

2 Involutes i Evolutes

Exercici 2.1. (La involuta¹ o evolvent.) Sigui $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ una corba regular de curvatura mai nul·la. S'anomena *involuta* de α a qualsevol corba β que talli ortogonalment a totes les rectes tangents de α .

- a) Trobeu una parametrització de β en funció del paràmetre arc de α .
- b) Trobeu una parametrització de β quan α no està parametritzada per l'arc.
- c) Interpreteu geomètricament la parametrització obtinguda. (Indicació: podeu utilitzar un cordill.)
- d) Trobeu la involuta de la *catenària* $y = \cosh x$, que passa pel punt $(0, 1)$. Comproveu que es tracta de la *tractriu*.
- e) Trobeu parametritzacions de les involutes de la circumferència i de la *cicloide*.

Exercici 2.2. (L'evoluta.) Diem que una corba regular plana β és l'*evoluta* d'una altra corba regular plana α si i només si α és una involuta de β . Dit d'una altra manera, β és l'envolupant de la família de rectes normals de α . Recordem que s'anomena *envolupant* d'una família de corbes a una corba que és tangent en cada punt a una de les corbes de la família.

- a) Trobeu una parametrització de β en funció del paràmetre arc de α , suposant que la curvatura de α no s'anul·la. (Solució: $\beta(s) = \alpha(s) + \frac{1}{k(s)}\mathbf{n}(s)$).

Generalitzeu-la a qualsevol paràmetre de α .

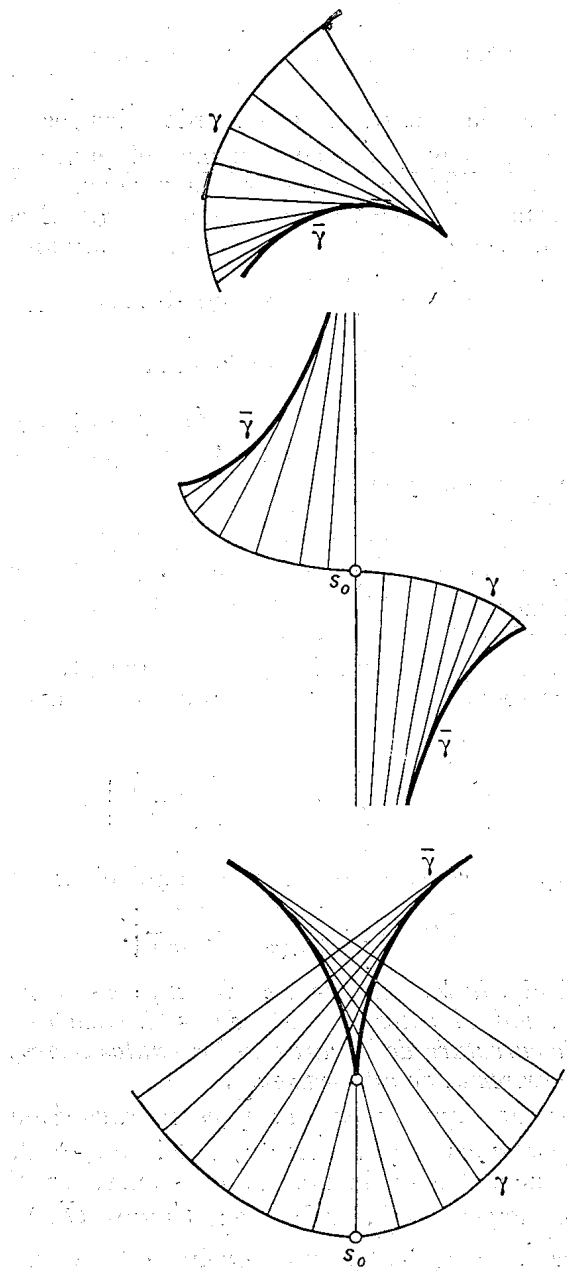
- b) Interpreteu geomètricament la parametrització obtinguda. (Indicació: Recordeu la definició de centre de curvatura.)
- c) Demostreu que la longitud de β entre $\beta(s_0)$ i $\beta(s_1)$ és igual a la diferència dels radis de curvatura de α en els punts $\alpha(s_0)$ i $\alpha(s_1)$.
- d) Demostreu que la tangent de β en un punt $s \in I$ és la normal de α en s .
- e) Considerem les normals a α en dos punts propers $s_1 \neq s_2$ i fem tendir s_1 a s_2 . Demostreu que la intersecció d'aquestes normals convergeix a un punt de l'evoluta.
- f) Trobeu l'evoluta de la *cicloide*.
- g) Comproveu que la curvatura de la *catenària* $\alpha(t) = (t, \cosh t)$ és $k(t) = 1/\cosh^2 t$, i que la seva evoluta és $\beta(t) = (t - \sinh t \cosh t, 2 \cosh t)$.

Exercici 2.3. (Relació entre la curvatura d'una corba i la curvatura de la seva evoluta.)

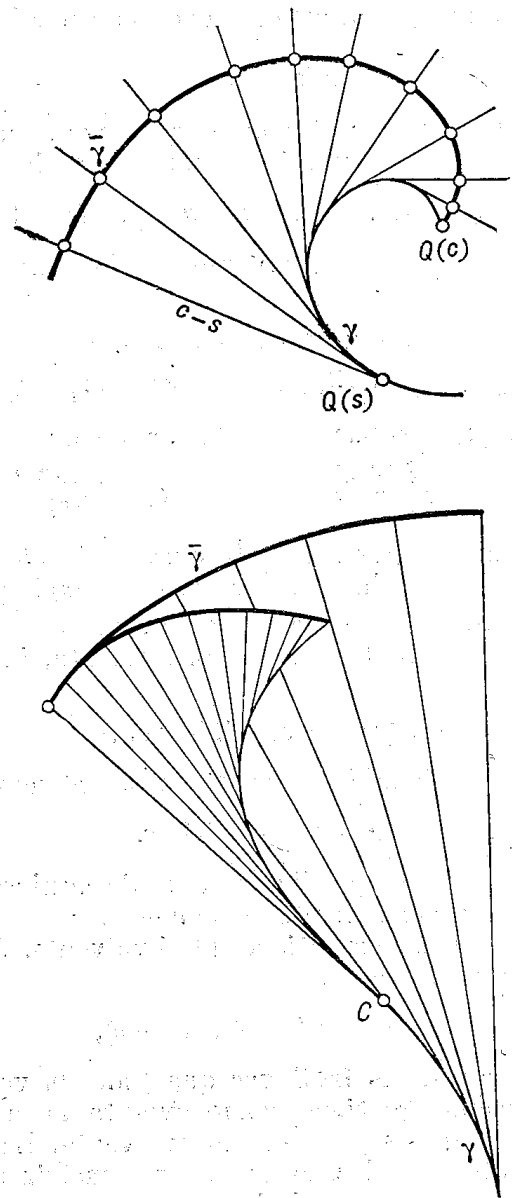
- a) Trobeu la curvatura de la *catenària* en paràmetre arc.
- b) Trobeu la curvatura de la *tractriu* en el paràmetre induït per la *catenària*.
- c) Deduïu una fórmula general per la curvatura d'una involuta de α en el paràmetre induït per l'arc de α .

Exercici 2.4. Comproveu geomètricament que l'evoluta de la *tractriu* és la *catenària*.

¹Per un índex de corbes vegeu: <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Curves/Curves.html>



En negreta *evolutes*



En negreta *involutes*