N_1 Accroissement moyen

D Définitions

f est une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. x_1 et x_2 sont deux réels distincts appartenant à I, l'**accroissement moyen** de f entre x_1 et x_2 est :

$$\boxed{\frac{\Delta f}{\Delta x}(x_1;x_2) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}}$$

On peut noter $x_1 = a$ et $x_2 = a+h$ avec $h \neq 0$, on obtient alors :

$$\boxed{\frac{\Delta f}{\Delta x}(a) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}}$$

R Remarque

$\frac{\Delta f}{\Delta x}(x_1;x_2)$ est le coefficient directeur de la droite sécante à la courbe représentative C_f de f passant par les points $A(x_1;f(x_1))$ et $B(x_2;f(x_2))$.

Soit la fonction f définie par $f(x) = 3-4x$ sur $\mathbb{R}$:

1. Calculer $\frac{\Delta f}{\Delta x}(-2;-1)$
2. Calculer $\frac{\Delta f}{\Delta x}(2)$ pour $h = 0,75$

Soit la fonction g définie par $g(x) = x^2-1$ sur $\mathbb{R}$:

3. Calculer $\frac{\Delta g}{\Delta x}(-1;2)$
4. $\frac{\Delta g}{\Delta x}(3)$ pour $h = 0,5$

N_2 Nombre dérivé

D Nombre dérivé

Si quand h se rapproche de 0 (on dit que h tend vers 0 et on note $h \longrightarrow 0$) alors $\frac{\Delta f}{\Delta x}(a)$ tend vers un réel l alors :

① la fonction f est **dérivable** en a

② l est le **nombre dérivé** de f en a noté $f'(a)$:

$$\boxed{\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} f'(a)}$$

1. Soit la fonction g définie par $g(x) = 4-3x^2$ sur $\mathbb{R}$. Recopier et compléter le tableau suivant :

h	$0,1$	$0,01$	$0,001$	$0,0001$	$0,00001$
$\frac{\Delta g}{\Delta x}(2)$					

g est-elle dérivable en 2 ? Si oui donner $g'(2)$.

2. Soit la fonction f définie par $f(x) = 6x-8$ sur $\mathbb{R}$. Recopier et compléter le tableau suivant :

h	$0,1$	$0,01$	$0,001$	$0,0001$	$0,00001$
$\frac{\Delta f}{\Delta x}(5)$					

f est-elle dérivable en 5 ? Si oui donner $f'(5)$.

N_3 *Tangente*

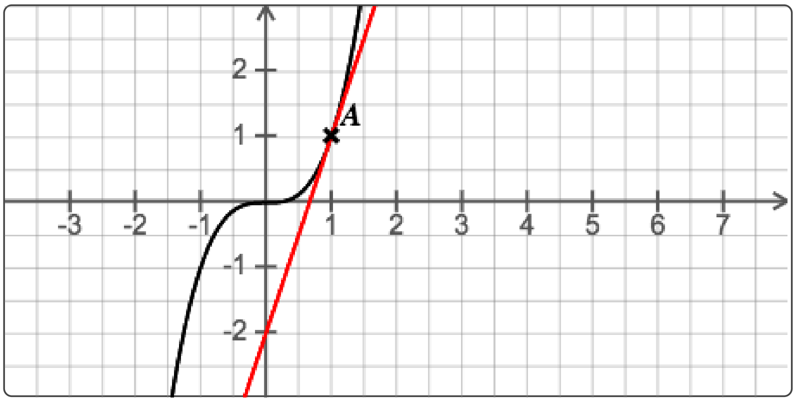
D *Tangente*

Dans le cas où la fonction f est dérivable en a, la **tangente** $\mathcal{T}_a$ à la courbe représentative C_f de f au point $A(a; f(a))$ est la droite (position limite) de coefficient directeur $f'(a)$ et passant par A, son équation réduite est alors :

$$\boxed{\mathcal{T}_a : y = f'(a)(x-a) + f(a)}$$

La représentation graphique de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et par $f(x) = x^3$ est tracée ci-contre. f est dérivable en 1 et $f'(1) = 3$.
La droite tracée en rouge est la tangente au point $A(1; f(1))$ et a pour équation :

$$\boxed{\mathcal{T}_1 : y = f'(1)(x-1) + f(1) = 3x - 2}$$



Soit la fonction g définie par $g(x) = x^2 - 4$ sur $\mathbb{R}$ dont $\mathcal{C}_g$ est la courbe représentative.

1 Recopier et compléter le tableau suivant :

h	$0,1$	$0,01$	$0,001$	$0,0001$	$0,00001$
$\frac{\Delta g}{\Delta x}(1)$					

g est-elle dérivable en 1 ? Si oui donner $g'(1)$.

2 Donner l'équation de la tangente $\mathcal{T}_1$ de $\mathcal{C}_g$ en $x = 1$ puis tracer $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{T}_1$.

N_4 *Fonction dérivée*

D *Fonction dérivée*

Si pour tout réel $a \in I$, $f'(a)$ existe, on dit que f est **dérivable** sur I. I est le domaine de dérivabilité qu'on peut note $D_{f'}$. La **fonction dérivée**, notée f', est définie sur $D_{f'}$ par :

$$\boxed{f' : x \mapsto f'(x)}$$

P *Dérivée d'une fonction affine*

Soit f une fonction affine telle que $f(x) = mx + p$. Son ensemble de définition est : $D_f = \mathbb{R}$. Sa dérivée est $\boxed{f'(x) = m}$ et $D_{f'} = \mathbb{R}$

Donner la fonction dérivée de :

1 $f_1(x) = 5x - 8$ **2** $f_2(x) = -9$ **3** $f_3(x) = 9x$

4 $f_4(x) = -x$ **5** $f_5(x) = 6 + x$ **6** $f_6(x) = 2$

$n°1$ *Onde sur l'eau*

On jette une pierre dans un lac qui produit alors des ondes concentriques à la surface de l'eau. Si le rayon de l'onde croît à une vitesse de $5\ m \cdot s^{-1}$, à quelle vitesse croît la surface (circulaire) de cette onde lorsqu'elle a atteint un rayon de $12\ m$?

N_5 Dérivées usuelles

P *Dérivées usuelles*

m et p sont deux réels et n entier naturel.

$f(x)$	$\mathcal{D}_f$	$f'(x)$	$\mathcal{D}_{f'}$
$f(x) = mx + p$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = m$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \sqrt{x}$	$[0;+\infty[$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$
$f(x) = \cos(x)$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = -\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin(x)$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = \cos(x)$	$\mathbb{R}$

P *Dérivée de la fonction* $f(ax+b)$

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit a et b deux réels et g une fonction définie par $g(x) = f(ax+b)$. La fonction g est alors dérivable sur I et $g'(x) = [f(ax+b)]' = a \times f'(ax+b)$

Déterminer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = \dfrac{1}{-3x+7}$
2. $f_2(x) = \sqrt{2x-9}$
3. $f_3(x) = x^5$
4. $f_4(x) = \sin(7x - \pi)$
5. $f_5(x) = \cos\left(\dfrac{1}{3}x + \dfrac{\pi}{3}\right)$
6. $f_6(x) = \sin(-x - \dfrac{\pi}{4})$

N_6 Dérivée d'une somme

P *Dérivée d'une somme*

Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I alors la fonction $(u+v)(x) = u(x) + v(x)$ est dérivable sur I et : $(u+v)'(x) = u'(x) + v'(x)$

Déterminer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = \sqrt{2x-7} + \dfrac{1}{-8x+7}$
2. $f_2(x) = \sqrt{2x-9} - \dfrac{1}{9-2x}$
3. $f_3(x) = x^5 + \cos(5 - 6x)$
4. $f_4(x) = \sin(x - \pi) + \cos(6x)$
5. $f_5(x) = \cos\left(\dfrac{1}{2}x + \dfrac{\pi}{6}\right) - \sqrt{\pi x - 8}$
6. $f_6(x) = \sin(-2x - \dfrac{\pi}{3}) + x^9$

N_7 Dérivée du produit par un réel

P *Dérivée du produit par un réel*

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et k un réel alors la fonction $(ku)(x) = k \times u(x)$ est dérivable sur I et : $(ku)'(x) = k \times u'(x)$

Déterminer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = -2\sqrt{2x-7}$
2. $f_2(x) = \dfrac{-8}{9+2x}$
3. $f_3(x) = -8x^6$
4. $f_4(x) = 9\sin(3x - \pi)$
5. $f_5(x) = \dfrac{-8}{7x-9}$
6. $f_6(x) = -2\cos(-2x - \dfrac{\pi}{3})$

N_8 Dérivée du produit

P Dérivée du produit

Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I alors la fonction $(u \times v)(x) = u(x) \times v(x)$ est dérivable sur I et : $(uv)'(x) = u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x)$

Déterminer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = x^2\sqrt{3x-8}$
2. $f_2(x) = (8 - 2\cos x)\,\dfrac{1}{x}$
3. $f_3(x) = (2\sin(-8x-2) - 1)x^2$
4. $f_4(x) = \sqrt{x} \times \dfrac{1}{x}$
5. $f_5(x) = \sin x \cos x$
6. $f_6(x) = (6x-8)(9x^2+2x-5)$
7. $f_7(x) = \dfrac{1}{x} \times \dfrac{1}{x}$
8. $f_8(x) = \sqrt{2-3x}\sqrt{6x-6}$
9. $f_9(x) = \sqrt{x}\cos(x)$

N_9 Dérivée de l'inverse

P Dérivée de l'inverse

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I telle que pour tout $x \in I$, $u(x) \neq 0$ alors la fonction $\left(\dfrac{1}{u}\right)(x) = \dfrac{1}{u(x)}$ est dérivable sur I et : $\left(\dfrac{1}{u}\right)'(x) = -\dfrac{v'(x)}{v^2(x)}$

Déterminer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = \dfrac{1}{x^2}$
2. $f_2(x) = \dfrac{1}{3x-9}$
3. $f_3(x) = \dfrac{1}{x^3+1}$
4. $f_4(x) = \dfrac{1}{\sin x}$
5. $f_5(x) = \dfrac{1}{\sqrt{7x-9}}$
6. $f_6(x) = \dfrac{1}{\cos(4x-\pi)}$

N_{10} Dérivée du quotient

P Dérivée du quotient

Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I telles que pour tout $x \in I$, $v(x) \neq 0$ alors la fonction $\left(\dfrac{u}{v}\right)(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ est dérivable sur I et : $\left(\dfrac{u}{v}\right)'(x) = \dfrac{u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x)}{v^2(x)}$

Déterminer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = \dfrac{5x-9}{\sqrt{x}}$
2. $f_2(x) = \dfrac{7x+9}{x^6-3x^2}$
3. $f_3(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{9-8x}$
4. $f_4(x) = \dfrac{\sin x}{\cos(8x-8)}$
5. $f_5(x) = \dfrac{\cos^2 7x - 9}{\sin(x)}$
6. $f_6(x) = \dfrac{(x+1)^2}{(x-1)^3}$
7. $f_7(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x}}$
8. $f_8(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$
9. $f_9(x) = \dfrac{6x^3-x^2}{2x^2-5x^3}$

N_{11} : Dérivée de $g(x) = f(u(x))$

P : *Dérivée de* $g(x) = f(u(x))$

Soient f une fonction dérivable sur un intervalle J de $\mathbb{R}$ et u une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in I$, $u(x) \in J$. La fonction g définie par $g(x) = f\Big(u(x)\Big)$ est dérivable sur I et :

$$\boxed{g'(x) = u'(x) \times f'\Big(u(x)\Big)}$$

P : *Dérivée de* $f(x) = (u(x))^n$ *pour* $n > 0$

Soient u une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et n un entier naturel tel que $n > 0$. La fonction f définie par $f(x) = \Big(u(x)\Big)^n$ est dérivable sur I et :

$$\boxed{f'(x) = n \times u'(x) \times \Big(u(x)\Big)^{n-1}}$$

P : *Dérivée de* $f(x) = (u(x))^n$ *pour* $n < 0$

Soient u une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ telle que $\boxed{u(x) \neq 0}$ pour tout $x \in I$ et n un entier naturel tel que $n < 0$. La fonction f définie par $f(x) = \Big(u(x)\Big)^n$ est dérivable sur I et :

$$\boxed{f'(x) = n \times u'(x) \times \Big(u(x)\Big)^{n-1}}$$

P : *Dérivée de* $f(x) = \sqrt{u(x)}$

Soient u une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ telle que $\boxed{u(x) > 0}$ pour tout $x \in I$. La fonction f définie par $f(x) = \sqrt{u(x)}$ est dérivable sur I et :

$$\boxed{f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}}$$

Déterminer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = \dfrac{1}{x^2 - 3x + 1}$
2. $f_2(x) = \sqrt{2x^3 + x^2 - 7}$
3. $f_3(x) = \left(\dfrac{1}{x} - 4 + \cos x\right)^2$
4. $f_4(x) = \sqrt{\dfrac{1}{x} + 7x^2}$
5. $f_5(x) = \sqrt{x^7 - \sin x}$
6. $f_6(x) = \left(9 + \sqrt{x}\right)^2$
7. $f_7(x) = \cos(8 - 9x)$
8. $f_8(x) = \dfrac{3}{\cos x + \sin x}$
9. $f_9(x) = \sin(6x^2 + 9x)$
10. $f_{10}(x) = \left(x^3 - 9x^2 + 6\right)^2$
11. $f_{11}(x) = \sqrt{\sin(4x - \pi)}$
12. $f_{12}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{7x - 9}}$
13. $f_{13}(x) = \left(\sqrt{6x - 9}\right)^3$
14. $f_{14}(x) = \left(\dfrac{1}{2x - 2}\right)^5$

$n°2$ *Des dérivées*

Donner l'ensemble de dérivabilité de f puis calculer sa dérivée :

1. $f(x) = (4x-3)^2$
2. $f(x) = (3x^2-4x)^3$
3. $f(x) = (2x^2-3x+1)^2$
4. $f(x) = (x^3+2x)^2$
5. $f(x) = (x^3+4x^2+5)^4$
6. $f(x) = 2x^2-(2x-1)^2$
7. $f(x) = \dfrac{2}{(x+1)^3}$
8. $f(x) = \dfrac{3}{(2x+1)^4}$
9. $f(x) = \dfrac{4}{(x^3-1)^3}$
10. $f(x) = \dfrac{5}{(2x^2+3)^2}$
11. $f(x) = \dfrac{5}{3(x-1)^4}$
12. $f(x) = \dfrac{3}{(3x^2+5)^2}$
13. $f(x) = \dfrac{5}{3(x-2)^4}$
14. $f(x) = 2\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^3$
15. $f(x) = 2\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)^{-2}$
16. $f(x) = (x-2)^3 + \dfrac{1}{(x-2)^3}$
17. $f(x) = \cos^3 x$
18. $f(x) = 3\cos x + 2\sin^2 x$
19. $f(x) = 3x^2\cos 7x - 8$
20. $f(x) = \dfrac{\cos(7-3x)}{x^2}$
21. $f(x) = \dfrac{x\sin(3x-4)}{2x^2+8}$
22. $f(x) = \sqrt{x}\sin 8x^2 - 2$
23. $f(x) = \sin(8x^2+6x)\sqrt{x-3}$
24. $f(x) = \sqrt{\cos^2(6x+2)}$

$n°3$ *Tangente en a*

Déterminer l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a :

1. $f : x \mapsto -\dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{1}{2}x^2$ définie sur $\mathbb{R}$, $a=-1$
2. $f : x \mapsto \dfrac{x-2}{x+1}$ définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$, $a=2$
3. $f : x \mapsto \dfrac{x}{x+1}$ définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$, $a=\dfrac{1}{3}$
4. $f : x \mapsto 4x^2-3x+2$ définie sur $\mathbb{R}$, $a=0$
5. $f : x \mapsto \dfrac{3x+1}{2-x}$ définie sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$, $a=-1$
6. $f : x \mapsto x\sqrt{x}$ définie sur $\mathbb{R}^+$, $a=1$

$n°4$ *Fuite d'eau*

On considère une flaque d'eau circulaire de 1 mm de profondeur crée par un robinet qui fuit. On note $r(t)$ le rayon (en cm) de la flaque en fonction du temps t (en s) et $V(t)$ le volume correspondant (en cm^3).

1. Donner la relation entre $V(t)$ et $r(t)$.
2. En déduire la relation entre $V'(t)$ et $r'(t)$. Que représentent physiquement $V'(t)$ et $r'(t)$?
3. Sachant que le robinet fuit à un débit de $1\ cm^3 \cdot s^{-1}$, déterminer la vitesse d'augmentation radiale (du rayon) de la flaque lorsque celle-ci a atteint un volume de $2\ cm^3$.

$n°5$ *Coefficient directeur de la tangente*

Soit $f : x \mapsto \dfrac{x}{x+1}$ définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$.

Existe-t-il des points de la courbe dont la tangente a pour coefficient directeur $\frac{1}{4}$? Si oui, les déterminer.