SEMINARI 2. Axiomes de separació

Topologia
Grau en Matemàtiques
Universitat Autònoma de Barcelona
Octubre de 2021

En aquest seminari discutirem els axiomes de separació, que són diferents tipus de restriccions extres que imposem que compleixin certs espais topològics. Així doncs farem un estudi de 5 d'aquests axiomes, que classificarem en dos blocs segons intervinguin únicament punts o punts i tancats en la restricció.
Durant tot el document suposarem que el conjunt X amb el que treballem té més d'un punt, és a dir, $|X| \geq 2$.

1 De T_0 a T_2

Espais T_0 o Kolmogorov

Comencem donant la definició de què és un espai T_0.

Definició 1.1. Sigui (X, τ) un espai topològic. Diem que (X, τ) és T_0 (o Kolmogorov) si per tot parell de punts diferents $x, y \in X$, existeix un obert que conté un dels punts i no l'altre.

D'entrada observem que la topologia grollera no és T_0 ja que l'únic obert (diferent del buit) és el total, que contindrà els dos components de qualsevol parella de punts. D'altra banda, la topologia discreta és T_0 ja que si $x \neq y \in X$ són dos punts diferents, aleshores $\{x\} \in \tau$ és un obert que compleix $x \in \{x\}$ i $y \notin \{x\}$.

Proposició 1.2. Sigui X un conjunt tal que $|X| \geq 2$ i $A \subset X$ un subconjunt tal que $|X \setminus A| > 1$. Definim els següent conjunt:

$$\tau := \{X\} \cup \{B \subset X : B \subset A\}$$

Aleshores, (X, τ) és un espai topològic que no és T_0.

Demostració. Comprovem primer que τ és una topologia. Per això hem de veure que se satisfan els tres axiomes de topologia.

- Per definició $X \in \tau$ i, com que $\varnothing \subset A$, tenim també que $\varnothing \in \tau$.
- Sigui $n \in \mathbb{N}$ i $\{B_i : B_i \in \tau, i = 1, \ldots, n\}$ una família finita d'elements de τ. Aleshores, tenim dues possibilitats:
  - Si $\exists j \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $B_j \neq X$, aleshores tenim que $B_j \subset A$ i llavors $\bigcap_{i=1}^n B_i \subset B_j \subset A$. Per tant, $\bigcap_{i=1}^n B_i \in \tau$.
  - Si $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$ tenim que $B_i = X$, aleshores $\bigcap_{i=1}^n B_i = X \in \tau$.
- Sigui I un conjunt arbitrari i $\{B_i : B_i \in \tau, i \in I\}$ una família arbitrària d'elements de τ. Aleshores, tenim dues possibilitats:
  - Si $\exists j \in I$ tal que $B_j = X$, aleshores $\bigcup_{i \in I} B_i = X \in \tau$.
  - Si $\forall i \in I$ tenim que $B_i \neq X$, aleshores $B_i \subset A$ $\forall i \in I$. Per tant, $\bigcup_{i \in I} B_i \subset A$.

Per tant, τ és una topologia. Però (X, τ) no és T_0 ja que si prenem dos punts $x, y \in X \setminus A$ (que podem fer-ho perquè per hipòtesi $|X \setminus A| > 1$), aleshores només hi ha un únic obert que conté x i només hi ha un únic obert que conté y. Però aquest obert és el mateix perquè és el total. Per tant, no existeix un obert que contingui un dels punts i no l'altre. $\square$

Espais T_1 o Fréchet

Comencem donant la definició de què és un espai T_1.

Definició 1.3. Sigui (X, τ) un espai topològic. Diem que (X, τ) és T_1 (o Fréchet) si per tot parell de punts diferents $x, y \in X$, existeix un obert $U \in \tau$ tal que $x \in U$ i $y \notin U$.

Proposició 1.4. Tot espai topològic T_1 és T_0.

Demostració. Sigui (X, τ) un espai topològic T_1. Aleshores, sabem que per tot parell de punts diferents $x, y \in X$, existeix un obert $U \in \tau$ tal que $x \in U$ i $y \notin U$, que implica que existeix un obert que conté un dels punts i no l'altre. Per tant, (X, τ) és T_0. □

El recíproc d'aquesta proposició és fals. És a dir, no tot espai topològic T_0 és T_1. Per exemple, si prenem $X = \{0, 1\}$ i $\tau = \{\varnothing, \{1\}, \{0, 1\}\}$ la topologia de Sierpiński, aleshores prenent els dos únics punts que hi ha a X, tenim que existeix un obert ($\{1\}$) que conté un dels punts i però no l'altre, per tant, és T_0. Però no hi ha un obert en τ que contingui 0 i no contingui 1, per tant, no és T_1.
Un altre exemple per veure que el recíproc de la proposició és fals el trobem prenent la topologia del punt exclòs sobre un conjunt X: prenem $x_0 \in X$ i definim τ de la següent manera:

$$\tau := \{X\} \cup \{A \subset X : x_0 \notin A\}$$

Ja sabem que τ defineix una topologia sobre X. A més, si prenem $x \neq y \in X$, aleshores com a mínim un d'ells serà diferent de x_0 (suposem sense pèrdua de generalitat que és x) i, per tant, $\{x\} \in \tau$ és un obert que conté un dels punts però no l'altre. Per tant, (X, τ) és T_0. En canvi no és T_1, perquè si prenem $x \in X \setminus \{x_0\}$ no hi ha cap obert que contingui x_0 i no contingui x (l'únic obert que conté x_0 és X, però $x \in X$). Per tant, (X, τ) no és T_1.
A continuació enunciarem dues caracteritzacions dels espais T_1.

Teorema 1.5. Sigui (X, τ) un espai topològic. Són equivalents:

1. (X, τ) és T_1.
2. Per a tot $x \in X$, $\{x\} = \bigcap_{N \in \mathcal{N}_x} N$.
3. Per a tot $x \in X$, $\{x\}$ és tancat.

Demostració. Demostrarem 1 $\iff$ 2 i 1 $\iff$ 3.

1 $\implies$ 2 : Sabem que (X, τ) és T_1 i volem demostrar que per a tot $x \in X$, $\{x\} = \bigcap_{N \in \mathcal{N}_x} N$. Primer de tot, observem que $\bigcap_{N \in \mathcal{N}_x} N = \bigcap_{\substack{U \in \tau \\ x \in U}} U$. En efecte, com que tot obert contenint x és un entorn de x, tenim la inclusió $\bigcap_{N \in \mathcal{N}_x} N \subset \bigcap_{\substack{U \in \tau \\ x \in U}} U$. L'altre inclusió es deu a la definició d'entorn: $N \in \mathcal{N}_x$ si i només si $\exists U \in \tau$ tal que $x \in U \subset N$. Per tant, un punt en $\bigcap_{\substack{U \in \tau \\ x \in U}} U$ ha d'estar necessàriament a $\bigcap_{N \in \mathcal{N}_x} N$.
Així doncs, provarem que per a tot $x \in X$, $\{x\} = \bigcap_{\substack{U \in \tau \\ x \in U}} U$. Suposem que $y \in X$ és tal que $y \neq x$ i $y \in \bigcap_{\substack{U \in \tau \\ x \in U}} U$. És a dir y està contingut en tot obert que conté x. Per tant, no existeix cap obert que conté x i no conté y. Però això contradiu al fet que (X, τ) sigui T_1. Per tant, $\{x\} = \bigcap_{\substack{U \in \tau \\ x \in U}} U$.

1 $\impliedby$ 2 : Vegem ara que (X, τ) és T_1, sabent que per a tot $x \in X$, $\{x\} = \bigcap_{N \in \mathcal{N}_x} N = \bigcap_{\substack{U \in \tau \\ x \in U}} U$.
Suposem que (X, τ) no és T_1, és a dir, existeixen $x \neq y \in X$ tals que per a tot $U \in \tau$ tal que $x \in U$, tenim $y \in U$. Però llavors, $y \in \bigcap_{\substack{U \in \tau \\ x \in U}} U = \{x\}$, que és una contradicció amb la hipòtesi inicial. Per tant, (X, τ) és T_1.

1 $\implies$ 3 : Sabem que (X, τ) és T_1 i volem demostrar que per a tot $x \in X$, $\{x\}$ és tancat. Observem que $\{x\}$ és tancat si i només si $X \setminus \{x\}$ és obert. Així doncs, demostrarem que $X \setminus \{x\}$ és obert.

Suposem que $X\setminus\{x\}$ no és obert. Aleshores, podem prendre $y \in (X\setminus\{x\})\setminus\mathrm{Int}(X\setminus\{x\}) \neq \varnothing$. Però com que (X,τ) és T_1, $\exists U \in \tau$ tal que $y \in U$ i $x \notin U$. Llavors, tenim que $U \subset X \setminus \{x\}$. D'altra banda, com que $\mathrm{Int}(X \setminus \{x\})$ és l'obert més gran contingut en $X \setminus \{x\}$, tenim que $U \subset \mathrm{Int}(X \setminus \{x\})$. Però llavors, $y \in U \subset \mathrm{Int}(X \setminus \{x\}) \not\ni y$ per definició de y, que és una contradicció. Per tant, $X \setminus \{x\}$ és obert i, en conseqüència, $\{x\}$ és tancat.

$1 \Longleftarrow 3$: Vegem ara que (X,τ) és T_1, sabent que per a tot $x \in X$, $\{x\}$ és tancat.

Siguin $x \neq y \in X$ dos punts diferents. Aleshores, com que $\{x\}$ és tancat, tenim que $X \setminus \{x\}$ és obert i es compleix que $y \in X \setminus \{x\}$ i $x \notin X \setminus \{x\}$. Per tant, (X,τ) és T_1.

□

Espais T_2 o Hausdorff

Comencem donant la definició de què és un espai T_2.

Definició 1.6. Sigui (X,τ) un espai topològic. Diem que (X,τ) és T_2 (o Hausdorff) si per tot parell de punts diferents $x, y \in X$, existeixen $U, V \in \tau$ tals que $x \in U$, $y \in V$ i $U \cap V = \varnothing$.

Proposició 1.7. Tot espai topològic T_2 és T_1.

Demostració. Sigui (X,τ) un espai topològic T_2 i $x \neq y \in X$. Aleshores, existeixen oberts $U, V \in \tau$ tals que $x \in U$, $y \in V$ i $U \cap V = \varnothing$. En particular, aquest U compleix que $x \in U$ i $y \notin U$ perquè $V \subset X \setminus U$ (ja que $U \cap V = \varnothing$). Per tant, (X,τ) és T_1. □

El recíproc d'aquesta proposició és fals. És a dir, no tot espai topològic T_1 és T_2. Per exemple, si prenem X que sigui un conjunt infinit i li posem la topologia cofinita $\tau = \{\varnothing\} \cup \{U \subset X : X \setminus U \text{ és finit}\}$, aleshores tenim que (X,τ) és T_1 però no T_2. En efecte, (X,τ) és T_1 perquè els tancats a (X,τ) són els conjunts finits (i el total) i com que els punts són finits, seran tancats. Llavors pel teorema 1.5, tenim que (X,τ) és T_1. Però (X,τ) no és T_2, perquè si ho fos, podríem trobar dos oberts $U, V \in \tau$ no buits tals que $U \cap V = \varnothing \implies U \subset X \setminus V$. Ara bé, la part de dreta d'aquesta última inclusió és finita mentre que la de l'esquerra és infinita (perquè $U \neq \varnothing$), que no pot ser.
A continuació enunciarem dues caracteritzacions dels espais T_2.

Teorema 1.8. Sigui (X,τ) un espai topològic. Són equivalents:

1. (X,τ) és T_2.
2. Per a tot $x \in X$, $\{x\} = \bigcap_{N \in \mathcal{N}_x} \mathrm{Cl}(N)$.
3. La diagonal $\Delta(X) := \{(x,x) \in X \times X\} \subset X \times X$ és tancada.

Demostració. Demostrarem $1 \iff 2$ i $1 \iff 3$.

$1 \implies 2$: Sabem que (X,τ) és T_2 i volem demostrar que per a tot $x \in X$, $\{x\} = \bigcap_{N \in \mathcal{N}_x} \mathrm{Cl}(N)$. Primer de tot, observem que $\bigcap_{N \in \mathcal{N}_x} \mathrm{Cl}(N) = \bigcap_{\substack{U \in \tau \\ x \in U}} \mathrm{Cl}(U)$ pel que hem comentat en la demostració del teorema 1.5.

Així doncs, provarem que per a tot $x \in X$, $\{x\} = \bigcap_{\substack{U \in \tau \\ x \in U}} \mathrm{Cl}(U)$. Suposem que $y \in X$ és tal que $y \neq x$ i $y \in \bigcap_{\substack{U \in \tau \\ x \in U}} \mathrm{Cl}(U)$. És a dir, y està contingut en la clausura de tot obert que conté x. Per tant, y és adherent a U $\forall U \in \tau$ tal que $x \in U$. Per la definició de punt adherent, això implica que $\forall V \in \tau$ tal que $y \in V$, $V \cap U \neq \varnothing$ i això $\forall U \in \tau$ tal que $x \in U$. És a dir, no existeixen oberts U, V tals que $x \in U$, $y \in V$ i $U \cap V = \varnothing$, que és una contradicció amb la hipòtesi que (X,τ) és T_2. Per tant, $\{x\} = \bigcap_{\substack{U \in \tau \\ x \in U}} \mathrm{Cl}(U)$.

$1 \Longleftarrow 2$: Vegem ara que (X,τ) és T_2, sabent que per a tot $x \in X$, $\{x\} = \bigcap_{N \in \mathcal{N}_x} \mathrm{Cl}(N) = \bigcap_{\substack{U \in \tau \\ x \in U}} \mathrm{Cl}(U)$.

Suposem que (X,τ) no és T_2, és a dir, existeixen $x \neq y \in X$ tals que per a tot $U, V \in \tau$ tals que $x \in U$ i $y \in V$, tenim $U \cap V \neq \varnothing$. Però llavors y és adherent a U $\forall U \in \tau$ tal que $x \in U$, és a dir, $y \in \mathrm{Cl}(U)$ $\forall U \in \tau$ tal que $x \in U$. Però llavors $y \in \bigcap_{\substack{U \in \tau \\ x \in U}} \mathrm{Cl}(U) = \{x\}$, que és una contradicció amb la hipòtesi inicial. Per tant, (X,τ) és T_2.

1 $\Longrightarrow$ 3 : Sabem que (X,τ) és T_2 i volem demostrar que per a tot $x \in X$, $\Delta(X)$ és un conjunt tancat, que és equivalent a veure que $X \times X \setminus \Delta(X)$ és un conjunt obert.

Suposem que $X \times X \setminus \Delta(X)$ no és obert. Aleshores, podem prendre $(x,y) \in (X \times X \setminus \Delta(X)) \setminus \mathrm{Int}(X \times X \setminus \Delta(X)) \neq \varnothing$. Però com que (X,τ) és T_2, $\exists U, V \in \tau$ tals que $x \in U$, $y \in V$ i $U \cap V = \varnothing$. Llavors, com que $U \cap V = \varnothing$, tenim que $U \times V \subset X \times X \setminus \Delta(X)$. D'altra banda, com que $\mathrm{Int}(X \times X \setminus \Delta(X))$ és l'obert més gran contingut en $X \times X \setminus \Delta(X)$, tenim que $U \times V \subset \mathrm{Int}(X \times X \setminus \Delta(X))$. Però llavors, $(x,y) \in U \times V \subset \mathrm{Int}(X \times X \setminus \Delta(X)) \not\ni (x,y)$ per la definició de (x,y), que és una contradicció. Per tant, $X \times X \setminus \Delta(X)$ és obert i, en conseqüència, $\Delta(X)$ és tancat.

1 $\Longleftarrow$ 3 : Vegem ara que (X,τ) és T_2, sabent que per a tot $x \in X$, $\Delta(X)$ és un conjunt tancat.

Siguin $x \neq y \in X$ dos punts diferents. Aleshores, com que $\Delta(X)$ és tancat, tenim que $X \times X \setminus \Delta(X)$ és obert i per tant $\exists U, V \in \tau$ tals que $(x,y) \in U \times V \subset X \times X \setminus \Delta(X)$. A més, $U \cap V = \varnothing$, ja que si no fos així, existiria $z \in X$ tal que $z \in U$ i $z \in V$ i llavors tindríem $(z,z) \in U \times V \subset X \times X \setminus \Delta(X) \not\ni (z,z)$ ja que $(z,z) \in \Delta(X)$. Però això últim no pot passar, per tant $U \cap V = \varnothing$ i, en conseqüència, (X,τ) és T_2.

□

2 De T_3 a T_4

Espais T_3 o regulars

Comencem donant la definició de què és un espai T_3.

Definició 2.1. Diem que un espai topològic (X,τ) és T_3 si és T_1 i donat $x \in X$ i $F \subset X$ tancat amb $x \notin F$, existeixen oberts $U, V \subset X$ tals que $x \in U$, $F \subset V$ i $U \cap V = \varnothing$.

Proposició 2.2. Tot espai topològic T_3 és T_2.

Demostració. Sigui (X,τ) un espai topològic T_3 i $x, y \in X$. Com que, per definició, (X,τ) també és T_1, sabem que existeix un obert U_0 tal que $x \in U_0$ i $y \notin U_0$. Per tant $F = X \setminus U_0$ és un tancat que no conté l'element x però sí que conté y. Per la propietat de regularitat, es té que existeixen oberts U, V tals que $x \in U$, $y \in F \subset V$ i que $U \cap V = \varnothing$. Per tant es compleix la propietat T_2[1]. □

El recíproc de la proposició és fals, és a dir, no tot espai T_2 és T_3. Vegem un exemple d'això:
Sigui $X = \mathbb{R}$ i definim el conjunt $Z := \{\frac{1}{n} : 0 \neq n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R}$. Llavors, considerem els subconjunts

$$U_n(x) = \begin{cases} (x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \setminus Z & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

Prenem $\mathcal{B} = \{U_n(x) : n \in \mathbb{N}, x \in X\}$. Vegem que la col·lecció $\mathcal{B}$ compleix les propietats per generar una topologia a la recta real, és a dir que és una base d'una topologia:

- Vegem que $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$:

  $\subset$: Sigui $x \in X \implies x \in U_1(x) \implies x \in \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$ ja que $U_1(x) \in \mathcal{B}$.

  $\supset$: És clar que $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B \subset X$ perquè $B \subset X$, $\forall B \in \mathcal{B}$.

- Vegem que $\forall U, V \in \mathcal{B}$ i $\forall x \in U \cap V$, $\exists B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset U \cap V$:

  Siguin $U_n(x)$ i $U_m(y)$ dos elements de $\mathcal{B}$. Si $U_n(x) \cap U_m(y) = \varnothing$, llavors la condició es compleix automàticament. Si $U_n(x) \cap U_m(y) \neq \varnothing$, llavors tenim diversos casos a considerar:

  - Si $x = y = 0$, aleshores $U_n(0) \cap U_m(0) = U_{\max\{m,n\}}(0) \in \mathcal{B}$.

[1] Notem que de la manera que està feta aquesta demostració, realment no cal considerar la propietat T_1 per poder assegurar que T_3 és una propietat més restrictiva que T_2. Amb la propietat T_0 ja ens és suficient, ja que únicament hem necessitat un obert per a la parella x, y.

- Si, sense pèrdua de generalitat, $x = 0$ i $y \neq 0$, prenem $z \in U_n(0) \cap U_m(y)$. Aleshores, sabem que existeix $k \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{k+1} < |z| < \frac{1}{k}$. Definim $r := \min\{\left|\frac{1}{k} - |z|\right|, \left|\frac{1}{k+1} - |z|\right|, \left|z - \left(y - \frac{1}{m}\right)\right|, \left|y + \frac{1}{m} - z\right|\}$. Aleshores, $\forall n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n_0} < r$ tenim que $z \in U_{n_0}(z) \subset U_n(0) \cap U_m(y)$.
- Si $x, y \neq 0$, prenem $z \in U_n(x) \cap U_m(y)$ i definim $r := \min\{\left|z - \left(x - \frac{1}{n}\right)\right|, \left|x + \frac{1}{n} - z\right|, \left|z - \left(y - \frac{1}{m}\right)\right|, \left|y + \frac{1}{m} - z\right|\}$. Aleshores, $\forall n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n_0} < r$ tenim que $z \in U_{n_0}(z) \subset U_n(x) \cap U_m(y)$.

Per tant, $\mathcal{B}$ és base d'una topologia. Ara, si prenem el conjunt $\bigcup_{x \in \mathbb{R} \setminus (-2,2)} U_1(x) \cup U_1(0)$ que és un obert a la topologia generada per $\mathcal{B}$ al ser una unió arbitrària d'elements de la base, llavors és clar que Z és tancat, ja que el seu complementari és obert:

$$\bigcup_{x \in \mathbb{R} \setminus (-2,2)} U_1(x) \cup U_1(0) = (\mathbb{R} \setminus [-1,1]) \cup ((-1,1) \setminus Z) = \mathbb{R} \setminus Z$$

També és clar, per la definició de Z, que $0 \notin Z$.
Ara considerem un obert U tal que $Z \subset U$. Com Z no és obert, tenim que $U \neq Z$. Considerem també un obert V tal que $0 \in V$. Llavors, $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $U_n(0) \subset V$. Com U és obert i $\frac{1}{n} \in Z \subset U \implies \exists x \in \mathbb{R}$ i $m \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} \in U_m(x) \subset U$. Llavors, sigui $0 < \epsilon < r = \min\{\left|\frac{1}{n} - \left(x - \frac{1}{m}\right)\right|, \left|x + \frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right|\}$ i $\epsilon \notin Z$. Fixem-nos, en efecte, que r no pot ser 0, ja que això implicaria que $\frac{1}{n}$ està a un dels extrems de $U_m(x)$, que no pot ser perquè $U_m(x)$ és obert i $\frac{1}{n} \in U_m(x)$. Llavors, tenim que $\frac{1}{n} - \epsilon \in U_n(0) \subset V$. A més, és clar que $\frac{1}{n} - \epsilon \in U_m(x)$. Per tant, $U \cap V \supset U_m(x) \cap U_n(0) \neq \varnothing$.
Per tant, amb això acabem de veure un exemple d'una topologia que és de Hausdorff, ja que si $x \neq y \in \mathbb{R}$ (suposem sense pèrdua de generalitat que $x < y$), aleshores $\exists n, m \in \mathbb{N}$ tals que $x + \frac{1}{n} < y - \frac{1}{m}$ i, per tant, $(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}) \cap (y - \frac{1}{m}, y + \frac{1}{m}) = U_n(x) \cap U_m(x) = \varnothing$. És a dir, hem trobat oberts $U_n(x)$, $U_m(y)$ tals que $x \in U_n(x)$, $y \in U_m(y)$ i $U_n(x) \cap U_m(y) = \varnothing$. Però aquest espai topològic no és T_3, perquè si prenem el punt 0 i el tancat Z, tenim que $0 \notin Z$ però hem vist que per a tot obert V tal que $0 \in V$, $Z \cap V \neq \varnothing$. Per tant per a tot obert U tal que $Z \subset U$, tindrem que $U \cap V \neq \varnothing$.
A continuació enunciarem una caracterització del espais T_3.

Teorema 2.3. Sigui (X, τ) un espai topològic T_1. Són equivalents:

1. (X, τ) és T_3.
2. Per tot $x \in X$ i $x \in U \subset X$ obert, existeix un obert $V \subset X$ tal que $x \in V \subset \mathrm{Cl}(V) \subset U$.

Demostració. Vegem les dues implicacions.

$1 \implies 2$: Sigui (X, τ) és T_3. Volem demostrar que per tot $x \in X$ i per a tot $x \in U \subset X$ obert, existeix un obert $V \subset X$ tal que $x \in V \subset \mathrm{Cl}(V) \subset U$.

Sigui $x \in X$ i $U \subset X$ obert tal que $x \in U$. Aleshores $X \setminus U$ és tancat i no conté x. Per tant, com que (X, τ) és T_3 existeixen oberts $V, W \in \tau$ tals que $x \in V$, $X \setminus U \subset W$ i $V \cap W = \varnothing$. Per tant, $V \subset X \setminus W$ i també $U \supset X \setminus W$ (ja que $X \setminus U \subset W$). Finalment:

$$\mathrm{Cl}(V) \subset \mathrm{Cl}(X \setminus W) = X \setminus \mathrm{Int}(W) = X \setminus W \subset U$$

Per tant, $x \in V \subset \mathrm{Cl}(V) \subset U$.

$1 \impliedby 2$: Volem demostrar que (X, τ) és T_3 sabent que per tot $x \in X$ i $x \in U \subset X$ obert, existeix un obert $V \subset X$ tal que $x \in V \subset \mathrm{Cl}(V) \subset U$.

Sigui $x \in X$ i $F \subset X$ tancat tal que $x \notin F$. Aleshores $X \setminus F$ és obert i $x \in X \setminus F$. Però llavors, per hipòtesi, existeix un obert V tal que $x \in V \subset \mathrm{Cl}(V) \subset X \setminus F$. Per tant, tenim que $x \in V$, $F \subset X \setminus \mathrm{Cl}(V)$ i $V \cap (X \setminus \mathrm{Cl}(V)) = \varnothing$. I com que $X \setminus \mathrm{Cl}(V)$ és obert, tenim que (X, τ) és T_3.

$\square$

Espais T_4 o normals

Comencem donant la definició de què és un espai T_4.

Definició 2.4. Diem que un espai topològic (X, τ) és T_4 si és T_1 i donats $F, K \subset X$ tancats disjunts, existeixen U, V oberts tals que $K \subset U$, $F \subset V$ i $U \cap V = \varnothing$.

Observem que els espais mètrics són T_4. En efecte, sigui (X, d) un espai mètric i $K, F \subset X$ tancats tals que $K \cap F = \varnothing$. Definim $\ell := d(K, F) := \inf\{d(k, f) : k \in K, f \in F\}$. Ara considerem els oberts:

$$U := \bigcup_{k \in K} B(k, \ell/3) \quad V := \bigcup_{f \in F} B(f, \ell/3)$$

Per definició tenim que $K \subset U$ i $F \subset V$. A més, $U \cap V = \varnothing$ ja que si no, existiria un $z \in U \cap V$. Però llavors, $z \in B(k_0, \ell/3)$ i $z \in B(f_0, \ell/3)$ per certs $k_0 \in K$ i $f_0 \in F$. I per tant:

$$d(k_0, f) \leq d(k_0, z) + d(z, f_0) < \frac{\ell}{3} + \frac{\ell}{3} < \ell$$

que és una contradicció amb el fet que $\ell = d(K, F)$. Per tant, $U \cap V = \varnothing$ i, per tant, (X, d) amb la topologia induïda és T_4.

Proposició 2.5. Tot espai topològic T_4 és T_3.

Demostració. Sigui (X, τ) un espai T_4. Al tenir (X, τ) la propietat T_1, sabem que $\forall x \in X$, $\{x\}$ és tancat. Llavors, si $F \subset X$ és un tancat tal que $F \cap \{x\} = \varnothing$, és a dir, $x \notin F$, per la propietat T_4, sabem que existeixen oberts U, V tals que $\{x\} \subset U$, $F \subset V$ i que $U \cap V = \varnothing$. És a dir, hem vist que per a tot $x \in X$ i $F \subset X$ tancat tal que $x \notin F$, tenim que existeixen oberts U, V tals que $x \in U$, $F \subset V$ i que $U \cap V = \varnothing$. Per tant, (X, τ) és T_3. □

A continuació enunciarem una caracterització del espais T_4.

Teorema 2.6. Sigui (X, τ) un espai topològic T_1. Són equivalents:

1. (X, τ) és T_4
2. Per tot $K \subset X$ tancat i per a tot U obert tal que $K \subset U \subset X$, existeix un obert V tal que $K \subset V \subset \mathrm{Cl}(V) \subset U$.

Demostració. Vegem les dues implicacions.

$1 \implies 2$: Suposem que (X, τ) és T_4. Volem demostrar que per tot tancat $K \subset X$ i $K \subset U \subset X$ amb U obert, existeix un obert V tal que $K \subset V \subset \mathrm{Cl}(V) \subset U$.

Sigui $K \subset X$ tancat i $U \subset X$ obert tal que $K \subset U$. Aleshores, $X \setminus U$ és tancat i $(X \setminus U) \cap K = \varnothing$. Per tant, com que (X, τ) és T_4 existeixen oberts $V, W \in \tau$ tals que $K \subset V$, $X \setminus U \subset W$ i $V \cap W = \varnothing$. Sabem que $K \subset V \subset \mathrm{Cl}(V)$ i ens falta veure que $\mathrm{Cl}(V) \subset U$. Per com que $V \cap W = \varnothing$, $V \subset X \setminus W$ i llavors:

$$\mathrm{Cl}(V) \subset \mathrm{Cl}(X \setminus W) = X \setminus \mathrm{Int}(W) = X \setminus W \subset U$$

Per tant, $K \subset V \subset \mathrm{Cl}(V) \subset U$.

$1 \impliedby 2$: Volem demostrar que (X, τ) és T_4 sabent que per tot $K \subset X$ tancat i per a tot U obert tal que $K \subset U \subset X$, existeix un obert V tal que $K \subset V \subset \mathrm{Cl}(V) \subset U$.

Siguin $F, K \subset X$ tancats tals que $F \cap K = \varnothing$. Aleshores $X \setminus F$ és obert i $K \subset X \setminus F$. Però llavors, per hipòtesi, existeix un obert V tal que $K \subset V \subset \mathrm{Cl}(V) \subset X \setminus F$. Per tant, tenim que $K \subset V$, $F \subset X \setminus \mathrm{Cl}(V)$ i $V \cap (X \setminus \mathrm{Cl}(V)) = \varnothing$. I com que $X \setminus \mathrm{Cl}(V)$ és obert, tenim que (X, τ) és T_4.

□