12 Formes diferencials

Exercici 12.1. Recordeu les següents propietats elementals del producte exterior i la diferencial exterior:

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{pq} \beta \wedge \alpha,$$
$$d(\alpha \wedge \beta) = (d\alpha) \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge (d\beta),$$
$$d(d\alpha) = 0,$$

on p és el grau de α i q és el grau de β.

a) Comproveu que si ω és una $2n+1$-forma diferencial, aleshores $\omega \wedge \omega = 0$. Doneu un exemple de 2-forma diferencial ω tal que $\omega \wedge \omega \neq 0$.

b) Proveu que si α i β són formes tancades aleshores $\alpha \wedge \beta$ també ho és (recordeu que ω és *tancada* si $d\omega = 0$).

c) Proveu que si α és tancada i β exacta llavors $\alpha \wedge \beta$ és exacta (recordeu que ω és *exacta* si existeix η tal que $d\eta = \omega$).

d) Si f és una funció tal que $df = 0$, què podem dir de f?

Exercici 12.2. Si $\omega = x\, dy - dz$, $\eta = 2z^2\, dx$, $\mu = dx - yz\, dy$,

a) Calculeu $x\,\omega + \eta$, $z\,\eta - z\,\mu$, $\omega \wedge \mu$, $(2\omega - y\,\mu) \wedge \eta$, $\omega \wedge \eta \wedge \mu$.

b) Donats els camps $X = z^2 \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}$ i $Y = y \frac{\partial}{\partial x} + e^x \frac{\partial}{\partial z}$ calculeu $\omega(X)$ i $\omega \wedge \mu(X, X - Y)$.

Exercici 12.3. Calculeu la imatge recíproca (o *pull-back*) de la forma diferencial ω per l'aplicació T en els següents casos:

a) $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $T(s) = (s, s^2, e^s)$, $\omega = dx + xdz$

b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $T(s,t) = (t, s, st)$, $\omega = zdx \wedge dz$

c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $T(s,t,u) = (st, tu, us, s+t+u)$, $\omega = x_4^2 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$

Exercici 12.4. Calculeu $d\omega$ en els casos següents:

a) $\omega = xdy + ydx$.

b) $\omega = (dy - xdz) \wedge (xydx + 3dy + zdz)$.

c) $\omega = f(x,y) dx \wedge dy$.

d) $\omega = f(x) dy$.

e) $\omega = \cos(xy^2) dx \wedge dz$.

f) $\omega = xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy$.

Exercici 12.5. A $\mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$ considerem ω tal que $\omega(X,Y) = \langle iX, Y \rangle$ per $X, Y \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^{2n})$.

a) Proveu que ω és una 2-forma diferencial.

b) Donar l'expressió de ω en coordenades cartesianes.

c) Provar que ω és tancada.

d) Calculeu $\omega \wedge \omega \wedge \overset{n}{\cdots} \wedge \omega$.

e) Provar que $|\omega_p(X,Y)| \leq a(X,Y)$ on $a(X,Y)$ és l'àrea del paral·lelogram generat pels vectors X, Y tangents a $\mathbb{R}^{2n}$ en el punt p. La igualtat es dona si i només si X, Y generen una recta complexa.

Exercici 12.6. Sigui α la 1-forma sobre $\mathbb{R}^3$ donada per $\alpha = ydx + xdy + zdz$ i $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'aplicació $f(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$. Trobeu una expressió per $f^*\alpha$ i per $d(f^*\alpha)$.

Exercici 12.7. Per una funció f es defineix el gradient de f com el camp

$$\mathrm{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right).$$

Per un camp vectorial $X = (X_1, X_2, X_3)$ de $\mathbb{R}^3$ es defineixen la funció divergencia i el camp rotacional com

$$\mathrm{div} X = \frac{\partial X_1}{\partial x} + \frac{\partial X_2}{\partial y} + \frac{\partial X_3}{\partial z}, \qquad \mathrm{rot} X = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ X_1 & X_2 & X_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial X_3}{\partial y} - \frac{\partial X_2}{\partial z}, \frac{\partial X_1}{\partial z} - \frac{\partial X_3}{\partial x}, \frac{\partial X_2}{\partial x} - \frac{\partial X_1}{\partial y}\right).$$

Es defineixen també les formes diferencials

$$\begin{aligned} \omega^1_X &= X^1\, dx + X^2\, dy + X^3\, dz \\ \omega^2_X &= X^1\, dy \wedge dz + X^2\, dz \wedge dx + X^3\, dx \wedge dy \\ \omega^3_f &= f\, dx \wedge dy \wedge dz \end{aligned}$$

a) Comproveu que es compleix

$$\begin{aligned} df &= \omega^1_{\mathrm{grad}\, f} \\ d(\omega^1_X) &= \omega^2_{\mathrm{rot}\, X} \\ d(\omega^2_X) &= \omega^3_{\mathrm{div}\, X} \end{aligned}$$

b) Deduïu de l'apartat anterior que es compleixen les igualtats: $\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\, f = 0 = \mathrm{div}\,\mathrm{rot}\, X$

Exercici 12.8. Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ i h és una funció, proveu que

$$f^*(h\ dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n) = (h \circ f)(\det f')\ dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n,$$

on f' denota la matriu jacobiana de f.

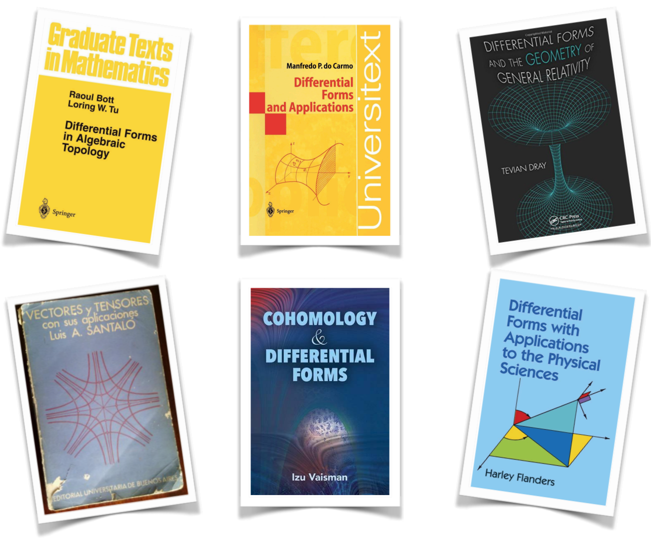

Figura 12.7: Uns quants llibres