3 L'esfera osculatriu

Exercici 3.1. Sigui $\mathbf{x}(s)$ una corba a l'espai parametritzada per l'arc amb curvatura κ i torsió τ mai nul·les. L'esfera osculatriu $\Sigma(s_0)$ de la corba $\mathbf{x}(s)$ en el punt $\mathbf{x}(s_0)$ és la que té centre $\mathbf{c}(s_0)$ i radi $r(s_0)$ donats per

$$\begin{aligned}\mathbf{c}(s_0) &= \mathbf{x}(s_0) + \rho(s_0)\mathbf{N}(s_0) - \frac{\rho'(s_0)}{\tau(s_0)}\mathbf{B}(s_0)\\ r(s_0)^2 &= \rho(s_0)^2 + \left(\frac{\rho'(s_0)}{\tau(s_0)}\right)^2, \qquad (\rho = 1/\kappa).\end{aligned}$$

a) Comproveu que $\mathbf{c}(s_0)$ i $r(s_0)$ estan determinants per les condicions $f(s_0) = f'(s_0) = f''(s_0) = f'''(s_0) = 0$ on
$$f(s) = \|\mathbf{x}(s) - \mathbf{c}(s_0)\|^2 - r(s_0)^2.$$

b) Suposant que $f^{(4)}(s_0) \neq 0$ decidiu si la corba travessa la seva esfera osculatriu en $\mathbf{x}(s_0)$.

c) Proveu que $\mathbf{c}'(s) = -\lambda(s)\mathbf{B}(s)$ i $r' = \frac{\lambda\rho'}{r\tau}$ amb $\lambda = \tau\rho + \left(\frac{\rho'}{\tau}\right)'$.

d) Proveu que $\mathbf{x}(s)$ està continguda en una esfera (*corba esfèrica*) per tot s si i només si
$$\lambda = \tau\rho + \left(\frac{\rho'}{\tau}\right)' \equiv 0.$$

e) Proveu que $\mathbf{x}(s)$ té contacte d'ordre 4 amb $\Sigma(s_0)$ en $\mathbf{x}(s_0)$ si i només si $\lambda(s_0) = 0$. *Indicació: Considereu la funció* $g(u,v) = \frac{d^3}{dv^3}F_u(x(v))$ *on* $F_u(p) = \|\mathbf{c}(u) - p\|^2 - r(u)^2$. *Noteu que* $g(t,t) \equiv 0$ *i deriveu.*

Suposem a partir d'aquí que $\lambda(s) \neq 0$ per a tot s.

f) Proveu que $\partial_s F_s(p) = 0$ és una equació del pla osculador de la corba $\mathbf{x}$ en el punt $\mathbf{x}(s)$.

g) Proveu que per ε prou petit les esferes osculatrius en $\mathbf{x}(s_0)$ i $\mathbf{x}(s_0 + \varepsilon)$ es tallen en un cercle $C_\varepsilon(s_0)$ que tendeix al cercle osculador $C(s_0)$ de $\mathbf{x}$ en $\mathbf{x}(s_0)$ quan ε tendeix a zero.

h) Estudieu com és l'*envolvent* de la família uniparàmetrica d'esferes osculadores d'una corba regular $\mathbf{x}(s)$.[2]

Exercici 3.2. Una *hèlix* és una corba tal que la seva tangent forma un angle constant amb una direcció fixada ($\mathbf{T}\cdot\mathbf{a} = \cos\alpha$). Es pot demostrar que una corba regular a $\mathbb{R}^3$ és una hèlix si i només si $\kappa/\tau = a\,(= \tan\alpha)$.

a) Provar que una hèlix amb torsió no nul·la és esfèrica si i només si $\kappa^2(s) = (-A^2s^2 + Bs + C)^{-1}$ per certes constants A, B i C. Quin és el valor de A?

b) Provar que una hèlix esfèrica (amb eix l'eix de la terra) que comença a l'equador no pot arribar mai al pol nord.

c) Proveu que la corba de l'apartat anterior acaba en un punt on talla ortogonalment a un petit cercle al voltant del pol nord.

d) Podeu veure com és la projecció d'una hèlix esfèrica sobre el pla perpendicular a l'eix? Estudieu el cas $\cos\alpha = 3/5$? (Indicació[3]: l'equació natural de les epicicloïdes és $\rho^2/A^2 + s^2/B^2 = 1$ amb $A = 4r(R+r)/R$, $B = 4r(R+r)/(R+2r)$ essent R el radi de la circumferència al voltant de la qual es mou una circumferència de radi r).

[2]Veieu l'article `http://www.encyclopediaofmath.org/index.php?title=Envelope&oldid=24434`

[3]Veieu per exemple D. Struik, *Classical Differential Geometry*.