# 10 Geodèsiques

**§1 Equacions d'Euler-Lagrange.** Segons el *principi de mínima acció* la trajectòria $\alpha(t)$ que segueix una partícula en un sistema mecànic és un punt crític de l'acció $\mathcal{A}(\alpha) = \int_a^b L(\alpha, \alpha')\, dt$ on $L = T - V$ és la funció Lagrangiana (diferència entre energies cinètica i potencial). El càlcul de variacions mostra[8] que aquestes trajectòries satisfan les equacions d'Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \alpha_i'}\right) = 0. \tag{10.1}$$

**Exercici 10.1**. Considerem una partícula de massa unitat que es mou sobre una superfície regular $S \subset \mathbb{R}^3$ parametritzada localment per $\mathbf{x}(u, v)$. Descrivim la seva trajectòria $\alpha(t)$ en coordenades locals mitjançant $t \mapsto (u(t), v(t))$. Escriviu quina és la seva energia cinètica.

**Solució:** $E_c = \frac{1}{2}m||\alpha'(t)||^2 = E(u,v)\frac{(u')^2}{2} + F(u,v)u'v' + G(u,v)\frac{(v')^2}{2}$.

Si no hi ha cap força exterior aleshores l'energia potencial és zero i la funció de Lagrange associada és justament l'energia cinètica. Observeu que en aquest cas el principi de conservació de l'energia es tradueix en que la velocitat escalar és constant al llarg de les geodèsiques.

**Exercici 10.2**. Escriviu les equacions d'Euler-Lagrange del moviment

$$\frac{\partial L}{\partial u} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial u'} = 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial v} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v'} = 0 \tag{10.2}$$

i comproveu que són equivalents[9] a imposar que $\alpha''$ no té component tangent a $S$.

Així doncs, les trajectòries d'una partícula que satisfan el principi de mínima acció per l'energia cinètica són aquelles sobre les quals l'acceleració és perpendicular a $S$. Aquestes corbes s'anomenen *geodèsiques* de $S$. Observeu que les equacions d'Euler-Lagrange es poden fer servir per calcular fàcilment els símbols de Christoffel d'una superfície.

**Solució:** *Si trobem les equacions d'Euler Lagrange obtenim* $Eu'' + Fv'' = \cdots$, $Fu'' + Gv'' = \cdots$. *Les equacions de les geodèsiques són* $u'' + \Gamma_{11}^1(u')^2 + 2\Gamma_{12}^1 u'v' + \Gamma_{22}^1(v')^2 = 0$ *i* $v'' + \Gamma_{11}^2(u')^2 + 2\Gamma_{12}^2 u'v' + \Gamma_{22}^2(v')^2$. *Comparem amb els sistemes que defineixen els* $\Gamma$*'s i hem acabat (tot i que llarg i pesat).*
*Alternativa:*

$$\frac{\partial L}{\partial u} = \frac{1}{2}m(E_u(u')^2 + 2F_u u'v' + G_u(v')^2)$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial u'} &= m\frac{d}{dt}(Eu' + Fv') = m\frac{d}{dt}\langle \gamma', \varphi_u\rangle \\
&= m(\langle \gamma'', \varphi_u\rangle + \langle \varphi_u, \varphi_{uu}\rangle (u')^2 + \langle \varphi_v, \varphi_{uu}\rangle u'v' + \langle \varphi_u, \varphi_{uv}\rangle u'v' + \langle \varphi_v, \varphi_{uv}\rangle (v')^2) \\
&= m\langle \gamma'', \varphi_u\rangle + \frac{1}{2}m(E_u(u')^2 + 2F_u u'v' + G_u(v')^2).
\end{aligned}$$

*I deduïm que la primera equació de Lagrange equival a* $\gamma'' \perp \varphi_u$. *Anàlogament s'obté que la segona equival a* $\gamma'' \perp \varphi_v$.

**§2 Superfícies de revolució.** Es considera la superfície de revolució $S$ obtinguda fent girar la corba regular $\alpha(u) = (a(u), 0, b(u))$ (amb $a(u) > 0$) al voltant de l'eix $OZ$. Recordeu que

$$\varphi(u, v) = (a(u)\cos v, a(u)\sin v, b(u))$$

és una parametrització regular de $S$. Les corbes coordenades d'aquesta parametrització s'anomenen *paral·lels* si $u = u_0$ i *meridians* si $v = v_0$.

[8] Podeu fer el càlcul considerant variacions del tipus $\alpha + sX$. Vegeu el llibre de Goldstein per exemple.
[9] Com s'ha fet a teoria, escriviu $\alpha'' = A\varphi_u + B\varphi_v + C\nu$.

Recordeu que si la corba $\alpha(u)$ està parametritzada per l'arc aleshores els coeficients de la primera forma fonamental de $S$ associada a la parametrització $\varphi$ són $E = 1$, $F = 0$ i $G = a^2$.

**Exercici 10.3**. Fent servir (10.2), calculeu les equacions de les geodèsiques i deduïu-ne els símbols de Christoffel de $S$ respecte la parametrització $\varphi$ anterior (suposant que $\alpha(u)$ està parametritzada per l'arc).

**Solució:** *La funció Lagrangiana és un multiple de $u'^2 + a(u)^2 v'^2$. Les equacions d'Euler Lagrange són*

$$u'' = aa'v'^2, \qquad (a^2v')' = 0.$$

*(compte que $a'$ és derivada respecte $u$ i les altres respecte $t$, el paràmetre de la corba.) Comparant amb l'equació de les geodèsiques veiem que $\Gamma^1_{22} = -aa'$ i $\Gamma^2_{12} = a'/a$ i els altres termes són nuls.*

**Exercici 10.4**. Comproveu que els meridians d'una superfície de revolució, parametritzats convenientment, són geodèsiques.

**Solució:** *Substituïm $t \to (kt + r, v_0)$ amb $k, r \in \mathbb{R}$ i veiem que compleixen les equacions.*

**Exercici 10.5**. Proveu que un paral·lel és una geodèsica si i només si la recta tangent al meridià que passa per cada un dels seus punts és paral·lela a l'eix de rotació de la superfície. Apliqueu-ho al cas de l'esfera i del tor.

**Solució:** *Són corbes $t \to (u_0, v(t))$. De la primera equació tenim que $a'(u_0) = 0$ ja que $a > 0$ i $v' \neq 0$ ja que no es tracta d'un punt. Llavors es compleix el que diu l'enunciat.*

Recordeu que si $\gamma$ és una corba unitaria ($|\gamma'| \equiv 1$) continguda a una superfície $S$ aleshores podem descomposar el vector acceleració $\kappa N$ com a suma d'una component normal $k_n\nu$ i una component tangencial $k_g(\nu \times T)$ a la superfície, on $T, N, B$ és el triedre de Frenet de $\gamma$ i $\nu$ és el vector normal de $S$.

**Exercici 10.6**. Trobeu la curvatura geodèsica i la curvatura normal dels paral.lels ($u = u_0$) en funció de $a(u)$ i $a'(u)$ suposant que $\alpha(u)$ està parametritzada per l'arc.

**Solució:** *Aquestes curvatures no varien al llarg del paral·lel, estudiem quan $y = 0$. En un d'aquests punts el normal unitari a la superfície és $\nu = (-b', 0, a')$ i com que el paral·lel és una circumferència de radi $a$ la curvatura del paral·lel com a corba de l'espai és $1/a$. La direcció del normal de la corba és $N = (-1, 0, 0)$. Llavors, com que $\kappa N = k_g(\nu \times T) + k_n\nu$ i $T = (0, 1, 0)$, tenim*

$$(-1/a, 0, 0) = k_g(-a', 0, -b') + k_n(-b', 0, a').$$

*Llavors*

$$k_n = \frac{b'}{a} \quad \text{i} \quad k_g = \frac{a'}{a}.$$

**Exercici 10.7**. Demostreu el *teorema de Clairaut*: si $\gamma(t)$ és una geodèsica de $S$ i $\theta(t)$ és l'angle que forma $\gamma$ amb el paral·lel per $\gamma(t)$, aleshores el producte de la distància de $\gamma(t)$ a l'eix de gir pel cosinus de $\theta(t)$ és constant al llarg de la corba $\gamma$.

**Solució:** *Calculem l'angle de la corba unitària $\gamma$ amb un paral·lel:*

$$\cos\theta = \frac{\langle \gamma', \mathbf{x}_v \rangle}{\langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle^{1/2}} = v'a(u).$$

*Per ser geodèsica tenim que $a^2v' = ct$, llavors $a\cos\theta = ct$. que és el que volíem provar.*

**Exercici 10.8**. Comproveu que la relació de Clairaut és equivalent a la constància de la component $z$ del moment angular $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ respecte l'origen d'una partícula que es mou lliurement sobre la superfície de revolució (és a dir, que segueix el pricipi de mínima acció per l'energia).

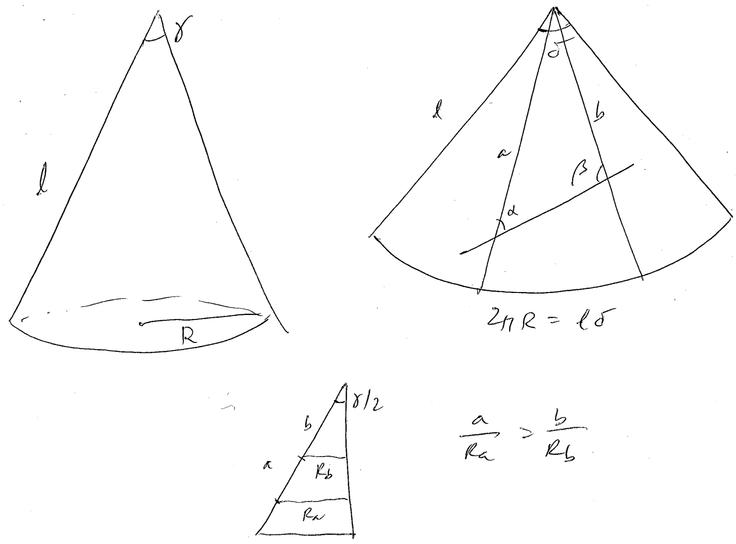
**Solució:** *Tenim* $\mathbf{r}(t) = (a(u(t))\cos(v(t)), a(u(t))\sin(v(t)), b(u(t)))$ *i* $\mathbf{p}(t) = m\mathbf{r}'(t)$. *Fent un càlcul comprovem que la component* $z$ *de* $\mathbf{r} \times \mathbf{r}'$ *és* $a^2 v'$ *i hem acabat.*

**Exercici 10.9**. Proveu que la relació de Clairaut sobre un con és equivalent al teorema del sinus. *Indicació:* Desplegant el con sobre un pla les geodèsiques es transformen en rectes (per què?). Apliqueu llavors el teorema del sinus a un triangle adequat.

**Solució:** *Un con* $C$ *de base un cercle de radi* $R$*, generatriu de longitud* $l$ *i angle central* $\gamma$ *el podem desplegar isomètricament sobre un sector* $S$ *d'una circumferència de radi* $l$ *i angle* $2\pi R/l$*. Considerem dos meridians a* $S$*, són dos radis de la circumferència i una geodèsica que els talla. Aquesta geodèsica és una recta al sector* $S$*. Considerem el triangle a* $S$ *que te com a costats els meridians i la geodèsica. Si* $a$ *i* $b$ *són les longituds dels costats-meridians i* $\alpha$ *i* $\beta$ *els angles interiors dels costats-meridians amb la geodèsica, pel teorema de Clairaut tenim que* $R_a \sin\alpha = R_b \sin\beta$ *on* $R_a$ *i* $R_b$ *són les distàncies a l'eix dels vèrtex corresponents, pensats ara al con. Com que* $R_a/a = \sin(\gamma/2)$ *i* $R_b/b = \sin(\gamma/2)$ *substituint resulta que*

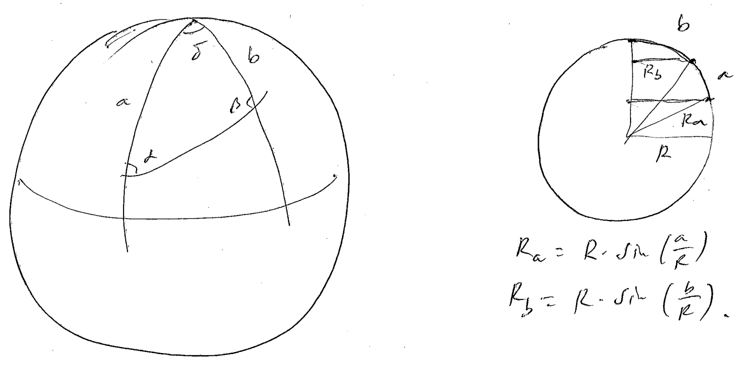
$$\frac{\sin\alpha}{b} = \frac{\sin\beta}{a}$$

*que és el teorema del sinus.*




**Exercici 10.10**. Proveu que la relació de Clairaut sobre l'esfera és equivalent al teorema teorema del sinus esfèric. *Indicació:* Apliqueu el teorema del sinus esfèric a un triangle amb vèrtex al pol nord.

**Solució:** *Procedim de forma similar (veure dibuix).*



**Exercici 10.11**. Sigui $S$ una superfície de revolució i $d : S \to (0, \infty)$ la funció distància a l'eix de gir. Pel teorema de Clairaut, cada corba geodèsica $\gamma \subset S$ té associat un nombre $c_\gamma \in \mathbb{R}^+$ tal que $d(\gamma(t)) \cos\theta(t) = c_\gamma$. Proveu que $c_\gamma = 0$ si i només si $\gamma$ és un meridià. Si $\gamma$ és una geodèsica amb $c = c_\gamma > 0$ aleshores $\gamma$ està inclosa en la *regió* $B_c := \{d \geq c\} \subset S$. Suposant que $B_c = \varphi([u_0, u_1] \times [0, 2\pi])$ per certs $u_0, u_1$ tals que $a'(u_0), a'(u_1) \neq 0$ i que $a(u) > c$ per a tot $u \in (u_0, u_1)$, proveu que $\gamma$ és tangent als paral·lels $u = u_0$ i $u = u_1$ en algun punt.

**Solució:** *Escrivim $\gamma(t) = \varphi(u(t), v(t))$. Suposem $|\gamma'| = 1$ i $\gamma(t)$ definida per a tot $t$ (es veu al curs de Geometria Riemanniana que us recomanem!). Observem $d(\gamma(t)) = a(u(t)) \geq a(u(t)) \cos(\theta(t)) = c$. Si per algun $t_0$ tenim $a(u(t_0)) = c$ llavors $u(t_0)$ ha de ser $u_0$ o $u_1$ i $\theta(t_0)$ ha de ser 0, que és el que volíem veure. Suposem, doncs, que $a(u(t)) > c$ per tot $t$ i arribarem a contradicció.*
*D'una banda, si per algun $t_0$ tenim $u'(t_0) = 0$ llavors $\gamma'(t_0)$ és múltiple de $\varphi_v$ i per tant $\theta(t_0) = 0$ d'on $d(\gamma(t_0)) = c$ en contra de la hipòtesi. Podem suposar, doncs, que $u(t)$ és monòtona i acotada amb valors a $(u_0, u_1)$. Estudiem el límit quan $t \to \infty$.*
*Per monotonia, existeix el límit $\lim_{t\to\infty} u(t) =: u_\infty$. Si $u'(t) > 0$, com que la integral $u(t) = \int_{t_0}^{t} u'(x)dx + u(t_0)$ és fitada per tot $t$, deduïm que $\liminf_{t\to\infty} u'(t) = 0$ i per tant ha d'existir una successió $t_n \to \infty$ amb $\lim_n u'(t_n) = 0$. Si $u'(t) < 0$ arribem a la mateixa conclusió. Per tant $\lim_n v'(t_n) = 1/a(u_\infty)$ d'on*

$$\lim_n \cos\theta(t_n) = \lim_n \frac{\langle \gamma'(t_n), \varphi_v \rangle}{|\varphi_v|} = \lim_n v'(t_n) a(u(t_n)) = 1 \quad \Rightarrow \quad a(u_\infty) = c$$

*que implica que $u_\infty$ ha de ser $u_0$ o $u_1$.*
*Vegem ara que existeix una successió $s_n \to \infty$ tal que $\lim_n u''(s_n) = 0$.*
*Si per algun $T$ tenim $u''(t) \neq 0$ per $t > T$, podem raonar com abans. Si no és així, existirà una successió $s_n \to \infty$ tal que $u''(s_n) = 0$ per tot $n$ i en particular $\lim_n u''(s_n) = 0$ com volíem veure.*
*Finalment, de la primera equació de les geodèsiques deduïm*

$$0 = \lim_n u''(s_n) = \lim_n a(u(s_n)) a'(u(s_n)) (v'(s_n))^2 = \frac{a'(u_\infty)}{c}.$$

*Contradient la hipòtesi que $a'(u_0), a'(u_1) \neq 0$.*

**Exercici 10.12**. Demostreu que els plans osculadors d'una geodèsica sobre un con estan a distància constant del vèrtex. (*Indicació: veieu que el pla rectificant en un punt $P$ de la geodèsica conté la generatriu del con per aquest punt i també el segment que realitza la distància del vèrtex al pla osculador en $P$.)*