7 Superfícies reglades

Exercici 7.1. [**Superfícies reglades**] Una superfície S de $\mathbb{R}^3$ s'anomena *reglada*[7] si es pot parametritzar de la forma

$$x(u,v) = \alpha(u) + v\gamma(u),$$

on $\alpha(u)$ i $\gamma(u)$ són corbes de $\mathbb{R}^3$ i $|\gamma(u)| = 1$.

a) Demostreu que una superfície reglada S té curvatura de Gauss $K \leq 0$. A més, $K = 0$ si i només si el vector normal unitari N de S és constant al llarg de les rectes $u = ct$.

b) Les superfíces reglades amb $K = 0$ s'anomenen *desenvolupables*. Proveu que en aquest cas, i si $\gamma' \neq 0$, hi ha una corba $v = h(u)$ on $x(u,v)$ deixa de ser regular. Aquesta corba s'anomena *eix de regressió* (no és pas una recta com podria suggerir la paraula 'eix'). Proveu que les rectes $u = ct$ són tangents a l'eix de regressió.

Solució: *a) La curvatura de Gauss és múltiple positiu del determinant, $eg - f^2$, de la segona forma fonamental. $e = -\langle N_u, x_u\rangle$, $f = -\langle N_u, x_v\rangle$ i $g = -\langle N_v, x_v\rangle$. Com que $g = \langle N, x_{vv}\rangle = 0$ és clar que $K = -f^2/(EG - F^2) \leq 0$. Si la curvatura de Gauss és zero llavors $g = f = 0$ i per tant $N_v = 0$, això vol dir que N és constant sobre les rectes $u = ct$. Recíprocament, si $N_v = 0$ llavors $f = 0$ i com que $g = 0$ tenim $K = 0$.*

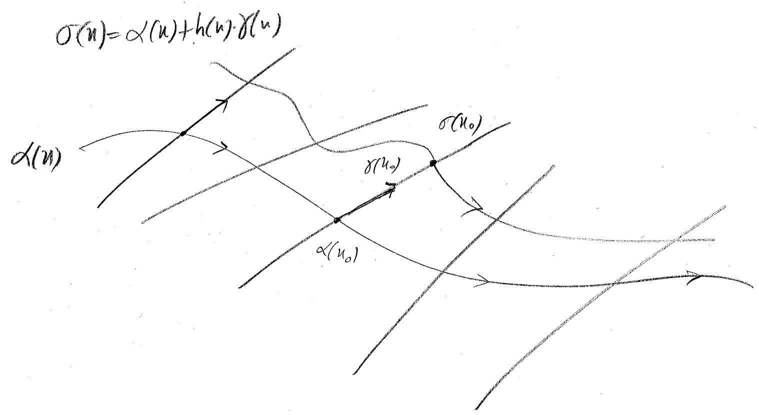

Figura 7.3: Superfície reglada.

b) Si $K = 0$ hem vist que $f = 0$. Un càlcul simple mostra que $f = \langle \alpha' \times \gamma, \gamma'\rangle/|x_u \times x_v| =$ $\det(\alpha', \gamma, \gamma')/|x_u \times x_v|$. Llavors α' és combinació lineal de γ i γ': $\alpha' = \lambda\gamma + \mu\gamma'$. Per altra banda $x_u = \alpha' + v\gamma'$, $x_v = \gamma$, llavors $x_u \times x_v = \alpha' \times \gamma + v\gamma' \times \gamma$. Substituint resulta que $x_u \times x_v = \mu\gamma' \times \gamma + v\gamma' \times \gamma$. Si

$$v = -\mu = -\langle \alpha', \gamma'\rangle/\langle \gamma', \gamma'\rangle =: h(u)$$

tenim que la superfície no és regular al llarg d'aquesta corba (la corba $x(u, h(u))$). Sigui $\sigma(u) = \alpha(u) + h(u)\gamma(u)$ aquesta corba. Observem que ens cal $\gamma' \neq 0$, sino es tracta d'un cilindre.
Notem també que $\sigma'(u) = \alpha'(u) + h'(u)\gamma(u) + h(u)\gamma'(u)$ però $\alpha' = \lambda\gamma + \mu\gamma'$, llavors $\sigma' = \lambda\gamma + h'\gamma$ i σ és tangent a la recta $t \mapsto \alpha(u) + t\gamma(u)$.
Aquesta propietat, que les rectes $u = ct.$ són tangents a l'eix de regressió, ens permet esciure aquesta superfície com $\sigma(u) + v\sigma'(u)$ amb $v \neq 0$. És una superfície desenvolupable tangencial que veurem a l'exercici següent.

Exercici 7.2. [**Desenvolupable tangencial**] Sigui $\alpha(t)$ una corba parametritzada per l'arc de curvatura no nul·la en tot punt. Comproveu que la superfície reglada parametritzada per $\Phi(t,s) = \alpha(t) + s\,\alpha'(t)$ és desenvolupable (allà on és regular).

[7] Vegeu unes quantes a: `http://legacy-www.math.harvard.edu/archive/21a_fall_09/exhibits/ruled/gallery1.html`

Solució: *a)* $\Phi_t = \alpha' + s\alpha'' = \vec{t} + s\kappa\vec{n}$ *i* $\Phi_s = \vec{t}$*. Llavors* $\Phi_t \times \Phi_s = -s\kappa\vec{b} \neq 0$*. b) El vector normal unitari és* $-\vec{b}(t)$*, no depén de* s *llavors és constant al llarg de les rectes i per l'exercici anterior és desenvolupable.*
c) És clar per l'expressió de Φ_t *i* Φ_s*. La primera forma te expressió matricial:*

$$\begin{pmatrix} 1 + s^2\kappa^2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

d) La primera forma fonamental del pla en les coordenades (t, s) *corresponent a la corba plana te la mateixa expressió. Per tant hi ha isometria local.*

Exercici 7.3. [**Superfície de les normals**] Sigui $\alpha = \alpha(s)$ una corba de $\mathbb{R}^3$ parametritzada per l'arc amb curvatura $k \neq 0$ i torsió τ. Calculeu la curvatura de Gauss de la superfície parametritzada per

$$\mathbf{x}(s, \lambda) = \alpha(s) + \lambda\mathbf{n}(s)$$

on $\mathbf{n}$ és el vector normal de la corba α.

Solució: $x_s = (1 - \lambda\kappa)\vec{t} + \lambda\tau\vec{b}$ *i* $x_\lambda = \vec{n}$*. Llavors la primera forma fonamental és*

$$\begin{pmatrix} (1 - \lambda\kappa)^2 + \lambda^2\tau^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La curvatura de Gauss serà $K = -f^2/((1 - \lambda\kappa)^2 + \lambda^2\tau^2)$*. Com* $f = \langle N, x_{s\lambda}\rangle = \langle((1 - \lambda\kappa)\vec{t} + \lambda\tau\vec{b}) \times \vec{n}, -\kappa\vec{t} + \tau\vec{b}\rangle/\sqrt{(1 - \lambda\kappa)^2 + \lambda^2\tau^2} = \tau/\sqrt{(1 - \lambda\kappa)^2 + \lambda^2\tau^2}$*, obtenim*

$$K = -\frac{\tau^2}{((1 - \lambda\kappa)^2 + \lambda^2\tau^2)^2}.$$

Exercici 7.4. [**Superfície de les binormals**] Sigui $\alpha = \alpha(s)$ una corba de $\mathbb{R}^3$ parametritzada per l'arc amb curvatura $k \neq 0$ i torsió τ. Calculeu la curvatura de Gauss de la superfície parametritzada per

$$\mathbf{x}(s, \lambda) = \alpha(s) + \lambda\mathbf{b}(s)$$

on $\mathbf{b}$ és el vector binormal de la corba α.

Solució: *Procedint com en exercicis anteriors obtenim*

$$K = -\frac{\tau^2}{(1 + \lambda^2\tau^2)^2}.$$

Exercici 7.5. [**Superfície polar**] Sigui $\alpha = \alpha(t)$ una corba regular de $\mathbb{R}^3$ parametritzada per l'arc. La superfície polar de α és la superfície reglada formada per les rectes paral·leles a la binormal (en cada punt) que passen pel centre de curvatura (en aquest punt). Concretament

$$\varphi(t, s) = \alpha(t) + \rho(t)\mathbf{n}(t) + s\mathbf{b}(t)$$

on $\rho(t)$ és el radi de curvatura de α. La recta que obtenim en fixar t i variar s es diu *eix polar*.

a) Demostreu que aquesta definició coincideix amb la clàssica: *La superfície polar de* α *és l'envolvent dels plans normals.* Recordem que l'envolvent d'una família uniparàmetrica de plans (la nostra família és uniparamètrica perquè tenim un pla per a cada valor del paràmetre t de la corba) és una superfície tangent en cada punt a un d'aquests plans. Aquesta superfície es troba fàcilment resolent el sistema format per l'equació dels plans (que depèn de t) i l'equació que s'obté derivant aquesta respecte del paràmetre t.

b) Comproveu que la superfície polar és desenvolupable, amb eix de regressió format pels centres de les esferes osculatrius.

Solució: *a) En general, si $F_t(x,y,z)=0$ denota una familia de superfícies la* corba característica *per $t=t_0$ és el límit de la intersecció $F_t(x,y,z)=0=F_{t_0}(x,y,z)$ quan t s'acosta a t_0. Per tant, restant i didivint per $t-t_0$, aquesta corba serà solució de les equacions*

$$F_t(x,y,z)=0, \qquad \partial_t F_t(x,y,z)=0.$$

En el nostre cas tenim la família uniparamètrica

$$\langle X-\alpha(t),\vec{t}(t)\rangle=0.$$

Derivant ens queda l'equació

$$\langle X-\alpha(t),\vec{n}(t)\rangle=\rho(t).$$

La recta característica per t és la intersecció del pla normal amb el pla perpendicular a $\vec{n}$ que passa a distància $\rho(t)$ de $\alpha(t)$ és a dir

$$\alpha(t)+\rho(t)\vec{n}(t)+\langle\vec{b}(t)\rangle$$

que és el que es volia provar.
Estudiem l'esfera osculatriu. La primera condició $S(\alpha(t_0))$ diu que l'esfera passa per $\alpha(t_0)$. Fem la primera derivada, tenim

$$\langle\alpha'(t_0),\alpha(t_0)-a\rangle=0.$$

Això ens diu que el radi per $\alpha(t_0)$ és perpendicular a $\alpha'(t_0)$. Llavors $a=\alpha(t_0)+\lambda\vec{n}(t_0)+\mu\vec{b}(t)$. Fem la derivada segona. Tenim

$$\langle\alpha''(t_0),\alpha(t_0)-a\rangle=-1=\kappa\langle\vec{n}(t_0),\alpha(t_0)-a\rangle$$

D'aquí deduïm que $\lambda=\rho$. Ens falta trobar la μ. Tornem a derivar, obtenim

$$\langle\alpha'''(t_0),\alpha(t_0)-a\rangle+\langle\alpha''(t_0),\alpha'(t_0)\rangle=0.$$

Desenvolupant i fent servir Frenet veiem que $\mu=\rho'/\tau$. Llavors el centre de l'esfera osculatriu és

$$\alpha+\rho\vec{n}+\frac{\rho'}{\tau}\vec{b}.$$

Passen per la superfície polar (per $s=\frac{\rho'}{\tau}$.)
Si el càlcul anterior l'aturèssim a la segona derivada arribem a que el centre caus sobre el punt

$$\alpha+\rho\vec{n}+\mu\vec{b}$$

que pertany a l'eix polar corresponent a α. Això respón a la segona questió de b).
El darrer apartat és un càlcul simple de $f=\langle N,\varphi_{ts}\rangle$ que es veu que dona zero.
L'eix de regressió ve donat per

$$\varphi(t,s)=\alpha(t)+\rho(t)\vec{n}(t)+h(t)\vec{b}(t)$$

amb

$$h(t)=-\frac{\langle(\alpha(t)+\rho(t)\vec{n}(t))',\vec{b}'\rangle}{\langle\vec{b}',\vec{b}'\rangle}=\frac{-\rho'(t)}{\tau(t).}$$