SEMINARI 4. TEORIA GLOBAL DE CORBES PLANES.

Víctor Ballester Ribó
NIU: 1570866

Geometria diferencial
Grau en Matemàtiques
Universitat Autònoma de Barcelona
Març de 2022

Teorema (Umlaufsatz). El nombre de rotació d'una corba tancada simple és ± 1.

Exercici 6. *Demostrem l'Umlaufsatz per deformació. Sigui* $\mathbf{x} = (x, y) : [0, \ell] \to \mathbb{R}^2$ *tancada i simple parametritzada per l'arc. Prenent els eixos convenientment, podem suposar que* $y(t)$ *és mínim per* $t = 0$. *Suposem a més que* $\mathbf{x}(0) = (0, 0)$ *i* $\mathbf{x}'(0) = (1, 0)$.

a) Considereu el triangle $\Delta = \{(s,t) : 0 \leq s \leq t \leq \ell\}$ *i l'aplicació* $\Psi : \Delta \to \mathbb{R}$ *definida per:*

$$\Psi(s,t) = \begin{cases} \frac{\mathbf{x}(t)-\mathbf{x}(s)}{\|\mathbf{x}(t)-\mathbf{x}(s)\|} & si \quad s \neq t, (s,t) \neq (0,\ell) \\ \mathbf{x}'(s) & si \quad s = t \\ -\mathbf{x}'(0) & si \quad (s,t) = (0,\ell) \end{cases}$$

Interpreteu-la geomètricament i proveu que és contínua.

Resolució. Primer de tot vegem que la funció és contínua $\Psi(s,t)$. Com que $\mathbf{x}$ és almenys de classe $\mathcal{C}^1$ i l'aplicació norma és contínua, deduïm que les funcions components de $\Psi(s,t)$ són totes contínues. Cal veure ara la continuïtat en els punts de la forma $s = t$ i $(s,t) = (0,\ell)$. Sigui $s \in [0,\ell]$ i $t = s + \varepsilon$ amb $\varepsilon \neq 0$ tal que $(s, s+\varepsilon) \in \Delta$. Per tant, hem de tenir $\varepsilon > 0$. Aleshores tenim que:

$$\begin{aligned}
\lim_{t \to s} \Psi(s,t) &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\mathbf{x}(s+\varepsilon) - \mathbf{x}(s)}{\|\mathbf{x}(s+\varepsilon) - \mathbf{x}(s)\|} \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\mathbf{x}(s+\varepsilon) - \mathbf{x}(s)}{\varepsilon} \cdot \frac{\varepsilon}{\|\mathbf{x}(s+\varepsilon) - \mathbf{x}(s)\|} \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\mathbf{x}(s+\varepsilon) - \mathbf{x}(s)}{\varepsilon} \cdot \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\left\| \frac{\mathbf{x}(s+\varepsilon) - \mathbf{x}(s)}{\varepsilon} \right\|} \\
&= \mathbf{x}'(s) \cdot \frac{1}{\left\| \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\mathbf{x}(s+\varepsilon) - \mathbf{x}(s)}{\varepsilon} \right\|} \\
&= \frac{\mathbf{x}'(s)}{\|\mathbf{x}'(s)\|} \\
&= \mathbf{x}'(s)
\end{aligned}$$

on en l'última igualtat hem aplicat que la corba està parametritzada per l'arc. Per a l'altre cas, si fem $s = \epsilon$ i $t = \ell - \varepsilon$ amb $\varepsilon, \epsilon > 0$ perquè es compleixi $(s,t) \in \Delta$, tenim que:

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{t\to\ell\\ s\to 0}} \Psi(s,t) &= \lim_{\epsilon,\varepsilon\to 0} \frac{\mathbf{x}(\ell-\varepsilon)-\mathbf{x}(\epsilon)}{\|\mathbf{x}(\ell-\varepsilon)-\mathbf{x}(\epsilon)\|}\\
&= \lim_{\epsilon,\varepsilon\to 0} \left[(-\varepsilon)\frac{\mathbf{x}(\ell-\varepsilon)-\mathbf{x}(\ell)}{-\varepsilon} + \epsilon\frac{\mathbf{x}(0)-\mathbf{x}(\epsilon)}{\epsilon}\right]\cdot \frac{1}{\|\mathbf{x}(\ell-\varepsilon)-\mathbf{x}(\epsilon)\|}\\
&= \lim_{\epsilon,\varepsilon\to 0} [-\varepsilon\mathbf{x}'(\ell)-\epsilon\mathbf{x}'(0)]\cdot \frac{1}{\|\mathbf{x}(\ell-\varepsilon)-\mathbf{x}(\epsilon)\|}\\
&= -\mathbf{x}'(0)\lim_{\epsilon,\varepsilon\to 0} \frac{\varepsilon+\epsilon}{\|\mathbf{x}(\ell-\varepsilon)-\mathbf{x}(\epsilon)\|}\\
&= -\mathbf{x}'(0)\cdot \frac{1}{\left\|\lim\limits_{\epsilon,\varepsilon\to 0}\dfrac{\mathbf{x}(\ell-\varepsilon)-\mathbf{x}(\epsilon)}{\varepsilon+\epsilon}\right\|}\\
&= -\mathbf{x}'(0)\cdot \frac{1}{\left\|\lim\limits_{\epsilon,\varepsilon\to 0}\dfrac{1}{\varepsilon+\epsilon}\left[(-\varepsilon)\dfrac{\mathbf{x}(\ell-\varepsilon)-\mathbf{x}(\ell)}{-\varepsilon}+\epsilon\dfrac{\mathbf{x}(0)-\mathbf{x}(\epsilon)}{\epsilon}\right]\right\|}\\
&= -\mathbf{x}'(0)\cdot \frac{1}{\left\|\lim\limits_{\epsilon,\varepsilon\to 0}\dfrac{1}{\varepsilon+\epsilon}[-\varepsilon\mathbf{x}'(\ell)-\epsilon\mathbf{x}'(0)]\right\|}\\
&= -\frac{\mathbf{x}'(0)}{\|\mathbf{x}'(0)\|}\\
&= -\mathbf{x}'(0)
\end{aligned}$$

on hem aplicat que la corba és tancada per deduir que $\mathbf{x}(\ell)=\mathbf{x}(0)$ i $\mathbf{x}'(\ell)=\mathbf{x}'(0)$.

L'interpretació geomètrica d'aquesta funció és la següent: $\Psi(s,t)$ dona el vector director unitari que va des de la posició $\mathbf{x}(s)$ a $\mathbf{x}(t)$ per a valors $(s,t)\in \operatorname{Int}\Delta$ i l'exten de manera contínua a tot $(s,t)\in\Delta$.

b) *Donat $u\in[0,1]$ considereu una corba $c_u:[0,\ell]\to\Delta$ definida a trossos com segueix.*

- *Per $0\le t\le \ell/2$ fem que $c_u(t)$ recorri amb velocitat constant el segment des de $(0,0)$ fins a $\frac{\ell}{2}(1-u,1+u)$.*
- *Per $\ell/2\le t\le \ell$ fem que $c_u(t)$ recorri amb velocitat constant el segment des de $\frac{\ell}{2}(1-u,1+u)$ fins a (ℓ,ℓ).*

Proveu que existeix una aplicació contínua $\Theta:[0,1]\times[0,\ell]\to\mathbb{R}$ tal que $\Psi(c_u(t))=(\cos(\Theta(u,t)),\sin(\Theta(u,t)))$.

Resolució. Denotem per (e_1,e_2) la base canònica. Primer de tot observem que $\|\Psi(s,t)\|=1\ \forall(s,t)\in\Delta$. Definim $\Theta(u,t)$ com l'angle (no restringit a cap interval[1]) que formen els vectors unitaris $\Psi(c_u(t))$ i e_1. Per tant, es compleix que:

$$\cos(\Theta(u,t))=\langle\Psi(c_u(t)),e_1\rangle$$

Observem que $\Theta(u,t)$ és contínua perquè Ψ, $c_u(t)$ i $\langle\cdot,e_1\rangle$ són funcions contínues. Vegem ara que necessàriament hem de tenir $\Psi(c_u(t))=(\cos(\Theta(u,t)),\sin(\Theta(u,t)))$. Per això, expressem $\Psi(c_u(t))$ en termes de la base canònica de la forma següent:

$$\Psi(c_u(t))=\lambda(u,t)e_1+\mu(u,t)e_2$$

Sabem que $\lambda(u,t)=\langle\Psi(c_u(t)),e_1\rangle=\cos(\Theta(u,t))$ i $\mu(u,t)=\langle\Psi(c_u(t)),e_2\rangle$. Com que s'ha de complir que $\lambda(u,t)^2+\mu(u,t)^2=1$, necessàriament hem de tenir $\mu(u,t)=\pm\sin(\Theta(u,t))$. Per decidir quina de les dues opcions és, fixem-nos que per $u=1$ i $0<t<\frac{\ell}{2}$ tenim que $\Psi(c_u(t))=\frac{\mathbf{x}(t)}{\|\mathbf{x}(t)\|}$, que té component y major a zero per el supòsit inicial que $y(t)$ és mínim per $t=0$. Per tant, l'angle $\Theta(1,t)$, ha d'estar entre $2\pi k+0$ i $2\pi k+\pi$ per algun $k\in\mathbb{Z}$ (que compleix $\Theta(1,0)=2\pi k$), el que implica que $\mu(u,t)=\sin(\Theta(u,t))$. Per tant, $\Psi(c_u(t))=(\cos(\Theta(u,t)),\sin(\Theta(u,t)))$.

Observem que per a tot $u\in[0,1]$, sense pèrdua de generalitat podem suposar $\Theta(u,0)=0$. Si no fos així, aleshores $\Theta(u,0)=2\pi k$ amb $k\in\mathbb{Z}$, però llavors podríem definir una nova funció $\tilde\Theta(u,t)=\Theta(u,t)-2\pi k$ que compleix els mateixos requisits que Θ i tal que $\tilde\Theta(u,0)=0$. Per tant, d'ara en endavant suposarem $\Theta(u,0)=0$.

c) *Proveu que $\Theta(u,\ell)-\Theta(u,0)\in 2\pi\mathbb{Z}$ i deduïu que el valor és independent de u.*

[1] És a dir, $\Theta(u,t)\in\mathbb{R}$ i no només únicament a l'interval $[0,2\pi)$.

Resolució. Observem que $c_u(\ell) = (\ell, \ell)$ $\forall u \in [0,1]$ i $c_u(0) = (0,0)$ $\forall u \in [0,1]$. Per tant, d'una banda tenim que:

$$\Psi(c_u(\ell)) - \Psi(c_u(0)) = \mathbf{x}'(\ell) - \mathbf{x}'(0) = 0 \tag{1}$$

ja que la corba $\mathbf{x}$ és tancada. D'altra banda, per l'apartat anterior tenim que:

$$\begin{aligned} 0 = \Psi(c_u(\ell)) - \Psi(c_u(0)) &= (\cos(\Theta(u,\ell)), \sin(\Theta(u,\ell))) - (\cos(\Theta(u,0)), \sin(\Theta(u,0))) \\ &= (\cos(\Theta(u,\ell)) - \cos(\Theta(u,0)), \sin(\Theta(u,\ell)) - \sin(\Theta(u,0))) \end{aligned}$$

Ara bé, sabem que si tenim $x, y \in \mathbb{R}$ tals que

$$\begin{cases} \cos x = \cos y \\ \sin x = \sin y \end{cases}$$

aleshores és $x = y + 2\pi k$ per a algun $k \in \mathbb{Z}$. Per tant, de l'equació anterior es desprèn que $\Theta(u,\ell) = \Theta(u,0) + 2\pi k$ per algun $k \in \mathbb{Z}$, o equivalentment, $\Theta(u,\ell) - \Theta(u,0) \in 2\pi\mathbb{Z}$. Vegem ara que la diferència $\Theta(u,\ell) - \Theta(u,0)$ no depèn de u. Suposem que tenim $u_1, u_2 \in [0,1]$ tals que $\Theta(u_1,\ell) - \Theta(u_1,0) = 2\pi k_1$ i $\Theta(u_2,\ell) - \Theta(u_2,0) = 2\pi k_2$ amb $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ i $k_1 \neq k_2$. Per l'observació que hem fet en fórmula (1), deduïm que $\Psi(c_{u_1}(\ell)) = \Psi(c_{u_2}(\ell)) = \mathbf{x}'(\ell)$ i $\Psi(c_{u_1}(0)) = \Psi(c_{u_2}(0)) = \mathbf{x}'(0)$. Per tant, per ser en el temps $t = 0$, tenim $\Theta(u_1, 0) = \Theta(u_2, 0)$. D'altra banda, $\Theta(u_1,\ell)$ i $\Theta(u_2,\ell)$ difereixen d'un múltiple enter de 2π. Ara bé, $\Theta(\cdot, \ell)$ és una funció contínua (perquè Θ ho és) que pren valors a $2\pi\mathbb{Z}$. D'altra banda, recordem que una funció contínua prenen valors a $\mathbb{Z}$ ha de ser necessàriament constant. Per tant, una funció contínua prenen valors a $2\pi\mathbb{Z}$ ha de ser també necessàriament constant. D'aquí deduïm que $\Theta(u_1,\ell) = \Theta(u_2,\ell)$. Per tant, tenim que:

$$\begin{aligned} 0 = 0 + 0 &= [\Theta(u_1,\ell) - \Theta(u_2,\ell)] - [\Theta(u_1,0) - \Theta(u_2,0)] \\ &= [\Theta(u_1,\ell) - \Theta(u_1,0)] - [\Theta(u_2,\ell) - \Theta(u_2,0)] \\ &= 2\pi k_1 - 2\pi k_2 \neq 0 \end{aligned}$$

que és una contradicció. Per tant, la diferència $\Theta(u,\ell) - \Theta(u,0)$ no depèn de u.

d) Proveu que $\Theta(1,\ell) - \Theta(1,0) = 2\pi$.

Resolució. Ja sabem que $\Theta(1,0) = 0$ pel que hem comentat al final de l'apartat b). D'altra banda, $c_1(\ell) = (0,0)$ i llavors $\Psi(c_1(\ell)) = \mathbf{x}'(\ell) = \mathbf{x}'(0) = (1,0)$. Però en aquest cas $\Theta(1,\ell) = 2\pi$, degut a la continuïtat de Θ. En efecte, fixem-nos que $c_1(t)$, $0 < t < \ell/2$, té la primera component fixada a l'origen i l'altre és positiva. Per tant, el vector $\Psi(c_1(t))$, $0 < t < \ell/2$, anirà dirigit sempre des de l'origen fins un punt per sobre l'eix x. Per tant, $\Psi(c_1(t))$ formarà sempre un angle $\Theta(1,t) \in (0,\pi)$ amb l'eix x. Per continuïtat i tenint en compte que

$$\cos(\Theta(1,\ell/2)) = \langle \Psi(c_1(\ell/2)), e_1 \rangle = \langle \Psi(0,\ell), e_1 \rangle = \langle -\mathbf{x}'(0), e_1 \rangle = -1 \implies \Theta(1,\ell/2) \in \pi + 2\pi\mathbb{Z}$$

deduïm que $\Theta(1,\ell/2) = \pi$. A partir de llavors, és a dir, per $\ell/2 < t < \ell$, $c_1(t)$ té la primera component variant i la segona fixada. Per tant, el vector $\Psi(c_1(t))$ anirà dirigit sempre des d'un punt per sobre l'eix x fins l'origen, i en conseqüència $\Theta(1,t) \in (\pi, 2\pi)$. Per tant, per continuïtat i tenint en compte que

$$\cos(\Theta(1,\ell)) = \langle \Psi(c_1(\ell)), e_1 \rangle = \langle \Psi((\ell,\ell)), e_1 \rangle = \langle \mathbf{x}'(\ell), e_1 \rangle = 1 \implies \Theta(1,\ell) \in 2\pi\mathbb{Z}$$

tindrem $\Theta(1,\ell) = 2\pi$. Per tant, $\Theta(1,\ell) - \Theta(1,0) = 2\pi$.

e) Deduïu l'Umlaufsatz.

Resolució. Fixem-nos que si $\mathbf{T}(t) = (x'(t), y'(t))$ és el vector tangent a $\mathbf{x}$ en el punt $\mathbf{x}(t)$, tenim que $\mathbf{T}(t) = \Psi(c_0(t)) = (\cos(\Theta(0,t)), \sin(\Theta(0,t)))$. D'altra banda (pel vist a l'exercici 1 del seminari), $\mathbf{T}(t) = (\cos(\theta(t)), \sin(\theta(t)))$ on $\theta(t) = \int_0^t [x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)] \mathrm{d}s$. D'aquí, juntament amb el fet que $\theta(0) = \Theta(0,0) = 0$, deduïm que $\theta(t) = \Theta(0,t)$ $\forall t \in [0,\ell]$. Per tant, la curvatura total de $\mathbf{x}$ és:

$$\int_0^\ell k(t)\,\mathrm{d}t = \theta(\ell) - \theta(0) = \Theta(0,\ell) - \Theta(0,0)$$

Ara bé, combinant els dos últims apartats, deduïm que $\Theta(0,\ell) - \Theta(0,0) = 2\pi$ i, per tant, el nombre de rotació és 1.

A l'enunciat hem suposat que el sentit "global" de gir de la corba era l'antihorari. Si suposem ara que $\mathbf{x}'(0) = (-1,0)$, aleshores fent uns raonaments completament anàlegs als ja fets en apartats anteriors obtindrem que $\Theta(1,\ell) - \Theta(1,0) = -2\pi$, $\Theta(0,\ell) - \Theta(0,0) = -2\pi$ i, per tant, el nombre de rotació serà -1.