6 Superfícies de revolució

En el seminari d'aquesta setmana farem servir `Sage` *(*`http://sagemath.org`*) per treballar amb superfícies. Podeu trobar a*
`http://doc.sagemath.org/html/en/reference/riemannian_geometry/index.html`
instruccions i exemples per fer càlculs amb superfícies parametritzades.

Al final del document trobareu un exemple complet, si voleu podeu començar per aquí o bé anar quan calgui.

Exercici 6.1. Sigui $(a(u), b(u))$ una corba plana parametritzada per l'arc. Considerem la superfície de revolució S parametritzada per $\varphi(u, v) = (a(u) \cos v, a(u) \sin v, b(u))$. Calculeu els coeficients de la primera i segona forma fonamental de S en aquesta parametrització i comproveu que la curvatura de Gauss de S ve donada per

$$K(u, v) \quad = \quad -\frac{a''(u)}{a(u)}. \tag{6.1}$$

Solució: *Farem servir* `Sage`.

```
> var('u,v,t,c',domain='real'); function('a,b');
> srevolucio = ParametrizedSurface3D((a(u)*cos(v),a(u)*sin(v),b(u)), (u, v),'Superficie
de Revolucio');
> srevolucio.first_fundamental_form_coefficients();
> srevolucio.first_fundamental_form_coefficient((1,1));
> srevolucio.second_fundamental_form_coefficients();
> srevolucio.second_fundamental_form_coefficient((1,1));
> K = srevolucio.gauss_curvature();
> K.simplify_full();
```

Exercici 6.2. Particularitzeu-ho al cas d'un tor de revolució i d'una esfera. Feu els dibuixos amb `Sage`.

Solució: *Podem fer, pel tor $a(u) = R + r \cos(u/r)$ i $b(u) = r \sin(u/r)$ llavors*

```
> var('R,r');
> tor = ParametrizedSurface3D(((R+r*cos(u/r))*cos(v),(R+r*cos(u/r))*sin(v),r*sin(u/r)),
(u, v),'Tor');
> Ktor = tor.gauss_curvature();
```

Simplifiquem i obtenim que la curvatura de Gauss és $\frac{1}{r} \cos(\frac{u}{r})/(R + r \cos(u/r))$. És positiva per la part exterior, negativa per la interior i zero quan $u = \pm\pi/2r$, els paral·lels superior e inferior. Per l'esfera:

```
esfera = ParametrizedSurface3D((r*cos(u/r)*cos(v),r*cos(u/r)*sin(v),r*sin(u/r)), (u,
v),'Esfera');
KE = esfera.gauss_curvature();
```

Simplificant obtenim $1/r^2$.
També podem trobar les curvatures principals:

```
PTor=tor.principal_directions();
k1Tor=PTor[0][0]; k2Tor=PTor[1][0];
```

Fem dibuixos.

```
> tor12 = ParametrizedSurface3D(((2+cos(u))*cos(v),(2+cos(u))*sin(v),sin(u)), (u, v),'Tor');
> tor12.plot((0,2*pi), (0,2*pi),aspect_ratio=1, mesh=True, color='orange');
```

Exercici 6.3. Ens proposem obtenir i dibuixar superfícies de revolució que tinguin curvatura de Gauss constant $K \equiv 1$. Per la igualtat (6.1), això es redueix a resoldre l'equació diferencial $a''(u) = -a(u)$. Comproveu que, llevat d'un canvi $u \to u + C$, les solucions són totes de la forma

$$a(u) = c \cos(u), \qquad b(u) = \int_0^u \sqrt{1 - c^2 \sin^2(t)} dt$$

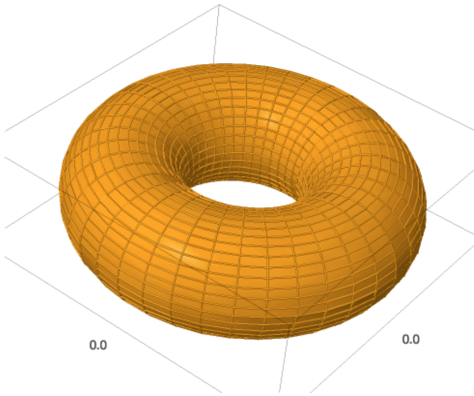

Figura 6.6: Tor

on la segona expressió prové de la suposició $a'(u)^2+b'(u)^2=1$ (i.e. u és paràmetre arc). Proveu que la correspondència latitud $=u$, longitud $=cv$ defineix una isometria entre un obert de la surpefície anterior i un obert de l'esfera unitat.

Solució: *Cal resoldre $a''+a=0$, és clar que les solucions són de la forma $A\cos(u)+B\sin(u)=\sqrt{A^2+B^2}\cos(u+\varphi)$. Podem suposar que $a(u)=c\cos(u)$ amb $c>0$. Llavors $b'(u)^2=1-c^2\sin^2(u)$. Triem la constant d'intergració de manera que $b(0)=0$, llavors*

$$b(u)=\int_0^u\sqrt{1-c^2\sin^2(t)}dt.$$

Això és una integral el·líptica, existeix una funció en `Sage` *que la implementa. En aquest cas $b(u)=$* `elliptic_e`*(u,c^2). Tenim tres casos interesesants: $c=1,c<1,c>1$. En el primer cass tenim l'esfera de radi 1, en el segon cas un 'fus' i en el tercer una 'gorra de cop' (xixonera). En els dos primers casos l'argument u pot anar de $-\pi/2$ a $\pi/2$ en el tercer, per evitar arrels de nombres negatius, tenim $|u|\leq\arcsin(1/c)$. Fem dibuixos.*

```
> xixo = ParametrizedSurface3D((2*cos(u)*cos(v),2*cos(u)*sin(v),elliptic_e(u,4)),
((u,-arcsin(1/2),arcsin(1/2)), (v,0,2*pi)),'Xixonera');
> fus = ParametrizedSurface3D((1/2*cos(u)*cos(v),1/2*cos(u)*sin(v),elliptic_e(u,1/4)),
((u,-pi/2,pi/2), (v,0,2*pi)),'Fus');
> X=xixo.plot(mesh=True, color='red',aspect_ratio=1)
> F=fus.plot(mesh=True, color='blue',aspect_ratio=1);
> X+F;
```

Estudiem les isometries entre un troç d'esfera i un troç de la superfície donada per les $a(u),b(u)$ trobades. Quan $c=1$ és la mateixa superfície.
Fem el cas $c>1$. Sigui l'obert $U=(-\arcsin(1/c),\arcsin(1/c))\times(0,2\pi/c)$ les parametritzacions $\varphi(u,v)=(a(u)\cos v,a(u)\sin v,b(u))$ i $\tilde{\varphi}(u,v)=(\cos(u)\cos(cv),\cos(u)\sin(cv),\sin(u))$ cobreixen respectivament un obert de l'esfera i un obert de la 'xixonera'. Per aquestes parametritzacions les primeres formes fonamentals adopten la forma

$$g=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & c^2\cos^2(u)\end{pmatrix}.$$

Aquests oberts són llavors isomètrics. Veiem a quina part de l'esfera i a quina part de la 'xixonera' corresponen. Són bandes com es veuen al dibuix (en verd l'esfera) Si $c<1$ considerem l'obert $U=(-\pi/2,\pi/2)\times(0,2\pi)$. Mirem el gràfic.

Exercici 6.4. La integral $b(u)=\displaystyle\int_0^u\sqrt{1-c^2\sin^2(t)}dt$ és una integral el·líptica, existeix una funció en `Sage` que la implementa. En aquest cas $b(u)=$ `elliptic_e`(u,c^2). Tenim tres casos interesessants: $c=1,c<1,c>1$.

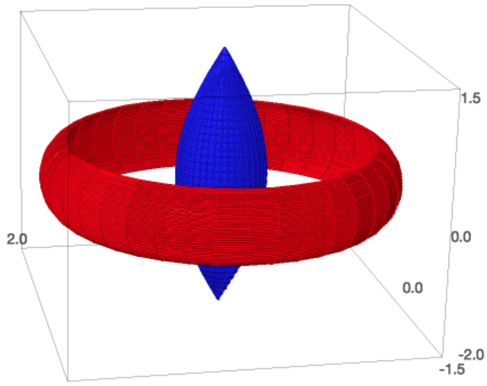

Figura 6.7: Curvatura +1

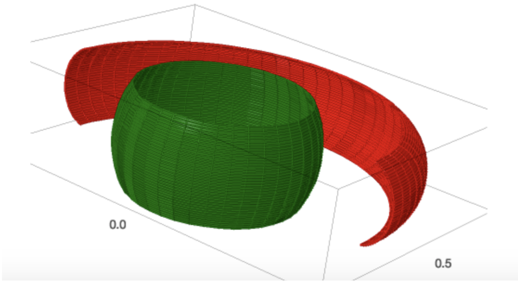

Figura 6.8: Isometria $c > 1$

a) Determineu el domini de la variable u segons el valor de c.

b) Dibuixeu les superfícies pels diferents casos (en el primer cas tenim l'esfera de radi 1, en el segon cas un 'fus' i en el tercer una 'gorra de cop' (xixonera).)

Exercici 6.5. Utilitzeu l'estratègia anterior per a obtenir i dibuixar superfícies de revolució amb curvatura de Gauss constant $K \equiv -1$. El cas $a(u) = e^{-u}$ és conegut amb el nom de *pseudoesfera*.

Solució: *Ara cal resoldre l'equació $a'' - a = 0$. Les solucions són de la forma $a(u) = Ae^{-u} + Be^{u}$ triem $a(u) = e^{-u}$. Ho posem al* `Sage` *amb*

$$b(t) = \int_0^u \sqrt{1 - e^{-2t}}dt = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+\sqrt{1-e^{-2u}}}{1-\sqrt{1-e^{-2u}}}\right) - \sqrt{1-e^{-2u}}$$

```
> Bb(u)=(1/2)*log((1+sqrt(1-e^(-2*u)))/(1-sqrt(1-e^(-2*u))))-(sqrt(1-e^(-2*u)));
> tractriu=ParametrizedSurface3D((e^(-u)*cos(v),e^(-u)*sin(v),Bb(u)), (u, v),'Tractriu');
> KTr=tractriu.gauss_curvature(); KTr.simplify_full();
> tractriu.plot((0,2),(0,2*pi),mesh=True, color='pink',aspect_ratio=1);
```

Exercici 6.6. Determineu les superfícies de revolució desenvolupables, és a dir, reglades amb curvatura de Gauss $K \equiv 0$.

Solució: *És clar, ja que $a'' = 0$, que les corbes $(a(u), b(u))$ són rectes i les superfícies que obtenim són troços de con.*

Exercici 6.7. Utilitzeu l'exercici 6.1 per donar una expressió de la curvatura mitjana $H = \frac{1}{2}\text{tr}(-dN)$ d'una superfície de revolució. Ho podeu fer també amb `Sage`. Comproveu que la catenoi-

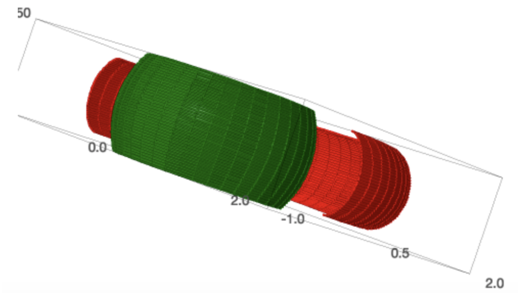

Figura 6.9: Isometria $c > 1$

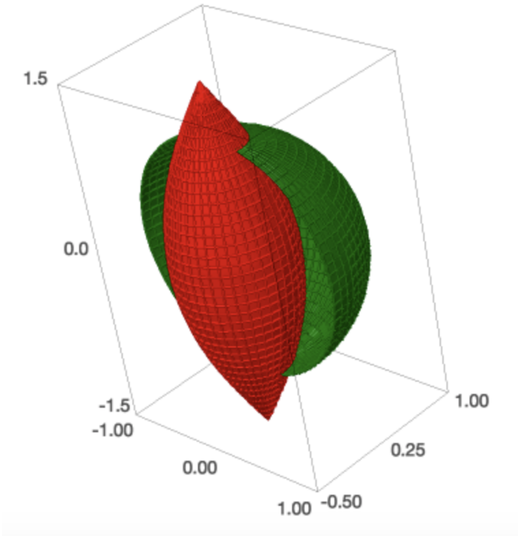

Figura 6.10: Isometria $c < 1$

de $\sqrt{x^2 + y^2} = \cosh z$, superfície de revolució obtinguda al girar la catenària, té curvatura mitjana nula (és una superfície mínima).

Solució: *Fem-ho amb* `Sage`. *Ara ho provem amb una parametrització en la qual la corba no sigui de velocitat constant. Parametritzem amb* $\varphi(u, v) = (\cosh(u)\cos(v), \cosh(u)\sin(v), u)$. *Observem que la catenoide ja està incorparada a* `Sage`*:*

```
> catenoide=surface.Catenoid(); catenoide;
> catenoide.mean_curvature();
> catenoide.plot();
```

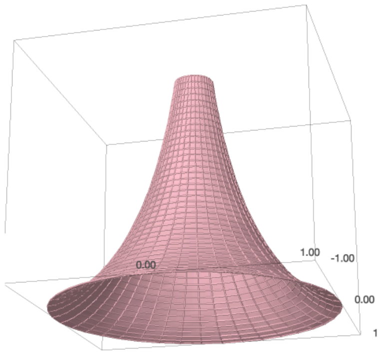

Figura 6.11: Pseudoesfera

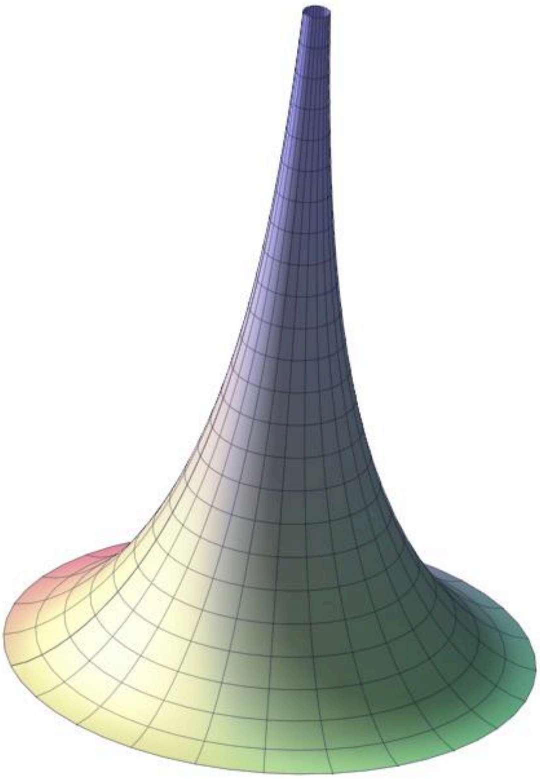

Figura 6.12: Pseudoesfera

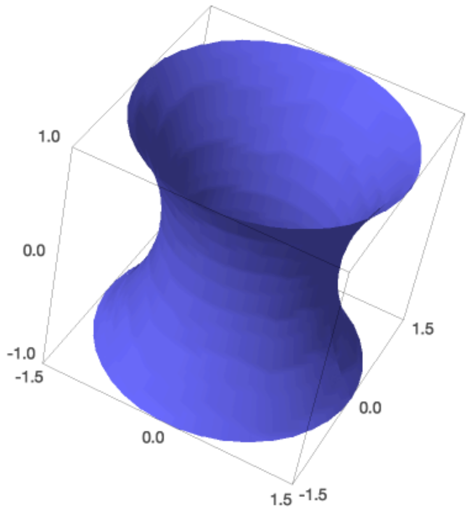

Figura 6.13: Catenoide