6 Superfícies de revolució

En el seminari d'aquesta setmana farem servir `Sage` *(*`http://sagemath.org`*) per treballar amb superfícies. Podeu trobar a*
`http://doc.sagemath.org/html/en/reference/riemannian_geometry/index.html`
instruccions i exemples per fer càlculs amb superfícies parametritzades.

Al final del document trobareu un exemple complet, si voleu podeu començar per aquí o bé anar quan calgui.

Exercici 6.1. Sigui $(a(u), b(u))$ una corba plana parametritzada per l'arc. Considerem la superfície de revolució S parametritzada per $\varphi(u, v) = (a(u)\cos v, a(u)\sin v, b(u))$. Calculeu els coeficients de la primera i segona forma fonamental de S en aquesta parametrització i comproveu que la curvatura de Gauss de S ve donada per

$$K(u, v) \quad = \quad -\frac{a''(u)}{a(u)}. \tag{6.1}$$

Exercici 6.2. Particularitzeu-ho al cas d'un tor de revolució i d'una esfera. Feu els dibuixos amb `Sage`.

Exercici 6.3. Ens proposem obtenir i dibuixar superfícies de revolució que tinguin curvatura de Gauss constant $K \equiv 1$. Per la igualtat (6.1), això es redueix a resoldre l'equació diferencial $a''(u) = -a(u)$. Comproveu que, llevat d'un canvi $u \to u + C$, les solucions són totes de la forma

$$a(u) = c\cos(u), \qquad b(u) = \int_0^u \sqrt{1 - c^2\sin^2(t)}dt$$

on la segona expressió prové de la suposició $a'(u)^2 + b'(u)^2 = 1$ (i.e. u és paràmetre arc). Proveu que la correspondència latitud $= u$, longitud $= cv$ defineix una isometria entre un obert de la surpefície anterior i un obert de l'esfera unitat.

Exercici 6.4. La integral $b(u) = \int_0^u \sqrt{1 - c^2\sin^2(t)}dt$ és una integral el·líptica, existeix una funció en `Sage` que la implementa. En aquest cas $b(u) = \texttt{elliptic\_e}(u, c^2)$. Tenim tres casos interesessants: $c = 1, c < 1, c > 1$.

a) Determineu el domini de la variable u segons el valor de c.

b) Dibuixeu les superfícies pels diferents casos (en el primer cas tenim l'esfera de radi 1, en el segon cas un 'fus' i en el tercer una 'gorra de cop' (xixonera).)

Exercici 6.5. Utilitzeu l'estratègia anterior per a obtenir i dibuixar superfícies de revolució amb curvatura de Gauss constant $K \equiv -1$. El cas $a(u) = e^{-u}$ és conegut amb el nom de *pseudoesfera*.

Exercici 6.6. Determineu les superfícies de revolució desenvolupables, és a dir, reglades amb curvatura de Gauss $K \equiv 0$.

Exercici 6.7. Utilitzeu l'exercici 6.1 per donar una expressió de la curvatura mitjana $H = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(-dN)$ d'una superfície de revolució. Ho podeu fer també amb `Sage`. Comproveu que la catenoide $\sqrt{x^2 + y^2} = \cosh z$, superfície de revolució obtinguda al girar la catenària, té curvatura mitjana nula (és una superfície mínima).

Exemple amb Sage

Fem un exemple complet en el que veiem com fer servir el Sage. Es considera la superfície que s'obté fent girar la corba $y = e^{-z^2}$ al voltant de l'eix OZ. Podem considerar la parametrització

$$\varphi(u, v) = (e^{-u^2}\cos(v), e^{-u^2}\sin(v), u).$$

Posem

```
> var('u,v');
> ceba=ParametrizedSurface3D((e^(-u^2)*cos(v),e^(-u^2)*sin(v),u), (u,v),'Ceba');
> ceba.plot((-2, 2), (0, 2*pi),mesh=True, color='orange',aspect_ratio=1);
```

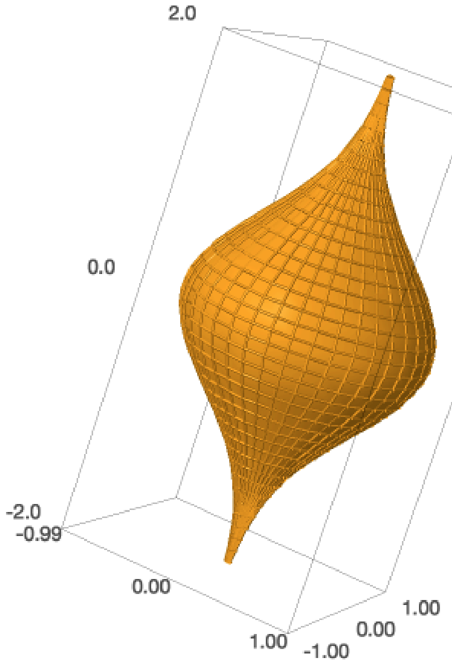

Figura 6.1: Ceba

Calculem la primera i segona formes fonamentals.

```
> pf=ceba.first_fundamental_form_coefficients(); pf;
> sf=ceba.second_fundamental_form_coefficients(); sf;
```

Obtenim, respectivament

$$\left\{(1,2) : 0, (1,1) : \left(4\,u^2 + e^{\left(2\,u^2\right)}\right)e^{\left(-2\,u^2\right)}, (2,1) : 0, (2,2) : e^{\left(-2\,u^2\right)}\right\}$$

$$\left\{(1,2) : 0, (1,1) : -\frac{2\left(2\,u^2-1\right)}{\sqrt{4\,u^2 + e^{(2\,u^2)}}}, (2,1) : 0, (2,2) : \frac{1}{\sqrt{4\,u^2 + e^{(2\,u^2)}}}\right\}$$

Les direccions i curvatures principals, `dp=ceba.principal_directions();`

$$\left[\left(-\frac{2\sqrt{4\,u^2 + e^{(2\,u^2)}}\left(2\,u^2-1\right)e^{\left(2\,u^2\right)}}{16\,u^4 + 8\,u^2 e^{(2\,u^2)} + e^{(4\,u^2)}}, [(1,\ 0)], 1\right), \left(\frac{e^{\left(2\,u^2\right)}}{\sqrt{4\,u^2 + e^{(2\,u^2)}}}, [(0,\ 1)], 1\right)\right].$$

La curvatura mitjana i de Gauss, `cm=ceba.mean_curvature();`, `cg=ceba.gauss_curvature();`

$$H = \frac{e^{\left(4\,u^2\right)} + 2\,e^{\left(2\,u^2\right)}}{2\left(4\,u^2 + e^{(2\,u^2)}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$K = -\frac{2\left(2u^2 - 1\right)e^{\left(4u^2\right)}}{16u^4 + 8u^2e^{\left(2u^2\right)} + e^{\left(4u^2\right)}}$$

Observem que $K = K(u)$ (no depén de v) i només és positiva a la part central (quan $|u| < \sqrt{2}/2$).

Fem el dibuix d'un troç de geodèsica. La corba comença a $(0,0)$ amb direcció $(-1,1)$ amb valor del paràmetre arc de 0 a 3 i fent 100 troços per integrar

```
> g1 = [c[-1] for c in ceba.geodesics_numerical((0,0),(1,-1),(0,3,100))];
> dceba=ceba.plot((-2, 2), (0, 2*pi),mesh=True, color='orange',aspect_ratio=1);
> line3d(g1,color='red',thickness=5)+dceba;
```

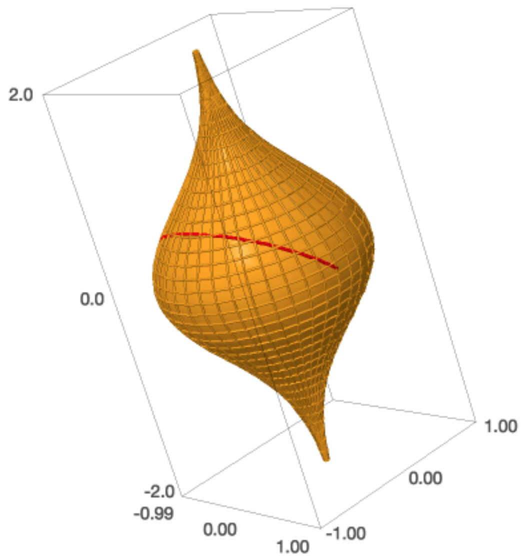

Figura 6.2: Geodèsica