1 Corbes planes.

Exercici 1.1. Trobeu una parametrització de la *trocoide*: corba caracteritzada per ser l'òrbita d'un punt P situat a una distància a del centre d'una circumferència de radi b quan aquesta roda sense lliscament sobre una recta fixada:

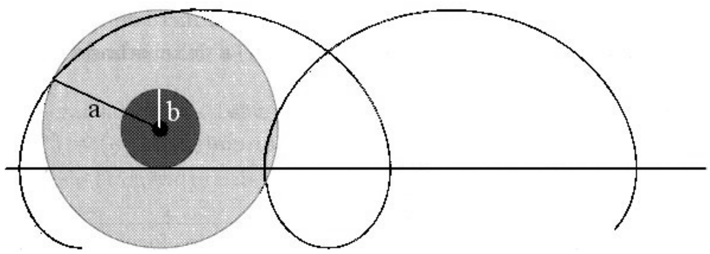

Figura 1.1: Trocoide amb $a > b$

En el cas $a = b$ s'anomena *cicloide* Calculeu el paràmetre arc de la *cicloide* amb $a = 1$.

Exercici 1.2. A *Moby Dick* de Herman Melville (1851) trobem la següent cita:
Quan no s'utilitzen, aquestes calderes es conserven considerablement netes. A vegades les poleixen amb sabó de sastre i sorra fins que brillen per dins com ponxeres de plata. Durant les guàrdies nocturnes, alguns vells mariners cínics s'hi entaforen, s'hi ajoquen i fan una becadeta. Quan els mariners es dediquen a polir-les -un home a cada caldera, tocar a tocar- es passen moltes comunicacions confidencials per damunt els llavis de ferro. També és un lloc adient per a profundes meditacions matemàtiques. Fou dins la caldera de mà esquerra del Pequod, amb el sabó de sastre que m'envoltava per totes bandes, que per primera vegada em va impressionar el fet remarcable que, en geometria, tots els cossos que llisquen al llarg de la corba cicloide*, el meu sabó de sastre per exemple, baixen en el mateix espai de temps des de qualsevol punt.*

(La destil·leria, Moby Dick)

Verifiquem aquesta propietat de la *cicloide*, més precisament, en una *cicloide* invertida el temps que triga un cos que cau lliscant per la corba per efecte de la gravetat sense fregament en arribar al punt més baix és independent del punt de partida (corba *tautocrona* o *isocrona*, vegeu *Aventuras Matemàticas*, Miguel de Guzmán, Ed. Labor 1988).

(i) Doneu una parametrització $\gamma(\lambda) = (x(\lambda), y(\lambda))$ de la *cicloide* invertida.

(ii) Sigui θ el paràmetre del punt d'arribada. Calculeu la velocitat $v(\theta)$ amb que arriba un cos que surt d'un punt $\gamma(\alpha)$ fixat al punt $\gamma(\theta)$.

(Indicació: Recordeu la llei de conservació de l'energia i les expressions de l'energia potencial i cinètica, $E_p = mgh$ i $E_c = mv^2/2$ respectivament).

(iii) Calculeu la distància recorreguda entre $\gamma(\alpha)$ i $\gamma(\theta)$.

(iv) Sigui $t(\theta)$ la reparametrització corresponent al moviment físic d'un cos que llisca sense fregament per la *cicloide* amb $t(\alpha) = 0$. Calculeu $t(\pi)$ (i.e. el temps d'arribada al punt més baix) i comproveu que no depèn de α.

(Indicació: A l'apartat (ii) heu trobat l'expressió de la velocitat v, recordeu que $v = ds/dt$ on s és el paràmetre arc. Integrant dt podeu trobar $t(\pi)$. Potser us caldran algunes identitats trigonomètriques com $1 - \cos 2\theta = 2\sin^2\theta$).

La *cicloide* també verifica que és la *braquistocrona*, és a dir, la corba al llarg de la qual una partícula llisca sota l'acció de la gravetat i sense fregament en un temps mínim d'un punt A a un punt B situats en verticals diferents.

Exercici 1.3. *Càlcul del centre i radi de curvatura com a límit de circumferències secants.* Considerem una parametrització regular $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t))$ d'una corba plana. Cerquem la circumferència que millor aproxima a la corba en el punt $\mathbf{x}(0) = (0,0)$. Per això considerem el desenvolupament de Taylor en $t = 0$ de $x(t)$ i $y(t)$

$$x(t) = x_0' t + x_0'' \frac{t^2}{2} + O(t^3) \qquad \text{i} \qquad y(t) = y_0' t + y_0'' \frac{t^2}{2} + O(t^3).$$

Considerem la circumferència que passa pels punts $\mathbf{x}(-\varepsilon)$, $\mathbf{x}(0)$ i $\mathbf{x}(\varepsilon)$. El seu centre $\mathbf{c}(\varepsilon) = (c_x(\varepsilon), c_y(\varepsilon))$ és la intersecció de les mediatrius dels dos segments que uneixen els punts $\mathbf{x}(-\varepsilon)$ i $\mathbf{x}(0)$ d'una part i els punts $\mathbf{x}(0)$ i $\mathbf{x}(\varepsilon)$ d'una altra. El seu radi és $r(\varepsilon) = \|\mathbf{c}(\varepsilon) - \mathbf{x}(0)\|$. El centre i el radi de curvatura vénen donats pels límits de $\mathbf{c}(\varepsilon)$ i $r(\varepsilon)$ quan ε tendeix a zero. Calculeu aquests límits en funció de x_0', y_0', x_0'', y_0''. El cercle límit s'anomena el *cercle osculador* de la corba $\mathbf{x}(t)$ al punt $\mathbf{x}(0)$.

Exercici 1.4. Considerem la família de totes les circumferències del pla donades per les equacions $f_{abr}(x,y) = (x-a)^2 + (y-b)^2 - r^2$. L'objectiu és trobar els paràmetres a, b, r de manera que $f_{abr}(\mathbf{x}(t))$ sigui el més petit possible quan t és proper a zero. De manera més precisa, el que demanem és que la funció d'una variable $g(t) = f_{abr}(\mathbf{x}(t))$ tingui el màxim nombre de derivades nul·les quan s'avaluen a $t = 0$. Observeu que com tenim tres paràmetres lliures és natural imposar tres condicions $g(0) = 0$, $g'(0) = 0$ i $g''(0) = 0$. Escriviu el sistema d'equacions corresponent i resoleu-lo. Comproveu que el cercle que determina coincideix amb el de l'apartat anterior.

Exercici 1.5. Trobeu una parametrització de la *Bruixa d'Agnesi*[1]. Aquesta corba està descrita així: Siguin r, s dues rectes paral·leles i C un cercle tangent a les dues en punt O i O' respectivament. Sigui l una recta variable per O, i posem $B = l \cap C$, $A = l \cap s$. Els punts de la Bruixa s'obtenen tallant la paral·lela a r per B amb la perpendicular a r per A.

[1]Sembla ser que es diu *Bruixa* per un error de traducció de l'italià a l'anglès. Veieu la `wikipedia`.