5 Superfícies i isometries

Exercici 5.1. Determineu quins dels següents subconjunts de $\mathbb{R}^3$ són superfícies regulars:

a) $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid xyz = 1\}$

b) $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z^2 + x^2y^2 - 2xyz = 0\}$

c) $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = \lambda\}$ on $\lambda \in \mathbb{R}$

d) $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid xy = 0\}$

e) $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - \cosh^2 z = 0\}$

f) $H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y \cos z = x \sin z\}$.

Solució: *Recordem que si $f : W \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ és diferenciable i $a \in \mathbb{R}$ de manera que $df_p \neq 0$ per a tot $p \in f^{-1}(a)$ resulta que $S = f^{-1}(a)$ és superfície. a) Apliquem aquest resultat, la superfície té quatre components connexes. b) La superfície ve donada per $z = xy$ que és una gràfica. c) Sempre que $\lambda \neq 0$ tenim superfície (hiperboloïdes). Si $\lambda = 0$ és un con, que és singular al $(0,0,0)$. d) No és superfície, són dos plans que es tallen perpedicularment. e) Superfície de revolució, catenoïde. f) Si $f(x,y,z) = y \cos z - x \sin z$ llavors $df = (-\sin z, \cos z, -y \sin z - x \cos z) \neq \vec{0}$ i $f^{-1}(0)$ defineix una superfície. Per assegurar-se que el con i el parell de plans no són superfícies n'hi ha prou amb trobar tres vectors linealment independents i que siguin derivada en el mateix punt de corbes contingudes a S*

Exercici 5.2. Sigui $\alpha(t)$ una corba parametritzada per l'arc de curvatura no nul·la en tot punt.

a) Considerem $\Phi(t,s) = \alpha(t) + s\,\alpha'(t)$. Proveu que per tot (t,s) amb $s \neq 0$ existeix un entorn U de (t,s) tal que $\Phi(U)$ és una superfície.

b) Proveu que els coeficients de la primera forma fonamental no depenen de la torsió de α.

c) Considerant una corba plana amb la mateixa curvatura que α, deduïu que hi ha una isometria d'un obert de la superfície anterior amb una regió del pla.

Solució: *a) $\Phi_s(t,s) = \vec{t}(t), \Phi_t(t,s) = \vec{t}(t) + s\kappa(t)\vec{n}(t)$. Llavors $(\Phi_s \times \Phi_t)(t,s) = s\kappa(t)\vec{b}(t) \neq \vec{0}$. Per cada (t,s) podem trobar un entorn $U \subset \mathbb{R}^2$ de manera que $\Phi : U \to \Phi(U) \subset S$ és una superfície. Fixem-nos que globalment pot tenir autointerseccions. Si $\kappa(t_0)\tau(t_0) \neq 0$, existeix ϵ tal que Φ restringida a $(t_0, t_0+\epsilon) \times (0,\infty)$ és parametrització d'una superfície regular. En efecte, comprovant que*

$$\det(\mathbf{T}(t_0), \mathbf{T}(t_0+\epsilon), \alpha(t_0+\epsilon) - \alpha(t_0)) = -\frac{\kappa(t_0)\tau(t_0)}{6}\epsilon^4 + O(\epsilon^5) \neq 0$$

veiem que les rectes tangents en punts propers no es tallen. Deduïm que Φ és injectiva. Només cal veure que la inversa és contínua, però sabem que localment ve donada per una aplicació diferenciable definida en un obert de $\mathbb{R}^3$.
b) $|\Phi_s|^2 = 1$, $|\Phi_t|^2 = 1 + s^2\kappa^2(t)$ i $\langle \Phi_s, \Phi_t \rangle = 1$. No depén de la torsió. c) Si $\tilde{\alpha}(t)$ és plana, amb paràmetre arc i $\tilde{\kappa}(t) = \kappa(t)$ la superfície que defineix és un troç del pla i l'expressió de la primera forma fonamental és la mateixa en les coordenades (s,t), llavors tenim isometria.

Exercici 5.3. Decidiu entre quines de les següents superfícies de $\mathbb{R}^3$ existeix una isometria local:

a) $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}$

b) $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$

c) $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = \sin y\}$

Solució: *Les superfícies són, respectivament, un pla, un cilíndre i una planxa d'"Uralita'. Parametritzem el cilidre per* $(u, v) \mapsto (\cos(u), \sin(u), v)$ *amb* $u \in (0, 2\pi), v \in \mathbb{R}$, *en aquestes coordenades la primera forma fonamental és* $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, *una isometria del pla al cilindre és la que porta el punt* $(u, v, 0)$ *al punt del cilindre amb coordenades* (u, v). *En sentit contrari només podem definir-la en un obert. Per la superficie c) considerem la corba* $y \mapsto (0, y, \sin(y))$ *parametritzada per l'arc* $s(y) = \int_0^y \sqrt{1 + \cos^2(\xi)} d\xi$. *Parmetritzem la superfície per* $\varphi(x, s) = (x, y(s), \sin y(s))$. *Llavors* $\varphi_x = (1, 0, 0)$, $\varphi_s = (0, y', y' \cos y(s))$. *Tenim* $|\varphi_x|^2 = 1, \langle \varphi_x, \varphi_s \rangle = 0$ *i*

$$|\varphi_s|^2 = y'(s)^2(1 + \cos^2 y(s)) = 1.$$

Per tant la 'teulada' és isomètrica al pla.

Exercici 5.4. Sigui S^2 l'esfera unitat de $\mathbb{R}^3$. Demostreu que S^2 no és localment isomètrica a un pla. (*Indicació:* Calculeu l'àrea d'un disc de S^2 de radi r.)

Solució: *Suposem que tenim una isometria local* φ *d'un entorn* $p \in S^2$ *a un entorn* $q \in \mathbb{R}^2$. *Llavors per un* r *prou petit el disc* $D_r(p) \subset U$ *i* $\varphi(D_r(p)) = D_r(q)$ *per ser isometria. Aquí cal usar que* $D_r(p)$ *(resp.* $D_r(q)$*) conté tots els punts que es poden unir a* p *(resp. a* q*) amb corbes de longitud* $\leq r$. *Per veure això: comencem amb una corba* $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ *tal que* $\alpha(0) = (0, 0)$ *i* $\alpha(1) = (a, 0)$ *i notem*

$$\int_0^1 \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt \geq \int_0^1 \langle |x'(t)| dt \geq a$$

Això demostra el que volíem en el cas del pla. En el cas de l'esfera, usem coordenades esfèriques (φ, θ) *i suposem* $\varphi(0) = 0$:

$$\int_0^1 \sqrt{(\varphi')^2 + \sin^2(\varphi)(\theta')^2} \geq \varphi(1).$$

Finalment, l'àrea s'ha de conservar però $A(D_r(p)) = 2\pi(\cos(r) - 1)$ *i* $A(D_r(q)) = \pi r^2$ *que són diferents.*

Exercici 5.5. Es consideren les parametritzacions respectives ψ i φ de la catenoide C i de l'helicoide H donades per

$$\psi(u, v) = (\cosh v \cos u, \cosh v \sin u, v) \qquad \text{on} \quad u \in (0, 2\pi), \ v \in \mathbb{R},$$

$$\varphi(z, w) = (w \cos z, w \sin z, z) \qquad \text{on} \quad z \in (0, 2\pi), \ w \in \mathbb{R}$$

Comproveu que l'aplicació F determinada per $F(\psi(u, v)) = \varphi(u, \sinh v)$ és una isometria de la imatge de ψ en la catenoide C sobre un obert de l'helicoide H. Aquesta aplicació, es pot estendre a tot C? Es possible definir una isometria de H en C?

Solució: *La primera forma de la catenoide en les coordenades* $(u, v) \in (0, 2\pi) \times \mathbb{R}$ *és* $\begin{pmatrix} \cosh^2 v & 0 \\ 0 & \cosh^2 v \end{pmatrix}$.
L'helicoïde el parametritzem per $\tilde{\varphi}(u, v) = (\sinh v \cos u, \sinh v \cos u, u)$, *amb aquestes coordenades la primera forma fonamental té el mateix aspecte.*
No es pot extendre a tota la catenoïde (C *més el meridià que falta!) ja que si* $u \to 0$ *i* $u \to 2\pi$ *a la catenoïde estem en un mateix meridià però a l'helicoide obtenim una recta a* $z = 0$ *i una recta a* $z = 2\pi$ *respectivament. Com que topològicament són diferents no es pot establir una isometria entre* C *(completa) i* H. *Per veure que* $\mathbb{R}^2$ *i* $S^1 \times \mathbb{R}$ *no són homeomorfs, sense parlar de grup fonamental, es pot considerar la compactificació d'Alexandrov: els entorns de l'infinit són diferents en els dos casos.*

Exercici 5.6. Demostreu[6] que les superfícies

$$\begin{aligned} \varphi(t, s) &= (t \cos s, t \sin s, s) \qquad \textit{Helicoide} \\ \psi(t, s) &= (t \sin s, t \cos s, \log t) \quad \textit{Logaritmoide} \end{aligned}$$

[6] Aquest exercici es treballarà a la classe de problemes quan s'hagi introduït el concepte de curvatura de Gauss. No obstant podeu calcular les primeres formes fonamentals de cada superfície i veure que no coincideixen en els punts amb coordenades (t, s). Llavors l'aplicació que transforma $\varphi(t, s)$ en $\psi(t, s)$ no pot ser isometria.

tenen, en punts corresponents [mateixes coordenades (t, s)], la mateixa curvatura de Gauss, però l'aplicació que porta el punt de coordenades (t, s) de l'helicoide al punt de coordenades (t, s) del logaritmoide no és una isometria. [*La curvatura no determina la mètrica*].

Solució: *Calculem la curvatura de Gauss.*

$$\begin{aligned}
\varphi_t &= (\cos s, \sin s, 0) \\
\varphi_s &= (-t \sin s, t \cos s, 1) \\
E &= 1 \\
F &= 0 \\
G &= 1 + t^2 \\
\nu &= \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}(\sin s, -\cos s, t) \\
\varphi_{tt} &= (0, 0, 0) \\
\varphi_{ts} &= (-\sin s, \cos s, 0) \\
\varphi_{ss} &= (-t \cos s, -t \sin s, 0) \\
e &= 0 \\
f &= -\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \\
g &= 0 \\
K &= -\frac{1}{(1+t^2)^2}
\end{aligned}$$

Anàlogament

$$\begin{aligned}
\psi_t &= (\sin s, \cos s, \frac{1}{t}) \\
\psi_s &= (t \cos s, -t \sin s, 0) \\
E &= 1 + \frac{1}{t^2} \\
F &= 0 \\
G &= t^2 \\
\nu &= \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}(\sin s, \cos s, -t) \\
\psi_{tt} &= (0, 0, -\frac{1}{t^2})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi_{ts} &= (\cos s, -\sin s, 0) \\
\psi_{ss} &= (-t \sin s, -t \cos s, 0) \\
e &= \frac{1}{t\sqrt{1+t^2}} \\
f &= 0 \\
g &= -\frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \\
K &= -\frac{1}{(1+t^2)^2}
\end{aligned}$$

Per veure que l'aplicació f : helicoide $\longrightarrow$ logaritmoide donada per $f(\varphi(t, s) = \psi(t, s)$ no és isometria hem de veure si la matriu de la primera forma fonamental de l'helicoide respecte de la base (φ_t, φ_s) coincideix amb la matriu de la primera forma fonamental del logaritmoide respecte de la base $(f_*\varphi_t, f_*\varphi_s)$.
Però

$$f_*\varphi_t = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(\varphi(t, s_0)) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \psi(t, s_0) = \psi_t.$$

Anàlogament $f_* \varphi_v = \psi_v$. *Però en els càlculs anteriors es veu que la matriu de la primera forma fonamental de l'helicoide respecte de la base* (φ_t, φ_s) *no coincideix amb la matriu de la primera forma fonamental del logaritmoide respecte de la base* (ψ_t, ψ_s).
Però podem veure fàcilment, no únicament que f *no és isometria, sinó que no hi ha cap isometria entre l'helicoide* H *i el logaritmoide* L. *En efecte, qualsevol isometria* F *entre* H *i* L *ha de portar el punt de coordenades* (t, s) *al punt de coordenades* $(\pm t, u(t, s))$, *on* $u = u(t, s)$ *és una funció desconeguda que ens determina* F. *Això és degut a que* F *conserva la curvatura de Gauss, la qual, com hem vist, només depèn de* t^2.
Així, doncs, tenim $F(\varphi(t, s)) = \psi(\pm t, u(t, s))$. *En particular,*

$$dF(\varphi_t) = \pm\psi_t + \psi_s \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Per ser F *isometria*

$$\langle dF(\varphi_t), dF(\varphi_t)\rangle = \langle \varphi_t, \varphi_t\rangle = 1,$$

però

$$\langle dF(\varphi_t), dF(\varphi_t)\rangle = \langle \pm\psi_t + \psi_s \frac{\partial u}{\partial t}, \pm\psi_t + \psi_s \frac{\partial u}{\partial t}\rangle = 1 + \frac{1}{t^2} + (\frac{\partial u}{\partial t})^2 t^2.$$

Igualant les dues darreres igualtats obtenim una contradicció.