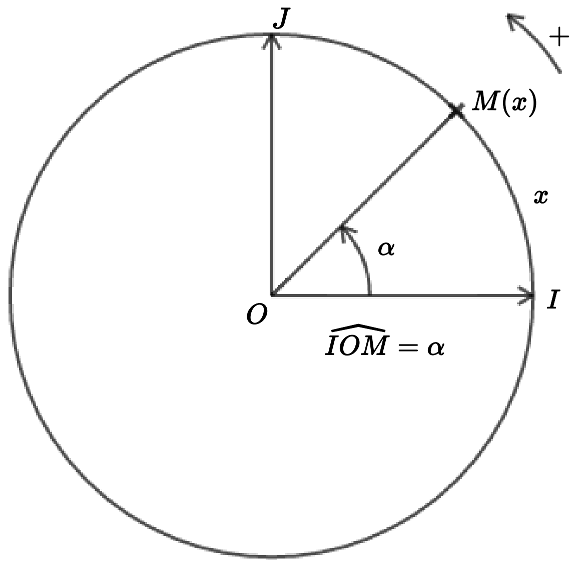
N_1 *Cercle trigonométrique*

D *Définition*

Dans un repère orthonormé $(O; I; J)$, le **cercle trigonométrique** $(\mathcal{C})$ est le cercle de centre O et de rayon 1. Ce cercle est muni d'un sens de parcours appelé **sens direct** (sens inverse des aiguilles d'une montre).
La mesure en **radian** d'un angle correspond à la longueur de l'arc du cercle trigonométrique qu'il intercepte. La mesure en radian est **proportionnelle** à la mesure en degré.

Pour repérer un point M du cercle trigonométrique, on enroule autour du cercle un axe orienté, gradué, d'origine le point I. On peut alors associer, au point M, un réel x, abscisse d'un point de l'axe qui vient se superposer au point M.
Quand on fait un tour alors on se retrouve avec le même point sur le cercle trigonométrique. De ce fait le même point M est associé aux réels x; $x + 2\pi$; $x - 2\pi$; $x + k \times 2\pi$ et $x - k \times 2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$



1. Convertir $\dfrac{\pi}{5}$, $\dfrac{5\pi}{2}$ et $\dfrac{-\pi}{4}$ en degré puis les placer sur le cercle trigonométrique.
2. Placer sur le cercle trigonométrique $-\frac{\pi}{3}$, $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{11\pi}{8}$, $-\frac{5\pi}{8}$ et $\frac{17\pi}{6}$.
3. Soit un point A du cercle trigonométrique associé au nombre $-\dfrac{\pi}{2}$. Donner quatre autres nombres qui correspondent au même point A.

N_2 *Angles orientés*

D *Angles orientés*

Soient deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. Soient deux points M et N du cercle trigonométrique tels que : $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires et de même sens et $\overrightarrow{ON}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires et de même sens. L'angle orienté, noté $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, entre $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ correspond à l'angle formé entre les demi-droites $[OM)$ et $[ON)$.

P *Propriétés*

Un angle orienté à une infinité de mesures différentes en effet pour $k \in \mathbb{Z}$: $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) + k \times 2\pi$

L'angle orienté $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ a une **unique** mesure α dans l'intervalle $]-\pi; \pi]$ appelée **mesure principale**. On a donc pour $k \in \mathbb{Z}$: $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \alpha + k \times 2\pi$ et pour simplifier $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \alpha$

1. Sur le cercle trigonométrique, placer les points A, B, C et D tels que $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA}) = \dfrac{-\pi}{4}$, $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \dfrac{12\pi}{4}$, $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) = \dfrac{\pi}{2}$ et $(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}) = -\dfrac{21\pi}{2}$.
2. Déterminer la mesure principale des angles orientés $-\frac{7\pi}{5}$, $-\frac{18\pi}{4}$, $\frac{4\pi}{3}$, $-\frac{7\pi}{10}$, $-\frac{21\pi}{4}$, $\frac{37\pi}{7}$, $-\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{23\pi}{10}$.
3. Tracer un carré $ABCD$ de centre O puis donner une mesure des angles orientés $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA})$, $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC})$, $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA})$, $(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AD})$, $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD})$ et $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$

N_3 Propriétés des angles orientés

P *Propriétés*

- $(\vec{u}, \vec{v}) = -(\vec{u}, \vec{v})$
- $(-\vec{u}, -\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v})$
- $(-\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + \pi$
- $(\vec{u}, -\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + \pi$
- $(k\vec{u}, k'\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v})$ si $kk' > 0$
- $(k\vec{u}, k'\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + \pi$ si $kk' < 0$

P *Relation de Chasles*

Soient trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ non nuls :

$$\boxed{(\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{w})}$$

P *Colinéarité*

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ ou $(\vec{u}, \vec{v}) = \pi$.

Soit A, B, C et D quatre points tels que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = -\dfrac{\pi}{5}$ et $\overrightarrow{BD} = -2\overrightarrow{AC}$ Donner la mesure principale des angles orientés :

1. $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC})$, $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA})$, $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA})$.
2. $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD})$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BD})$

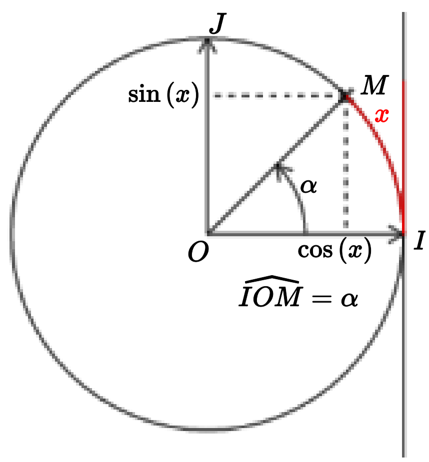
N_4 Coordonnées et cercle trigonométrique

D *Définition*

On se place dans un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OJ})$. Soit M un point sur le cercle trigonométrique tel que $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}) = x$ (x est donc la mesure principale de l'angle vecteur $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$) alors :

$M\Big(\cos(x); \sin(x)\Big)$ ou $M\Big(\cos x; \sin x\Big)$ ou encore

$M\Big(\cos(\alpha); \sin(\alpha)\Big)$ ou $M\Big(\cos\alpha; \sin\alpha\Big)$



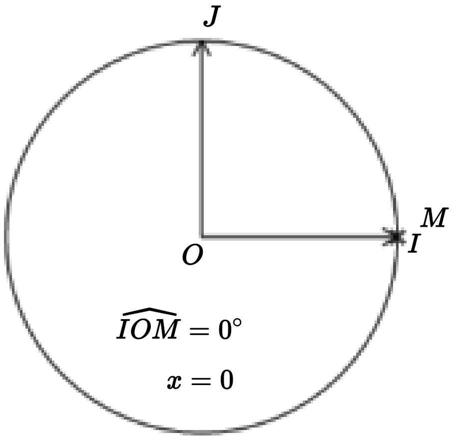
Pour $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{Z}$:

- $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$
- $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$
- $\cos(x + k \times 2\pi) = \cos x$ et $\sin(x + k \times 2\pi) = \sin x$
- $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$

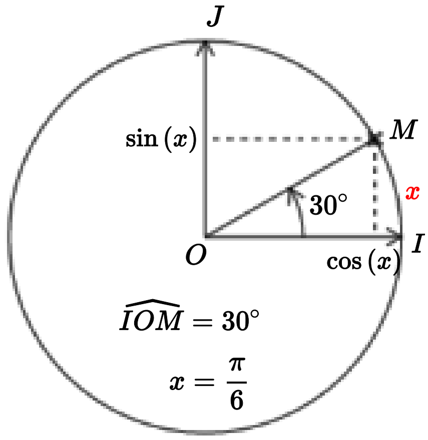
1. Démontrer que $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$.
2. Soient A et B tels que $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA}) = -\dfrac{3\pi}{4}$ et $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}) = \dfrac{\pi}{5}$. Donner les coordonnées de A et B.
3. Démontrer que $\cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$.
4. Calculer $\sin\dfrac{\pi}{3}$.
5. Démontrer que $\cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

N_5 *Valeurs usuelles de cosinus et sinus*

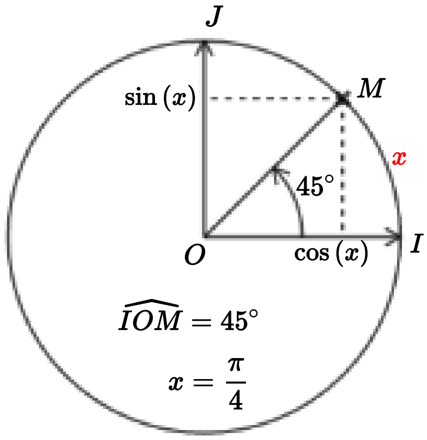
Propriétés



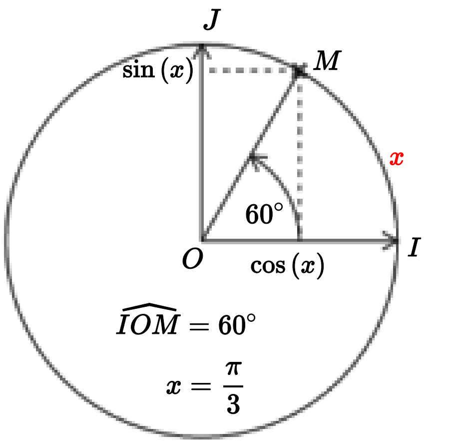
$\cos(0) = 1$; $\sin(0) = 0$



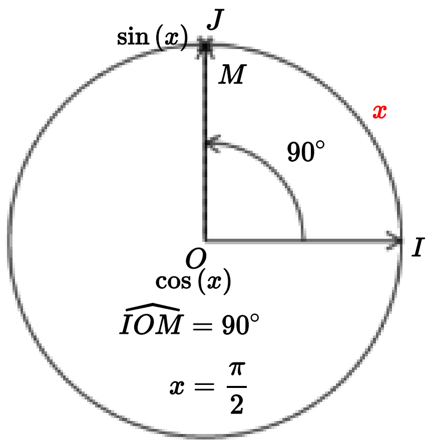
$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$



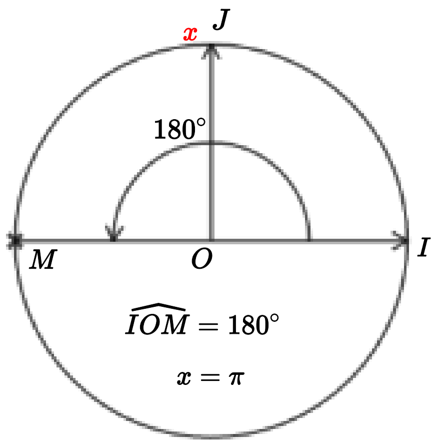
$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$



$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$; $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$



$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$; $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$



$\cos(\pi) = -1$; $\sin(\pi) = 0$

On se place dans un repère orthonormé $(O; I; J)$. Soit M un point sur le cercle trigonométrique associé au nombre $\frac{\pi}{6}$: $\frac{\pi}{6}$ est la longueur de l'arc de cercle de I à M. On note $\alpha = \widehat{IOM}$. On pose $A(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right); 0)$ et $B(0; \sin\left(\frac{\pi}{6}\right))$.

1. Faire une figure.
2. Donner la mesure de α en degré.
3. Démontrer que $OA = BM$
4. Démontrer que OMJ est un triangle isocèle.
5. Démontrer que $\widehat{MOJ} = 60°$
6. Démontrer que OMJ est un triangle équilatéral.
7. Que dire de la droite (BM) dans le triangle OMJ ?
8. En déduire que B est le milieu de $[OJ]$. Donner la longueur OB.
9. Calculer la longueur BM.
10. Déduire des questions précédentes les valeurs exactes de $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$ et $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$

N_6 Angles associés

Propriétés

Soit $x \in \mathbb{R}$:

- $\cos(-x) = \cos x$
- $\cos(\pi - x) = -\cos x$
- $\cos(\pi + x) = -\cos x$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$
- $\sin(-x) = -\sin x$
- $\sin(\pi - x) = \sin x$
- $\sin(\pi + x) = -\sin x$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$

1. Calculer $\cos\frac{-\pi}{3}$, $\cos\frac{4\pi}{3}$, $\sin\frac{\pi}{6}$ et $\sin\frac{5\pi}{6}$
2. Calculer $\cos\frac{3\pi}{4}$, $\cos\frac{-3\pi}{4}$, $\sin\frac{-\pi}{4}$ et $\sin\frac{3\pi}{4}$

N_7 Formules de duplication

Formules de duplication

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$:

- $\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$
- $\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$
- $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$
- $\cos(2a) = 2\cos^2 a - 1$
- $\sin(a+b) = \sin a\cos b + \sin b\cos a$
- $\sin(a-b) = \sin a\cos b - \sin b\cos a$
- $\sin(2a) = 1\sin a\cos a$
- $\cos(2a) = 1 - 2\sin^2 a$

1. Calculer $\cos(2x)$ quand $\cos x = -\frac{1}{4}$
2. Calculer $\cos(2x)$ quand $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$
3. Calculer $\sin(2x)$ quand $\sin x = \frac{1}{3}$ et $x \in \left]\frac{\pi}{2};\pi\right[$
4. Calculer $\sin(2x)$ quand $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ et $x \in \left]-\frac{\pi}{2};0\right[$
5. Exprimer en fonction de $\cos x$ et $\sin x$, $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$
6. Exprimer en fonction de $\cos x$ et $\sin x$, $\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$

N_8 Équations trigonométriques

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$. Puis préciser les solutions contenues dans l'intervalle $]0;2\pi]$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos x = \frac{1}{2}$. Puis préciser les solutions contenues dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{8}\right)$ puis dans l'intervalle $]0;4\pi]$.
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ puis dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$.

N_9 *Inéquations trigonométriques*

1. Résoudre dans $]-\pi;\pi]$ l'inéquation $\cos x \geqslant 0$. Représenter sur le cercle trigonométrique ces solutions.
2. Résoudre dans $]-\pi;\pi]$ l'inéquation $\sin x > \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Représenter sur le cercle trigonométrique ces solutions.
3. Résoudre dans $]-\pi;\pi]$ l'inéquation $\sin x \leqslant \dfrac{1}{2}$. Représenter sur le cercle trigonométrique ces solutions.

$n°1$ *Une construction*

Soient A et B deux points du plan tels que $AB = 4\ cm$.

1. Construire le point C tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \dfrac{\pi}{4}$ et $AB = AC$.
2. Construire le point D tel ACD soit un triangle équilatéral et $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CD}) = \dfrac{\pi}{3}$.
3. Construire le point E tel que $(\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DC}) = \dfrac{11\pi}{12}$ et $DE = 3\ cm$.
4. Démontrer que les droites (AB) et (DE) sont parallèles.
5. Construire le point F tel que A, F et C soient alignés et $(\overrightarrow{BF}, \overrightarrow{CD}) = \dfrac{5\pi}{12}$.
6. Démontrer yes les droites (AB) et (BF) sont perpendiculaires.

$n°2$ *Triangle ABD*

Soit A,B,C et D des points du plan tels que : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \dfrac{\pi}{6}$ et $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = \dfrac{\pi}{3}$. Démontrer que le triangle ABD est rectangle.

$n°3$ *Un petit calcul*

Pour tout nombre réel x, calculer : $(\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2$

$n°4$ *Système d'inéquations*

Résoudre dans $\mathbb{R}$, les systèmes d'inéquations suivants :

1. $\begin{cases} \cos x \geqslant \dfrac{1}{2} \\ \sin x \leqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$
2. $\begin{cases} \cos x \leqslant 0 \\ \sin x \geqslant -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

$n°5$ *Une équation*

Résoudre dans $\mathbb{R}$: $(\sin(2x) + 1)(2\cos x + \sqrt{2}) = 0$

$n°6$ *Points alignés*

Soient A, B, C et D quatre points tels que : $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) = \dfrac{\pi}{3}$ et $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = \dfrac{\pi}{2}$.

Montrer que les points A, C et D sont alignés.

$n°7$ *Équations trigonométriques*

Résoudre dans $]-\pi;\pi]$ les équations suivantes et placer les solutions sur le cercle trigonométrique :

1. $\cos(2x) = -\dfrac{1}{2}$

2. $\sin(2x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

3. $\cos(2x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$n°8$ *Démonstrations*

1. Démontrer que $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ en déduire que $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

2. Démontrer que $\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$ en déduire que $\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{2}$ et que $\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$n°9$ *Triangle magique*

L'objectif est de résoudre le système d'équations dans $]-\pi;\pi]$:

$$\begin{cases} \cos(3x) &= 1 \\ \sin(3x) &= 0 \end{cases}$$

1. Méthode $n°1$:

(a) Montrer que les solutions de l'équation $\cos(3x) = 1$ dans $\mathbb{R}$ s'écrivent : $x = \dfrac{2k\pi}{3}$ avec $k \in \mathbb{Z}$

(b) Montrer que les solutions de l'équation $\sin(3x) = 0$ dans $\mathbb{R}$ s'écrivent : $x = \dfrac{k\pi}{3}$ avec $k \in \mathbb{Z}$

(c) En déduire les solutions du système d'équations initial.

2. Méthode $n°2$:

(a) En utilisant les formules d'addition, montrer l'égalité suivante :
$\cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x)$ quel que soit x réel.

(b) Montrer que l'équation $\cos 3x = 1$ est équivalente à $4X^3 - 3X - 1 = 0$ en posant $X = \cos(x)$ ($X \in [-1;1]$).

(c) Montrer que pour tout nombre réel X :
$4X^3 - 3X - 1 = (X-1)(4X^2 + 4X + 1)$

(d) En déduire les solutions de l'équation : $4X^3 - 3X - 1 = 0$ et conclure sur les solutions de l'équation : $\cos(3x) = 1$ dans $]-\pi;\pi]$.

(e) Vérifier que les solutions trouvées en **(d)** sont également solutions de $\sin(3x) = 0$.

3. Représentation graphique :

(a) Placer sur le cercle trigonométrique les réels solutions du système. On les notera I,A et B.

(b) Quelle est la nature du triangle IAB ? Justifier.