1 Corbes planes.

Exercici 1.1. Trobeu una parametrització de la *trocoide*: corba caracteritzada per ser l'òrbita d'un punt P situat a una distància a del centre d'una circumferència de radi b quan aquesta roda sense lliscament sobre una recta fixada:

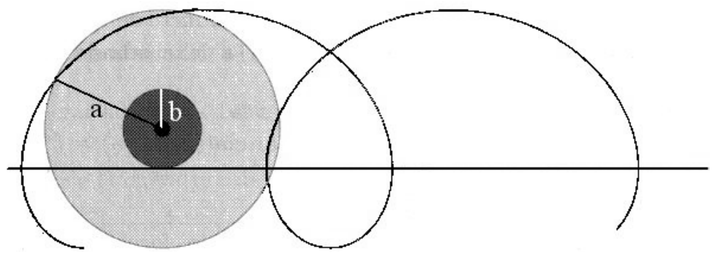


Figura 1.1: Trocoide amb $a > b$

En el cas $a = b$ s'anomena *cicloide* Calculeu el paràmetre arc de la *cicloide* amb $a = 1$.

Solució: *Denotem per t l'angle (en sentit horari) que forma el vector $\overrightarrow{CP}$ amb la vertical. En aquest instant la circumferència ha recorregut una distància lineal bt i el punt s'ha desplaçat del centre una distància $a \sin t$ llavors $x = bt + a \sin t$. Quant l'alçada es troba a una distància de l'eix OX de $y = b + a \cos t$. Una parametrització és doncs*

$$\begin{aligned} x &= bt + a \sin t \\ y &= b + a \cos t. \end{aligned}$$

Observem que si $a < b$ la y sempre és positiva i $x' = b + a \cos t > 0$; si $a = b$ la $y = 0$ en els múltiples senars de π; si $a > b$ la y pot agafar valors negatius i la velocitat de x pot anar en sentit contrari. Mirem un dibuix:

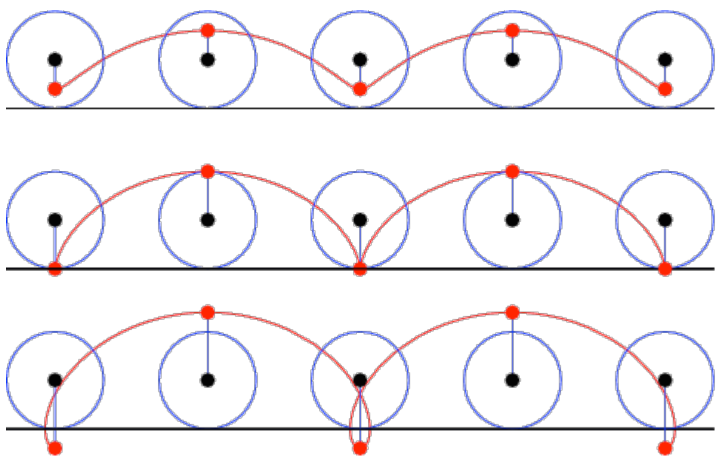


Figura 1.2: Trocoides: $a < b, a = b, a > b$.

Pert trobar el paràmetre arc fem $(x')^2+(y')^2 = (1+\cos t)^2+(-\sin t)^2 = 2(1+\cos t) = 4\cos^2 \frac{t}{2}$. *Llavors*

$$ds = 2|\cos\frac{t}{2}|dt.$$

Exercici 1.2. A *Moby Dick* de Herman Melville (1851) trobem la següent cita:
Quan no s'utilitzen, aquestes calderes es conserven considerablement netes. A vegades les poleixen amb sabó de sastre i sorra fins que brillen per dins com ponxeres de plata. Durant les guàrdies nocturnes, alguns vells mariners cínics s'hi entaforen, s'hi ajoquen i fan una becadeta. Quan els mariners es dediquen a polir-les -un home a cada caldera, tocar a tocar- es passen moltes comunicacions confidencials per damunt els llavis de ferro. També és un lloc adient per a profundes meditacions matemàtiques. Fou dins la caldera de mà esquerra del Pequod, amb el sabó de sastre que m'envoltava per totes bandes, que per primera vegada em va impressionar el fet remarcable que, en geometria, tots els cossos que llisquen al llarg de la corba cicloide, *el meu sabó de sastre per exemple, baixen en el mateix espai de temps des de qualsevol punt.*

(La destil·leria, Moby Dick)

Verifiquem aquesta propietat de la *cicloide*, més precisament, en una *cicloide* invertida el temps que triga un cos que cau lliscant per la corba per efecte de la gravetat sense fregament en arribar al punt més baix és independent del punt de partida (corba *tautocrona* o *isocrona*, vegeu *Aventuras Matemàticas*, Miguel de Guzmán, Ed. Labor 1988).

(i) Doneu una parametrització $\gamma(\lambda) = (x(\lambda), y(\lambda))$ de la *cicloide* invertida.

(ii) Sigui θ el paràmetre del punt d'arribada. Calculeu la velocitat $v(\theta)$ amb que arriba un cos que surt d'un punt $\gamma(\alpha)$ fixat al punt $\gamma(\theta)$.

(Indicació: Recordeu la llei de conservació de l'energia i les expressions de l'energia potencial i cinètica, $E_p = mgh$ i $E_c = mv^2/2$ respectivament).

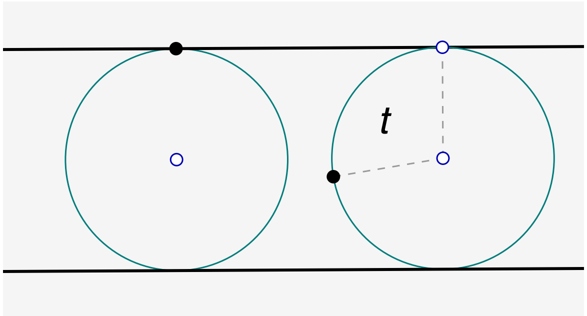
(iii) Calculeu la distància recorreguda entre $\gamma(\alpha)$ i $\gamma(\theta)$.

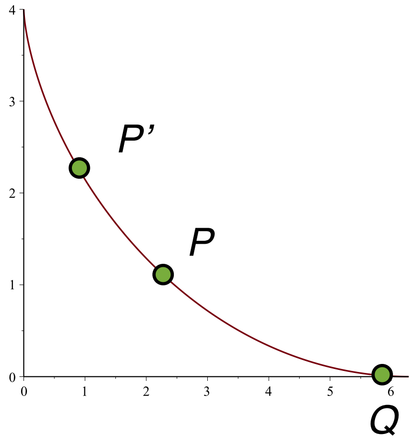
(iv) Sigui $t(\theta)$ la reparametrització corresponent al moviment físic d'un cos que llisca sense fregament per la *cicloide* amb $t(\alpha) = 0$. Calculeu $t(\pi)$ (i.e. el temps d'arribada al punt més baix) i comproveu que no depèn de α.

(Indicació: A l'apartat (ii) heu trobat l'expressió de la velocitat v, recordeu que $v = ds/dt$ on s és el paràmetre arc. Integrant dt podeu trobar $t(\pi)$. Potser us caldran algunes identitats trigonomètriques com $1 - \cos 2\theta = 2\sin^2\theta$).

La *cicloide* també verifica que és la *braquistocrona*, és a dir, la corba al llarg de la qual una partícula llisca sota l'acció de la gravetat i sense fregament en un temps mínim d'un punt A a un punt B situats en verticals diferents.

Solució: *La cicloide invertida s'obté seguint la trajectòria del punt de coordenades* $(0, 2a)$ *situat a la circumferència de radi* a *amb centre al punt* $(0, a)$ *quan aquesta roda sobre la recta* $y = 2a$. *També es pot obtenir a partir d l'original (quan roda al llarg de* $y = 0$*) fent moviments rígids. Obtenim la parametrització* $\alpha(t) = (a(t - \sin t), a(1 + \cos t))$. *Ens interessa la part de cicloide amb* $t \in [0, \pi]$. *Deixem caure un objecte en repòs des del punt* P', *volem saber el temps que triga en arribar al punt més baix* Q. *Com que l'energia es conserva tenim que* $mg\ y_{P'} = mg\ y_P + \frac{1}{2}mv_P^2$. *Aleshores* $v_P^2 = 2g(y_{P'} - y_P) = 2ga(\cos t' - \cos t)$.





Tenim que $v = ds/d\bar{t}$ on s és espai i $\bar{t}$ el temps. Per tant, el temps per anar de P' a Q serà

$$\bar{t}(P', Q) = \int_{P'}^{Q} \frac{ds}{v}.$$

Ara bé $ds = |\alpha'(t)|\ dt = \sqrt{2}a\sqrt{1-\cos t}$. Hem de fer la integral

$$\bar{t} = \int_{t'}^{\pi} \frac{\sqrt{2}a\sqrt{1-\cos t}}{\sqrt{2ga}\ \sqrt{\cos t' - \cos t}} dt = \sqrt{\frac{a}{g}} \int_{t'}^{\pi} \frac{\sqrt{1-\cos t}}{\sqrt{\cos t' - \cos t}} dt.$$

Recordem que $1 - \cos 2\theta = 2\sin^2\theta$. Fent servir aquesta igualtat tenim

$$\bar{t} = \sqrt{\frac{a}{g}} \int_{t'}^{\pi} \frac{\sqrt{2}\sin(t/2)}{\sqrt{2}\sqrt{\sin^2(t/2) - \sin^2(t'/2)}} dt = \sqrt{\frac{a}{g}} \int_{t'}^{\pi} \frac{\sin(t/2)}{\sqrt{\cos^2(t'/2) - \cos^2(t/2)}} dt.$$

Fent la substitució $u = \cos(t/2)$ tenim $du = -\frac{1}{2}\sin(t/2)dt$, llavors

$$\bar{t} = 2\sqrt{\frac{a}{g}} \int_{0}^{\cos(t'/2)} \frac{du}{\sqrt{\cos^2(t'/2) - u^2}} = 2\sqrt{\frac{a}{g}} \arctan\left[\frac{u}{\sqrt{\cos^2(t'/2) - u^2}}\right]_{u=0}^{u=\cos(t'/2)} = \pi\sqrt{\frac{a}{g}}.$$

I aquesta quantitat no depèn del punt inicial P'.

Exercici 1.3. *Càlcul del centre i radi de curvatura com a límit de circumferències secants.* Considerem una parametrització regular $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t))$ d'una corba plana. Cerquem la circumfèrencia que millor aproxima a la corba en el punt $\mathbf{x}(0) = (0, 0)$. Per això considerem el desenvolupament de Taylor en $t = 0$ de $x(t)$ i $y(t)$

$$x(t) = x_0' t + x_0'' \frac{t^2}{2} + O(t^3) \qquad \text{i} \qquad y(t) = y_0' t + y_0'' \frac{t^2}{2} + O(t^3).$$

Considerem la circumferència que passa pels punts $\mathbf{x}(-\varepsilon)$, $\mathbf{x}(0)$ i $\mathbf{x}(\varepsilon)$. El seu centre $\mathbf{c}(\varepsilon) = (c_x(\varepsilon), c_y(\varepsilon))$ és la intersecció de les mediatrius dels dos segments que uneixen els punts $\mathbf{x}(-\varepsilon)$ i $\mathbf{x}(0)$ d'una part i els punts $\mathbf{x}(0)$ i $\mathbf{x}(\varepsilon)$ d'una altra. El seu radi és $r(\varepsilon) = \|\mathbf{c}(\varepsilon) - \mathbf{x}(0)\|$. El centre i el radi de curvatura vénen donats pels límits de $\mathbf{c}(\varepsilon)$ i $r(\varepsilon)$ quan ε tendeix a zero. Calculeu aquests límits en funció de x_0', y_0', x_0'', y_0''. El cercle límit s'anomena el *cercle osculador* de la corba $\mathbf{x}(t)$ al punt $\mathbf{x}(0)$.

Solució: *L'equació de la recta normal L_ϵ pel punt $\alpha(\epsilon) = (x_\epsilon, y_\epsilon)$ és*

$$\frac{X - x_\epsilon/2}{-y_\epsilon} = \frac{Y - y_\epsilon/2}{x_\epsilon}.$$

El punt $C_\epsilon = L_\epsilon \cap L_{-\epsilon}$ s'obté resolen el sistema lineal corresponent. Obtenim

$$X_\epsilon = \frac{\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_\epsilon^2 + y_\epsilon^2 & y_\epsilon \\ x_{-\epsilon}^2 + y_{-\epsilon}^2 & y_{-\epsilon} \end{vmatrix}}{x_\epsilon y_{-\epsilon} - x_{-\epsilon} y_\epsilon}, \qquad Y_\epsilon = \frac{\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_\epsilon & x_\epsilon^2 + y_\epsilon^2 \\ x_{-\epsilon} & x_{-\epsilon}^2 + y_{-\epsilon}^2 \end{vmatrix}}{x_\epsilon y_{-\epsilon} - x_{-\epsilon} y_\epsilon}.$$

Per una banda $x_\epsilon y_{-\epsilon} - x_{-\epsilon} y_\epsilon = (x_0' y_0'' - x_0'' y_0')\epsilon^3 + O(\epsilon^4)$. Per un altre

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_\epsilon^2 + y_\epsilon^2 & y_\epsilon \\ x_{-\epsilon}^2 + y_{-\epsilon}^2 & y_{-\epsilon} \end{vmatrix} = -y_0'|\mathbf{x}'(0)|^2\epsilon^3 + O(\epsilon^4), \quad \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_\epsilon & x_\epsilon^2 + y_\epsilon^2 \\ x_{-\epsilon} & x_{-\epsilon}^2 + y_{-\epsilon}^2 \end{vmatrix} = x_0'|\mathbf{x}'(0)|^2\epsilon^3 + O(\epsilon^4).$$

Llavors

$$\mathbf{c}(0) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{(-y_0'|\mathbf{x}'(0)|^2\epsilon^3 + O(\epsilon^4), x_0'|\mathbf{x}'(0)|^2\epsilon^3 + O(\epsilon^4))}{(x_0' y_0'' - x_0'' y_0')\epsilon^3 + O(\epsilon^4)} = \frac{x_0'^2 + y_0'^2}{\begin{vmatrix} x_0' & y_0' \\ x_0'' & y_0'' \end{vmatrix}}(-y_0', x_0').$$

El radi de curvatura serà

$$r(0) = \frac{(x_0'^2 + y_0'^2)^{3/2}}{\left|\begin{vmatrix} x_0' & y_0' \\ x_0'' & y_0'' \end{vmatrix}\right|}.$$

Exercici 1.4. Considerem la família de totes les circumferències del pla donades per les equacions $f_{abr}(x, y) = (x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2$. L'objectiu és trobar els paràmetres a, b, r de manera que $f_{abr}(\mathbf{x}(t))$ sigui el més petit possible quan t és proper a zero. De manera més precisa, el que demanem és que la funció d'una variable $g(t) = f_{abr}(\mathbf{x}(t))$ tingui el màxim nombre de derivades nul·les quan s'avaluen a $t = 0$. Observeu que com tenim tres paràmetres lliures és natural imposar tres condicions $g(0) = 0$, $g'(0) = 0$ i $g''(0) = 0$. Escriviu el sistema d'equacions corresponent i resoleu-lo. Comproveu que el cercle que determina coincideix amb el de l'apartat anterior.

Solució: *Volem que a prop de $t = 0$ la funció $g(t) = f_{abr}(\mathbf{x}(t))$ s'acosti el més possible al zero. Que la gràfica sigui el més plana possible. Caldrà que $g(0) = 0$ i les derivades al zero siguin zero. Imposem que $g(0) = g'(0) = g''(0) = 0$. Que $f_{abr}(\mathbf{x}(0)) = 0$ vol dir que $\mathbf{x}(0)$ és de la circumferència $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$. Que*

$$g'(0) = 2(x_0 - a)x_0' + 2(y_0 - b)y_0' = 0$$

vol dir que el radi que passa per $\mathbf{x}(0)$ és perpendicular a la tangent $\mathbf{x}'(0)$. Llavors $x_0 - a = -\lambda y_0'$ i $y_0 - b = \lambda x_0'$ i $\lambda^2({x_0'}^2 + {y_0'}^2) = r^2$. L'exigència de $g''(0) = 0$ ens porta a la condició

$$(x_0')^2 + (y_0')^2 + \lambda(-x_0'' y_0' + x_0' y_0'') = 0.$$

Per tant

$$(a, b) = \left(x_0 + \frac{y_0'({x_0'}^2 + {y_0'}^2)}{x_0'' y_0' - x_0' y_0''}, y_0 - \frac{x_0'({x_0'}^2 + {y_0'}^2)}{x_0'' y_0' - x_0' y_0''}\right)$$

i

$$r = \frac{({x_0'}^2 + {y_0'}^2)^{3/2}}{|x_0'' y_0' - x_0' y_0''|}.$$

Exercici 1.5. Trobeu una parametrització de la *Bruixa d'Agnesi*[1]. Aquesta corba està des-

[1]Sembla ser que es diu *Bruixa* per un error de traducció de l'italià a l'anglès. Veieu la `wikipedia`.

crita així: Siguin r, s dues rectes paral·leles i C un cercle tangent a les dues en punt O i O' respectivament. Sigui l una recta variable per O, i posem $B = l \cap C$, $A = l \cap s$. Els punts de la Bruixa s'obtenen tallant la paral·lela a r per B amb la perpendicular a r per A.

Solució: *Considerem el cercle* $C: x^2 + (y-a)^2 = a^2 (a > 0)$ *i les rectes* $r: \ y = 0, s: \ y = 2a$. *Els punts són* $O = (0,0), O' = (0, 2a)$ *i la recta variable* $y = mx$. *Llavors* A *és el punt de coordenades* $(2a/m, 2a)$. *El punt* B *és solució de les equacions* $y = mx$ *i* $x^2 + (y-a)^2 = a^2$. *Obtenim que* $B = (\frac{2am}{1+m^2}, \frac{2am^2}{1+m^2})$. *Per tant el punt que descriu la bruixa d'Agnesi és*

$$P(m) = \left(\frac{2a}{m}, \frac{2am^2}{1+m^2} \right).$$

Si posem $t = 1/m$ *podem parametritzar la corba de la manera següent:*

$$x(t) = 2at, \quad y(t) = \frac{2a}{1+t^2}, \qquad t \in (-\infty, \infty).$$

També veiem que les coordenades dels punts de la corba satisfan la relació cúbica:

$$8a^3 = 4a^2 y + x^2 y \quad \text{o} \quad y = \frac{8a^3}{4a^2 + x^2}.$$