SEMINARI 2

Problema centre - focus i bifurcació de Hopf

Víctor Ballester Ribó
NIU:1570866

Sistemes dinàmics
Grau en Matemàtiques
Universitat Autònoma de Barcelona
Gener de 2023

En aquest document ens dedicarem a estudiar l'estabilitat de l'origen en funció de paràmetres per a diferents sistemes diferencials així com el nombre d'òrbites periòdiques que poden néixer de l'origen en cada cas.

Exercici 1

Considerem el sistema diferencial:

$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = x + ay + bx^2 + cx^3 + x^4 \end{cases} \tag{1}$$

amb $a, b, c \in \mathbb{R}$.
Observem d'entrada que si $a \neq 0$, l'origen és hiperbòlic i per tant és estable si $a < 0$ i inestable si $a > 0$. Pel cas $a = 0$, fixem-nos que el sistema és Hamiltonià amb integral primera (definida en un entorn de l'origen):

$$H = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + b\frac{x^3}{3} + c\frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}$$

Per tant, com que el sistema rota al voltant de l'origen, aquest és un centre $\forall b, c \in \mathbb{R}$.
Finalment notem que la divergència del sistema és a. I per tant si $a \neq 0$, el teorema de Bendixson ens assegura que no hi ha cicles límit al sistema per cap valor de $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

Exercici 2

Considerem el sistema diferencial:

$$\begin{cases} x' = ax - y + x^2 \\ y' = x + y^2 + bxy \end{cases} \tag{2}$$

amb $a, b \in \mathbb{R}$.
El sistema té divergència $a + 2x + 2y + bx$, que té signe constant en un entorn de l'origen si $a \neq 0$. Per tant, l'estabilitat de l'origen si $a \neq 0$ ve donada pel signe de a. Quan $a > 0$, l'origen és inestable; quan $a < 0$, és estable. Ara suposem $a = 0$. La primera constant de Lyapunov és $L_1 = -b/4$. Per tant, aquest cop l'estabilitat ve donada pel signe de b. Si ara suposem $a = b = 0$, el sistema resultant

$$\begin{cases} x' = -y + x^2 \\ y' = x + y^2 \end{cases}$$

és simètric respecte el canvi $(x, y, t) \to (-y, -x, -t)$, que correspon a la simetria respecte la recta $x + y = 0$. Com que el sistema rota en un entorn de l'origen, aquest és un centre. En resum, em obtingut els següents resultats:

$$\text{L'origen és un} \begin{cases} \text{focus estable} & \text{si } a < 0 \text{ o } a = 0, b > 0 \\ \text{focus inestable} & \text{si } a > 0 \text{ o } a = 0, b < 0 \\ \text{centre} & \text{si } a = b = 0 \end{cases}$$

Per estudiar el nombre de cicles límit que neixen de l'origen fixem-nos que si $a = 0$, podem escriure la funció de retorn en sèrie de potències respecte L_1 i factoritzar-la de la forma:

$$\Delta(\rho) = L_1\rho^3(1 + \mathrm{O}(\rho^2))$$

que és un polinomi que no té zeros per $\rho \gtrsim 0$ i $b \neq 0$. Per tant, només tindrem un únic cicle límit bifurcant de l'origen, que és el corresponent a la traça.

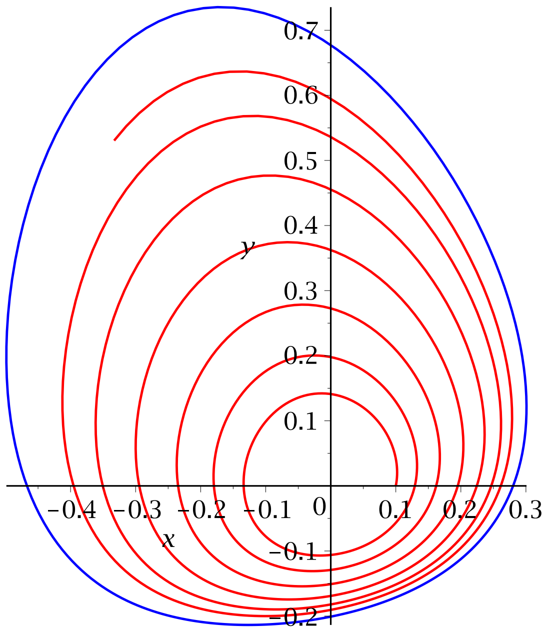


Figura 1: Cicle límit de Hopf del sistema (2) amb $a = 0.1$ i $b = 3$

Exercici 3

Considerem el sistema diferencial:

$$\begin{cases} x' = -y + xy + x^2 \\ y' = x + ax^2 + by^2 \end{cases} \tag{3}$$

amb $a, b \in \mathbb{R}$.
Les tres primeres constants de Lyapunov d'aquest sistema són les següents:

$$L_1 = \frac{1-2a}{4} \qquad L_2 = \frac{4b^3 - 7b - 1}{16} \qquad L_3 = 0$$

on per calcular cadascuna, hem assumit que les anteriors eren zero. Recordem que, com que el sistema és quadràtic, no cal calcular-ne més, ja que totes les següents també seran 0. L'estabilitat, doncs, la tenim determinada excepte per quan $a = 1/2$ i b satisfà $4b^3 - 7b - 1 = 0$. Les arrels d'aquest polinomi s'exposen a continuació:

$$-0.1445842733... \quad -1.244644286... \quad 1.389228559...$$

Observem que per $a = 1/2$ i b proper

Exercici 4

Considerem el sistema diferencial:

$$\begin{cases} x' = ax - y - 9x^2 + 4xy + by^2 \\ y' = x + ay + 2x^2 - 7xy - 2y^2 \end{cases} \tag{4}$$

amb $a, b \in \mathbb{R}$.

Exercici 5

Considerem el sistema diferencial:

$$\begin{cases} x' = 6\varepsilon x - 24ax^2 - 18xy - 3\varepsilon + 24x \\ y' = 2(3y-2)(3y+\varepsilon) \end{cases} \tag{5}$$

amb $a > 0$ i $\varepsilon \in \mathbb{R}$. En aquest cas se'ns demana estudiar l'estabilitat de tots els equilibris.
Els equilibris que tenim són els següents:

$$z^1_\pm = \left(\frac{\varepsilon + 2 \pm \sqrt{-8a\varepsilon + (\varepsilon+2)^2}}{8a}, \frac{2}{3}\right) \quad z^2_\pm = \left(\frac{\varepsilon + 2 \pm \sqrt{-2a\varepsilon + (\varepsilon+2)^2}}{4a}, -\frac{\varepsilon}{3}\right)$$

Els valors propis de les diferencials a cada punt són els següents:

$$\sigma(DX(z^1_\pm)) = \left\{12 + 6\varepsilon, \mp 6\sqrt{-8a\varepsilon + (\varepsilon+2)^2}\right\}$$
$$\sigma(DX(z^2_\pm)) = \left\{-(12 + 6\varepsilon), \mp 12\sqrt{-2a\varepsilon + (\varepsilon+2)^2}\right\}$$

Definim $f(a,\varepsilon) = -8a\varepsilon + (\varepsilon+2)^2$ i $g(a,\varepsilon) = -2a\varepsilon + (\varepsilon+2)^2$. Fixem-nos quan $f(a,\varepsilon) < 0$ perdrem dos punts d'equilibri i el mateix passa per $g(a,\varepsilon)$. Com podem observar a la figura 2, en la regió vermella tenim 4 punts crítics, en la regió blava 2 i en la verda 0. En les corbes blava i verda, tenim 3 i 1 equilibris respectivament.

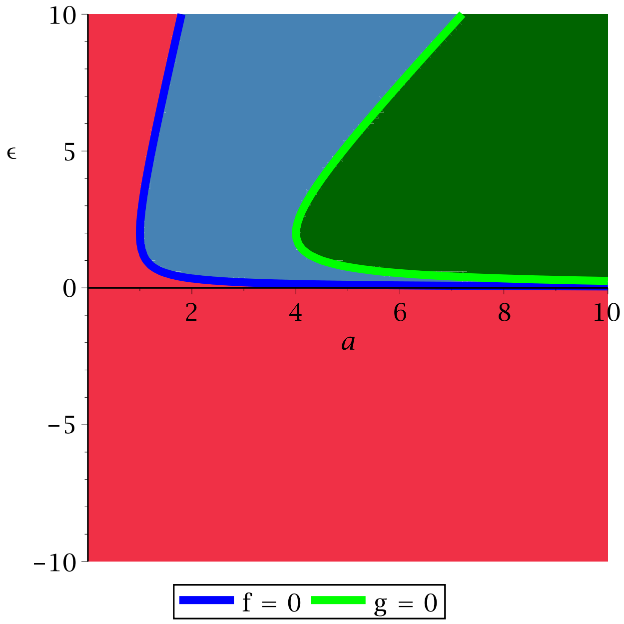


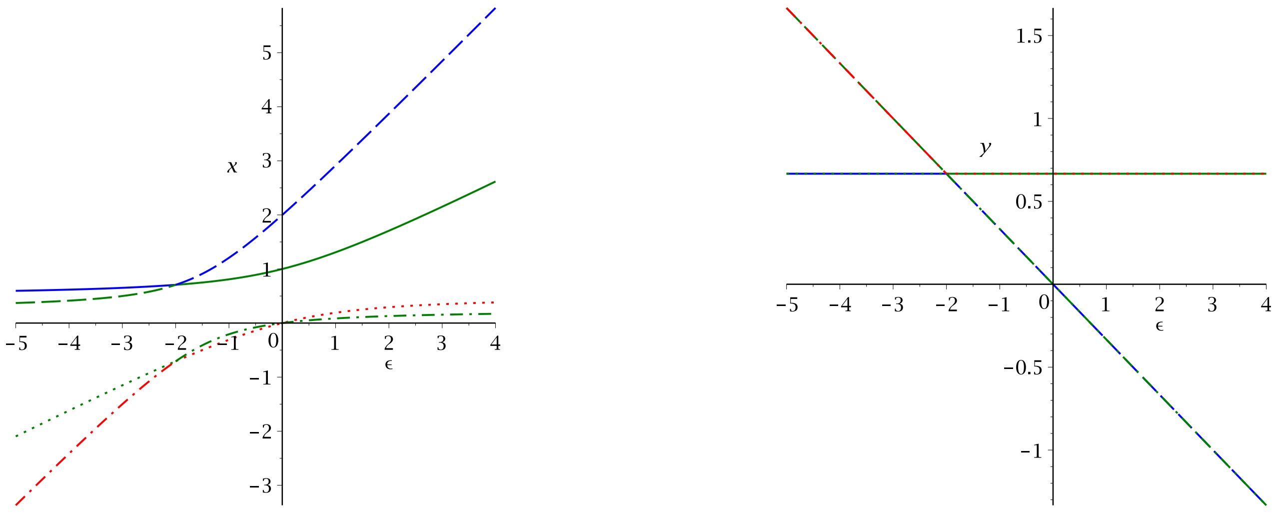
Figura 2: Gràfiques de les equacions $f = 0$ i $g = 0$

En la regió vermella, els equilibris si $\varepsilon > -2$, z^1_- i z^2_+ són selles i z^1_+ i z^2_- nodes (inestable i estable, respectivament). Si $\varepsilon < -2$, z^1_+ i z^2_- són selles i z^1_- i z^2_+ nodes (estable i inestable, respectivament). Per $\varepsilon = -2$, $z^1_+ = z^2_+ = (\frac{1}{2\sqrt{a}}, \frac{2}{3})$ i $z^1_- = z^2_- = (-\frac{1}{2\sqrt{a}}, \frac{2}{3})$ amb valors propis $\{0, \mp 24\sqrt{a}\}$. Una de les dues varietats és atractora per un punt, i repulsora per a l'altre. Estudiant el camp sobre la varietat central, veiem que en ambdós casos comença amb sèrie amb $128a^2z^2 + \cdots$ (un cop havent centrat el punt a l'origen, és a dir $z \simeq 0$). Per tant, tenim en ambdós casos un sella-node.
En la regió blava, l'estabilitat dels punts $z^2_\pm$ és la mateixa que en la regió vermella quan $\varepsilon > -2$. Finalment en les dues corbes $f = 0$ i $g = 0$, on els punts col·lisonen, tenim en ambdós casos un valor propi 0 i estudiant el camp sobre la seva corresponent varietat central deduïm que són selles nodes.
A continuació presentem els diagrames de bifurcació per a diverses seccions $a = \text{const}$. En els següents gràfics la línia contínua representa el punt z^1_+; la discontínua amb punts, el punt z^1_-; la discontínua amb ratlles, el punt z^2_+, i la discontínua amb punts i ratlles, el punt z^2_-.
Pels següents gràfics ometrem el diagrama de les y, ja que sempre és de la mateixa forma.

Exercici 6

Considerem el sistema diferencial:

$$\begin{cases} x' = y & =: f_1(x,y) \\ y' = -x + \mu(1-x^2)y & =: f_2(x,y) \end{cases} \tag{6}$$



(a) Gràfic $\varepsilon - x$

(b) Gràfic $\varepsilon - y$

Figura 3: Diagrama de bifurcació dels punts d'equilibri quan $a = 1/2$

amb $a, b, c \in \mathbb{R}$. Volem estudiar l'estabilitat de l'origen en funció de a, b i c així com el nombre d'òrbites periòdiques que poden néixer d'aquest.

Exercici 7

Considerem el sistema diferencial:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = \beta_1 + \beta_2 x + x^2 + xy \end{cases} \tag{7}$$

amb $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$. Se'ns demana estudiar quan obtindrem una bifurcació de Hopf. Per això estaria bé conèixer l'estabilitat dels equilibris segons β_1 i β_2.
Suposem d'entrada ${\beta_2}^2 \geq 4\beta_1$, perquè si no el sistema no té equilibris. En aquest cas, aquests juntament amb els seus valors propis són els següents:

$$z_+ = \left(-\frac{\beta_2}{2} + \frac{\sqrt{{\beta_2}^2 - 4\beta_1}}{2}, 0\right) \quad \sigma(D\mathbf{X}(z_+)) = \left\{-\frac{\beta_2}{2} + \frac{\sqrt{{\beta_2}^2 - 4\beta_1}}{2} \pm \frac{\sqrt{f(\beta_1,\beta_2)}}{4}\right\}$$
$$z_- = \left(-\frac{\beta_2}{2} - \frac{\sqrt{{\beta_2}^2 - 4\beta_1}}{2}, 0\right) \quad \sigma(D\mathbf{X}(z_-)) = \left\{-\frac{\beta_2}{2} - \frac{\sqrt{{\beta_2}^2 - 4\beta_1}}{2} \pm \frac{\sqrt{g(\beta_1,\beta_2)}}{4}\right\}$$

on:

$$f(\beta_1,\beta_2) = 2{\beta_2}^2 - 4\beta_1 - 2\beta_2\sqrt{{\beta_2}^2 - 4\beta_1} + 16\sqrt{{\beta_2}^2 - 4\beta_1}$$
$$g(\beta_1,\beta_2) = 2{\beta_2}^2 - 4\beta_1 + 2\beta_2\sqrt{{\beta_2}^2 - 4\beta_1} - 16\sqrt{{\beta_2}^2 - 4\beta_1}$$

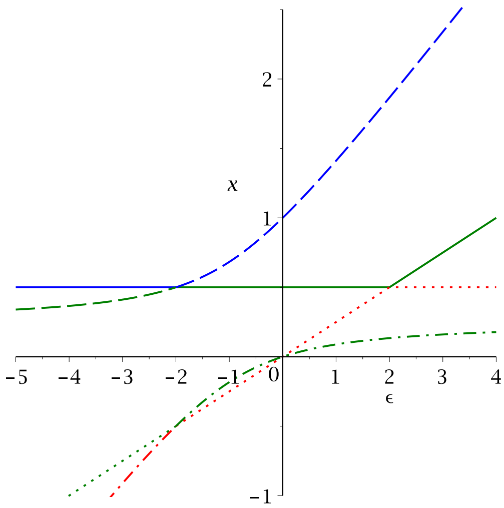
Comencem l'estudi suposant que els dos punts són iguals, és a dir que ${\beta_2}^2 = 4\beta_1$. Si $\beta_2 = \beta_1 = 0$, l'origen és un *cusp*, pel teorema de classificació de punts nilpotents. Ara suposem $\beta_2 \neq 0$ i passem el sistema a la seva forma de Jordan:

$$\begin{cases} x' = X(x,y,\boldsymbol{\beta}) \\ y' = -\dfrac{\beta_2}{2} y + Y(x,y,\boldsymbol{\beta}) \end{cases} \tag{8}$$

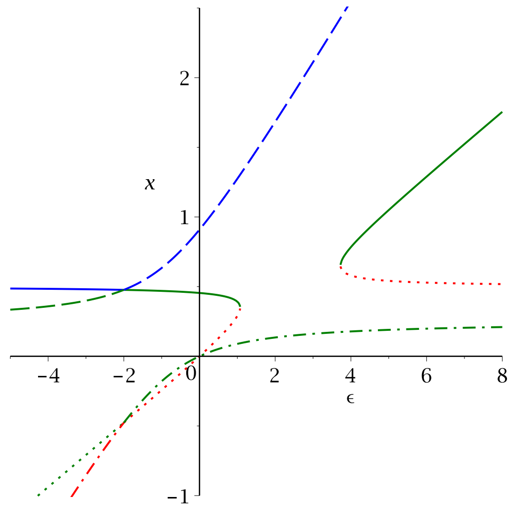
on $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2)$ i X i Y tenen sèrie de Taylor començant per ordre 2. Fent càlculs i usant el teorema de classificació de punts semihiperbòlics resulta que obtenim un sella-node.
Ara suposem que ${\beta_2}^2 > 4\beta_1$ i observem que:

$$f(\beta_1,\beta_2) = \left(\beta_2 - \sqrt{{\beta_2}^2 - 4\beta_1}\right)^2 + 16\sqrt{{\beta_2}^2 - 4\beta_1} > 0$$

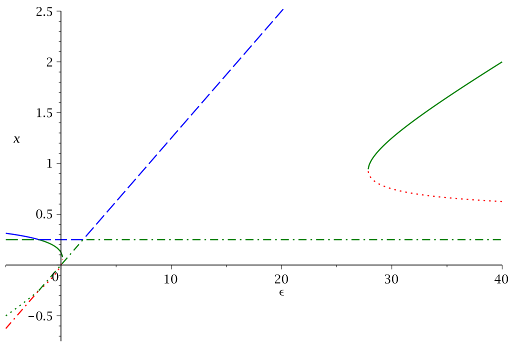
Per tant, z_+ sempre té valors propis reals i el seu producte és $-\sqrt{{\beta_2}^2 - 4\beta_1} < 0$. Per tant, aquest punt sempre és una sella.
Centrem-nos ara amb z_-.



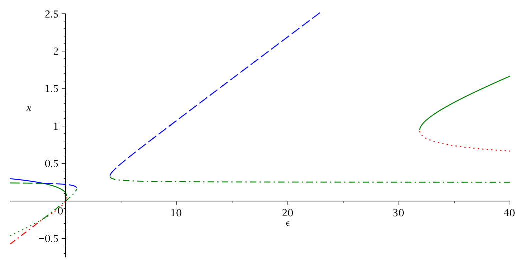
(a) Diagrama de bifurcació dels punts d'equilibri quan $a = 1$



(b) Diagrama de bifurcació dels punts d'equilibri quan $a = 2$



(c) Diagrama de bifurcació dels punts d'equilibri quan $a = 4$



(d) Diagrama de bifurcació dels punts d'equilibri quan $a = 4.5$