11 El pla hiperbòlic

Es considera una superfície S que admet una parametrització global definida al semiplà superior $\mathbb{H} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ en la qual la primera forma fonamental I té coeficients $E = G = \dfrac{1}{y^2}$ i $F = 0$. Una tal superfície s'anomena *pla hiperbòlic*. Identifiquem S amb $\mathbb{H}$ a través d'aquesta parametrització.

Exercici 11.1. Comproveu que la mesura d'angles de $\mathbb{H}$ coincideix amb la mesura d'angles euclidiana en el punt de coordenades (x, y).

Solució: *Si $v, w \in T_{(x,y)}\mathbb{H}$ llavors $\langle v, w\rangle_{\text{hip}} = \frac{1}{y^2}\langle v, w\rangle_{\text{eucl}}$. Els cosinus coincideixen i ja ho tenim.*

Exercici 11.2. Calculeu l'àrea de la regió $R_1 = \{(x, y) \colon 0 < x < 1, 1 < y < \infty\}$. Comproveu que la regió $R_2 = \{(x, y) \colon 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$ té àrea infinita.

Solució:

$$A(R_1) = \int_{R_1} \sqrt{EG - F^2}dxdy = \int_0^1 \int_1^\infty \frac{1}{y^2}dydx = 1, \quad A(R_2) = \int_0^1 \frac{1}{y^2}dy = \infty.$$

Exercici 11.3. Es posible determinar, a partir de les dades anteriors, les línies de curvatura de S? I les línies asimptòtiques?

Solució: *No. Les línies assimptòtiques i les línies de curvatura es calculen mitjançant la segona forma fonamental que no sabem quina és.*

Exercici 11.4. Determinem les geodèsiques $\gamma(t) = (x(t), y(t))$:

(a) Deduïu, fent servir les equacions d'Euler-Lagrange, que les equacions de les geodèsiques en aquestes coordenades estan donades per

$$\begin{cases} \ddot{x} - \dfrac{2}{y}\,\dot{x}\,\dot{y} &= 0 \\ \ddot{y} + \dfrac{1}{y}\,\dot{x}^2 - \dfrac{1}{y}\,\dot{y}^2 &= 0 \end{cases}$$

i que per tant els símbols de Christoffel són $-\Gamma^2_{11} = \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = \Gamma^2_{22} = -\frac{1}{y}$ i la resta zero.

(b) Comproveu que la curvatura de Gauss de $\mathbb{H}$ és constant $K = -1$.

(c) Comproveu que les semirectes verticals $\gamma(t) = (x_0, e^{at})$ són geodèsiques.

(d) Deduïu de les equacions del primer apartat que les geodèsiques compleixen $\dot{x}/y^2 = ct$. Veieu que llavors es té que $\cos\phi/y = ct.$ on ϕ és l'angle format per la geodèsica γ amb les rectes horitzontals $y = ct$ al punt considerat.

Solució:

a) Derivem $L = y^{-2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial y} = -2y^{-3}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2), \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 2y^{-2}\dot{x}, \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = 2y^{-2}\dot{y}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 2y^{-3}(y\ddot{x} - 2\dot{x}\dot{y}), \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = 2y^{-3}(\ddot{y}y - 2\dot{y}^2).$$

Substituïnt a

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0, \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} = 0,$$

surt.

b) Es comprova i surt. Fem servir

$$K = \frac{1}{E}(\Gamma^1_{11}\Gamma^2_{12} + \Gamma^2_{11}\Gamma^2_{22} - \Gamma^1_{12}\Gamma^2_{11} - \Gamma^2_{12}\Gamma^2_{12} + (\Gamma^2_{11})_v - (\Gamma^2_{12})_u).$$

c) Per la primera equació,

$$\frac{d}{dt}\frac{\dot x}{y^2} = \frac{\ddot x}{y^2} - 2\frac{\dot x \dot y}{y^3} = \frac{1}{y^2}(\ddot x - \frac{2}{y}\dot x \dot y) = 0$$

Per tant $\frac{\dot x}{y^2}$ és constant. Com que també $|\gamma'|$ és constant, deduïm

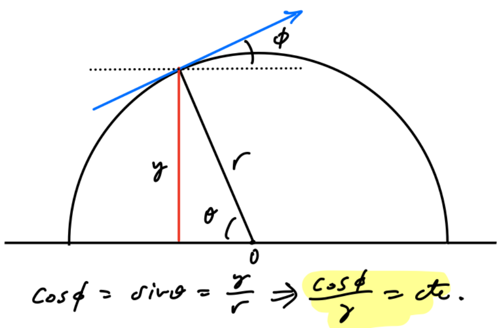
$$\frac{\cos\phi}{y} = \frac{E\dot x}{y|\gamma'|\sqrt{E}} = \frac{\dot x}{y^2|\gamma'|} = ct.$$

De la relació $\cos\phi/y = ct.$ veiem que unes geodèsiques tornen cap avall i altres $\phi = \pi/2$ són les de l'apartat anterior.

(e) Proveu que les semicircumferències (euclidianes) a $\mathbb{H}$ amb centre a la recta $y = 0$ compleixen la relació $\frac{1}{y}\cos\phi = ct$. Proveu que les geodèsiques γ de S són de la forma $x = x_0 + r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, on $\theta = \theta(t)$ compleix l'equació $\ddot\theta = \dot\theta^2\cot\theta$.

Solució: *És evident que $\cos\phi = \sin\theta = \frac{y}{r}$ (veure dibuix). Això demostra la primera afirmació. Per a la segona part, no usem formalment aquest fet, sinó que plantegem $\gamma(t) = (x_0, 0) + r(\cos\theta(t), \sin\theta(t))$ i calculem:*

$$\dot x = -r\dot\theta\sin\theta \qquad \ddot x = -r\dot\theta^2\cos\theta - r\ddot\theta\sin\theta$$
$$\dot y = r\dot\theta\cos\theta \qquad \ddot x = -r\dot\theta^2\sin\theta + r\ddot\theta\cos\theta$$



I per tant les equacions (a) es converteixen en

$$0 = \ddot x - \frac{2}{y}\dot x\dot y = r\dot\theta^2\cos\theta - r\ddot\theta\sin\theta \tag{11.3}$$

$$0 = \ddot y + \frac{1}{y}(\dot x^2 - \dot y^2) = r\ddot\theta\cos\theta - r\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}\dot\theta^2 \tag{11.4}$$

que equivalen totes dues a $\ddot\theta = \dot\theta^2\cot\theta$. Tota solució donarà lloc a una corba que compleix les equacions de les geodèsiques.

(f) Per resoldre $\ddot\theta = \dot\theta^2\cot\theta$ busquem $\theta = \theta(t)$ de manera que t sigui un múltiple del paràmetre arc s de γ. Comproveu que $s = \int\frac{1}{\sin\theta}d\theta = \log\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)$ i que per tant $\theta = 2\arctan e^s = 2\arctan e^{at+b}$.

(g) Deduïu, com a conclusió, que les geodèsiques (no verticals) de $\mathbb{H}$ estan donades per

$$x(t) = x_0 + r\,\frac{1 - e^{2(at+b)}}{1 + e^{2(at+b)}}, \qquad y(t) = r\,\frac{2\,e^{at+b}}{1 + e^{2(at+b)}}. \tag{11.5}$$

Exercici 11.5. Proveu que les aplicacions de la forma $\Psi_1(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}(x,y)$, $\Psi_2(x,y) = (kx,ky)$ i $\Psi_3(x,y) = (x+c,y)$ són isometries de $\mathbb{H}$, on $k > 0, c \in \mathbb{R}$.

Solució:

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial x} = (x^2+y^2)^{-2}(y^2-x^2,-2xy), \quad \frac{\partial\psi_1}{\partial y} = (x^2+y^2)^{-2}(-2xy, x^2-y^2).$$

$$I(\frac{\partial\psi_1}{\partial x},\frac{\partial\psi_1}{\partial x}) = (\frac{x^2+y^2}{y})^2(x^2+y^2)^{-4}((y^2-x^2)^2+4x^2y^2) = \frac{1}{y^2} = E$$

$$I(\frac{\partial\psi_1}{\partial x},\frac{\partial\psi_1}{\partial y}) = \cdots = 0 = F, \qquad I(\frac{\partial\psi_1}{\partial y},\frac{\partial\psi_1}{\partial y}) = \cdots = \frac{1}{y^2} = G$$

Exercici 11.6. Donat $c \in \mathbb{R}$ considerem $\Psi(x,y) = \frac{1+c^2}{(x-c)^2+y^2}(x-c,y)+(c,0)$. Proveu que $\Psi(0,e^{-t}) = (x(t),y(t))$ amb $x(t),y(t)$ donades a (11.5) i trobeu x_0, r, a, b.

Solució: *Notem que $\gamma(t) = \Psi(0,e^{-t})$ és geodèsica. Calculem $\gamma(0) = (0,1)$ i $\gamma'(0) = (\frac{-2c}{c^2+1},\frac{1-c^2}{c^2+1})$. Si $c > 0$ prenem $a = 1$, la primera condició diu $r = \frac{1+e^{2b}}{2e^b}, x_0 = \frac{-1+e^{2b}}{2e^b}$. La segona condició diu $\frac{-2e^b}{1+e^{2b}} = -\frac{2c}{1+c^2}, \frac{1-e^{2b}}{1+e^{2b}} = \frac{1-c^2}{1+c^2}$. Prenem $b = \log(c)$ i obtenim*

$$\gamma(t) = (\frac{c^2-1}{2c} + \frac{1+c^2}{2c^2}\frac{1-c^2e^{2t}}{1+c^2e^{2t}}, \frac{1+c^2}{2c^2}\frac{2c^2e^t}{1+c^2e^{2t}})$$

Indicacions:
Veiem que Ψ és isometria. Per tant $\Psi(0,e^{-t})$ ha de ser geodèsica. No cal calcular $\Psi(0,e^{-t})$.

Exercici 11.7. Donats dos punts $p, q \in \mathbb{H}$, proveu que existeix una geodèsica $\gamma(t)$ de $\mathbb{H}$ tal que $\gamma(0) = p, \gamma(1) = q$. Proveu que la longitud de $\gamma([0,1])$ és menor o igual que la longitud de qualsevol corba que uneixi $\gamma(0)$ amb $\gamma(1)$.

Solució: *Aplicant una isometria podem suposar $\gamma(0) = (0,1)$. Per l'apartat anterior, podem trobar c tal que $\Psi(e^{-t}i) = \gamma(t)$. Ens reduïm al cas $\gamma(t) = (0,e^{-t})$. Finalment si $c(t) = (x(t),y(t))$ amb $c(0) = \gamma(0), c(1) = \gamma(1)$, llavors*

$$\int_0^1 |c'(t)|dt = \int_0^1 \frac{\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}}{y(t)}dt \geq \int_0^1 \frac{y'(t)}{y(t)}dt = \log|\frac{y(1)}{y(0)}| = \int_0^1 |\gamma'(t)|dt.$$

Indicacions: *La primera part es dedueix del que hem vist. Per a la segona part, ens podem reduir al cas en què $\gamma(t)$ és vertical. En aquest cas, es comprova fàcilment que γ minimitza longituds.*

Exercici 11.8. Donats $P \in \mathbb{H}$ i $v \in T_P\mathbb{H}$ un vector amb $I(v, v) = 1$, denotem per $\gamma_{P,v}(s)$ la geodèsica parametritzada per l'arc tal que $\gamma_{P,v}(0) = P$ i $\gamma'_{P,v}(0) = v$. Anomenem circumferència hiperbòlica de radi r i centre P al conjunt $S_r(P) = \{\gamma_{P,v}(r) : v \in T_P\mathbb{H}, I(v, v) = 1\}$.

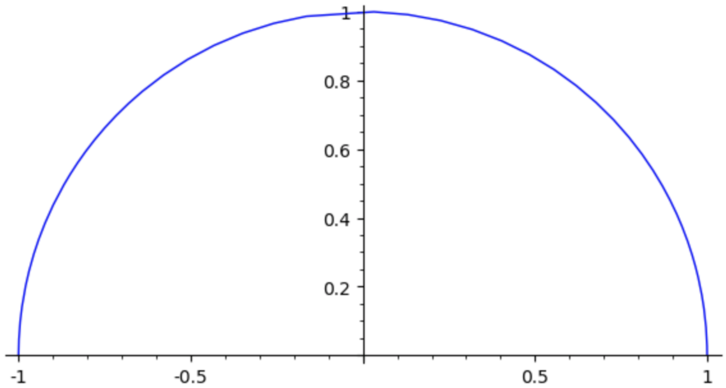
a) Dibuixeu amb `Sage` un parell de circumferències hiperbòliques centrades a $P = (0, 1)$.

b) Proveu que les circumferències hiperbòliques al semiplà es veuen com circumferències euclidianes.

Solució:

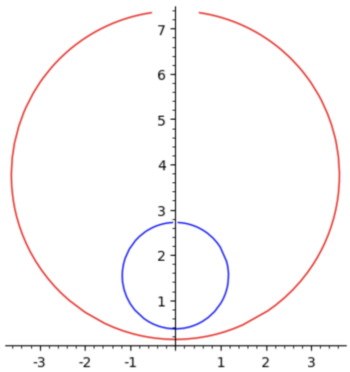
```
var('x0,r,a,b,t,s', domain='real')
x=x0+r*(1-e^(2*(a*t+b)))/(1+e^(2*(a*t+b)))
y=r*2*e^(a*t+b)/(1+e^(2*(a*t+b)))
```

```
parametric_plot([x(x0=0,r=1,b=0,a=10),y(x0=0,r=1,b=0,a=10)], (t,-10,10))
```




```
a1=parametric_plot([x(x0=s,r=sqrt(s^2+1),b=arcsinh(s),a=1,t=1),
                    y(x0=s,r=sqrt(s^2+1),b=arcsinh(s),a=1,t=1)], (s,-50,50))
a2=parametric_plot([x(x0=s,r=sqrt(s^2+1),b=arcsinh(s),a=1,t=-1),
                    y(x0=s,r=sqrt(s^2+1),b=arcsinh(s),a=1,t=-1)], (s,-50,50))
b1=parametric_plot([x(x0=s,r=sqrt(s^2+1),b=arcsinh(s),a=2,t=1),
                    y(x0=s,r=sqrt(s^2+1),b=arcsinh(s),a=2,t=1)], (s,-50,50),color='red')
b2=parametric_plot([x(x0=s,r=sqrt(s^2+1),b=arcsinh(s),a=2,t=-1),
                    y(x0=s,r=sqrt(s^2+1),b=arcsinh(s),a=2,t=-1)], (s,-50,50),color='red')
```

```
a1+a2+b1+b2
```



Per saber més.

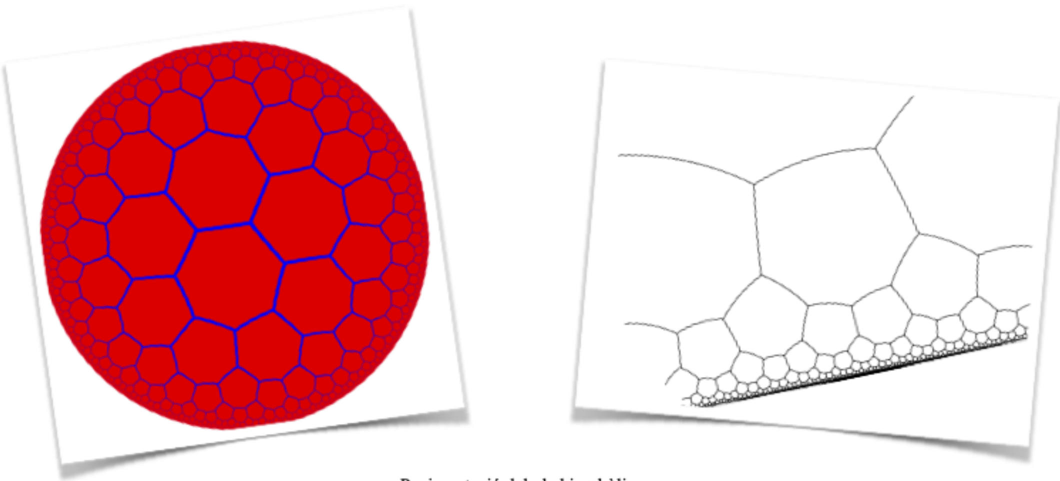
1. *Corbes especials.* La circumferència euclidiana de centre (x_0, a) i radi a és tangent a la recta $\{y = 0\}$ en el punt $(x_0, 0)$ i és ortogonal a totes les geodèsiques que surten aquest punt. Aquest tipus de corbes s'anomenen horocicles i s'obtenen com el límit d'una família de circumferències hiperbòliques que passen per un punt fixat i el centre de les quals tendeix a l'infinit.

La intersecció amb $\mathbb{H}$ d'una circumferència euclidiana, quan no és una geodèsica, ni una circumferència hiperbòlica, ni un horociclce (i.e. quan talla $y = 0$ en un angle diferent de 0 i $\pi/2$) s'anomena corba equidistant. Tots els punt d'aquesta corba estan a la mateix distància de la geodèsica que talla $y = 0$ en els mateixos punts.

2. *Pseudosfera.* La pseudosfera (sense un meridià) que hem tractat al seminari anterior és isomètrica a un troç de $\mathbb{H}$ donat per $P = \{(x, y) \in \mathbb{H} : |x| < a^2, y > b^2\}$ (per a, b adequats). Un teorema de Hilbert diu que el plà hiperbòlic (complet) no es pot trobar com a superfície de $\mathbb{R}^3$, en canvi un troç d'ell si que es pot trobar, la pseudosfera.

Referències:

- Smogorzhevski, A. *Acerca de la geometría de Lobachevski.* Lecciones populares de matemáticas, 1978. Ed. MIR, Moscú.
- Ratcliffe, John G. *Foundations of hyperbolic manifolds.* Graduate Texts in Mathematics, 1994. Springer Verlag, NY.



Pavimentació del pla hiperbòlic
amb heptàgons regulars