

13 Camps vectorials

§1 Interpretació geomètrica de la divergència i el rotacional.

Com a primera aproximació (no del tot correcta) podríem dir que la divergència i el rotacional d'un camp de \mathbb{R}^3 mesuren respectivament com es separen i com giren les seves línies integrals.

Exercici 13.1. Comproveu les següents afirmacions:

- (a) El camp vectorial constant $\mathbf{X}_0 = (1, 0, 0)$ té divergència i rotacional zero; les seves línies integrals són rectes paral·leles.
- (b) El camp vectorial $\mathbf{X}_1 = (x, y, z)$ té divergència 3 i rotacional zero; les seves línies integrals són les semirectes sortint de l'origen.
- (c) El camp vectorial $\mathbf{X}_2 = (-y, x, 0)$ té divergència zero i rotacional $(0, 0, 2)$; les seves línies integrals són circumferències.

Però la realitat és una mica més subtil com posent de manifest les fórmules següents:

Exercici 13.2. Comproveu les identitats

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(f\mathbf{F}) &= \operatorname{grad} f \cdot \mathbf{F} + f \operatorname{div} \mathbf{F}, \\ \operatorname{rot}(f\mathbf{F}) &= \operatorname{grad} f \times \mathbf{F} + f \operatorname{rot} \mathbf{F}.\end{aligned}$$

Exercici 13.3. Calculeu el rotacional i la divergència dels camps vectorials $\mathbf{Y}_0 = y\mathbf{X}_0$, $\mathbf{Y}_1 = (x^2 + y^2 + z^2)^\varepsilon \mathbf{X}_1$ i $\mathbf{Y}_2 = (x^2 + y^2)^\varepsilon \mathbf{X}_2$.

Trobem il·lustracions explicatives a les pàgines web

<http://www.math.umn.edu/~nykamp/m2374/readings/curlsubtle/>
<http://www.math.umn.edu/~nykamp/m2374/readings/divsubtle/>

Considereu el camp $\mathbf{F}_\varepsilon(x, y) = \frac{1}{(x^2 + y^2)^\varepsilon}(x, y)$ del pla. Anem a calcular les seves corbes integrals resolent el sistema d'equacions diferencials

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \frac{x}{(x^2 + y^2)^\varepsilon} \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{y}{(x^2 + y^2)^\varepsilon}\end{aligned}$$

Per això observem que si $r^2 = x^2 + y^2$ aleshores $2r \frac{dr}{dt} = 2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} = 2r^{2-2\varepsilon}$, d'on resulta que $r^{2\varepsilon-1} dr = dt$ i per tant

$$r(t) = (r_0^{2\varepsilon} + 2\varepsilon t)^{\frac{1}{2\varepsilon}}.$$

D'altra banda, es comprova fàcilment que $\frac{d(y/x)}{dt} = 0$, d'on resulta que $\theta(t) = \theta_0$. Així doncs, la corba integral de \mathbf{F}_ε passant per (x, y) està parametritzada per

$$t \mapsto \phi_\varepsilon^t(x, y) = \left(x \left(1 + \frac{2\varepsilon t}{(x^2 + y^2)^\varepsilon} \right)^{\frac{1}{2\varepsilon}}, y \left(1 + \frac{2\varepsilon t}{(x^2 + y^2)^\varepsilon} \right)^{\frac{1}{2\varepsilon}} \right).$$

Podem fer una animació amb **maple** de la imatge del cercle de centre $(1, 1)$ i radi 1 per l'aplicació ϕ_ε^t per il·lustrar el fet que $(\operatorname{div}(X))(p) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \frac{V(\phi_t(B(p, r)))}{V(B(p, r))}$.

Exercici 13.4. Calculeu la circulació $C_r(x_0, y_0)$ del camp vectorial $(y^2, 0)$ de \mathbb{R}^2 al llarg d'una circumferència de centre (x_0, y_0) i radi r . Comproveu que $(\operatorname{rot}(X))(x_0, y_0) = (0, 0, \lim_{r \rightarrow 0} \frac{C_r(x_0, y_0)}{\pi r^2})$.

§2 El camp de Lorenz.

Considerem el camp vectorial $\mathbf{L} = (\sigma(y-x), x(\rho-z)-y, xy-\beta z)$ de \mathbb{R}^3 amb $\sigma\rho\beta \neq 0$. Per alguns valors d'aquests paràmetres, les corbes integrals del camp \mathbf{L} giren i al voltant dels seus punts crítics sense cap pauta regular descrivint una figura límit de caire fractal anomenada *atractor de Lorenz*.

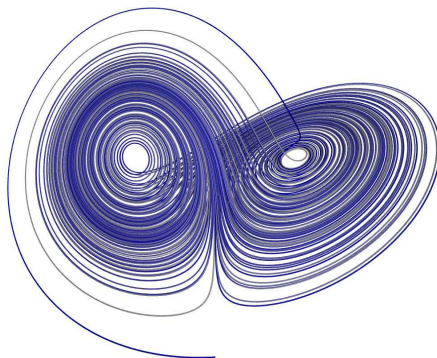


Figura 13.1: L'atractor de Lorenz.

Aquest camp fou introduït pel matemàtic i meteoròleg Edward Lorenz (1917–2008), no confondre amb l'eminent físic Hendrik Lorentz (1853–1928), en 1963 per donar un model senzill del moviment de l'aire a l'atmosfera. Paradoxalment, amb aquest model simple es van posar de manifest per primer cop el comportament determinista caòtic basat en la dependència sensible de les condicions inicials i conegut popularment com l'efecte papallona. Per saber-ne més vegeu <http://www.chaos-math.org/es/caos-vii-atractores-extranos>

Exercici 13.5. Trobeu els punts on \mathbf{L} s'anula i avalueu-ne $\text{rot}(\mathbf{L})$.

Podem utilitzar el rotacional del camp \mathbf{L} avaluat en els seus punts crítics per trobar els dos plans que aproximen la forma lemniscàtica de l'atractor de Lorenz. També podem definir un procediment en maple per representar gràficament unes petites esferes centrades en els punts crítics de \mathbf{L} i animar-les d'un moviment de rotació d'eix $\langle \text{rot}(\mathbf{L}) \rangle$ i velocitat angular proporcional a $\|\text{rot}(\mathbf{L})\|$.

§3 El camp de Hopf.

Considerem el camp vectorial

$$\mathbf{H}(x, y, z) = \left(y + xz, -x + yz, \frac{1}{2}(1 + z^2 - (x^2 + y^2)) \right).$$

Exercici 13.6. Calculeu la divergència i el rotacional de \mathbf{H} .

Exercici 13.7. Proveu que curvatura $\kappa(x, y, z)$ de la corba integral $t \mapsto \mathbf{c}_{xyz}(t)$ de \mathbf{H} passant pel punt (x, y, z) és

$$\kappa(x, y, z) = \frac{2\sqrt{x^2 + y^2}}{1 + x^2 + y^2 + z^2}.$$

Indicació: calcular $\kappa(x, y, z) = \frac{\|\mathbf{c}'_{xyz} \times \mathbf{c}''_{xyz}\|}{\|\mathbf{c}'_{xyz}\|^3}$ utilitzant que $\mathbf{c}'_{xyz} = \mathbf{H} \circ \mathbf{c}_{xyz}$ i la regla de la cadena.

Exercici 13.8. Comproveu les superfícies de nivell de la funció $\kappa(x, y, z)$ són tors de revolució i comproveu que \mathbf{H} n'és sempre tangent. Indicació: Comprovar que $\mathbf{H} \perp \nabla \kappa$.

Exercici 13.9. Proveu que la torsió de tota corba integral de \mathbf{H} és nul·la. Deduïu que totes les corbes integrals de \mathbf{H} , exceptuant l'eix z , són circumferències. Aquestes circumferències del tor de revolució s'anomenen *cercles de Villarceau*:

http://en.wikipedia.org/wiki/Villarceau_circles

Podem fer una representació gràfica d'alguns d'aquests cercles:

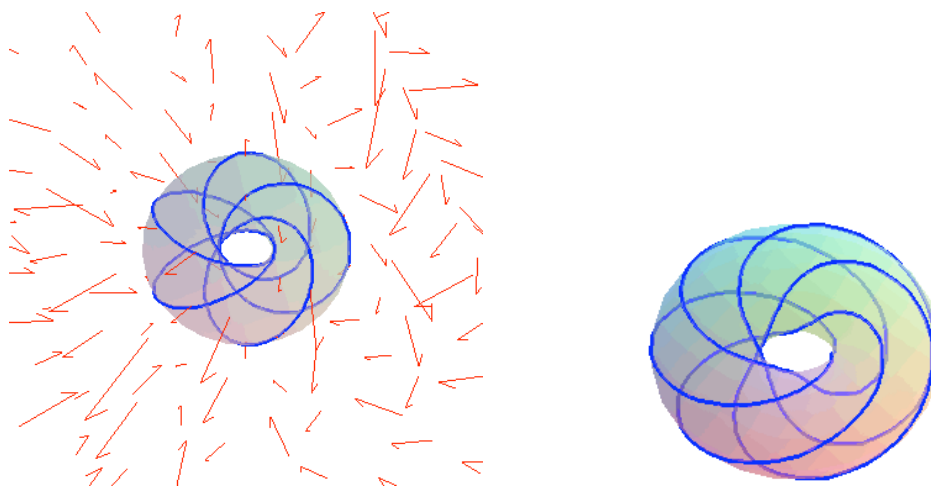


Figura 13.2: El camp de Hopf i alguns cercles de Villarceau. Nusos tòrics de tipus $(1,1)$.

Exercici 13.10. Comproveu que els nusos tòrics de tipus $(1,1)$ parametritzats per $t \mapsto ((a + b \cos t) \cos t, (a + b \cos t) \sin t, b \sin t)$ no són cercles de Villarceau. Indicació: Calculeu-ne la curvatura i feu-ne una representació gràfica.

De fet, aquest camp prové de la fibració de Hopf $\pi : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^2$, mitjançant les projeccions estereogràfiques $\mathbb{S}^3 \setminus \{*\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ i $\mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\} \cong \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, la inclusió $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4 \cong \mathbb{C}^2$ i l'aplicació $\pi(x, y) = y/x$.

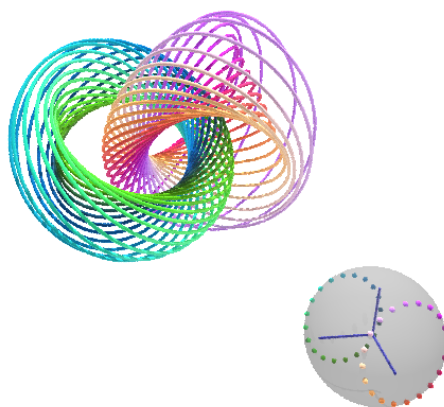


Figura 13.3: Fibració de Hopf. <http://www.youtube.com/watch?v=AKotMPGFJYk>