SEMINARI 9. INTEGRACIÓ DE FORMES DIFERENCIALS.

Víctor Ballester Ribó
NIU: 1570866

Geometria diferencial
Grau en Matemàtiques
Universitat Autònoma de Barcelona
Juny de 2022

Exercici 5. *Considereu la 2-forma $\omega = z\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ i la subvarietat amb vora*

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \left(\sqrt{x^2+y^2} - R\right)^2 + z^2 \leq r^2\}$$

de $\mathbb{R}^3$. Calculeu $\int_V \mathrm{d}\omega$ i $\int_{\partial V} \omega$ amb les orientacions induïdes per l'orientació canònica de $\mathbb{R}^3$.

Resolució. Observem que V es tracta d'un tor massís de radi major R i radi menor r. La seva vora és doncs:

$$\partial V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \left(\sqrt{x^2+y^2} - R\right)^2 + z^2 = r^2\}$$

Calculem primer $\int_V \mathrm{d}\omega$. Tenim que:

$$\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z = \eta$$

on η és l'element de volum de $\mathbb{R}^3$. Per tant, $\int_V \mathrm{d}\omega = \int_V \eta = \mathrm{vol}(V)$ ja que l'orientació que agafem és la canònica. Ara considerem el canvi de variables:

$$\begin{aligned} \psi : (0, 2\pi) \times (0, 2\pi) \times (0, r) &\longrightarrow V \\ (u, v, \rho) &\longmapsto ((R + \rho\cos v)\cos u, (R + \rho\cos v)\sin u, \rho\sin v) \end{aligned}$$

El jacobià del canvi és:

$$J\psi = \left|\frac{\partial\psi}{\partial u}\,\frac{\partial\psi}{\partial v}\,\frac{\partial\psi}{\partial \rho}\right| = \begin{vmatrix} -(R + \rho\cos v)\sin u & -\rho\sin v\cos u & \cos v\cos u \\ (R + \rho\cos v)\cos u & -\rho\sin v\sin u & \cos v\sin u \\ 0 & \rho\cos v & \sin v \end{vmatrix} = (R + \rho\cos v)\rho$$

Així doncs:

$$\begin{aligned} \int_V \mathrm{d}\omega = \mathrm{vol}(V) &= \iiint_{(0,2\pi)\times(0,2\pi)\times(0,r)} |J\psi|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}\rho \\ &= \int_0^r \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |(R + \rho\cos v)\rho|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}\rho \\ &= 2\pi \int_0^r \int_0^{2\pi} (R + \rho\cos v)\rho\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}\rho \\ &= 2\pi \int_0^r \int_0^{2\pi} R\rho\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}\rho \\ &= 4\pi^2 R \int_0^r \rho\,\mathrm{d}\rho \\ &= 4\pi^2 R \cdot \frac{r^2}{2} \\ &= 2\pi^2 r^2 R \end{aligned}$$

on en la cinquena igualtat hem fet servir la simetria del cosinus a l'interval $[0, 2\pi]$.
Calculem ara $\int_{\partial V} \omega$. Per això prenem la parametrització de la vora de V següent:

$$\begin{aligned} \varphi : (0, 2\pi) \times (0, 2\pi) &\longrightarrow \partial V \\ (u, v) &\longmapsto \psi(u, v, r) = ((R + r\cos v)\cos u, (R + r\cos v)\sin u, r\sin v) \end{aligned}$$

Fent càlculs deduïm els següents resultants:

$$\begin{aligned}
\varphi_u &= (-(R + r\cos v)\sin u, (R + r\cos v)\cos u, 0) \\
\varphi_v &= (-r\sin v\cos u, -r\sin v\sin u, r\cos v) \\
\varphi_u \times \varphi_v &= (r\cos u\cos v(R + r\cos v), r\sin u\cos v(R + r\cos v), r\sin v(R + r\cos v))
\end{aligned}$$

En el punt $(u, v) = (0, 0)$, tenim $(\varphi_u \times \varphi_v)(0, 0) = (R + r, 0, 0)$. Per tant, el vector normal en aquest punt serà $(1, 0, 0)$ que apunta cap a fora del tor. Per continuïtat (ja que el vector normal és un camp diferenciable) deduïm que la parametrització φ és compatible amb l'orientació de ∂V. Calculem ara el pull-back $\varphi^*\omega$:

$$\begin{aligned}
\varphi^*\omega &= r\sin v\,\mathrm{d}[(R + r\cos v)\cos u] \wedge \mathrm{d}[(R + r\cos v)\sin u] \\
&= r\sin v[-(R + r\cos v)\sin u\,\mathrm{d}u - r\sin v\cos u\,\mathrm{d}v] \wedge [(R + r\cos v)\cos u\,\mathrm{d}u - r\sin v\sin u\,\mathrm{d}v] \\
&= r\sin v[(R + r\cos v)r\sin v(\sin u)^2\,\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v - (R + r\cos v)r\sin v(\cos u)^2\,\mathrm{d}v \wedge \mathrm{d}u] \\
&= r^2(\sin v)^2(R + r\cos v)\,\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v
\end{aligned}$$

Per tant:

$$\begin{aligned}
\int_{\partial V} \omega = \iint_{(0,2\pi)^2} \varphi^*\omega &= \iint_{(0,2\pi)^2} r^2(\sin v)^2(R + r\cos v)\,\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} r^2(\sin v)^2(R + r\cos v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \\
&= 2\pi\int_0^{2\pi} r^2(\sin v)^2(R + r\cos v)\,\mathrm{d}v \\
&= 2\pi\int_0^{2\pi} r^2(\sin v)^2 R\,\mathrm{d}v \\
&= 2\pi r^2 R \cdot \pi \\
&= 2\pi^2 r^2 R
\end{aligned}$$

on en l'antepenúltima igualtat hem fet servir de nou la simetria del cosinus a l'interval $[0, 2\pi]$ i al final hem utilitzat que $\int_0^{2\pi} (\sin v)^2\,\mathrm{d}v = \pi$.
Com era d'esperar, pel teorema de Stokes, els dos resultats coincideixen.