N_1 Suite numérique

N *Notation*

$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des nombres entiers positifs appelés **entiers naturels**.

D *Suite numérique*

Une **suite numérique**, notée (u_n) ou u, est une fonction définie sur $\mathbb{N}$. L'image de l'entier n, notée u_n (sans les parenthèses), est appelée **terme de la suite u d'indice n**. Ainsi : $\begin{array}{rccc} (u_n) : & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & n & \mapsto & u_n \end{array}$

D *Suite explicite*

Une **suite explicite** est un suite dont les termes sont de la forme : $u_n = f(n)$ ou f est une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

1 Soit u une suite numérique définie par :
$u_n = n^2$

a) Pour quelle(s) valeur(s) de n, u_n n'est pas définie.

b) Calculer les termes u_0 , u_1, ... et u_8.

c) Dans un repère, placer les points $(n; u_n)$ pour tous les entiers naturels plus petits que 8.

d) Quel est l'indice de u tel que $u_n = 12167$?

e) Quels sont les indices de u tels que $u_n \leqslant 99$?

f) Quel est l'indice de u tel que $u_n = 10$?

2 Soit u une suite numérique définie par :
$u_n = \dfrac{1}{n}$

a) Pour quelle(s) valeur(s) de n, u_n n'est pas définie.

b) Calculer les termes u_1, ... et u_5.

c) Dans un repère, placer les points $(n; u_n)$ pour tous les entiers naturels plus petits que 5.

d) Quel est l'indice de u tel que $u_n = 10^{-34}$?

e) Quels sont les indices de u tels que $u_n \geqslant 1$?

3 Soit u une suite numérique définie par :
$u_n = \sqrt{n}$

a) Pour quelle(s) valeur(s) de n, u_n n'est pas définie.

b) Calculer les termes u_0 , u_1, u_4, u_9, u_{16}, u_{25}

c) Dans un repère, placer les points $(n; u_n)$ pour tous les entiers naturels correspondants à la question précédente.

d) Quel est l'indice de u tel que $u_n = 12167$?

e) Quels sont les indices de u tels que $u_n \leqslant 99$?

f) Quel est l'indice de u tel que $u_n = 10$?

4 Soit u une suite numérique correspondant aux nombres impairs.

a) Donner la fonction f telle que $u_n = f(n)$.

b) Calculer les 10 premiers termes de la suite u.

c) Dans un repère, placer les 10 points correspondants aux indices de la question précédente.

d) Ces points sont-ils alignés ? Justifier.

N_2 Relation de récurrence

D *Définition*

Une suite numérique u est définie par une **relation de récurrence** quand son premier terme est connu et le terme u_{n+1} peut être calculé en fonction du terme u_n.

1 Soit u une suite numérique définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 3u_n - 2$

a) Calculer les termes u_0 , u_1, ... et u_8.

b) Dans un repère, placer les points $(n; u_n)$ pour tous les entiers naturels plus petits que 8.

2 Soit u une suite numérique définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 3$

a) Déterminer la fonction f telle que $u_{n+1} = f(u_n)$

b) Dans un même repère, tracer la courbe représentative de f puis la droite d'équation $y = x$. Enfin, placer les termes u_1, u_2, u_3

N_3 Suite arithmétique : relation de récurrence

D *Définition*

Une suite u est **arithmétique** si il existe un réel r tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\boxed{u_{n+1} = u_n + r \text{ ou } u_{n+1} - u_n = r}$$

Le réel r est la **raison** de la suite arithmétique u.

Les suites (u_n) suivantes sont-elles arithmétiques ? Si oui donner leur raison.

1. u est une suite numérique définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + 2$.
2. u est une suite numérique définie par : $u_1 = 2$ et $u_{n+1} = u_n - 4$.
3. u est une suite numérique définie par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_n^2 + 1$.
4. u est une suite numérique définie par : $u_n = -5n + 1$ pour $n \in \mathbb{N}$.
5. u est une suite numérique définie par : $u_n = 4n^2 + 3$ pour $n \in \mathbb{N}$.
6. u est une suite numérique définie par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_n + 2n$.

N_4 Suite arithmétique : forme explicite

P *Propriétés*

Si la suite u est arithmétique de raison r alors pour un entier k et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\boxed{u_n = u_k + (n-k)r \text{ et pour } k = 0 \text{ ; } u_n = u_0 + nr}$$

Déterminer la forme explicite des suites suivantes :

1. (u_n) est une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison -2.
2. u est une suite arithmétique telle que $u_2 = 8$ et de raison 5.
3. (u_n) est une suite arithmétique de raison -1 et telle que $u_5 = 10$.
4. u est une suite arithmétique telle que $u_2 = 3$ et $u_3 = 8$.
5. (u_n) est une suite arithmétique telle que $u_5 = 38$ et $u_8 = 21$.

N_5 Suite géométrique : relation de récurrence

D *Définition*

Une suite u est **géométrique** si il existe un réel $q \neq 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\boxed{u_{n+1} = q \times u_n = qu_n \text{ ou } \frac{u_{n+1}}{u_n} = q}$$

Le réel q est la **raison** de la suite géométrique u.

Les suites (u_n) suivantes sont-elles géométriques ? Si oui donner leur raison.

1. u est une suite numérique définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2u_n$.
2. u est une suite numérique définie par : $u_1 = 2$ et $u_{n+1} = -u_n$.
3. u est une suite numérique définie par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_n^2 + 2u_n$.
4. u est une suite numérique définie par : $u_n = 10^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.
5. u est une suite numérique définie par : $u_n = (-1)^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.
6. u est une suite numérique définie par : $u_n = 4n^2$ pour $n \in \mathbb{N}$.
7. u est une suite numérique définie par : $u_n = \dfrac{2^{n+1}}{3^{2n}}$ pour $n \in \mathbb{N}$
8. u est une suite numérique définie par : $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = u_n \times 2n$.

N_6 Somme des n premiers entiers

Démontrer que la somme S des n premiers entiers est égale à :

$$\boxed{S=\sum_{k=0}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}}$$

N_7 Suite géométrique : forme explicite

Propriétés

Si la suite u est géométrique de raison q alors pour un entier k et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\boxed{u_n = u_k \times q^{n-k} \text{ et pour } k=0 \text{ ; } u_n = u_0 \times q^n}$$

Déterminer la forme explicite des suites suivantes :

1. (u_n) une suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison -2.
2. u est une suite géométrique telle que $u_2 = 8$ et de raison 3.
3. (u_n) est une suite géométrique de raison -1 et telle que $u_5 = -8$.
4. u est une suite géométrique telle que $u_2 = 28$ et $u_3 = 63$.
5. (u_n) est une suite géométrique telle que $u_5 = -243$ et $u_8 = 6521$.

N_8 Somme des premières puissance de q

Démontrer que la somme S des n premières puissance de q, réel non nul et différent de 1, est égale à :

$$\boxed{S=\sum_{k=0}^{n} q^k = 1+q+q^2+\cdots+q^n=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}}$$

n°1 Est-ce arithmétique ?

Déterminer si les suites (u_n), définies pour $n \in \mathbb{N}$ sont arithmétiques. Si oui, donner le premier terme et la raison.

1. $4n+7$
2. n^2+1
3. $\dfrac{n}{2}+5$
4. 8^n
5. $\dfrac{n+1}{n}$
6. $\dfrac{2n+5}{2}$
7. $\dfrac{n^2+3n+2}{n+2}$
8. $\dfrac{n^2+1}{n+1}$

n°2 Est-ce géométrique ?

Déterminer si les suites (u_n), définies pour $n \in \mathbb{N}$ sont géométriques. Si oui, donner le premier terme et la raison.

1. -4×3^n
2. 3
3. $\dfrac{3^n}{2^{n+2}}$
4. 8^{n+2}
5. $(-2)^n$
6. $4n$
7. $\dfrac{2}{n}-3^n$
8. 4^{n-1}

n°3 Représentation graphique

Dans un repère, représenter graphiquement les cinq premiers termes des suites définies explicitement par :

1. $5-2n$
2. $\dfrac{n-1}{n+1}$
3. $\dfrac{1}{2}n^2-1$

$n°4$ *Ni, ni*

Soit (u_n) la suite définie pour $n \in \mathbb{N}$ par : $u_{n+1} = 2u_n + 5$ et $u_0 = 1$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. Montrer que (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.
3. On pose $v_n = u_n + 5$ pour $n \in \mathbb{N}$. Montrer que (v_n) est une suite géométrique. Donner sa raison et son premier terme.
4. Donner la forme explicite de (v_n).
5. En déduire la forme explicite de (u_n).

$n°5$ *Suite u*

Soit (u_n) la suite définie pour $n \in \mathbb{N}$ par : $u_{n+1} = 2u_n + 5$ et $u_0 = 1$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. Montrer que (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.
3. On pose $v_n = u_n + 5$ pour $n \in \mathbb{N}$. Montrer que (v_n) est une suite géométrique. Donner sa raison et son premier terme.
4. Donner la forme explicite de (v_n).
5. En déduire la forme explicite de (u_n).

$n°6$ *Une autre suite u*

Soit (u_n) la suite définie pour $n \in \mathbb{N}$ par : $u_{n+1} = -3u_n + 8$ et $u_0 = 6$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. On pose $v_n = u_n - 2$ pour $n \in \mathbb{N}$. Montrer que (v_n) est une suite géométrique. Donner sa raison et son premier terme.
3. Donner la forme explicite de (v_n).
4. En déduire la forme explicite de (u_n).

$n°7$ *Augmentation*

La population d'une ville augmente de 1% chaque année. En 2000, la ville comportait $110\,000$ habitants. En 2014, combien la ville comportait-elle d'habitants ?

$n°8$ *Vitesse des tornades*

A partir des mesures relevées lors d'observations de tornades, des météorologues ont admis la règle suivante : la vitesse des vents dans les tornades diminue régulièrement de 10% toutes les 5 minutes.
Lors de la formation d'une tornade, on a mesuré la vitesse des vents par un radar météorologique et on a trouvé une vitesse initiale de $300\ kmh^{-1}$.

Soit la suite (u_n) dont le terme u_n correspond à la vitesse des vents après $5 \times n$ minutes. On a donc $u_0 = 300$ et u_1 la vitesse des vents après 5 minutes et u_2 la vitesse des vents après 10 minutes.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3. Que représente u_3 dans le contexte de l'exercice ?
2. Démontrer que (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,9$.
3. Déterminer sa forme explicite et sa forme récurrente
4. Ecrire un algorithme permettant de déterminer le plus entier n pour que la vitesse des vents de cette tornade soit inférieure ou égale à $150\ kmh^{-1}$
5. En dressant un tableau donner la valeur de n de la question précédente.