Arbre generador minimal. Quants arbres generadors admet un graf?

Víctor Ballester Oriol Bosquet Carlo Sala Eric Recio

Universitat Autònoma de Barcelona

Gener 2021

Índex

Definicions prèvies

Comencem aquest treball definint els conceptes necessaris en relació amb els grafs i, en particular, amb els arbres.

Definicions prèvies

Comencem aquest treball definint els conceptes necessaris en relació amb els grafs i, en particular, amb els arbres.

Definició (Graf)

Un graf G consisteix en una parella $(V(G), E(G))$ on:

- $V(G)$ és un conjunt (no buit) d'elements, anomenats vèrtexs del graf.
- $E(G)$ és un multiconjunt de parelles no ordenades de vèrtexs, que anomenem arestes del graf.

Definicions prèvies

Comencem aquest treball definint els conceptes necessaris en relació amb els grafs i, en particular, amb els arbres.

Definició (Graf)

Un graf G consisteix en una parella $(V(G), E(G))$ on:

- $V(G)$ és un conjunt (no buit) d'elements, anomenats vèrtexs del graf.
- $E(G)$ és un multiconjunt de parelles no ordenades de vèrtexs, que anomenem arestes del graf.

Definició (Graf simple)

Sigui G un graf. Diem que G és simple si no té cap aresta múltiple (més d'una aresta entre els mateixos vèrtexs) ni bucles (arestes que van d'un vèrtex en ell mateix).

Definicions prèvies

Definició (Multigraf)

Diem que G és un multigraf si té, com a mínim, una aresta múltiple o bé un bucle.

Definicions prèvies

Definició (Multigraf)

Diem que G és un multigraf si té, com a mínim, una aresta múltiple o bé un bucle.

Per conveni, quan parlem de grafs ens referirem a grafs simples. Quan vulguem considerar grafs que no siguin simples, ens hi referirem com a multigrafs.

Definicions prèvies

Definició (Multigraf)

Diem que G és un multigraf si té, com a mínim, una aresta múltiple o bé un bucle.

Per conveni, quan parlem de grafs ens referirem a grafs simples. Quan vulguem considerar grafs que no siguin simples, ens hi referirem com a multigrafs.

Definició (Arbre)

Sigui G un graf. Diem que G és un arbre si G és connex i no té cicles.

Definicions prèvies

Definició (Multigraf)

Diem que G és un multigraf si té, com a mínim, una aresta múltiple o bé un bucle.

Per conveni, quan parlem de grafs ens referirem a grafs simples. Quan vulguem considerar grafs que no siguin simples, ens hi referirem com a multigrafs.

Definició (Arbre)

Sigui G un graf. Diem que G és un arbre si G és connex i no té cicles.

Definició (Fulla)

Sigui T un arbre. Definim una fulla de T com un vèrtex de grau 1.

Definicions prèvies

Definició (Subgraf generador)

Sigui G un graf connex. Un subgraf generador G' de G és un subgraf de G tal que $V(G') = V(G)$. En particular, un arbre generador T de G és un subgraf generador de G tal que T és un arbre.

Definicions prèvies

Definició (Subgraf generador)

Sigui G un graf connex. Un subgraf generador G' de G és un subgraf de G tal que $V(G') = V(G)$. En particular, un arbre generador T de G és un subgraf generador de G tal que T és un arbre.

Definició (Matriu d'incidència)

Sigui G un graf i sigui $n = |V(G)|$ i $m = |E(G)|$. La matriu d'incidència de G és una matriu $M = (m_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ tal que:

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si l'aresta } j \text{ és incident amb el vèrtex } i, \\ 0 & \text{altrament.} \end{cases}$$

Definicions prèvies

Definició (Subgraf generador)

Sigui G un graf connex. Un subgraf generador G' de G és un subgraf de G tal que $V(G') = V(G)$. En particular, un arbre generador T de G és un subgraf generador de G tal que T és un arbre.

Definició (Matriu d'incidència)

Sigui G un graf i sigui $n = |V(G)|$ i $m = |E(G)|$. La matriu d'incidència de G és una matriu $M = (m_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ tal que:

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si l'aresta } j \text{ és incident amb el vèrtex } i, \\ 0 & \text{altrament.} \end{cases}$$

Observem que la matriu d'incidència d'un graf tindrà exactament dos 1 en cada columna. Això ens condueix a definir la següent matriu.

Definicions prèvies

Definició (Matriu d'incidència orientada)

Sigui G un graf i M la seva matriu d'incidència. Definim la matriu d'incidència orientada M' de G com la matriu M on a cada columna canviem exactament un 1 per un -1.

Definicions prèvies

Definició (Matriu d'incidència orientada)

Sigui G un graf i M la seva matriu d'incidència. Definim la matriu d'incidència orientada M' de G com la matriu M on a cada columna canviem exactament un 1 per un -1.

Per no fer un abús de notació, a partir d'ara denotarem per M la matriu d'incidència orientada.

Definicions prèvies

Definició (Matriu d'incidència orientada)

Sigui G un graf i M la seva matriu d'incidència. Definim la matriu d'incidència orientada M' de G com la matriu M on a cada columna canviem exactament un 1 per un -1.

Per no fer un abús de notació, a partir d'ara denotarem per M la matriu d'incidència orientada. Fixem-nos que en aquesta matriu una de les files és supèrflua, ja que coneixent totes les altres i tenint en compte que en cada columna hi ha exactament un 1 i un -1, podem deduir què contindrà aquesta fila en qüestió. Això dona lloc a definir la següent matriu.

Definicions prèvies

Definició (Matriu d'incidència orientada)

Sigui G un graf i M la seva matriu d'incidència. Definim la matriu d'incidència orientada M' de G com la matriu M on a cada columna canviem exactament un 1 per un -1.

Per no fer un abús de notació, a partir d'ara denotarem per M la matriu d'incidència orientada. Fixem-nos que en aquesta matriu una de les files és supèrflua, ja que coneixent totes les altres i tenint en compte que en cada columna hi ha exactament un 1 i un -1, podem deduir què contindrà aquesta fila en qüestió. Això dona lloc a definir la següent matriu.

Definició (Matriu d'incidència orientada reduïda)

Sigui G un graf i M la seva matriu d'incidència orientada. Definim la matriu d'incidència orientada reduïda M_0 com la matriu M en la qual s'ha eliminat una fila. En aquest treball, per conveni, eliminarem sempre la darrera fila.

Definicions prèvies

Per simplificar l'escriptura, d'ara endavant ens referirem a la matriu d'incidència orientada reduïda simplement com a matriu d'incidència reduïda, entenent que és la matriu amb 1's i -1's.

Definicions prèvies

Per simplificar l'escriptura, d'ara endavant ens referirem a la matriu d'incidència orientada reduïda simplement com a matriu d'incidència reduïda, entenent que és la matriu amb 1's i -1's.

Definició

Sigui G un graf, M_0 la seva matriu d'incidència reduïda i T un arbre generador de G. Definim la matriu d'incidència reduïda de T com la matriu quadrada $M_0[T]$ obtinguda seleccionant les $n-1$ columnes de M_0 corresponents a les arestes de T en G.

Definició (Matriu de Laplace)

Sigui G un graf i sigui $n = |V(G)|$. Definim la matriu de Laplace $L = (\ell_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ com:

$$\ell_{ij} = \begin{cases} \deg v_i & \text{si } i = j, \\ -1 & \text{si els vèrtexs } v_i \text{ i } v_j \text{ són adjacents,} \\ 0 & \text{altrament.} \end{cases}$$

Definició (Matriu de Laplace)

Sigui G un graf i sigui $n = |V(G)|$. Definim la matriu de Laplace $L = (\ell_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ com:

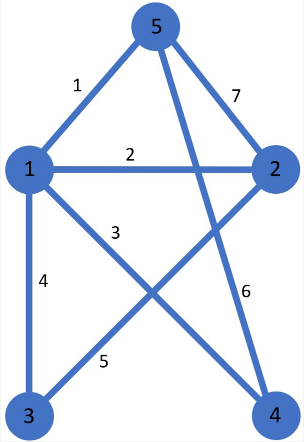
$$\ell_{ij} = \begin{cases} \deg v_i & \text{si } i = j, \\ -1 & \text{si els vèrtexs } v_i \text{ i } v_j \text{ són adjacents,} \\ 0 & \text{altrament.} \end{cases}$$

Per clarificar aquestes definicions, posem un exemple on calculem totes les matrius que hem definit.

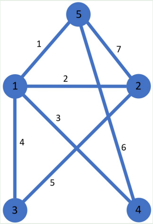
Definicions prèvies

Exemple

Sigui G el graf de la figura.

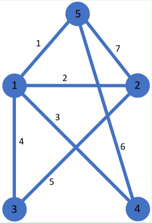


Definicions prèvies



Aquest graf té les següents matrius associades:

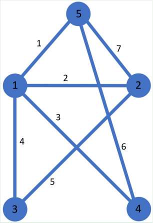
Definicions prèvies



Aquest graf té les següents matrius associades:
Matriu d'incidència:

$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

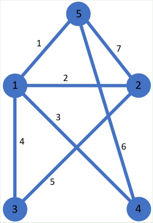
Definicions prèvies



Aquest graf té les següents matrius associades:
Matriu d'incidència orientada:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

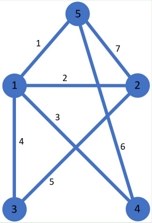
Definicions prèvies



Aquest graf té les següents matrius associades:
Matriu d'incidència orientada reduïda:

$$M_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Definicions prèvies

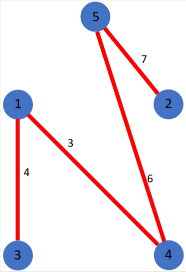


Aquest graf té les següents matrius associades:
Matriu de Laplace:

$$L = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

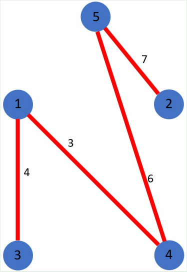
Definicions prèvies

Si considerem l'arbre generador T de la figura següent,



Definicions prèvies

Si considerem l'arbre generador T de la figura següent,



la matriu d'incidència reduïda associada a l'arbre T és:

$$M_0[T] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Índex

Fórmula de Cayley

El 1889 Arthur Cayley va establir una fórmula per determinar el nombre d'arbres generadors diferents del graf complet K_n.

Fórmula de Cayley

El 1889 Arthur Cayley va establir una fórmula per determinar el nombre d'arbres generadors diferents del graf complet K_n. Hi ha moltes demostracions d'aquesta fórmula. En aquest treball en donarem una, presentada l'any 1918 pel matemàtic alemany Heinz Prüfer, establint una correspondència bijectiva entre arbres generadors amb n vèrtexs i els anomenats codis de Prüfer (successions de longitud $n-2$).

Fórmula de Cayley

El 1889 Arthur Cayley va establir una fórmula per determinar el nombre d'arbres generadors diferents del graf complet K_n. Hi ha moltes demostracions d'aquesta fórmula. En aquest treball en donarem una, presentada l'any 1918 pel matemàtic alemany Heinz Prüfer, establint una correspondència bijectiva entre arbres generadors amb n vèrtexs i els anomenats codis de Prüfer (successions de longitud $n-2$).
Per tant, comencem definint la seqüència de Prüfer d'un arbre:

Fórmula de Cayley

Seqüència de Prüfer

Sigui T un arbre d'ordre $n \geq 3$ amb conjunt de vèrtexs $V(T) = [n]$. Definim la seqüència de Prüfer com la successió

$$\mathcal{P}(T) = (y_1, y_2, \ldots, y_{n-2})$$

de $n-2$ nombres del conjunt $V(T) = [n]$.

Fórmula de Cayley

Seqüència de Prüfer

Sigui T un arbre d'ordre $n \geq 3$ amb conjunt de vèrtexs $V(T) = [n]$. Definim la seqüència de Prüfer com la successió

$$\mathcal{P}(T) = (y_1, y_2, \ldots, y_{n-2})$$

de $n-2$ nombres del conjunt $V(T) = [n]$. Amb el següent algorisme, podem codificar qualsevol arbre en una seqüència de Prüfer:

1. Prenem la fulla de l'arbre T amb etiqueta menor. Eliminem aquesta fulla de T i li assignem el valor de l'etiqueta del seu únic vèrtex adjacent.

Fórmula de Cayley

2. Continuem el procés amb l'arbre creat a partir de T en eliminar la fulla anterior i repetim l'algorisme fins que ens quedi un arbre d'un vèrtex.

Fórmula de Cayley

2. Continuem el procés amb l'arbre creat a partir de T en eliminar la fulla anterior i repetim l'algorisme fins que ens quedi un arbre d'un vèrtex. Haurem obtingut una seqüència de $n-1$ nombres, que, descartant l'últim d'ells es transforma amb una seqüència de $n-2$ termes.

Fórmula de Cayley

2. Continuem el procés amb l'arbre creat a partir de T en eliminar la fulla anterior i repetim l'algorisme fins que ens quedi un arbre d'un vèrtex. Haurem obtingut una seqüència de $n-1$ nombres, que, descartant l'últim d'ells es transforma amb una seqüència de $n-2$ termes.

Notem que aquesta seqüència d'un arbre és única.

Fórmula de Cayley

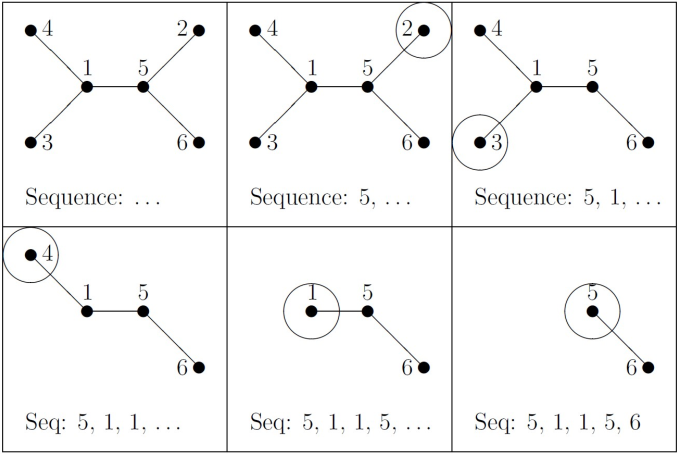
2. Continuem el procés amb l'arbre creat a partir de T en eliminar la fulla anterior i repetim l'algorisme fins que ens quedi un arbre d'un vèrtex. Haurem obtingut una seqüència de $n-1$ nombres, que, descartant l'últim d'ells es transforma amb una seqüència de $n-2$ termes.

Notem que aquesta seqüència d'un arbre és única. En efecte, si T és l'arbre considerat en qüestió i $\mathcal{P}(T)$ la seva seqüència de Prüfer, observem primer que les etiquetes de les fulles de T no estan representades en $\mathcal{P}(T)$, ja que una fulla no pot ser adjacent a una altra fulla (considerant arbres d'ordre $n \geq 3$). Per tant, d'aquí es dedueix que cada vèrtex té grau igual a $1 + a$, on a és el nombre de vegades que apareix el vèrtex a $\mathcal{P}(T)$.

2. Continuem el procés amb l'arbre creat a partir de T en eliminar la fulla anterior i repetim l'algorisme fins que ens quedi un arbre d'un vèrtex. Haurem obtingut una seqüència de $n-1$ nombres, que, descartant l'últim d'ells es transforma amb una seqüència de $n-2$ termes.

Notem que aquesta seqüència d'un arbre és única. En efecte, si T és l'arbre considerat en qüestió i $\mathcal{P}(T)$ la seva seqüència de Prüfer, observem primer que les etiquetes de les fulles de T no estan representades en $\mathcal{P}(T)$, ja que una fulla no pot ser adjacent a una altra fulla (considerant arbres d'ordre $n \geq 3$). Per tant, d'aquí es dedueix que cada vèrtex té grau igual a $1+a$, on a és el nombre de vegades que apareix el vèrtex a $\mathcal{P}(T)$. A la següent figura podem veure un exemple de com trobar la seqüència de Prüfer d'un arbre.

Fórmula de Cayley



Fórmula de Cayley

El següent teorema ens diu que si tenim una seqüència de $n-2$ termes, automàticament també tenim un arbre T amb seqüència de Prüfer igual a la que estàvem considerant.

Fórmula de Cayley

El següent teorema ens diu que si tenim una seqüència de $n-2$ termes, automàticament també tenim un arbre T amb seqüència de Prüfer igual a la que estàvem considerant.

Teorema

Sigui T_n el conjunt d'arbres generadors d'ordre n i $\mathcal{P}_n$ el conjunt de seqüències de Prüfer de $n-2$ termes. Considerem la següent aplicació de conjunts:

$$\begin{aligned} \varphi : T_n &\to \mathcal{P}_n \\ T &\mapsto \mathcal{P}(T) \end{aligned}$$

Fórmula de Cayley

El següent teorema ens diu que si tenim una seqüència de $n-2$ termes, automàticament també tenim un arbre T amb seqüència de Prüfer igual a la que estàvem considerant.

Teorema

Sigui T_n el conjunt d'arbres generadors d'ordre n i $\mathcal{P}_n$ el conjunt de seqüències de Prüfer de $n-2$ termes. Considerem la següent aplicació de conjunts:

$$\begin{aligned} \varphi : T_n &\to \mathcal{P}_n \\ T &\mapsto \mathcal{P}(T) \end{aligned}$$

Aleshores, φ és bijectiva.

Fórmula de Cayley

Ara sí, doncs, podem enunciar el teorema de Cayley:

Fórmula de Cayley

Ara sí, doncs, podem enunciar el teorema de Cayley:

Teorema de Cayley

Sigui $G = K_n$ un graf complet d'ordre $n \geq 2$. Aleshores hi ha n^{n-2} arbres generadors diferents.

Ara sí, doncs, podem enunciar el teorema de Cayley:

Teorema de Cayley

Sigui $G = K_n$ un graf complet d'ordre $n \geq 2$. Aleshores hi ha n^{n-2} arbres generadors diferents.

Demostració

El cas $n = 2$ és immediat.

Fórmula de Cayley

Ara sí, doncs, podem enunciar el teorema de Cayley:

Teorema de Cayley

Sigui $G = K_n$ un graf complet d'ordre $n \geq 2$. Aleshores hi ha n^{n-2} arbres generadors diferents.

Demostració

El cas $n = 2$ és immediat. Vegem el cas $n \geq 3$.
Pel teorema anterior sabem que el nombre de seqüència de Prüfer està en bijecció amb el nombre d'arbres generadors d'ordre n, per tant tindrem que $\tau(G) := |T_n| = |\mathcal{P}_n|$.

Fórmula de Cayley

Ara sí, doncs, podem enunciar el teorema de Cayley:

Teorema de Cayley

Sigui $G = K_n$ un graf complet d'ordre $n \geq 2$. Aleshores hi ha n^{n-2} arbres generadors diferents.

Demostració

El cas $n = 2$ és immediat. Vegem el cas $n \geq 3$.
Pel teorema anterior sabem que el nombre de seqüència de Prüfer està en bijecció amb el nombre d'arbres generadors d'ordre n, per tant tindrem que $\tau(G) := |T_n| = |\mathcal{P}_n|$. Ara bé, el conjunt $\mathcal{P}_n$ està format per paraules de longitud $n-2$ de l'alfabet $[n]$. Per tant, sabem que hi haurà n^{n-2} paraules diferents i, per tant, tindrem que $\tau(G) = n^{n-2}$, tal com volíem demostrar. $\square$

Ara sí, doncs, podem enunciar el teorema de Cayley:

Teorema de Cayley

Sigui $G = K_n$ un graf complet d'ordre $n \geq 2$. Aleshores hi ha n^{n-2} arbres generadors diferents.

Demostració

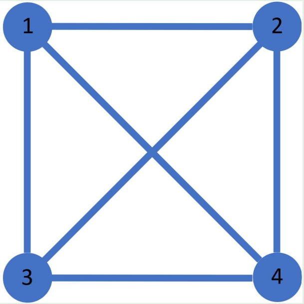
El cas $n = 2$ és immediat. Vegem el cas $n \geq 3$.
Pel teorema anterior sabem que el nombre de seqüència de Prüfer està en bijecció amb el nombre d'arbres generadors d'ordre n, per tant tindrem que $\tau(G) := |T_n| = |\mathcal{P}_n|$. Ara bé, el conjunt $\mathcal{P}_n$ està format per paraules de longitud $n-2$ de l'alfabet $[n]$. Per tant, sabem que hi haurà n^{n-2} paraules diferents i, per tant, tindrem que $\tau(G) = n^{n-2}$, tal com volíem demostrar. $\square$

Vegem ara un exemple d'aplicació de la fórmula de Cayley.

Fórmula de Cayley

Exemple

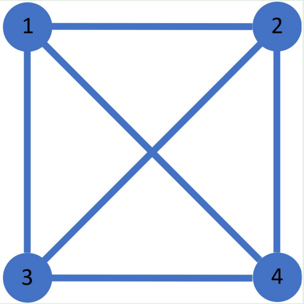
Considerem el graf complet K_4, és a dir, el graf de la següent figura.



Fórmula de Cayley

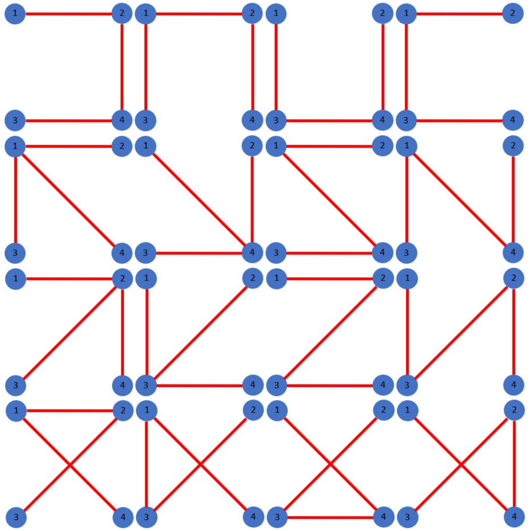
Exemple

Considerem el graf complet K_4, és a dir, el graf de la següent figura.



Per la fórmula de Cayley, el nombre d'arbres generadors és $4^{4-2} = 16$. A la figura següent els podem veure tots.

Fórmula de Cayley



Índex

Nombre d'arbres generadors

L'objectiu ara és generalitzar la fórmula de Cayley i calcular el nombre d'arbres generadors que tenim en un graf G connex arbitrari. Per això, necessitem uns resultats previs.

Nombre d'arbres generadors

L'objectiu ara és generalitzar la fórmula de Cayley i calcular el nombre d'arbres generadors que tenim en un graf G connex arbitrari. Per això, necessitem uns resultats previs.

Lema

Sigui G un graf connex d'ordre n. Si M és la matriu d'incidència orientada de G i L és la matriu de Laplace de G, tenim que

$$L = MM^t.$$

Nombre d'arbres generadors

L'objectiu ara és generalitzar la fórmula de Cayley i calcular el nombre d'arbres generadors que tenim en un graf G connex arbitrari. Per això, necessitem uns resultats previs.

Lema

Sigui G un graf connex d'ordre n. Si M és la matriu d'incidència orientada de G i L és la matriu de Laplace de G, tenim que

$$L = MM^t.$$

Teorema

Sigui G un graf i T un subgraf de G. Aleshores, T és un arbre generador de G si i només si $|\det M_0[T]| = 1$.

Nombre d'arbres generadors

Fórmula de Cauchy-Binet

Sigui $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ i $B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Donat qualsevol subconjunt $S \subset \{1, \ldots, m\}$ tal que $|S| = n$, formem la matriu $A_S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ escollint les columnes de A indexades pel conjunt S i formem la matriu $B_S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ escollint les files de B indexades pel conjunt S. Aleshores tenim que

$$\det(AB) = \sum_S \det(A_S)\det(B_S).$$

Nombre d'arbres generadors

Passem ara a enunciar el nombre d'arbres generadors d'un graf.

Nombre d'arbres generadors

Passem ara a enunciar el nombre d'arbres generadors d'un graf.

Teorema de Kirchhoff

Sigui G un graf connex amb matriu de Laplace L. Sigui $n = |V(G)|$, $m = |E(G)|$ i sigui L_i la matriu resultant d'haver tret a L la fila i columna i-èssimes, per a qualsevol $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Nombre d'arbres generadors

Passem ara a enunciar el nombre d'arbres generadors d'un graf.

Teorema de Kirchhoff

Sigui G un graf connex amb matriu de Laplace L. Sigui $n = |V(G)|$, $m = |E(G)|$ i sigui L_i la matriu resultant d'haver tret a L la fila i columna i-èssimes, per a qualsevol $i \in \{1, \dots, n\}$. Aleshores, el valor $\det L_i$ és independent de i i el nombre $\tau(G)$ d'arbres generadors de G és

$$\tau(G) = \det L_i.$$

Nombre d'arbres generadors

Passem ara a enunciar el nombre d'arbres generadors d'un graf.

Teorema de Kirchhoff

Sigui G un graf connex amb matriu de Laplace L. Sigui $n = |V(G)|$, $m = |E(G)|$ i sigui L_i la matriu resultant d'haver tret a L la fila i columna i-èssimes, per a qualsevol $i \in \{1, \ldots, n\}$. Aleshores, el valor $\det L_i$ és independent de i i el nombre $\tau(G)$ d'arbres generadors de G és

$$\tau(G) = \det L_i.$$

Demostració

Com que M_0 l'hem creada suprimint l'última fila de M ho demostrarem únicament per $L_0 := L_n$.

Nombre d'arbres generadors

Passem ara a enunciar el nombre d'arbres generadors d'un graf.

Teorema de Kirchhoff

Sigui G un graf connex amb matriu de Laplace L. Sigui $n = |V(G)|$, $m = |E(G)|$ i sigui L_i la matriu resultant d'haver tret a L la fila i columna i-èssimes, per a qualsevol $i \in \{1, \dots, n\}$. Aleshores, el valor $\det L_i$ és independent de i i el nombre $\tau(G)$ d'arbres generadors de G és

$$\tau(G) = \det L_i.$$

Demostració

Com que M_0 l'hem creada suprimint l'última fila de M ho demostrarem únicament per $L_0 := L_n$.
En un lema anterior hem vist que teníem la igualtat: $L = MM^t$. Aleshores, és clar que tindrem $L_0 = M_0 M_0^t$.

Nombre d'arbres generadors

Per la fórmula de Cauchy-Binet aplicat a les matrius M_0 i M_0^t tenim que

$$\det L_0 = \det(M_0 M_0^t) = \sum_S \det((M_0)_S) \det((M_0^t)_S), \tag{1}$$

on $S \subset \{1, \ldots, m\}$ tal que $|S| = n$.

Nombre d'arbres generadors

Per la fórmula de Cauchy-Binet aplicat a les matrius M_0 i M_0^t tenim que

$$\det L_0 = \det(M_0 M_0^t) = \sum_S \det((M_0)_S) \det((M_0^t)_S), \tag{1}$$

on $S \subset \{1, \ldots, m\}$ tal que $|S| = n$. Ara bé, en general tenim que per una matriu $A \in \mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{R})$ es compleix $(A^t)_S = (A_S)^t$, i aleshores l'equació 1 esdevé

$$\det L_0 = \sum_S (\det(M_0)_S)^2. \tag{2}$$

Nombre d'arbres generadors

Per la fórmula de Cauchy-Binet aplicat a les matrius M_0 i M_0^t tenim que

$$\det L_0 = \det(M_0 M_0^t) = \sum_S \det((M_0)_S) \det((M_0^t)_S), \tag{1}$$

on $S \subset \{1, \ldots, m\}$ tal que $|S| = n$. Ara bé, en general tenim que per una matriu $A \in \mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{R})$ es compleix $(A^t)_S = (A_S)^t$, i aleshores l'equació 1 esdevé

$$\det L_0 = \sum_S (\det(M_0)_S)^2. \tag{2}$$

Ara bé, per un teorema anterior tenim que $(\det(M_0)_S)^2 = 1$ si les arestes indexades per S defineixen un arbre generador de G y $(\det((M_0)_S))^2 = 0$, en cas contrari.

Nombre d'arbres generadors

Per la fórmula de Cauchy-Binet aplicat a les matrius M_0 i M_0^t tenim que

$$\det L_0 = \det(M_0 M_0^t) = \sum_S \det((M_0)_S) \det((M_0^t)_S), \tag{1}$$

on $S \subset \{1, \dots, m\}$ tal que $|S| = n$. Ara bé, en general tenim que per una matriu $A \in \mathcal{M}_{p \times q}(\mathbb{R})$ es compleix $(A^t)_S = (A_S)^t$, i aleshores l'equació 1 esdevé

$$\det L_0 = \sum_S (\det(M_0)_S)^2. \tag{2}$$

Ara bé, per un teorema anterior tenim que $(\det(M_0)_S)^2 = 1$ si les arestes indexades per S defineixen un arbre generador de G y $(\det((M_0)_S))^2 = 0$, en cas contrari. Per tant, és clar que que la suma de l'equació 2 compta el nombre total d'arbres generadors, és a dir, $\tau(G) = \det L_0$. $\square$

Nombre d'arbres generadors

L'objectiu ara és trobar algun mètode alternatiu per al càlcul de $\tau(G)$.

Nombre d'arbres generadors

L'objectiu ara és trobar algun mètode alternatiu per al càlcul de $\tau(G)$.

Corol·lari

Sigui G un graf connex tal que $n = |V(G)|$. Suposem que els valors propis de L són $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, amb $\lambda_n = 0$. Aleshores,

$$\tau(G) = \frac{1}{n}\lambda_1\lambda_2 \ldots \lambda_{n-1}.$$

Nombre d'arbres generadors

L'objectiu ara és trobar algun mètode alternatiu per al càlcul de $\tau(G)$.

Corol·lari

Sigui G un graf connex tal que $n = |V(G)|$. Suposem que els valors propis de L són $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, amb $\lambda_n = 0$. Aleshores,

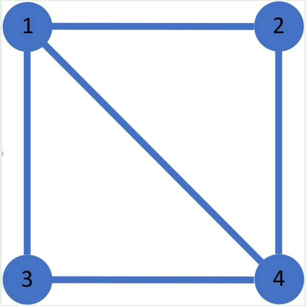
$$\tau(G) = \frac{1}{n}\lambda_1\lambda_2 \ldots \lambda_{n-1}.$$

Considerem ara el següent exemple:

Nombre d'arbres generadors

Exemple

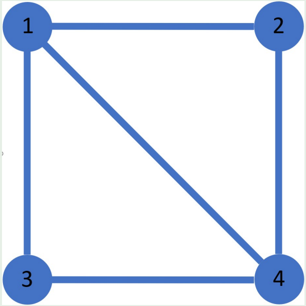
Considerem el graf G de la figura.



Volem calcular el nombre d'arbres generadors d'aquest graf.

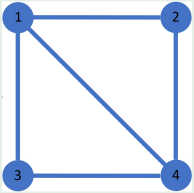
Exemple

Considerem el graf G de la figura.



Volem calcular el nombre d'arbres generadors d'aquest graf. Per això necessitem trobar la matriu de Laplace associada.

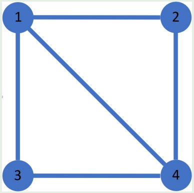
Nombre d'arbres generadors



En aquest cas tenim que

$$L = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Nombre d'arbres generadors



En aquest cas tenim que

$$L = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Calcularem el valor de $\tau(G)$ mitjançant els dos mètodes que hem exposat.

Nombre d'arbres generadors

1. Utilitzant el teorema de Kirchhoff, podem crear L_0 suprimint la primera fila i columna de L.

1. Utilitzant el teorema de Kirchhoff, podem crear L_0 suprimint la primera fila i columna de L. Així tenim que

$$\tau(G) = \det L_0 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 8.$$

Nombre d'arbres generadors

1. Utilitzant el teorema de Kirchhoff, podem crear L_0 suprimint la primera fila i columna de L. Així tenim que

$$\tau(G) = \det L_0 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 8.$$

2. Utilitzant el mètode dels valors propis hem de calcular el polinomi característic de L.

Nombre d'arbres generadors

1. Utilitzant el teorema de Kirchhoff, podem crear L_0 suprimint la primera fila i columna de L. Així tenim que

$$\tau(G) = \det L_0 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 8.$$

2. Utilitzant el mètode dels valors propis hem de calcular el polinomi característic de L. Tenim doncs que:

$$\det(L - xI) = \begin{vmatrix} 3-x & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2-x & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2-x & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3-x \end{vmatrix} =$$

Nombre d'arbres generadors

$$= \begin{vmatrix} -x & -1 & -1 & -1 \\ -x & 2-x & 0 & -1 \\ -x & 0 & 2-x & -1 \\ -x & -1 & -1 & 3-x \end{vmatrix} = -x \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2-x & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2-x & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 3-x \end{vmatrix} =$$

$$= -x \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3-x & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3-x & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4-x \end{vmatrix} = -x(4-x)[(3-x)^2-1] =$$

$$= x(x-2)(x-4)^2.$$

Nombre d'arbres generadors

$$= \begin{vmatrix} -x & -1 & -1 & -1 \\ -x & 2-x & 0 & -1 \\ -x & 0 & 2-x & -1 \\ -x & -1 & -1 & 3-x \end{vmatrix} = -x \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2-x & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2-x & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 3-x \end{vmatrix} =$$

$$= -x \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3-x & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3-x & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4-x \end{vmatrix} = -x(4-x)[(3-x)^2-1] =$$

$$= x(x-2)(x-4)^2.$$

Per tant, els valors propis de L són $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 4$ i $\lambda_4 = 0$.

$$= \begin{vmatrix} -x & -1 & -1 & -1 \\ -x & 2-x & 0 & -1 \\ -x & 0 & 2-x & -1 \\ -x & -1 & -1 & 3-x \end{vmatrix} = -x \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2-x & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2-x & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 3-x \end{vmatrix} =$$

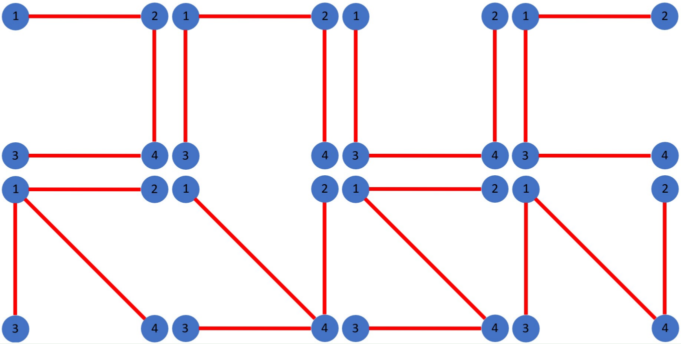
$$= -x \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3-x & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3-x & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4-x \end{vmatrix} = -x(4-x)[(3-x)^2-1] =$$

$$= x(x-2)(x-4)^2.$$

Per tant, els valors propis de L són $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 4$ i $\lambda_4 = 0$. Finalment, tenim que

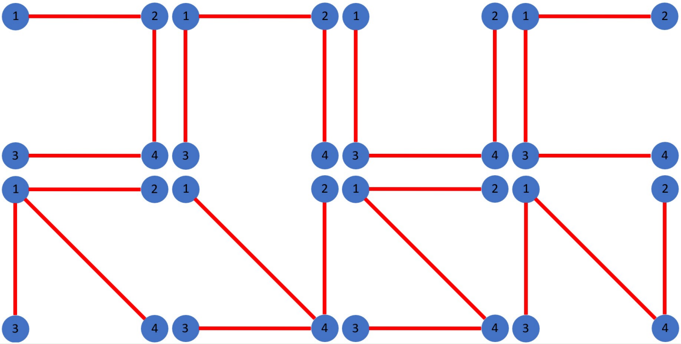
$$\tau(G) = \frac{1}{4}\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 8.$$

En la següent figura observem els 8 arbres generadors del graf G.



Nombre d'arbres generadors

En la següent figura observem els 8 arbres generadors del graf G.



Observem que el graf considerat en aquest exemple és un subgraf del graf K_4 i, evidentment, tots els seus arbres generadors són arbres generadors del graf K_4.

Índex

Aplicacions

Ara aplicarem aquests conceptes a una aplicació en particular: trobar l'arbre generador minimal d'un graf. Per això necessitem definir uns quants conceptes.

Aplicacions

Ara aplicarem aquests conceptes a una aplicació en particular: trobar l'arbre generador minimal d'un graf. Per això necessitem definir uns quants conceptes.

Definició

Donat un graf G, diem que aquest és un graf ponderat, pesat o amb costos quan les arestes tenen associades un valor, és a dir, per a tot $e \in E(G)$ considerem el cost $w(e)$ associat a l'aresta e.

Aplicacions

Ara aplicarem aquests conceptes a una aplicació en particular: trobar l'arbre generador minimal d'un graf. Per això necessitem definir uns quants conceptes.

Definició

Donat un graf G, diem que aquest és un graf ponderat, pesat o amb costos quan les arestes tenen associades un valor, és a dir, per a tot $e \in E(G)$ considerem el cost $w(e)$ associat a l'aresta e.

Definició

Donat un graf G ponderat per una funció $w(e)$ i un arbre generador T de G definim el pes de l'arbre T com

$$w(T) = \sum_{e \in E(G)} w(e).$$

Aplicacions

Definició

Un arbre generador minimal, o de cost mínim, de G és un arbre generador T de G de pes $w(T)$ mínim.

Aplicacions

Definició

Un arbre generador minimal, o de cost mínim, de G és un arbre generador T de G de pes $w(T)$ mínim.

Per tal de determinar l'arbre generador de cost mínim d'un graf, farem ús de diferents algoritmes en funció de les característiques del graf. A continuació, exposem de manera detallada dos algoritmes per grafs connexos, no dirigits i ponderats d'ordre n i mida m.

Aplicacions

Algoritme de Prim

Sigui G un graf. Per crear l'arbre generador de cost mínim seguim els següents passos:

1. Escollim un vèrtex $v_1 \in V(G)$ i considerem l'arbre T format pel vèrtex v_1.

Aplicacions

Algoritme de Prim

Sigui G un graf. Per crear l'arbre generador de cost mínim seguim els següents passos:

1. Escollim un vèrtex $v_1 \in V(G)$ i considerem l'arbre T format pel vèrtex v_1.
2. Sigui e' l'aresta de pes mínim incident a un vèrtex de T i un altre vèrtex $u \notin V(T)$. A continuació, creem el nou arbre $T := T + e'$.

Aplicacions

Algoritme de Prim

Sigui G un graf. Per crear l'arbre generador de cost mínim seguim els següents passos:

1. Escollim un vèrtex $v_1 \in V(G)$ i considerem l'arbre T format pel vèrtex v_1.
2. Sigui e' l'aresta de pes mínim incident a un vèrtex de T i un altre vèrtex $u \notin V(T)$. A continuació, creem el nou arbre $T := T + e'$.
3. Si $|E(T)| = n - 1$ ja hem acabat. Si no, tornem al pas 2.

Algoritme de Prim

Sigui G un graf. Per crear l'arbre generador de cost mínim seguim els següents passos:

1. Escollim un vèrtex $v_1 \in V(G)$ i considerem l'arbre T format pel vèrtex v_1.
2. Sigui e' l'aresta de pes mínim incident a un vèrtex de T i un altre vèrtex $u \notin V(T)$. A continuació, creem el nou arbre $T := T + e'$.
3. Si $|E(T)| = n - 1$ ja hem acabat. Si no, tornem al pas 2.

Observem que l'elecció del vèrtex inicial pot fer que l'arbre generat sigui diferent, però en qualsevol cas serà de cost mínim.

Aplicacions

Algoritme de Prim

Sigui G un graf. Per crear l'arbre generador de cost mínim seguim els següents passos:

1. Escollim un vèrtex $v_1 \in V(G)$ i considerem l'arbre T format pel vèrtex v_1.
2. Sigui e' l'aresta de pes mínim incident a un vèrtex de T i un altre vèrtex $u \notin V(T)$. A continuació, creem el nou arbre $T := T + e'$.
3. Si $|E(T)| = n - 1$ ja hem acabat. Si no, tornem al pas 2.

Observem que l'elecció del vèrtex inicial pot fer que l'arbre generat sigui diferent, però en qualsevol cas serà de cost mínim.
L'algoritme de Prim té una complexitat de $O(n^2)$.

Aplicacions

Algoritme de Kruskal

Sigui G un graf. La descripció de l'obtenció de l'arbre generador de cost mínim a través de l'algoritme de Kruskal és la següent:

1. Escollim l'aresta de pes mínim e i considerem l'arbre T format per aquesta aresta.

Aplicacions

Algoritme de Kruskal

Sigui G un graf. La descripció de l'obtenció de l'arbre generador de cost mínim a través de l'algoritme de Kruskal és la següent:

1. Escollim l'aresta de pes mínim e i considerem l'arbre T format per aquesta aresta.
2. Sigui e' l'aresta de pes mínim tal que $e' \notin E(T)$ i $T + e'$ no forma cap cicle. Aleshores, considerem el nou graf $T := T + e$.

Algoritme de Kruskal

Sigui G un graf. La descripció de l'obtenció de l'arbre generador de cost mínim a través de l'algoritme de Kruskal és la següent:

1. Escollim l'aresta de pes mínim e i considerem l'arbre T format per aquesta aresta.
2. Sigui e' l'aresta de pes mínim tal que $e' \notin E(T)$ i $T + e'$ no forma cap cicle. Aleshores, considerem el nou graf $T := T + e$.
3. Si $|E(T)| = n - 1$ ja hem acabat. Si no, tornem al pas 2.

Aplicacions

Algoritme de Kruskal

Sigui G un graf. La descripció de l'obtenció de l'arbre generador de cost mínim a través de l'algoritme de Kruskal és la següent:

1. Escollim l'aresta de pes mínim e i considerem l'arbre T format per aquesta aresta.
2. Sigui e' l'aresta de pes mínim tal que $e' \notin E(T)$ i $T + e'$ no forma cap cicle. Aleshores, considerem el nou graf $T := T + e$.
3. Si $|E(T)| = n - 1$ ja hem acabat. Si no, tornem al pas 2.

L'algoritme de Kruskal té una complexitat de $O(m \log m)$.

Aplicacions

Arribats en aquest punt, ens preguntem quin dels algoritmes és més eficient o quin convé utilitzar.

Aplicacions

Arribats en aquest punt, ens preguntem quin dels algoritmes és més eficient o quin convé utilitzar. La resposta és que depèn del nombre d'arestes del graf.

Aplicacions

Arribats en aquest punt, ens preguntem quin dels algoritmes és més eficient o quin convé utilitzar. La resposta és que depèn del nombre d'arestes del graf.

- Si $|E(G)| \sim |E(K_n)|$, aleshores

$$|E(G)| = O(n^2) \implies \left\{ \begin{array}{ll} \text{Prim:} & O(n^2) \\ \text{Kruskal:} & O(n^2 \log n) \end{array} \right\}.$$

Aplicacions

Arribats en aquest punt, ens preguntem quin dels algoritmes és més eficient o quin convé utilitzar. La resposta és que depèn del nombre d'arestes del graf.

- Si $|E(G)| \sim |E(K_n)|$, aleshores

$$|E(G)| = O(n^2) \implies \left\{ \begin{array}{cc} \text{Prim:} & O(n^2) \\ \text{Kruskal:} & O(n^2 \log n) \end{array} \right\}.$$

  Per tant, convé utilitzar l'algoritme de Prim.

Aplicacions

Arribats en aquest punt, ens preguntem quin dels algoritmes és més eficient o quin convé utilitzar. La resposta és que depèn del nombre d'arestes del graf.

- Si $|E(G)| \sim |E(K_n)|$, aleshores
$$|E(G)| = O(n^2) \implies \left\{ \begin{array}{cc} \text{Prim:} & O(n^2) \\ \text{Kruskal:} & O(n^2 \log n) \end{array} \right\}.$$
Per tant, convé utilitzar l'algoritme de Prim.
- Si $|E(G)| \sim |V(K_n)|$, aleshores
$$|E(G)| = O(n) \implies \left\{ \begin{array}{cc} \text{Prim:} & O(n^2) \\ \text{Kruskal:} & O(n \log n) \end{array} \right\}.$$

Aplicacions

Arribats en aquest punt, ens preguntem quin dels algoritmes és més eficient o quin convé utilitzar. La resposta és que depèn del nombre d'arestes del graf.

- Si $|E(G)| \sim |E(K_n)|$, aleshores

$$|E(G)| = O(n^2) \implies \left\{ \begin{array}{cc} \text{Prim:} & O(n^2) \\ \text{Kruskal:} & O(n^2 \log n) \end{array} \right\}.$$

  Per tant, convé utilitzar l'algoritme de Prim.

- Si $|E(G)| \sim |V(K_n)|$, aleshores

$$|E(G)| = O(n) \implies \left\{ \begin{array}{cc} \text{Prim:} & O(n^2) \\ \text{Kruskal:} & O(n \log n) \end{array} \right\}.$$

  Per tant, convé utilitzar l'algoritme de Kurskal.