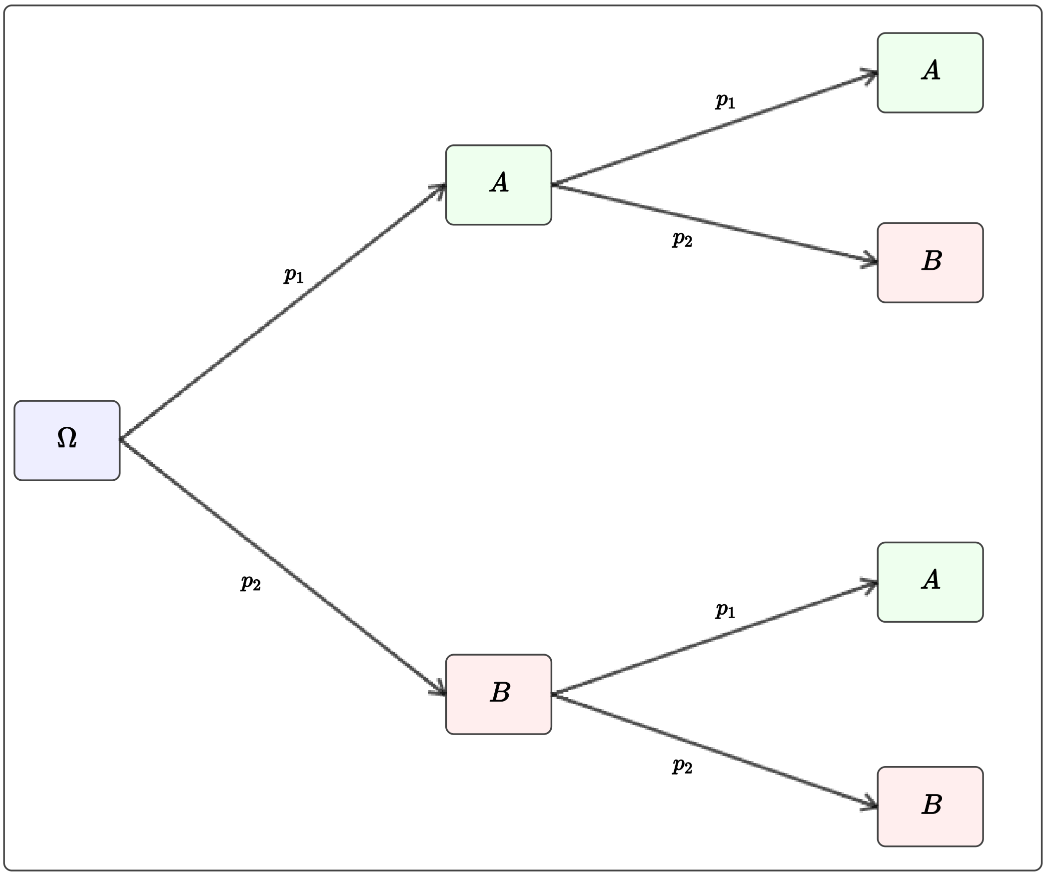
N_1 *Répétitions indépendantes*

Arbre pondéré

Dans le cadre où on répète n fois de suite, de manière **identique** et de façon **indépendante** la même expérience aléatoire, les règles principales des arbres pondérés sont :
• chaque chemin de l'arbre correspond à un résultat dont la probabilité est le produit des probabilités inscrites sur les branches qui constituent le chemin.
• la probabilité d'un événement est la somme des probabilités associées aux chemins qui permettent de réaliser l'événement.



On dispose d'une urne contenant 100 boules : 40 boules rouges (R) et 60 boules noires (N). On effectue trois tirages successifs avec remise.
Il s'agit bien de la même expérience aléatoire répétée 3 fois de manière **identique** (avec remise) et de façon **indépendante** (le résultat du premier tirage n'influence pas le deuxième tirage etc...).

1. Lors du premier tirage, quelle est la probabilité d'obtenir une boule Noire ?
2. Lors du premier tirage, quelle est la probabilité d'obtenir une boule Rouge ?
3. On suppose que lors du premier tirage, une boule Rouge a été choisie :
   a) Quelle est la probabilité d'obtenir une boule Noire lors du deuxième tirage ?
   b) Quelle est la probabilité d'obtenir une boule Rouge lors du deuxième tirage ?
4. On suppose que lors du premier tirage, une boule Noire a été choisie et lors du deuxième tirage une boule Rouge a été choisie :
   a) Quelle est la probabilité d'obtenir une boule Noire lors du dernier tirage ?
   b) Quelle est la probabilité d'obtenir une boule Rouge lors du dernier tirage ?
5. Construire un arbre pondéré représentant les trois tirages.
6. Quelle est la probabilité d'obtenir trois boules rouges ?
7. Quelle est la probabilité d'obtenir, dans cet ordre, une boule noire, une boule rouge et une boule noire ?
8. Quelle est la probabilité d'obtenir, au bout des trois tirages, deux boules rouges et une boule noire ?

N_2 *Loi de Bernoulli*

D *Epreuve de Bernouilli*

Lorsque l'univers fini Ω d'une expérience aléatoire est de cardinal 2 c'est à dire que l'expérience aléatoire n'a que 2 issues, on parle d'une **épreuve de Bernoulli**.

On note ces deux issues S (pour Succès) et $\overline{S}$ (pour échec). Si l'issue S a une probabilité p $(0 \leqslant p \leqslant 1)$, on peut écrire :

Issue	S	$\overline{S}$
Probabilité	p	$1-p$

D *Loi de Bernouilli*

La variable aléatoire X prenant la valeur 1 en cas de succès et 0 n'en cas d'échec suit la **loi de Bernoulli de paramètre** p :

Issue	S	$\overline{S}$
X	1	0
Loi	$P(X=1)=p$	$P(X=0)=1-p$

P *Propriétés*

Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre p :

- $E(X)=p$
- $V(X)=p(1-p)$
- $\sigma(X)=\sqrt{p(1-p)}$

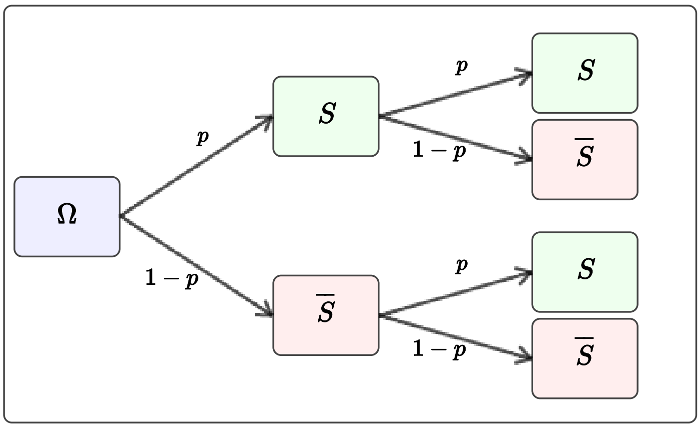
Chaque matin, Alain passe à la boulangerie. Une fois sur cinq, il prend deux pains au chocolat et, le reste du temps, il en prend un seul.

1. On étudie le nombre de viennoiseries qu'Alain a pris ce matin. Expliquer pourquoi on est dans la situation d'une épreuve de Bernoulli.
2. Alain paie toujours avec une pièce de 2 €. On note X la variable aléatoire donnant la somme d'argent qui lui est rendue ce matin. Quelle loi suit X sachant qu'un pain au chocolat coûte 1 € ?

N_3 *Schéma de Bernoulli*

D *Epreuve de Bernouilli*

On considère une épreuve de Bernoulli dont la probabilité de succès est p. La répétition n fois (où $n \in \mathbb{N}^*$), de façon indépendante, de cette épreuve de Bernoulli est appelée **schéma de Bernoulli** de paramètres n et p.



1. Construire une arbre pondéré correspondant à un schéma de Bernoulli de paramètres 1 et $0,25$.
2. Construire une arbre pondéré correspondant à un schéma de Bernoulli de paramètres 2 et $0,6$.
3. Construire une arbre pondéré correspondant à un schéma de Bernoulli de paramètres 3 et $0,4$.
4. Construire une arbre pondéré correspondant à un schéma de Bernoulli de paramètres 4 et $0,1$.

N_4 Coefficient binomial

D *Coefficient binomial*

On considère un schéma de Bernoulli de paramètres n et p et un entier k avec $0 \leqslant k \leqslant n$. L'entier $\binom{n}{k}$, appelé **coefficient binomial** et se lisant "k parmi n", désigne le nombre de chemins de l'arbre correspondant à k succès.

1. On considère un schéma de Bernoulli de paramètres 2 et $0,3$. Construire un arbre pondéré puis déterminer $\binom{2}{1}$ et $\binom{2}{2}$

2. On considère un schéma de Bernoulli de paramètres 3 et $0,9$. Construire un arbre pondéré puis déterminer $\binom{3}{1}$, $\binom{3}{2}$ et $\binom{3}{3}$

3. On considère un schéma de Bernoulli de paramètres 4 et $0,4$. Construire un arbre pondéré puis déterminer $\binom{4}{1}$, $\binom{4}{2}$, $\binom{4}{3}$ et $\binom{4}{4}$

4. Déterminer à l'aide de la calculatrice : $\binom{15}{6}$, $\binom{15}{12}$, $\binom{15}{9}$, $\binom{20}{10}$, $\binom{20}{5}$

N_5 Propriétés des coefficients binomiaux

N *Notation factoriel n*

Pour un entier naturel $n \geqslant 1$, le nombre $1 \times 2 \times 3 \cdots \times n$ se dit **factoriel** n et se note $n!$:
$n! = 1 \times 2 \times 3 \cdots \times n$

P *Propriétés des coefficients binomiaux*

Soient n et k deux entiers naturels avec $0 \leqslant k \leqslant n-1$:

- $\binom{0}{0} = \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
- $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$
- $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

1. Pour $0 \leqslant n \leqslant 6$ et $0 \leqslant k \leqslant n$, construire le **triangle de Pascal** donnant les coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$.

2. Calculer $7!$; $8!$

3. Calculer $\binom{5}{3}$, $\binom{6}{3}$ et $\binom{7}{4}$

4. Donner $\binom{9}{0}$ et $\binom{9}{9}$

5. On donne $\binom{9}{3} = 84$ et $\binom{9}{2} = 36$. Donner $\binom{9}{6}$ et $\binom{9}{7}$ puis $\binom{10}{7}$

N_6 Loi binomiale

D P *Loi binomiale*

On considère un schéma de Bernoulli de paramètres n et p. On dit que la variable aléatoire X donnant le nombre de succès obtenus sur les n épreuves suit la **loi binomiale** de paramètres n et p, notée $\mathfrak{B}(n;p)$.

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathfrak{B}(n;p)$:

$$\boxed{P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}}$$

La variable aléatoire X suit $\mathfrak{B}(6;0,4)$. A l'aide de la calculatrice, déterminer :

1. $P(X=2)$
2. $P(X=0)$
3. $P(X \leqslant 4)$
4. $P(X \leqslant 6)$
5. $P(X > 3)$
6. $P(X < 8)$

N_7 Propriétés de la loi binomiale

P *Propriétés*

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathfrak{B}(n;p)$:

$$\boxed{E(X) = np \quad V(X) = np(1-p) \text{ et } \sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}}$$

1. La variable aléatoire X suit $\mathfrak{B}(8;0,3)$. Déterminer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.
2. La variable aléatoire Y suit $\mathfrak{B}(90;0,01)$. Déterminer $E(Y)$, $V(Y)$ et $\sigma(Y)$.
3. La variable aléatoire Z suit $\mathfrak{B}(10;0,9)$. Déterminer $E(Z)$, $V(Z)$ et $\sigma(Z)$.
4. La variable aléatoire T suit $\mathfrak{B}(3;0,99)$. Déterminer $E(T)$, $V(T)$ et $\sigma(T)$.

N_8 Intervalle de fluctuation

D *Intervalle de fluctuation*

Soient X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathfrak{B}(n;p)$ et a et b deux réels. On dit que $[a;b]$ est un **intervalle de fluctuation au seuil de 95% ou $0,95$** du nombre de succès quand :
$P(X \in [a;b]) \leqslant 0,95$

- Cela signifie que quand on réalise l'expérience, il y a plus de 95% de chance que le nombre de succès soit dans l'intervalle $[a;b]$.
- On peut définir de la même manière un intervalle de fluctuation au seuil de 99%.
- Pour un seuil donné, il existe plusieurs intervalles de fluctuation.

P *Propriété fondamentale*

L'intervalle $[a;b]$ où :
- a est le plus entier tel que $P(X \leqslant a) > 0,025$
- b est le plus entier tel que $P(X \leqslant b) \geqslant 0,975$

est un **intervalle de fluctuation au seuil de** 95%.

1. On considère une variable aléatoire X suivant la loi $\mathfrak{B}(10;0,6)$. Donner l'intervalle de fluctuation au seuil de 95% du nombre de succès.
2. On considère une variable aléatoire Y suivant la loi $\mathfrak{B}(9;0,1)$. Donner l'intervalle de fluctuation au seuil de 95% du nombre de succès.
3. On considère une variable aléatoire Z suivant la loi $\mathfrak{B}(98;0,7)$. Donner l'intervalle de fluctuation au seuil de 95% du nombre de succès.
4. On considère une variable aléatoire T suivant la loi $\mathfrak{B}(500;0,35)$. Donner l'intervalle de fluctuation au seuil de 95% du nombre de succès.

N_9 *Intervalle de fluctuation et fréquence*

Fréquence

Soient X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathfrak{B}(n;p)$ et a et b deux réels. Pour la variable aléatoire $F = \dfrac{1}{n}X = \dfrac{X}{n}$, donnant la fréquence de succès, l'intervalle $\left[\dfrac{a}{n};\dfrac{b}{n}\right]$ est un intervalle de fluctuation au seuil de 95% de cette fréquence F quand $[a;b]$ est aussi un intervalle de fluctuation au seuil de 95% pour X.

Application

On considère une population dans laquelle la proportion d'un certain caractère est p. Si la population est suffisamment grande, quand on prélève un échantillon de n individus, on peut considérer que le nombre d'individus ayant le caractère suit une **loi binomiale** de paramètres n et p. Ainsi, l'intervalle de fluctuation au seuil de 95% :

- du nombre d'individus ayant le caractère dans l'échantillon est $[a;b]$
- de la fréquence du caractère dans l'échantillon est $\left[\dfrac{a}{n};\dfrac{b}{n}\right]$

1. On considère une variable aléatoire X suivant la loi $\mathfrak{B}(39;0,01)$. Donner l'intervalle de fluctuation au seuil de 95% de la fréquence de succès.
2. On considère une variable aléatoire Y suivant la loi $\mathfrak{B}(100;0,95)$. Donner l'intervalle de fluctuation au seuil de 95% de la fréquence de succès.
3. On considère une variable aléatoire T suivant la loi $\mathfrak{B}(50;0,5)$. Donner l'intervalle de fluctuation au seuil de 95% de la fréquence de succès.

$n°1$ *Dans une usine*

Une usine produit des grille-pain, certains étant défectueux, et on suppose que la probabilité qu'un grille-pain soit défectueux est égale à $0,03$. On prélève au hasard un échantillon de 100 grille-pain dans la production d'une journée et on admet que cette production est suffisamment importante pour que l'on assimile ce prélèvement à un tirage avec remise de 100 grille-pain. On considère la variable aléatoire X qui, à ce prélèvement de 100 grille-pain, associe le nombre de grille-pain défectueux. Tous les résultats seront arrondis au centième.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Quelle est la probabilité qu'il y ait 96 grille-pain en bon état dans ce prélèvement ?
3. Quelle est la probabilité de l'événement "au moins trois grille-pain sont défectueux" ?
4. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X. Interpréter ce résultat dans le cadre de l'énoncé.
5. Calculer $P(X \leqslant E(X))$.

$n°2$ *Filles et garçons*

D'après des études statistiques, il naît plus de garçons que de filles en France. Lors d'une naissance, la probabilité que le bébé soit un garçon est de $0,51$. Pour une famille de six enfants (on suppose qu'il n'y a pas de jumeaux), on note X la variable aléatoire donnant le nombre de filles.

1. Déterminer la loi de probabilité de X. Déterminer la probabilité que cette famille n'ait que des garçons.
2. Déterminer la probabilité que cette famille ait autant de garçons que de filles.

$n°3$ *Etudiants en mathématiques*

Dans une promotion de 123 étudiants en mathématiques, 7 ont déclaré ne pas pratiquer d'activité sportive régulière. Cette promotion est-elle représentative de la population globale des étudiants dans laquelle 22% des individus ont une activité sportive régulière ?

$n°4$ Ascenseur en panne

Un ascenseur tombe en panne avec une probabilité de $0,015$ chaque jour et une réparation coûte 500 €. On suppose que la panne (ou non) de l'ascenseur est indépendante de celles des jours précédents.

1. Quelle est la probabilité que l'ascenseur tombe exactement une fois en panne durant le mois de janvier ?
2. En moyenne, combien peut-on prévoir de dépenses de réparation pour une année ?

$n°5$ Donneurs de sang

39% de la population française est du groupe sanguin A+. On cherche à savoir si cette proportion est la même parmi les donneurs de sang. On note X la variable aléatoire donnant le nombre de personnes de groupe A+ dans un échantillon de 183 personnes prises au hasard dans la population française.

1. Sous quelle hypothèse X suit-elle une loi binomiale ? Pourquoi cette hypothèse est-elle raisonnable ? On admet que cette hypothèse est vérifiée, préciser alors les paramètres de X.
2. On interroge 183 donneurs de sang et, parmi eux, 34% sont du groupe A+. Les donneurs de sang sont-ils représentatifs de la population française sur ce critère ?

$n°6$ Porteurs de lunettes

70% des Français portent des lunettes (source : ifop).

1. On considère la variable aléatoire X donnant le nombre de porteurs de lunettes dans un échantillon de 200 Français pris au hasard. Quelle loi suit X ? Justifier.
2. En déduire l'intervalle de fluctuation au seuil de 95% du nombre de porteurs de lunettes dans cet échantillon puis de la fréquence correspondante.
3. On se place dans une rue piétonne dans laquelle, sur 200 passants, 146 portent des lunettes. Cette rue est-elle représentative de la population sur ce critère ?

$n°7$ Jeux d'échec

Lamine joue aux échecs contre un ordinateur et la probabilité qu'il gagne une partie est $0,65$. Il décide de jouer sept parties contre l'ordinateur. On suppose que le résultat de chaque partie est indépendant des autres. On note X la variable aléatoire donnant le nombre de parties qu'il gagne contre l'ordinateur sur les sept.

1. Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres n et p.
2. Quelle est la probabilité qu'il gagne exactement trois parties ?
3. Quelle est la probabilité qu'il gagne plus de la moitié des parties ?
4. Il décide de changer le niveau de difficulté en "expert" et la probabilité qu'il gagne une partie contre l? ordinateur devient $0,05$. Il décide de jouer à nouveau une série de sept parties contre l'ordinateur. Quelle est la probabilité qu'il en gagne au moins une ?

$n°8$ Malformation cardiaque

En utilisant sa base de données, la sécurité sociale estime que 10% de la population française présente à la naissance une malformation cardiaque de type anévrisme. Elle décide alors de lancer une enquête de santé publique, sur ce problème d'anévrisme, sur un échantillon de 400 personnes, prises au hasard dans la population française. On note X la variable aléatoire comptabilisant le nombre de personnes de l'échantillon présentant une malformation cardiaque de type anévrisme. On considère la variable aléatoire F, définie par $F = \frac{X}{400}$.

1. Définir la loi de la variable aléatoire X. Déterminer $P(X = 35)$.
2. Déterminer la probabilité que 30 personnes de ce groupe, au moins, présentent une malformation cardiaque de type anévrisme.
3. Déterminer l'intervalle de fluctuation de la variable aléatoire F au seuil de 95%. Dans l'échantillon considéré, 60 personnes présentent une malformation cardiaque de type anévrisme. Que peut-on dire ?