(ky)\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\sin(ky)\,\mathrm{d}y \\ &= b_k \end{aligned}$$

A partir d'aquestes igualtats si f satisfà la condició de Hölder tenim:

$$\begin{aligned} |a_k| &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\left[f(x) - f\left(x-\frac{x}{k}\right)\right]\cos(kx)\right|\mathrm{d}x \leq \frac{L}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{|\pi|^{\alpha}}{k^{\alpha}}\,\mathrm{d}x = L\frac{\pi^{\alpha}}{k^{\alpha}} \\ |b_k| &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\left[f(x) - f\left(x-\frac{x}{k}\right)\right]\sin(kx)\right|\mathrm{d}x \leq \frac{L}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{|\pi|^{\alpha}}{k^{\alpha}}\,\mathrm{d}x = L\frac{\pi^{\alpha}}{k^{\alpha}} \end{aligned}$$