SEMINARI 9. SUPERFÍCIES REGLADES.

Víctor Ballester Ribó
NIU: 1570866

Geometria diferencial
Grau en Matemàtiques
Universitat Autònoma de Barcelona
Maig de 2022

Exercici 5. *Sigui $\alpha = \alpha(t)$ una corba regular de $\mathbb{R}^3$ parametritzada per l'arc. La superfície polar de α és la superfície reglada formada per les rectes paral·leles a la binormal (en cada punt) que passen pel centre de curvatura (en aquest punt). Concretament*

$$\varphi(t,s) = \alpha(t) + \rho(t)\mathbf{N}(t) + s\mathbf{B}(t)$$

on $\rho(t)$ és el radi de curvatura de α. La recta que obtenim en fixar t i variar s es diu eix polar.

a) Demostreu que aquesta definició coincideix amb la clàssica: La superfície polar de α és l'envolvent dels plans normals.

Resolució. Al llarg del problema assumirem que en tot moment tenim que la curvatura i torsió de α no s'anul·len. La primera assumpció té sentit per tal que la funció $\rho(t)$ tingui sentit. Per a la segona, tindríem que si la torsió fos zero, la corba seria plana i la superfície polar seria un cilindre. A més, com veurem més endavant no podria tenir eix de regressió. Per tant, és millor suposar que la torsió no s'anul·la.
El pla normal Π_t a una corba α en el punt $\alpha(t)$ és el generat pels vectors normal $\mathbf{N}(t)$ i binormal $\mathbf{B}(t)$. Per tant, l'equació d'aquest pla és:

$$\Pi_t(\mathbf{x}) := \langle \mathbf{x} - \alpha(t), \mathbf{T} \rangle = 0$$

Escrivim una parametrització de la superfície que busquem usant la base de Frenet en l'instant t:

$$\varphi(t,s) = \alpha(t) + a(t,s)\mathbf{T} + b(t,s)\mathbf{N} + c(t,s)\mathbf{B}$$

per a certes funcions diferenciables a, b, c que hem de determinar. Com que l'envolvent dels plans normals és tangent en cada punt a un d'aquests plans, tindrem que els punts d'aquesta superfície satisfan el sistema d'equacions següent:

$$\begin{cases} \Pi_t(\mathbf{x})\Big|_{\mathbf{x}=\varphi(t,s)} = \langle \mathbf{x} - \alpha(t), \mathbf{T} \rangle\Big|_{\mathbf{x}=\varphi(t,s)} = \langle \varphi(t,s) - \alpha(t), \mathbf{T} \rangle = 0 \\ \dfrac{\partial \Pi_t}{\partial t}(\mathbf{x})\Big|_{\mathbf{x}=\varphi(t,s)} = \langle -\mathbf{T}, \mathbf{T} \rangle + \langle \mathbf{x} - \alpha(t), k\mathbf{N} \rangle\Big|_{\mathbf{x}=\varphi(t,s)} = -1 + k\langle \varphi(t,s) - \alpha(t), \mathbf{N} \rangle = 0 \end{cases}$$

on hem utilitzat que $\mathbf{T}' = k\mathbf{N}$, essent k la curvatura de α. De la primera equació deduïm que $a(t,s) = 0$ i de la segona:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi_t}{\partial t}(\mathbf{x})\Big|_{\mathbf{x}=\varphi(t,s)} = 0 &\iff -1 + k(t)\langle \varphi(t,s) - \alpha(t), \mathbf{N} \rangle = 0 \\ &\iff k(t)\langle b(t,s)\mathbf{N} + c(t,s)\mathbf{B}, \mathbf{N} \rangle = 1 \\ &\iff k(t)b(t,s) = 1 \end{aligned}$$

Per tant, necessitem $b(t,s) = 1/k(t) = \rho(t)$. Observem que per a qualsevol funció $c(t,s)$, $\varphi(t,s)$ compleix les condicions requerides. Per tant, aquesta ha de ser $c(t,s) = s$, fent aparèixer un nou parametre lliure. Així doncs, obtenim finalment el que volíem:

$$\varphi(t,s) = \alpha(t) + \rho(t)\mathbf{N}(t) + s\mathbf{B}(t)$$

b) Trobeu els centres de les esferes osculatrius, que són aquelles amb contacte d'ordre 3 amb $\alpha(t)$. Comproveu que pertanyen a la superfície polar.
Indicació*: L'esfera*

$$S(x,y,z) := (\mathbf{x} - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a}) - R^2 = 0$$

té contacte d'ordre k amb $\alpha(t)$ en el punt t_0 si

$$\frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}t^i} S(\alpha(t_0)) = 0 \quad i = 0, \dots, k$$

Comproveu que les esferes amb centre l'eix polar que passen pel corresponent punt de α tenen contacte d'ordre 2 amb la corba.

Resolució. Siguin $c(t_0)$ i $r(t_0)$ el centre i el radi, respectivament, de l'esfera osculatriu $S_{t_0}(\mathbf{x}) = 0$ de la corba α en el punt $\alpha(t_0)$. Per tant, podem escriure:

$$S_{t_0}(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x} - c(t_0), \mathbf{x} - c(t_0)\rangle - r(t_0)^2 = 0$$

Escrivim el vector $\alpha(t_0) - c(t_0)$ en termes de la base de Frenet en l'instant t_0:

$$\alpha(t_0) - c(t_0) = \lambda(t_0)\mathbf{T}(t_0) + \mu(t_0)\mathbf{N}(t_0) + \eta(t_0)\mathbf{B}(t_0)$$

per a certes funcions diferenciables λ, μ, η que hem de determinar. Per això imposem les condicions següents, per assegurar el contacte d'ordre ≥ 3:

$$\begin{cases} S_{t_0}(\alpha(t_0)) = 0 \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} S_{t_0}(\alpha(t))\Big|_{t=t_0} = 0 \\ \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} S_{t_0}(\alpha(t))\Big|_{t=t_0} = 0 \\ \frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}t^3} S_{t_0}(\alpha(t))\Big|_{t=t_0} = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Perquè es compleixi la primera equació simplement cal definir convenientment el radi $r(t_0)$ de l'esfera osculatriu com:

$$r(t_0) = \|\alpha(t_0) - c(t_0)\|$$

Aleshores trivialment es compleix la primera condició. Desenvolupant la segona expressió obtenim

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} S_{t_0}(\alpha(t))\Big|_{t=t_0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\langle \alpha(t) - c(t_0), \alpha(t) - c(t_0)\rangle - r(t_0)^2\right)\Big|_{t=t_0} = 2\langle \mathbf{T}, \alpha(t) - c(t_0)\rangle\Big|_{t=t_0} = 0$$

Per tant, com que $\lambda(t_0) = \langle \mathbf{T}(t_0), \alpha(t_0) - c(t_0)\rangle$ obtenim que $\lambda(t_0) = 0$. Ara desenvolupem la tercera expressió. Tenim que:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} S_{t_0}(\alpha(t))\Big|_{t=t_0} \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(2\langle \mathbf{T}, \alpha(t) - c(t_0)\rangle\right)\Big|_{t=t_0} \\ &= 2\left[\langle k\mathbf{N}, \alpha(t) - c(t_0)\rangle + \langle \mathbf{T}, \mathbf{T}\rangle\right]\Big|_{t=t_0} \\ &= \left[2\langle k\mathbf{N}, \alpha(t) - c(t_0)\rangle + 2\right]\Big|_{t=t_0} \\ &= 2\langle k(t_0)\mathbf{N}(t_0), \alpha(t_0) - c(t_0)\rangle + 2 \\ &= 2\langle k(t_0)\mathbf{N}(t_0), \mu(t_0)\mathbf{N}(t_0) + \eta(t_0)\mathbf{B}(t_0)\rangle + 2 \\ &= 2k(t_0)\mu(t_0) + 2 \end{aligned}$$

Ajuntant la primera i última expressions obtenim $\mu(t_0) = -\frac{1}{k(t_0)} = -\rho(t_0)$. Finalment per la quarta equació de (1) tenim que:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}t^3} S_{t_0}(\alpha(t))\Big|_{t=t_0} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(2\langle k\mathbf{N}, \alpha(t) - c(t_0)\rangle + 2\right)\Big|_{t=t_0} \\
&= 2\left[\langle k'\mathbf{N} + k\mathbf{N}', \alpha(t) - c(t_0)\rangle + 2\langle k\mathbf{N}, \mathbf{T}\rangle\right]\Big|_{t=t_0} \\
&= 2\langle k'\mathbf{N} - k^2\mathbf{T} - k\tau\mathbf{B}, \alpha(t) - c(t_0)\rangle\Big|_{t=t_0} \\
&= 2\langle k'(t_0)\mathbf{N}(t_0) - k(t_0)^2\mathbf{T}(t_0) - k(t_0)\tau(t_0)\mathbf{B}(t_0), \alpha(t_0) - c(t_0)\rangle \\
&= 2\langle k'(t_0)\mathbf{N}(t_0) - k(t_0)^2\mathbf{T}(t_0) - k(t_0)\tau(t_0)\mathbf{B}(t_0), -\rho(t_0)\mathbf{N}(t_0) + \eta(t_0)\mathbf{B}(t_0)\rangle \\
&= 2\left[-k'(t_0)\rho(t_0) - k(t_0)\tau(t_0)\eta(t_0)\right] \\
&= 2\left[-\frac{k'(t_0)}{k(t_0)} - k(t_0)\tau(t_0)\eta(t_0)\right]
\end{aligned}$$

I llavors:

$$0 = 2\left[-\frac{k'(t_0)}{k(t_0)} - k(t_0)\tau(t_0)\eta(t_0)\right] \iff \eta(t_0) = -\frac{k'(t_0)}{k(t_0)^2\tau(t_0)} = \frac{\left(\frac{1}{k(t_0)}\right)'}{\tau(t_0)} = \frac{\rho'(t_0)}{\tau(t_0)}$$

Per tant, els centres de les esferes osculadores són:

$$c(t_0) = \alpha(t_0) - \lambda(t_0)\mathbf{T}(t_0) - \mu(t_0)\mathbf{N}(t_0) - \eta(t_0)\mathbf{B}(t_0) = \alpha(t_0) + \rho(t_0)\mathbf{N}(t_0) - \frac{\rho'(t_0)}{\tau(t_0)}\mathbf{B}(t_0) \tag{2}$$

Observem que $c(t) = \varphi\left(t, -\frac{\rho'(t)}{\tau(t)}\right)$. Per tant, aquests centres pertanyen a la superfície polar.

Fem ara la segona part de l'apartat. Fixem un valor de $t = t_0$. Diguem $\tilde{S}_s$ a l'esfera amb centre al punt $\varphi(t_0, s)$ i tal que passa per $\alpha(t_0)$. Per tant, aquesta esfera té equació:

$$\tilde{S}_s(\mathbf{x}) := \langle \mathbf{x} - \varphi(t_0, s), \mathbf{x} - \varphi(t_0, s)\rangle - (\rho(t_0)^2 + s^2) = 0$$

ja que $\|\varphi(t_0, s) - \alpha(t_0)\| = \rho(t_0)^2 + s^2$. Clarament $\tilde{S}_s(\alpha(t_0)) = 0$ per hipòtesi. Calculem ara $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\tilde{S}_s(\alpha(t))\Big|_{t=t_0}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\tilde{S}_s(\alpha(t))\Big|_{t=t_0} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\langle \alpha(t) - \varphi(t_0, s), \alpha(t) - \varphi(t_0, s)\rangle - (\rho(t_0)^2 + s^2))\Big|_{t=t_0} \\
&= 2\langle \mathbf{T}, \alpha(t) - \varphi(t_0, s)\rangle\Big|_{t=t_0} \\
&= 2\langle \mathbf{T}(t_0), -\rho(t_0)\mathbf{N}(t_0) - s\mathbf{B}(t_0)\rangle \\
&= 0
\end{aligned}$$

Calculem ara $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\tilde{S}_s(\alpha(t))$:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\tilde{S}_s(\alpha(t))\Big|_{t=t_0} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(2\langle \mathbf{T}, \alpha(t) - \varphi(t_0, s)\rangle)\Big|_{t=t_0} \\
&= 2\langle \mathbf{T}', \alpha(t) - \varphi(t_0, s)\rangle + 2\langle \mathbf{T}, \mathbf{T}\rangle\Big|_{t=t_0} \\
&= 2\langle k\mathbf{N}, \alpha(t) - \varphi(t_0, s)\rangle + 2\Big|_{t=t_0} \\
&= 2\langle k(t_0)\mathbf{N}(t_0), -\rho(t_0)\mathbf{N}(t_0) - s\mathbf{B}(t_0)\rangle + 2 \\
&= -2k(t_0)\rho(t_0) + 2 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Calculem ara $\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}t^3}\tilde{S}_s(\alpha(t))$:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}t^3}\tilde{S}_s(\alpha(t))\Big|_{t=t_0} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(2\langle k\mathbf{N}, \alpha(t) - \varphi(t_0,s)\rangle + 2)\Big|_{t=t_0} \\
&= 2\langle k'\mathbf{N} + k\mathbf{N}', \alpha(t) - \varphi(t_0,s)\rangle + 2\langle k\mathbf{N}, \mathbf{T}\rangle\Big|_{t=t_0} \\
&= 2\langle k'\mathbf{N} - k^2\mathbf{T} - k\tau\mathbf{B}, \alpha(t) - \varphi(t_0,s)\rangle\Big|_{t=t_0} \\
&= 2\langle k'(t_0)\mathbf{N}(t_0) - k(t_0)^2\mathbf{T}(t_0) - k(t_0)\tau(t_0)\mathbf{B}(t_0), -\rho(t_0)\mathbf{N}(t_0) - s\mathbf{B}(t_0)\rangle \\
&= -2k'(t_0)\rho(t_0) + 2k(t_0)\tau(t_0)s \\
&= -2\left[k'(t_0)\rho(t_0) - k(t_0)\tau(t_0)s\right]
\end{aligned}$$

que només s'anul·la en el cas de ser $\tilde{S}_s$ l'esfera osculatriu ($s = \frac{\rho'(t_0)}{\tau(t_0)}$). Per tant, en general les esferes $\tilde{S}_s$ tenen ordre de contacte exactament 2.

c) Comproveu que la superfície polar és desenvolupable, amb eix de regressió format pels centres de les esferes osculatrius.

Resolució. Primer observem que és una superfície reglada. En efecte, la podem escriure com

$$\varphi(t,s) = \beta(t) + s\gamma(t)$$

amb $\beta(t) = \alpha(t) + \rho(t)\mathbf{N}(t)$ i $\gamma(t) = \mathbf{B}(t)$. Per tant, és reglada. Per veure que és desenvolupable, cal comprovar que la curvatura de Gauß, K, és 0. Ara bé a l'exercici 1 del seminari hem vist que per a les superfícies reglades tenim que $K = 0 \iff f = 0$, on f representa el segon coeficient de la segona forma fonamental de la superfície. Per tant, hem de calcular $f = \langle \varphi_{st}, \nu\rangle$ on $\nu = \frac{\varphi_t \times \varphi_s}{\|\varphi_t \times \varphi_s\|}$ és el vector normal a la superfície. Fent càlculs obtenim:

$$\begin{aligned}
\varphi_t &= \mathbf{T} + \rho'\mathbf{N} + \rho\mathbf{N}' + s\mathbf{B}' = (\rho' + s\tau)\mathbf{N} - \rho\tau\mathbf{B} \\
\varphi_s &= \mathbf{B} \\
\varphi_{st} &= \mathbf{B}' = \tau\mathbf{N} \\
\varphi_t \times \varphi_s &= (\rho' + s\tau)\mathbf{T} \\
\nu &= \mathbf{T}
\end{aligned}$$

Per tant, $f = \langle \varphi_{st}, \nu\rangle = \tau\langle \mathbf{N}, \mathbf{T}\rangle = 0$ el que demostra que la superfície és desenvolupable. A més com que $\gamma' = \mathbf{B}' = \tau\mathbf{N} \neq 0$ (perquè per hipòtesi $\tau \neq 0$) tenim que, també per l'exercici 1 del seminari, existeix una corba $s = h(t)$ on la superfície deixa de ser regular. Recordem que una de les condicions equivalents a ser regular és que $\|\varphi_t \times \varphi_s\| \neq 0$. Per tant busquem una corba $s = h(t)$ tal que $\|\varphi_t \times \varphi_s\|\big|_{s=h(t)} = 0$. Recodant els càlculs fets anteriorment, això passa quan:

$$\|\varphi_t \times \varphi_s\|\big|_{s=h(t)} = 0 \iff \|(\rho' + h(t)\tau)\mathbf{T}\| = 0 \iff \rho' + h(t)\tau = 0 \iff h(t) = -\frac{\rho'(t)}{\tau(t)}$$

Per tant, l'eix de regressió de la superfície és la corba

$$\varphi(t, h(t)) = \varphi\left(t, -\frac{\rho'(t)}{\tau(t)}\right) = \alpha(t) + \rho(t)\mathbf{N}(t) - \frac{\rho'(t)}{\tau(t)}\mathbf{B}(t)$$

que correspon amb l'equació (2) dels centres de curvatura de les esferes osculatrius.