8 Superfícies tubulars

Exercici 8.1. Siguin U un obert de $\mathbb{R}^2$, que suposarem fitat, i $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^2$ una parametrització local d'una superfície regular. Es defineix *l'àrea* (si existeix) de $S = \varphi(U)$ com la integral

$$A(S) = \int_U \|\varphi_u \times \varphi_v\| du dv.$$

Proveu que l'àrea no depèn de la parametrització; és a dir que si $F : V \to U$ és un difeomorfisme entre oberts del pla llavors φ i $\varphi \circ F$ dónen lloc a la mateixa àrea.

Solució: *Posem $\psi = \varphi \circ F$ i $F(u', v') = (u, v)$. Llavors*

$$\psi_{u'} = \varphi_u \frac{\partial u}{\partial u'} + \varphi_v \frac{\partial v}{\partial u'}, \qquad \psi_{v'} = \varphi_u \frac{\partial u}{\partial v'} + \varphi_v \frac{\partial v}{\partial v'}$$

i

$$(\psi_{u'} \times \psi_{v'})(u', v') = (\varphi_u \times \varphi_v)(u', v') \cdot JF(u', v').$$

La formula del canvi de variables diu

$$\int_U g(u, v) du dv = \int_V g(u', v') \left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(u', v')} \right| du' dv'.$$

Aplicada a $g(u, v) = \|\varphi_u \times \varphi_v\|(u, v)$ dóna

$$A(S) = \int_V \|\varphi_u \times \varphi_v\|(u', v')|JF|(u', v') du' dv' = \int_V \|\psi_{u'} \times \psi_{v'}\|(u', v') du' dv'$$

que és el que voliem provar.

Exercici 8.2. Sigui $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una corba regular parametritzada per l'arc i amb curvatura mai nulla. Sigui Π_u el pla normal a la corba en el punt $\alpha(u)$. Sobre Π_u considerem una circumferència C_u de centre $\alpha(u)$ i radi $r(u)$. La reunió $S = \cup_{u \in I} C_u$ d'aquestes circumferències s'anomena *superfície tubular* o *tub* al voltant de la corba $\alpha(u)$ amb radi $r(u)$.

a) Partint del vectors normal $\vec{n}(u)$ i binormal $\vec{b}(u)$ de la corba α, trobeu una aplicació diferenciable $\varphi : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ que tingui S per imatge.

   Solució: *Considerem $\varphi(u, v) = \alpha(u) + r(u)(\cos v\ \vec{n}(u) + \sin v\ \vec{b}(u))$.*

b) Proveu que si $0 < r(u) < 1/\kappa(u)$, on $\kappa(u)$ és la curvatura de α, aleshores $\varphi_u \times \varphi_v \neq 0$. Suposarem a partir d'ara que $\varphi|_U$ és injectiva per tot obert U de la forma $I \times (v_0 - \pi, v_0 + \pi)$. Deduïu que S és superfície regular.

   Solució: *Fent servir les formules de Frenet ($\vec{t}' = \kappa\vec{n}$, $\vec{n}' = -\kappa\vec{n} - \tau\vec{b}$ i $\vec{b}' = \tau\vec{n}$.) és fàcil provar que*

$$\varphi_u = (1 - r\kappa \cos v)\vec{t} + (r' \cos v + r\tau \sin v)\vec{n} + (r' \sin v - r\tau \cos v)\vec{b}$$

   i

$$\varphi_v = -r \sin v\vec{n} + r \cos v\vec{b}.$$

   Llavors

$$\|\varphi_u \times \varphi_v\|^2 = r^2(1 - r\kappa \cos v)^2 + r^2(r')^2.$$

   Quan $r\kappa < 1$ això sempre serà no nul.

   Donats $u_0 \in I$ i $v_0 \in S^1 \equiv \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, considerem la restrició de φ a $[u_0 - \varepsilon, u_0 + \varepsilon] \times S^1 \to \mathbb{R}^3$. És contínua i bijectiva d'un compacte en un Hausdorff i per tant és oberta. Deduïm que la restricció a $(u_0 - \varepsilon, u_0 + \varepsilon) \times (v_0 - \pi, v_0 + \pi)$ té imatge en un obert i és homeomorfisme amb aquest. Per tant és parametrització local i S és superfície.

c) Trobeu la primera forma fonamental associada a la parametrització $\varphi|_U$.

Solució: *Fent servir les exprerssions de φ_u i φ_v tenim*

$$E = \varphi_u \cdot \varphi_u = (1 - r\kappa \cos v)^2 + r'^2 + r^2\tau^2, \quad G = r^2, \quad F = \varphi_v \cdot \varphi_v = -r^2\tau.$$

(L'element d'àrea serà $\sqrt{EG - F^2}du\ dv = r\sqrt{r'^2 + (1 - r\kappa \cos v)^2}du\ dv$.)

d) Demostreu que l'àrea de S no depèn de la torsió de α. En el cas $r(u) = r_0$, vegeu que tampoc depèn de la curvatura.

Solució: *Que no depén de la torsió es veu a partir de l'expressió de $\|\varphi_u \times \varphi_v\|$ trobada en un apartat anterior. Quan r és constant tenim que $\|\varphi_u \times \varphi_v\| = r(1 - r_0\kappa \cos v)$. Llavors*

$$A(S) = r_0 \int_0^L \int_0^{2\pi} (1 - r_0\kappa(u) \cos v) dv\ du = 2\pi r_0 L.$$

i l'àrea no depén de la curvatura.

e) Calculeu la curvatura de Gauss en el cas $r(u)$ constant.

Solució: *El vector normal unitari a la superfície associat a la parametrització és $\vec{N} = -\cos v\vec{n} - \sin v\vec{b}$. Com que $N_u \times N_v = K\ \varphi_u \times \varphi_v$, amb un càlcul senzill veiem que*

$$K = -\frac{\kappa \cos v}{r(1 - r\kappa \cos v)}.$$

f) Trobeu les línies de curvatura si $r(u)$ és constant i la corba α és plana.

Solució: *Volem trobar direccions pròpies de $-dN : T_{(u,v)}S \mapsto T_{N(u,v)}S^2$. Trobem l'expressió en la base $\{\varphi_u, \varphi_v\}$. Un càlcul senzill mostra que quan $r = r_0$ i $\tau = 0$ llavors $-N_u = \frac{\kappa \cos v}{1 - \kappa r \cos v}\varphi_u$ i $-N_v = -\varphi_v/r$. La matriu de $-dN$ és*

$$\begin{pmatrix} \frac{\kappa \cos v}{1 - \kappa r \cos v} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{r} \end{pmatrix}$$

i les direccions coordenades són direccions pròpies. Per tant, les corbes $u = ct.$ i $v = ct.$ són linies de curvatura en aquest cas.

g) Particularitzeu els resultats anteriors al cas del tor.

Solució: *En el tor, la corba és una circumferència. Les línies de curvatura són els meridians i els paral·lels. Observem que per $v = \pi/2, 3\pi/2$ la curvatura principal dels paral·les és zero. És la línia de contacte quan posem el 'flotador' al terra.*

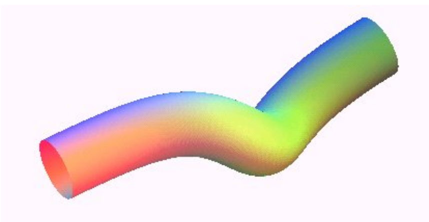

Figura 8.4: Superfície tubular.

Exercici 8.3. El *teorema de Fenchel* diu que la curvatura total ($\int_\gamma \kappa$) d'una corba γ tancada i simple (γ injectiva) a l'espai sempre és més gran o igual que 2π. A més, la igualtat és dona si i només si la corba és plana i convexa.

Considerem S una superfície tubular de radi constant r al voltant de γ sense autointerseccions (acceptem que això és possible prenent r prou petit) i sigui R la regió on la curvatura de Gauss és positiva.

a) Proveu que $\int_R K = 2\int_\gamma \kappa$.

Solució: *Per que sigui regular agafem $0 < r < 1/\kappa$, per la injectivitat agafem per cada $t \in S^1$ un ϵ_t de manera que $B_{\epsilon_t}(\gamma(t)) \cap \gamma$ sigui un 'segment'. Triem com r el més petit del ϵ_t. Per la integral cal observar que la curvatura de Gauss serà positiva quan $v \in (\pi/2, 3\pi/2)$ llavors*

$$\int_R K = -\int_{S^1}\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{\kappa\cos v}{r(1-\kappa r\cos v)} r(1-\kappa r\cos v)dv\,dt = -\int_{S^1}\kappa\left(\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\cos v dv\right)dt = 2\int_\gamma \kappa.$$

b) Proveu que per cada $u \in S^2$ existeix un punt de S amb curvatura de Gauss positiva i u com a normal.

Solució: *Considerem els plans de l'espai amb direcció normal u, per ser la superfície tancada trobarem com a mínim dos d'ells que són tangents i que deixen la superfície a un costat del pla, aquí la curvatura de Gauss és positiva. En un dels dos el normal de la superfície coincideix amb el normal del pla.*

c) Deduïu que l'aplicació de Gauss cobreix com a mínim un cop l'esfera S^2.

Solució: *És conseqüència directa de l'apartat anterior: cada direcció de S^2 prové com a mínim d'un normal de la superfície.*

d) Proveu la primera part del teorema.

Solució: *Hem dit que els normals on la curvatura de Gauss és positiva cobreixen com a mínim un cop l'esfera. Aleshores $\int_R K \geq 4\pi$ per tant $\int_\gamma \kappa \geq 2\pi$.*

e) La segona part del teorema la podeu llegir a *'Geometría diferencial de curvas y superficies'* de M. P. do Carmo. (p. 399).