

Seminari 1. Sistemes Dinàmics

1 Oscil·lador de Van der Pol

L'equació diferencial

$$x'' - \mu(1 - x^2)x' + x = 0 \quad (1)$$

té una única solució T_μ -periòdica per a tot valor de $\mu \neq 0$. Aquesta neix, quan μ és petit, del cercle de radi 2 amb un període $T_\mu \approx 2\pi$.

- (a) Dibuixeu $(x(t), x'(t))$ per a diversos valors, petits, de μ i condicions inicials $(\rho, 0)$ per a $\rho \approx 2$. Comproveu l'existència de la solució periòdica.
- (b) Denotem per $x(t; \rho)$ la solució de l'equació diferencial (1) amb condició inicial $x(0) = \rho$ i $x'(0) = 0$. Fixa't el valor de μ , per a cada $\rho > 0$, trobeu T resolent l'equació $x'(T; \rho) = 0$ per $x(T; \rho) = \Pi(\rho) > 0$. L'aplicació $\rho \rightarrow \Pi(\rho)$ es coneix com *aplicació de retorn*.
- (c) Fixa't un valor de μ . Comproveu que l'equació $\Pi(\rho) - \rho = 0$ té al menys un zero. Aquest es correspon a la solució periòdica de (1). Feu la gràfica de la *funció desplaçament* $\delta(\rho) = \Pi(\rho) - \rho$.
- (d) Per a cada μ , trobeu els valors T_μ i ρ_μ tals que la solució de (1) amb condicions inicials $x(0) = \rho_\mu$ i $x'(0) = 0$ és T_μ -periòdica.
- (e) Feu les gràfiques del període, T_μ , i la condició inicial, ρ_μ , de la solució periòdica respecte el paràmetre μ .

2 Cicles límit en camps quadràtics

Considereu el sistema d'equacions diferencials de grau dos:

$$(x', y') = (-x + by + y^2, ax - aby - xy + c(-x + by + y^2)).$$

Quan $a = 1, b = -1, c = 3/4$ el sistema anterior té una òrbita periòdica que envolta al punt d'equilibri situat al primer quadrant $(x_e, y_e) = (2, 2)$. Trobeu el punt d'intersecció, (x_i, y_i) de l'òrbita periòdica amb la recta vertical que passa pel punt d'equilibri.

Feu la gràfica de la coordenada y_i variant c en un entorn (petit) de $c = 3/4$. Feu el mateix variant a i b .

3 Òrbites periòdiques a dimensió 3

Considereu el sistema d'equacions diferencials de Lorenz:

$$(x', y', z') = (\sigma(-x + y), rx - y - xz, -bz + xy).$$

Pels valors $b = 8/3$ i $\sigma = 10$ localitzeu una òrbita periòdica per $r = 100.5$ usant com a punt inicial $(0, 5, 75)$. Per $r = 25$ hi ha òrbites periòdiques a l'entorn d'algun dels equilibris, les podeu trobar?