Seminari 1
Processos de Ramificació

Víctor Ballester Ribó
NIU: 1570866

Processos estocàstic
Grau en Matemàtiques
Universitat Autònoma de Barcelona
Març de 2023

Exercici 1. *Demostreu que si* (X_n) *és un procés de Galton-Watson i* $\mathbb{E}(Z_n^{(k)}) \leq 1$ *aleshores tenim que* $X_n \to 0$ *quasi segurament.*

Resolució 1. Tenim que, com que $\mathbb{E}(Z_n^{(k)}) \leq 1$, la probabilitat d'extinció és 1. Per tant, $\mathbb{P}(\text{extinció}) = \mathbb{P}\left(\exists k \in \mathbb{N} \cup \{0\} : X_n = 0 \ \forall n \geq k\right) = 1$ i tenim les següents implicacions:

$$\mathbb{P}\left(\exists k \in \mathbb{N} \cup \{0\} : X_n = 0 \ \forall n \geq k\right) = 1 \implies \mathbb{P}(\lim_{n\to\infty} X_n = 0) = 1 \implies X_n \xrightarrow{\text{a.e.}} 0$$

on en la primera implicació hem untilitzat que les variables X_n prenen valors en un conjunt discret, i per tant, la successió (el límit de la qual existeix per Galton-Watson) ha de ser constant a partir d'un punt i viceversa.

Exercici 2. *Denotem* $m := \mathbb{E}(Z_{n+1}^{(k)})$ *que suposem finita. Demostreu que:*

$$\mathbb{E}(X_n) = m^n$$

Deduïu el comportament límit del nombre mitjà d'individus. Observeu que, en particular, en el cas $m = 1$ *tenim que* $\mathbb{E}(X_n) = 1 \ \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *i en canvi* $X_n \to 0$ *quasi segurament.*

Resolució 2. Per hipòtesi totes les $Z_n^{(k)}$ tenen la mateixa distribució, que li direm Z. Llavors, pel teorema de Wald, tenim que $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{X_{n-1}} Z_n^{(k)}\right) = \mathbb{E}(X_{n-1})\mathbb{E}(Z) = m\mathbb{E}(X_{n-1})$$

Expandint aquesta recurrència i utilitzant que $\mathbb{E}(X_0) = 1$ ja que $X_0(\omega) = 1 \ \forall \omega \in \Omega$ deduïm que:

$$\mathbb{E}(X_n) = m\mathbb{E}(X_{n-1}) = m^2\mathbb{E}(X_{n-2}) = \cdots = m^n\mathbb{E}(X_0) = m^n$$

Exercici 3. *Calculeu el nombre esperat del total de descendents d'un individu.*

Resolució 3. Com que les generacions són independents, podem calcular el nombre esperat de descendents des del primer individu. Tenim que cal calcular el valor de

$$\mathbb{E}\left(\sum_{n=1}^{\infty} X_n\right)$$

Com que les variables X_n són positives:

$$\mathbb{E}\left(\sum_{n=1}^{\infty} X_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}(X_n) = \sum_{n=1}^{\infty} m^n = \begin{cases} \frac{m}{1-m} & \text{si } m < 1 \\ \infty & \text{si } m \geq 1 \end{cases}$$

Exercici 4. *Suposem ara que les variables aleatòries* $Z_n^{(k)}$ *tenen moment de segon ordre finit i sigui* $\sigma^2 = \mathrm{Var}(Z_n^{(k)})$*. Proveu que:*

$$\mathrm{Var}(X_n) = \begin{cases} \sigma^2 n & \textit{si } m = 1 \\ \sigma^2 m^{n-1}\left(\frac{1-m^n}{1-m}\right) & \textit{si } m \neq 1 \end{cases}$$

Resolució 4. Em de fer servir la fórmula per la variància vista a la llista de problemes quan les sumes són aleatòries. Tenim que $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\operatorname{Var}(X_n) = \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{X_{n-1}} Z_n^{(k)}\right) = \mathbb{E}(X_{n-1})\operatorname{Var}(Z) + \mathbb{E}(Z)^2\operatorname{Var}(X_{n-1}) = m^{n-1}\sigma^2 + m^2\operatorname{Var}(X_{n-1})$$

Continuant la recurrència, tenim que:

$$\operatorname{Var}(X_n) = m^{n-1}\sigma^2 + m^2\operatorname{Var}(X_{n-1}) = \cdots = m^{n-1}\sigma^2(1 + m + \cdots + m^{n-1}) + m^{2n}\operatorname{Var}(X_0)$$

Com que $\operatorname{Var}(X_0) = 0$, tenim que:

$$\operatorname{Var}(X_n) = \begin{cases} \sigma^2 n & \text{si } m = 1 \\ \sigma^2 m^{n-1}\frac{m^n-1}{m-1} & \text{si } m \neq 1 \end{cases}$$

Exercici 5. *Se suposa que el nombre mitjà d'immigrants que arriben en cada generació és constant, és a dir* $\mathbb{E}(Y_n) = \lambda\ \forall n \in \mathbb{N}$ *i per un cert* $\lambda > 0$. *Aleshores:*

$$\mathbb{E}(X_n) = \begin{cases} 1 + \lambda n & si\ m = 1 \\ m^n + \lambda\frac{1-m^n}{1-m} & si\ m \neq 1 \end{cases}$$

Resolució 5. Tenim ara que $X_n = \sum_{k=1}^{X_{n-1}} Z_n^{(k)} + Y_{n+1}$. Per tant, usant el teorema de Wald:

$$\mathbb{E}\left(X_n\right) = \mathbb{E}(X_{n-1})\mathbb{E}(Z) + \mathbb{E}(Y_{n+1}) = m\mathbb{E}(X_{n-1}) + \lambda$$

Continuant amb la recurrència tenim que:

$$\mathbb{E}\left(X_n\right) = \lambda(1 + m + \cdots + m^{n-1}) + m^n\mathbb{E}(X_0) = \lambda(1 + m + \cdots + m^{n-1}) + m^n = \begin{cases} 1 + \lambda n & \text{si } m = 1 \\ m^n + \lambda\frac{1-m^n}{1-m} & \text{si } m \neq 1 \end{cases}$$

Exercici 6. *Suposem que les* Y_n *són variables aleatòries independents amb la mateixa distribució i que* $\mathbb{P}(Y_n \geq 1) > 0$. *Aleshores la probabilitat d'extinció definitiva és 0.*

Resolució 6. Volem calcular

$$\mathbb{P}(\text{extinció}) = \mathbb{P}\left(\exists k \in \mathbb{N} \cup \{0\} : X_n = 0\ \forall n \geq k\right) \leq \mathbb{P}\left(\exists k \in \mathbb{N} \cup \{0\} : Y_n = 0\ \forall n \geq k\right)$$

ja que tenim la inclusió de conjunts $\{\exists k \in \mathbb{N} \cup \{0\} : X_n = 0\ \forall n \geq k\} \subseteq \{\exists k \in \mathbb{N} \cup \{0\} : Y_n = 0\ \forall n \geq k\}$. Ara bé:

$$\mathbb{P}\left(\exists k \in \mathbb{N} \cup \{0\} : Y_n = 0\ \forall n \geq k\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=k}^{\infty}\{Y_n = 0\}\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=k}^{\infty}\{Y_n = 0\}\right)$$

Veurem que totes les probabilitats $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=k}^{\infty}\{Y_n = 0\}\right)$ són 0. Siguin $A_N := \bigcap_{n=k}^{N}\{Y_n = 0\}$. Observem que $A_{N+1} \subseteq A_N\ \forall N \geq k$. Per tant, pel lema de les interseccions decreixents, tenim que:

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=k}^{\infty}\{Y_n = 0\}\right) = \mathbb{P}(\lim_{N\to\infty} A_N) = \lim_{N\to\infty}\mathbb{P}(A_N)$$

Ara bé, com que les variables Y_n són i.i.d. , tenim que:

$$\mathbb{P}(A_N) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=k}^{N}\{Y_n = 0\}\right) = \mathbb{P}(Y_1 = 0)^{N-k+1}$$

que és estrictament menor que 1 per hipòtesi. Per tant, $\lim_{N\to\infty}\mathbb{P}(A_N) = 0$ i refent els càlculs deduïm que $\mathbb{P}(\text{extinció}) = 0$.