1. Escriviu les sèries de Fourier de sinus i de cosinus de la funció
$$f(x) = \begin{cases} \pi/3 & \text{si } x \in (0, \pi/3) \\ 0 & \text{si } x \in (\pi/3, 2\pi/3) \\ -\pi/3 & \text{si } x \in (2\pi/3, \pi) \end{cases} .$$

2. Sigui $f \in \mathcal{C}^k$ una funció $2\pi-$periòdica. Demostreu que $\hat{f}(n) = O(|n|^{-k})$ quan $|n| \to \infty$ (*i.e. existeix una constant* $C > 0$ *tal que* $|\hat{f}(n)| \leq C|n|^{-k}$).

3. A l'interval $[-\pi, \pi]$, considereu la funció
$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } |t| > \delta \\ 1 - |t|/\delta & \text{si } |t| \leq \delta \end{cases} .$$
Demostreu que
$$f(t) = \frac{\delta}{2\pi} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos(n\delta)}{n^2\pi\delta} \cos(nt).$$

4. Proveu que els coeficients de Fourier es poden escriure com
$$a_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - f(x - \frac{\pi}{k})] \cos(kx)dx, \quad b_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - f(x - \frac{\pi}{k})] \sin(kx)dx.$$
Deduïu que si f satisfà una *condició Hölder d'ordre* α, i.e. $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|^\alpha$, llavors els coeficients de Fourier satisfan
$$|a_k| \leq L\frac{\pi^\alpha}{k^\alpha}, \quad |b_k| \leq L\frac{\pi^\alpha}{k^\alpha}.$$