5 Superfícies reglades

Exercici 5.1. [**Superfícies reglades**] Una superfície S de $\mathbb{R}^3$ s'anomena *reglada* si es pot parametritzar de la forma

$$x(u,v) = \alpha(u) + v\gamma(u),$$

on $\alpha(u)$ i $\gamma(u)$ són corbes de $\mathbb{R}^3$ i $|\gamma(u)| = 1$.

a) Demostreu que una superfície reglada S té curvatura de Gauss $K \leq 0$. A més, $K = 0$ si i només si el vector normal unitari N de S és constant al llarg de les rectes $u = cte$.

b) Les superfíces reglades amb $K = 0$ s'anomenen *desenvolupables*. Proveu que en aquest cas, i si $\gamma' \neq 0$, hi ha una corba $v = h(u)$ on $x(u,v)$ deixa de ser regular. Aquesta corba s'anomena *eix de regressió* (no és pas una recta com podria suggerir la paraula 'eix'). Proveu que les rectes $u = cte$ són tangents a l'eix de regressió.

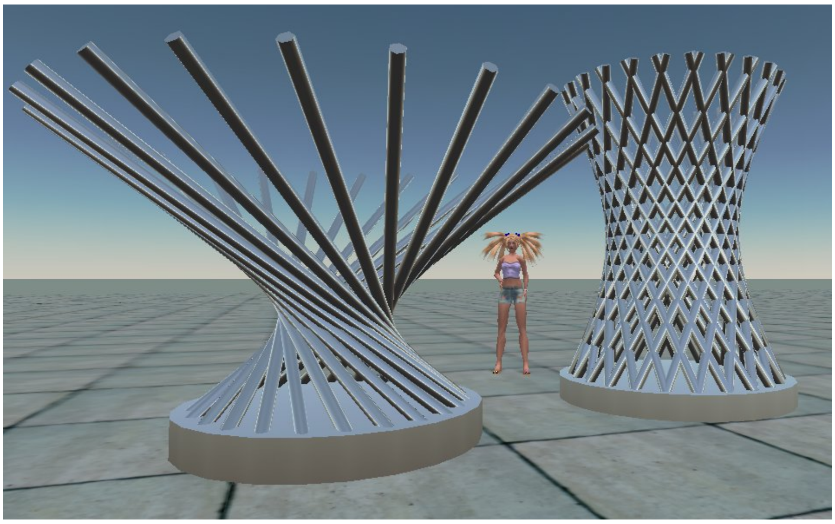

Figura 5.1: 'Superfícies' reglades.

Exercici 5.2. [**Desenvolupable tangencial**] Sigui $\alpha(t)$ una corba parametritzada per l'arc de curvatura no nul·la en tot punt.

a) Comproveu que $\Phi(t,s) = \alpha(t) + s\,\alpha'(t)$, amb $s \neq 0$, defineix una superfície.

b) Demostreu que aquesta superfície és desenvolupable.

c) Proveu que els coeficients de la primera forma fonamental no depenen de la torsió de α.

d) Considerant una corba plana amb la mateixa curvatura que α, deduïu que hi ha una isometria d'un obert de la superfície anterior amb una regió del pla.

Exercici 5.3. [**Envolvent de les normals**] Sigui $\alpha = \alpha(s)$ una corba de $\mathbb{R}^3$ parametritzada per l'arc amb curvatura $k \neq 0$ i torsió τ. Calculeu la curvatura de Gauss de la superfície parametritzada per

$$\mathbf{x}(s,\lambda) = \alpha(s) + \lambda\mathbf{n}(s)$$

on $\mathbf{n}$ és el vector normal de la corba α.

Exercici 5.4. [**Envolvent de les binormals**] Sigui $\alpha = \alpha(s)$ una corba de $\mathbb{R}^3$ parametritzada per l'arc amb curvatura $k \neq 0$ i torsió τ. Calculeu la curvatura de Gauss de la superfície parametritzada per

$$\mathbf{x}(s, \lambda) = \alpha(s) + \lambda \mathbf{b}(s)$$

on $\mathbf{b}$ és el vector binormal de la corba α.

Exercici 5.5. [**Superfície polar**] Sigui $\alpha = \alpha(t)$ una corba regular de $\mathbb{R}^3$ parametritzada per l'arc. La superfície polar de α és la superfície reglada formada per les rectes paral·leles a la binormal (en cada punt) que passen pel centre de curvatura (en aquest punt). Concretament

$$\varphi(t, s) = \alpha(t) + \rho(t)\mathbf{n}(t) + s\mathbf{b}(t)$$

on $\rho(t)$ és el radi de curvatura de α. La recta que obtenim en fixar t i variar s es diu *eix polar.*

a) Demostreu que aquesta definició coincideix amb la clàssica: *La superfície polar de α és l'envolvent dels plans normals.* Recordem que l'envolvent d'una família uniparàmetrica de plans (la nostra família és uniparamètrica perquè tenim un pla per a cada valor del paràmetre t de la corba) és una superfície tangent en cada punt a un d'aquests plans. Aquesta superfície es troba fàcilment resolent el sistema format per l'equació dels plans (que depèn de t) i l'equació que s'obté derivant aquesta respecte del paràmetre t.

b) Trobeu els centres de les esferes osculatrius, que són aquelles amb contacte d'ordre 3 amb $\alpha(t)$. Comproveu que pertanyen a la superfície polar.

   Indicació: L'esfera

   $$S(x, y, z) := (\mathbf{x} - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a}) - R^2 = 0$$

   té un contacte d'ordre k amb $\alpha(t)$ en un punt t_0 si

   $$\frac{d^i}{dt^i} S(\alpha(t_0)) = 0, \qquad i = 0, \ldots, k \tag{5.1}$$

   Comproveu que les esferes amb centre l'eix polar que passen pel corresponent punt de α tenen contacte d'ordre dos amb la corba.

c) Comproveu que la superfície polar és desenvolupable, amb eix de regressió format pels centres de les esferes osculatrius.