9 Geodèsiques

§1 Equacions d'Euler-Lagrange. Segons el *principi de mínima acció* la trajectòria $\alpha(t)$ que segueix una partícula en un sistema mecànic és un punt crític de l'acció $\mathcal{A}(\alpha) = \int_a^b L(\alpha, \alpha')\, dt$ on $L = T - V$ és la funció Lagrangiana (diferència entre energies cinètica i potencial). El càlcul de variacions mostra[8] que aquestes trajectòries satisfan les equacions d'Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \alpha_i'}\right) = 0. \tag{9.1}$$

Exercici 9.1. Considerem una partícula de massa unitat que es mou sobre una superfície regular $S \subset \mathbb{R}^3$ parametritzada localment per $\mathbf{x}(u, v)$. Descrivim la seva trajectòria $\alpha(t)$ en coordenades locals mitjançant $t \mapsto (u(t), v(t))$. Escriviu quina és la seva energia cinètica.

Si no hi ha cap força exterior aleshores l'energia potencial és zero i la funció de Lagrange associada és justament l'energia cinètica. Observeu que en aquest cas el principi de conservació de l'energia es tradueix en que la velocitat escalar és constant al llarg de les geodèsiques.

Exercici 9.2. Escriviu les equacions d'Euler-Lagrange del moviment

$$\frac{\partial L}{\partial u} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial u'} = 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial v} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v'} = 0 \tag{9.2}$$

i comproveu que són equivalents[9] a imposar que α'' no té component tangent a S.

Així doncs, les trajectòries d'una partícula que satisfan el principi de mínima acció per l'energia cinètica són aquelles sobre les quals l'acceleració és perpendicular a S. Aquestes corbes s'anomenen *geodèsiques* de S. Observeu que les equacions d'Euler-Lagrange es poden fer servir per calcular fàcilment els símbols de Christoffel d'una superfície.

§2 Superfícies de revolució. Es considera la superfície de revolució S obtinguda fent girar la corba regular $\alpha(u) = (a(u), 0, b(u))$ (amb $a(u) > 0$) al voltant de l'eix OZ. Recordeu que

$$\varphi(u, v) = (a(u)\cos v, a(u)\sin v, b(u))$$

és una parametrització regular de S. Les corbes coordenades d'aquesta parametrització s'anomenen *paral·lels* si $u = u_0$ i *meridians* si $v = v_0$.

Recordeu que si la corba $\alpha(u)$ està parametritzada per l'arc aleshores els coeficients de la primera forma fonamental de S associada a la parametrització φ són $E = 1$, $F = 0$ i $G = a^2$.

Exercici 9.3. Fent servir (9.2), calculeu les equacions de les geodèsiques i deduïu-ne els símbols de Christoffel de S respecte la parametrització φ anterior (suposant que $\alpha(u)$ està parametritzada per l'arc).

Exercici 9.4. Comproveu que els meridians d'una superfície de revolució, parametritzats convenientment, són geodèsiques.

Exercici 9.5. Proveu que un paral·lel és una geodèsica si i només si la recta tangent al meridià que passa per cada un dels seus punts és paral·lela a l'eix de rotació de la superfície. Apliqueu-ho al cas de l'esfera i del tor.

Recordeu que si γ és una corba unitaria ($|\gamma'| \equiv 1$) continguda a una superfície S aleshores podem descomposar el vector acceleració κN com a suma d'una component normal $k_n \nu$ i una component

[8] Podeu fer el càlcul considerant variacions del tipus $\alpha + sX$. Vegeu el llibre de Goldstein per exemple.

[9] Com s'ha fet a teoria, escriviu $\alpha'' = A\varphi_u + B\varphi_v + C\nu$.

tangencial $k_g(\nu \times T)$ a la superfície, on T, N, B és el triedre de Frenet de γ i ν és el vector normal de S.

Exercici 9.6. Trobeu la curvatura geodèsica i la curvatura normal dels paral.lels ($u = u_0$) en funció de $a(u)$ i $a'(u)$ suposant que $\alpha(u)$ està parametritzada per l'arc.

Exercici 9.7. Demostreu el *teorema de Clairaut*: si $\gamma(t)$ és una geodèsica de S i $\theta(t)$ és l'angle que forma γ amb el paral·lel per $\gamma(t)$, aleshores el producte de la distància de $\gamma(t)$ a l'eix de gir pel cosinus de $\theta(t)$ és constant al llarg de la corba γ.

Exercici 9.8. Comproveu que la relació de Clairaut és equivalent a la constància de la component z del moment angular $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ respecte l'origen d'una partícula que es mou lliurement sobre la superfície de revolució (és a dir, que segueix el pricipi de mínima acció per l'energia).

Exercici 9.9. Proveu que la relació de Clairaut sobre un con és equivalent al teorema del sinus. *Indicació:* Desplegant el con sobre un pla les geodèsiques es transformen en rectes (per què?). Apliqueu llavors el teorema del sinus a un triangle adequat.

Exercici 9.10. Proveu que la relació de Clairaut sobre l'esfera és equivalent al teorema teorema del sinus esfèric. *Indicació:* Apliqueu el teorema del sinus esfèric a un triangle amb vèrtex al pol nord.

Exercici 9.11. Sigui S una superfície de revolució i $d : S \to (0, \infty)$ la funció distància a l'eix de gir. Pel teorema de Clairaut, cada corba geodèsica $\gamma \subset S$ té associat un nombre $c_\gamma \in \mathbb{R}^+$ tal que $d(\gamma(t)) \cos\theta(t) = c_\gamma$. Proveu que $c_\gamma = 0$ si i només si γ és un meridià. Si γ és una geodèsica amb $c = c_\gamma > 0$ aleshores γ està inclosa en la *regió* $B_c := \{d \geq c\} \subset S$. Suposant que $B_c = \varphi([u_0, u_1] \times [0, 2\pi])$ per certs u_0, u_1 tals que $a'(u_0), a'(u_1) \neq 0$ i que $a(u) > c$ per a tot $u \in (u_0, u_1)$, proveu que γ és tangent als paral·lels $u = u_0$ i $u = u_1$ en algun punt.

Exercici 9.12. Demostreu que els plans osculadors d'una geodèsica sobre un con estan a distància constant del vèrtex. (*Indicació: veieu que el pla rectificant en un punt P de la geodèsica conté la generatriu del con per aquest punt i també el segment que realitza la distància del vèrtex al pla osculador en P.)*