# 8 Corbes sobre superfícies

En aquest seminari considerarem tres tipus de corbes sobre superfícies:

(A) Línies de curvatura, donades per l'equació diferencial de primer ordre

$$\begin{vmatrix} (v')^2 & -u'\,v' & (u')^2 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{vmatrix} = 0$$

(B) Línies asimptòtiques, donades per l'equació diferencial de primer ordre

$$e\,(u')^2 + 2f\,u'\,v' + g\,(v')^2 = 0$$

sobre la regió on la curvatura de Gauss $K = \frac{eg-f^2}{EG-F^2}$ és negativa.

(C) Geodèsiques, donades per les equacions diferencials de segon ordre

$$u'' + \Gamma_{11}^1\,(u')^2 + 2\Gamma_{12}^1\,u'\,v' + \Gamma_{22}^1\,(v')^2 = 0, \quad v'' + \Gamma_{11}^2\,(u')^2 + 2\Gamma_{12}^2\,u'\,v' + \Gamma_{22}^2\,(v')^2 = 0.$$

**§1 Superfícies de revolució.** Recordeu que la superfície de revolució obtinguda fent girar la corba regular $\alpha(u) = (a(u), 0, b(u))$, amb $a(u) > 0$, al voltant de l'eix $OZ$ admet la parametrització

$$\varphi(u, v) = (a(u)\cos v, a(u)\sin v, b(u))$$

i els coeficients de les seves primera i segona formes fonamentals són

$$E = (a')^2 + (b')^2,\ F = 0,\ G = a^2, \quad e = \frac{a'b'' - a''b'}{\sqrt{(a')^2 + (b')^2}},\ f = 0,\ g = \frac{ab'}{\sqrt{(a')^2 + (b')^2}}.$$

Observeu que les línies de curvatura són les línies coordenades: paral·lels i meridians.

**Exercici 8.1**. Comproveu que podem parametritzar les línies asimptòtiques sobre $\{K \le 0\}$ com $v = h(u)$ amb $h(u) = \pm \int \sqrt{\frac{a''b' - a'b''}{ab'}}\,du = \pm \int \sqrt{-e/g}\,du$.

**Exercici 8.2**. Trobeu parametritzacions de les següents superfícies de revolució:

(a) l'hiperboloide, obtingut a partir de la hipèrbola $\rho^2 - z^2 = 1$,

(b) la catenoide, obtinguda a partir de la catenària $\rho = \cosh z$,

(c) el tor, obtingut a partir de la circumferència $(\rho - R)^2 + z^2 = r^2$.

**Exercici 8.3**. Podem fer representacions gràfiques de les superfícies de revolució anteriors amb algunes de les seves línies asimptòtiques i geodèsiques. Per exemple amb `sage` fem les línies asimptòtiques del tor amb radi de rotació $R = 2$ i radi de la secció $r = 1$

```
var('u','v','t')
tor12 = ParametrizedSurface3D(((2+cos(u))*cos(v),(2+cos(u))*sin(v),sin(u)), (u, v),'Tor')
torplot=tor12.plot((0,2*pi), (0,2*pi),aspect_ratio=1, color='cyan')
e=tor12.second_fundamental_form_coefficient((1,1))
g=tor12.second_fundamental_form_coefficient((2,2))
h1=sqrt(-e/g)
inici=pi/2+pi/4  # cal pi/2+pi/4 <= inici <= 3*p/2
def h(u):
    return numerical_integral(h1,inici,u)[0];
la1tor=parametric_plot3d( [lambda u: (2+cos(u))*cos(h(u)),lambda u: (2+cos(u))*sin(h(u)),lambda u: sin(u)],
                         (u,inici-0.4,inici+0.4),color='red',thickness=3)
la2tor=parametric_plot3d( [lambda u: (2+cos(u))*cos(-h(u)),lambda u: (2+cos(u))*sin(-h(u)),lambda u: sin(u)],
                         (u,inici-0.4,inici+0.4),color='red',thickness=3)
torplot+la1tor+la2tor
```

Procediu de manera similar amb les altres superfícies. Per dibuixar geodèsiques podem fer servir la rutina interna de sage. Per exemple la geodèsica pel punt de coordenades $(\pi/2 + \pi/4, 0)$ amb direcció $(1, 1)$ en el tor es pot dibuixar fent el següent:

```
g1 = [c[-1] for c in tor12.geodesics_numerical((pi/2+pi/4,0),(1,1),(0,30,100))];
geotor = line3d(g1,color='blue',thickness=5);
torplot+geotor
```

**Exercici 8.4**. El teorema de Clairaut afirma que el producte de la distància a l'eix de gir pel cosinus de l'angle que forma amb els paral·lels roman constant al llarg de tota geodèsica d'una superfície de revolució. Comproveu que aquesta relació s'escriu

$$\frac{dv}{du} = \pm\frac{c}{a}\sqrt{\frac{(a')^2+(b')^2}{a^2-c^2}} = \pm\frac{c}{a}\sqrt{\frac{E}{G-c^2}}$$

amb $c$ constant.

**Exercici 8.5**. Utilitzant la parametrització de la tractriu donada per $a(u) = \operatorname{sech} u$ i $b(u) = u - \tanh u$ comproveu que la relació de Clairaut sobre la pseudoesfera es pot escriure com

$$\cosh^2 u + (v - v_0)^2 = k^2,$$

amb $k = 1/c$. Podem fer una representació gràfica de la pseudoesfera amb algunes de les seves geodèsiques parametritzant $u = \operatorname{arccosh}(k\cos\theta)$ i $v = k\sin\theta$ amb $|\theta| \leq \arccos(1/k)$. (També ho podeu fer amb les tècniques pròpies de `sage`.) Veieu com 'tornen' les geodèsiques!

**§2 Tubs amb radi constant.** Recordeu que si $\alpha(u)$ és una corba parametritzada per l'arc amb triedre de Frenet $T, N, B$ aleshores el tub $S$ de radi constant $r > 0$ al voltant de $\alpha$ admet la parametrització

$$\varphi(u,v) = \alpha(u) + r\cos v\, N(u) + r\sin v\, B(u)$$

i els coeficients de les seves primera i segona forma fonamental són

$$E = (1-r\kappa c)^2 + r^2\tau^2,\ F = -r^2\tau,\ G = r^2,\quad e = \kappa c(r\kappa c - 1) + r\tau^2,\ f = -r\tau,\ g = r,$$

on $\kappa = \kappa(u)$ i $\tau = \tau(u)$ són la curvatura i la torsió de $\alpha$ i $c = \cos v$.

**Exercici 8.6**. Comproveu que les línies de curvatura són els cercles *verticals* $u = u_0$ i les corbes *horitzontals* $v = \int \tau(u)\, du$.

**Exercici 8.7**. Si $\alpha$ és una corba tancada aleshores $S$ és un tor (posiblement anusat). Comproveu que les línies de curvatura horitzontals de $S$ són tancades si i només si $\frac{1}{2\pi}\int_0^L \tau(u)\, du \in \mathbb{Q}$ on $L$ és la longitud de la corba tancada $\alpha(u)$.

**Exercici 8.8**. Considereu el cas del nus trèvol parametritzat per

$$\alpha(t) = ((2+\cos(3t))\cos(2t), (2+\cos(3t))\sin(2t), \sin(3t)) \quad \text{amb } t \in [0, 2\pi].$$

Representem gràficament el tub al voltant de $\alpha$ amb radi $r = 0.5$.

```
alpha=vector([(2+cos(3*t))*cos(2*t),(2+cos(3*t))*sin(2*t), sin(3*t)])
alpha1=alpha.diff(t);alpha2=alpha.diff(t,2);
b=alpha1.cross_product(alpha2);n=b.cross_product(alpha1);
b1=b.normalized();n1=n.normalized();
nus=parametric_plot3d(alpha,(t,0,2*pi),aspect_ratio=1,thickness=5);nus
tub=ParametrizedSurface3D(alpha+0.5*cos(u)*n1+0.5*sin(u)*b1, (t, u));
super=tub.plot((0,2*pi), (0,2*pi),aspect_ratio=1,opacity=0.5,mesh=true,color='orange', plot_points=200);super
```

A continuació calculem numèricament la integral de la torsió de $\alpha$ i i una línia de curvatura horitzontal usant de nou `sage`:

```
alpha12=alpha1.cross_product(alpha2);
alpha3=diff(alpha2,t);
torsio=-alpha3.dot_product(alpha12)/alpha12.norm()^2;
def g(t):
    return numerical_integral((torsio*alpha1.norm()).subs(t=u),0,t)[0]
alphaf=alpha.function(t);
n1f=n1.function(t);
b1f=b1.function(t);
def phi(t,u):
    return alphaf(t)+0.5*cos(u)*n1f(t)+0.5*sin(u)*b1f(t);
corba=line3d([phi(2*pi*x/100,g(2*pi*x/100)) for x in range(100)],aspect_ratio=1,thickness=8);
super+corba
```

A l'article de J.L. Weiner, *Closed curves of constant torsion II*, Proceedings American Mathematical Society 67 n.2 (1977), pp. 306–308, es prova que per qualsevol $L > 0$ suficientment petit existeixen corbes tancades regulars amb torsió $\tau \equiv 1$ i longitud $L$.

**Exercici 8.9**. Deduïu que existeixen superfícies tòriques amb línies de curvatura denses.