SEMINARI 1. CORBES PLANES.

Víctor Ballester Ribó
NIU: 1570866

Geometria diferencial
Grau en Matemàtiques
Universitat Autònoma de Barcelona
Febrer de 2022

Exercici 3. *Considerem una parametrització regular $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t))$ d'una corba plana. Cerquem la circumferència que millor aproxima a la corba en el punt $\mathbf{x}(0) = (0,0)$. Per això considerem el desenvolupament de Taylor en $t = 0$ de $x(t)$ i $y(t)$:*

$$x(t) = x_0' t + x_0'' \frac{t^2}{2} + \mathrm{O}\left(t^3\right) \quad i \quad y(t) = y_0' t + y_0'' \frac{t^2}{2} + \mathrm{O}\left(t^3\right) \tag{1}$$

Considerem la circumferència que passa pels punts $\mathbf{x}(-\varepsilon)$, $\mathbf{x}(0)$ i $\mathbf{x}(\varepsilon)$. El seu centre $\mathbf{c}(\varepsilon) = (c_x(\varepsilon), c_y(\varepsilon))$ és la intersecció de les mediatrius dels dos segments que uneixen els punts $\mathbf{x}(-\varepsilon)$ i $\mathbf{x}(0)$ d'una banda i els punts $\mathbf{x}(0)$ i $\mathbf{x}(\varepsilon)$ d'una altra. El seu radi és $r(\varepsilon) = \|\mathbf{c}(\varepsilon) - \mathbf{x}(0)\|$. El centre i el radi de curvatura venen donats pels límits de $\mathbf{c}(\varepsilon)$ i $r(\varepsilon)$ quan $\varepsilon \to 0$. Calculeu aquests límits en funció de x_0', x_0'', y_0' i y_0''.

Resolució. Primer de tot suposem que la curvatura κ de $\mathbf{x}(t)$ en $t = 0$ és estrictament positiva, ja que contràriament no podríem definir el cercle osculador[1]. Considerem la circumferència que passa pels punts $\mathbf{x}(-\varepsilon)$, $\mathbf{x}(0)$ i $\mathbf{x}(\varepsilon)$. El seu centre vindrà determinat per la intersecció de les mediatrius dels dos segments que uneixen els punts $\mathbf{x}(-\varepsilon)$ i $\mathbf{x}(0)$ d'una banda i els punts $\mathbf{x}(0)$ i $\mathbf{x}(\varepsilon)$ d'una altra. Per tant, calculem una parametrització d'aquestes mediatrius. Una parametrització per a la primera mediatriu (ℓ_+) sabem que és per exemple

$$\ell_+(\lambda) = \left(\frac{x(\varepsilon)}{2}, \frac{y(\varepsilon)}{2}\right) + \lambda\left(-y(\varepsilon), x(\varepsilon)\right) \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

ja que $\left(\frac{x(\varepsilon)}{2}, \frac{y(\varepsilon)}{2}\right)$ és el punt mig del segment $\overline{\mathbf{x}(\varepsilon)\mathbf{x}(0)}$ i el vector $\overrightarrow{(-y(\varepsilon), x(\varepsilon))}$ és perpendicular al vector director del segment $\overline{\mathbf{x}(\varepsilon)\mathbf{x}(0)}$. Anàlogament obtenim una parametrització per a l'altra mediatriu (ℓ_-):

$$\ell_-(\mu) = \left(\frac{x(-\varepsilon)}{2}, \frac{y(-\varepsilon)}{2}\right) + \mu\left(-y(-\varepsilon), x(-\varepsilon)\right) \qquad \mu \in \mathbb{R} \tag{2}$$

Calculem, doncs, el valor $\mu = \mu_0$ quan les dues rectes s'intersequen. Tenim que:

$$\begin{aligned}
\ell_+(\lambda_0) = \ell_-(\mu_0) &\iff \left(\frac{x(\varepsilon)}{2}, \frac{y(\varepsilon)}{2}\right) + \lambda_0\left(-y(\varepsilon), x(\varepsilon)\right) = \left(\frac{x(-\varepsilon)}{2}, \frac{y(-\varepsilon)}{2}\right) + \mu_0\left(-y(-\varepsilon), x(-\varepsilon)\right) \\
&\iff \left(\frac{x(\varepsilon) - x(-\varepsilon)}{2}, \frac{y(\varepsilon) - y(-\varepsilon)}{2}\right) = \left(\lambda_0 y(\varepsilon) - \mu_0 y(-\varepsilon), -\lambda_0 x(\varepsilon) + \mu_0 x(-\varepsilon)\right) \\
&\iff \begin{cases} \frac{x(\varepsilon) - x(-\varepsilon)}{2} = \lambda_0 y(\varepsilon) - \mu_0 y(-\varepsilon) \\ \frac{y(\varepsilon) - y(-\varepsilon)}{2} = -\lambda_0 x(\varepsilon) + \mu_0 x(-\varepsilon) \end{cases}
\end{aligned} \tag{3}$$

Multiplicant la primera equació de (3) per $x(\varepsilon)$, la segona per $y(\varepsilon)$ i sumant les equacions resultants, obtenim:

$$\frac{x(\varepsilon) - x(-\varepsilon)}{2} x(\varepsilon) + \frac{y(\varepsilon) - y(-\varepsilon)}{2} y(\varepsilon) = \mu_0\left[x(-\varepsilon)y(\varepsilon) - x(\varepsilon)y(-\varepsilon)\right] \tag{4}$$

D'altra banda, per l'equació (1), tenim que:

$$x(\pm\varepsilon) = \pm x_0'\varepsilon + x_0'' \frac{\varepsilon^2}{2} + \mathrm{O}\left(\varepsilon^3\right) \quad \text{i} \quad y(\pm\varepsilon) = \pm y_0'\varepsilon + y_0'' \frac{\varepsilon^2}{2} + \mathrm{O}\left(\varepsilon^3\right) \tag{5}$$

[1] O si el definíssim, aquest tindria radi $+\infty$ i, per tant, el seu centre estaria a l'infinit.

Estudiem, ara, el comportament de cadascun dels termes de l'equació (4). Primer de tot, clarament tenim que $\frac{x(\varepsilon)-x(-\varepsilon)}{2} = x_0'\varepsilon + \mathrm{O}\left(\varepsilon^3\right)$. Per tant:

$$\frac{x(\varepsilon)-x(-\varepsilon)}{2}x(\varepsilon) = \left[x_0'\varepsilon + \mathrm{O}\left(\varepsilon^3\right)\right] \cdot \left[x_0'\varepsilon + x_0''\frac{\varepsilon^2}{2} + \mathrm{O}\left(\varepsilon^3\right)\right] = {x_0'}^2\varepsilon^2 + \mathrm{O}\left(\varepsilon^3\right)$$

Repetint el mateix argument (canviant les x per les y), deduïm que:

$$\frac{y(\varepsilon)-y(-\varepsilon)}{2}y(\varepsilon) = {y_0'}^2\varepsilon^2 + \mathrm{O}\left(\varepsilon^3\right)$$

Finalment, com que

$$x(\mp\varepsilon)y(\pm\varepsilon) = \left[\mp x_0'\varepsilon + x_0''\frac{\varepsilon^2}{2} + \mathrm{O}\left(\varepsilon^3\right)\right] \cdot \left[\pm y_0'\varepsilon + y_0''\frac{\varepsilon^2}{2} + \mathrm{O}\left(\varepsilon^3\right)\right] = -x_0'y_0'\varepsilon^2 \pm \left(\frac{x_0''y_0' - x_0'y_0''}{2}\right)\varepsilon^3 + \mathrm{O}\left(\varepsilon^4\right)$$

deduïm que:

$$x(-\varepsilon)y(\varepsilon) - x(\varepsilon)y(-\varepsilon) = \left(x_0''y_0' - x_0'y_0''\right)\varepsilon^3 + \mathrm{O}\left(\varepsilon^4\right) \tag{6}$$

Per tant, l'equació (4) esdevé:

$$\begin{aligned}\left({x_0'}^2\varepsilon^2 + \mathrm{O}\left(\varepsilon^3\right)\right) + \left({y_0'}^2\varepsilon^2 + \mathrm{O}\left(\varepsilon^3\right)\right) &= \mu_0\left[\left(x_0''y_0' - x_0'y_0''\right)\varepsilon^3 + \mathrm{O}\left(\varepsilon^4\right)\right]\\ {x_0'}^2 + {y_0'}^2 + \mathrm{O}\left(\varepsilon\right) &= \mu_0\left[\left(x_0''y_0' - x_0'y_0''\right)\varepsilon + \mathrm{O}\left(\varepsilon^2\right)\right]\end{aligned}$$

Observem que com que la corba és regular, l'expressió ${x_0'}^2 + {y_0'}^2$ no és zero. A més, si pensem els vectors $\mathbf{x}'(0)$ i $\mathbf{x}''(0)$ dins de $\mathbb{R}^3$ (continguts al pla $z=0$, per exemple), observem que:

$$\begin{aligned}\kappa(0) = 0 &\iff \frac{\|\mathbf{x}'(0)\times\mathbf{x}''(0)\|}{\|\mathbf{x}'(0)\|^3} = 0\\ &\iff \|\mathbf{x}'(0)\times\mathbf{x}''(0)\| = 0\\ &\iff \left\|\begin{vmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3\\ x_0' & y_0' & 0\\ x_0'' & y_0'' & 0\end{vmatrix}\right\| = 0\\ &\iff \|(0,0,x_0'y_0'' - x_0''y_0')\| = 0\\ &\iff x_0''y_0' - x_0'y_0'' = 0\end{aligned}$$

I com que al principi de tot hem suposat que $\kappa(0)\neq 0$, tenim que $x_0''y_0' - x_0'y_0'' \neq 0$.
Recordant, ara, l'expansió en sèrie de potencies $\frac{1}{1+x} = 1 - x + \cdots$, tenim que:

$$\begin{aligned}\mu_0 &= \frac{{x_0'}^2 + {y_0'}^2 + \mathrm{O}\left(\varepsilon\right)}{\left(x_0''y_0' - x_0'y_0''\right)\varepsilon + \mathrm{O}\left(\varepsilon^2\right)}\\ &= \frac{{x_0'}^2 + {y_0'}^2 + \mathrm{O}\left(\varepsilon\right)}{\left(x_0''y_0' - x_0'y_0''\right)\varepsilon\left[1 + \mathrm{O}\left(\varepsilon\right)\right]}\\ &= \frac{{x_0'}^2 + {y_0'}^2 + \mathrm{O}\left(\varepsilon\right)}{\left(x_0''y_0' - x_0'y_0''\right)\varepsilon}\left(1 + \mathrm{O}\left(\varepsilon\right)\right)\\ &= \frac{{x_0'}^2 + {y_0'}^2}{\left(x_0''y_0' - x_0'y_0''\right)\varepsilon}\left(1 + \mathrm{O}\left(\varepsilon\right)\right)\end{aligned}$$

Substituint aquest valor de μ_0 a l'equació (2) obtenim:

$$\begin{aligned}\ell_-(\mu_0) &= \left(\frac{x(-\varepsilon)}{2}, \frac{y(-\varepsilon)}{2}\right) + \mu_0\left(-y(-\varepsilon), x(-\varepsilon)\right)\\ &= \left(\mathrm{O}\left(\varepsilon\right), \mathrm{O}\left(\varepsilon\right)\right) + \frac{{x_0'}^2 + {y_0'}^2}{\left(x_0''y_0' - x_0'y_0''\right)\varepsilon}\left(1 + \mathrm{O}\left(\varepsilon\right)\right)\left(y_0'\varepsilon + \mathrm{O}\left(\varepsilon^2\right), -x_0'\varepsilon + \mathrm{O}\left(\varepsilon^2\right)\right)\\ &= \left(\mathrm{O}\left(\varepsilon\right), \mathrm{O}\left(\varepsilon\right)\right) + \frac{{x_0'}^2 + {y_0'}^2}{x_0''y_0' - x_0'y_0''}\left(1 + \mathrm{O}\left(\varepsilon\right)\right)\left(y_0' + \mathrm{O}\left(\varepsilon\right), -x_0' + \mathrm{O}\left(\varepsilon\right)\right)\\ &= \left(\mathrm{O}\left(\varepsilon\right), \mathrm{O}\left(\varepsilon\right)\right) + \frac{{x_0'}^2 + {y_0'}^2}{x_0''y_0' - x_0'y_0''}\left(y_0' + \mathrm{O}\left(\varepsilon\right), -x_0' + \mathrm{O}\left(\varepsilon\right)\right)\\ &= \frac{{x_0'}^2 + {y_0'}^2}{x_0''y_0' - x_0'y_0''}\left(y_0' + \mathrm{O}\left(\varepsilon\right), -x_0 + \mathrm{O}\left(\varepsilon\right)\right)\end{aligned}$$

Per tant, si denotem $\mathbf{c} := \lim_{\varepsilon\to 0} \mathbf{c}(\varepsilon)$, tenim que:

$$\mathbf{c} = \lim_{\varepsilon\to 0} \mathbf{c}(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0} \left(y_0' \frac{{x_0'}^2 + {y_0'}^2}{x_0''y_0' - x_0'y_0''} + \mathrm{O}(\varepsilon), -x_0' \frac{{x_0'}^2 + {y_0'}^2}{x_0''y_0' - x_0'y_0''} + \mathrm{O}(\varepsilon) \right) = \frac{{x_0'}^2 + {y_0'}^2}{x_0''y_0' - x_0'y_0''} (y_0', -x_0')$$

Finalment, si denotem $r := \lim_{\varepsilon\to 0} r(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0} \|\mathbf{c}(\varepsilon) - \mathbf{x}(0)\| = \lim_{\varepsilon\to 0} \|\mathbf{c}(\varepsilon)\|$, tenint en compte que la funció norma és una funció contínua, tenim que:

$$r = \lim_{\varepsilon\to 0} \|\mathbf{c}(\varepsilon)\| = \| \lim_{\varepsilon\to 0} \mathbf{c}(\varepsilon)\| = \left\| \frac{{x_0'}^2 + {y_0'}^2}{x_0''y_0' - x_0'y_0''} (y_0', -x_0') \right\| = \frac{\left({x_0'}^2 + {y_0'}^2\right)^{3/2}}{|x_0''y_0' - x_0'y_0''|}$$