N_1 Produit scalaire

D *Produit scalaire*

Le **produit scalaire** de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, noté $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$, (se lit " $\overrightarrow{u}$ scalaire $\overrightarrow{v}$ ") est défini par :

$$\boxed{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\left(||\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}||^2 - ||\overrightarrow{u}||^2 - ||\overrightarrow{v}||^2\right)}$$

P *Propriétés*

- $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}$ (**commutatif**)
- Si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ ou $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ alors $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$
- $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}^2$ (**carré scalaire**)
- $\overrightarrow{u}^2 = ||\overrightarrow{u}||^2$

1. Soit ABC un triangle tel que $AB = 6$, $AC = 5$ et $BC = 8$. Calculer $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC}$
2. Soit EFG un triangle tel que $EF = 10$, $FG = 3$ et $EG = 8$. Calculer $\overrightarrow{GE} \cdot \overrightarrow{EF}$
3. Soit TRI un triangle tel que $RI = 5$, $RT = 6$ et $IT = 4$. Calculer $\overrightarrow{IR} \cdot \overrightarrow{TI}$

N_2 Vecteurs orthogonaux

D *Vecteurs orthogonaux*

Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont **orthogonaux** quand $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$. On note alors $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$.

P *Propriété*

Soient deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ non nuls et $k \in \mathbb{Z}$.
$\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$ si et seulement si $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \frac{\pi}{2} + k \times 2\pi$ ou $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = -\frac{\pi}{2} + k \times 2\pi$

1. Soit ABC un triangle tel que $AB = 5$, $AC = 12$ et $BC = 13$. $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont-ils orthogonaux ?
2. Soit EFG un triangle tel que $EF = 17$, $FG = 8$ et $EG = 15$. $\overrightarrow{GF}$ et $\overrightarrow{EG}$ sont-ils orthogonaux ?
3. Soit KTD un triangle tel que $KT = 18$, $TD = 54$ et $KD = 45$. $\overrightarrow{TK}$ et $\overrightarrow{KD}$ sont-ils orthogonaux ?
4. Soit TRI un triangle tel que $RI = 24$, $RT = 7$ et $IT = 25$. Démontrer que $(\overrightarrow{RT}, \overrightarrow{RI}) = \frac{\pi}{2}$
5. Soit MLA un triangle tel que $ML = 55$, $LA = 73$ et $MA = 48$. Démontrer que $(\overrightarrow{ML}, \overrightarrow{MA}) = -\frac{\pi}{2}$
6. Soit CXV un triangle tel que $CX = 77$, $CV = 35$ et $XV = 85$. $\overrightarrow{CX}$ et $\overrightarrow{CV}$ sont-ils orthogonaux ?

$n°1$ Algorithme et produit scalaire

Ecrire un algorithme qui détermine le produit scalaire de deux vecteurs à partir de leur coordonnées.

$n°2$ Algorithme et droites perpendiculaires

Ecrire un algorithme :
- demandant à l'utilisateur de saisir les coordonnées de quatre points A, B, C et D;
- affichant en sortie si les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires ou si elles ne le sont pas.

N_3 Produit scalaire et coordonnées

Propriété

Dans un repère orthonormé du plan , soient $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$, on alors : $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = xx' + yy'$

Calculer le produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$

1. $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}7\\-5\end{pmatrix}$
2. $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}15\\-8\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}6\\-9\end{pmatrix}$
3. $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}-3\\-4\end{pmatrix}$
4. $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\-7\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\-\sqrt{6}\end{pmatrix}$
5. $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}\sqrt{3}-2\\6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}\sqrt{3}+2\\1\end{pmatrix}$
6. $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}\sqrt{6}\\2\end{pmatrix}$, $A(\sqrt{24}+5; 1)$ et $B(5; \sqrt{2})$

N_4 Orthogonalité et angles orientés

Propriété

Soient deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ non nuls et $k \in \mathbb{Z}$.
$\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$ si et seulement si $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \dfrac{\pi}{2} + k \times 2\pi$ ou $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = -\dfrac{\pi}{2} + k \times 2\pi$

Droites perpendiculaire

Deux droites du plan sont **perpendiculaires** si et seulement si un vecteur directeur de l'une est **orthogonal** à un vecteur directeur de l'autre.

1. Soient quatre points $A(-1; 2)$, $B(5; 0)$, $C(3; 4)$ et $D(6; 13)$. Montrer que les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.
2. Soient quatre points $E(1; 3)$, $F - 2; -2)$, $G(3; 1)$ et $H(13; -5)$. Montrer que les droites (EF) et (GH) sont perpendiculaires.
3. Soient deux droites (d_1) et (d_2) d'équations respectives $2x + 3y + 8 = 0$ et $-6x + 4y + 10 = 0$. Montrer que $(d_1$ est perpendiculaire à (d_2).
4. Soient deux droites (d_1) et (d_2) d'équations respectives $-7x + 6y - 1 = 0$ et $y = -5x + 8$. $(d_1$ et (d_2) sont-elles perpendiculaires ?

N_5 Distributivité

Propriétés

Soient k et k' deux réels et $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs :
- $\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w}$
- $(k\overrightarrow{u}) \cdot (k'\overrightarrow{v}) = (k \times k')\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$
- $(-\overrightarrow{u}) \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} \cdot (-\overrightarrow{v}) = -\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$

Développer puis exprimer les produits scalaires en fonction de $||\overrightarrow{u}||$, $||\overrightarrow{v}||$ et $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$

1. $3\overrightarrow{u} \cdot (5\overrightarrow{u} + 4\overrightarrow{v})$
2. $-2\overrightarrow{u} \cdot (-\overrightarrow{v} + 2\overrightarrow{u})$
3. $(5\overrightarrow{u} - 4\overrightarrow{v}) \cdot (-\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u})$
4. $(-2\overrightarrow{v} + 3\overrightarrow{u}) \cdot (4\overrightarrow{u} - 5\overrightarrow{v})$

N_6 *Identités remarquables*

Propriétés

- $(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 + 2\,\vec{u}\cdot\vec{v}$
- $(\vec{u}-\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 - 2\,\vec{u}\cdot\vec{v}$
- $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$
- $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\,\vec{u}\cdot\vec{v}$
- $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\,\vec{u}\cdot\vec{v}$
- $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$

Développer puis exprimer les produits scalaires en fonction de $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$ et $\vec{u}\cdot\vec{v}$

1 $(5\vec{u}+4\vec{v})^2$

2 $(-\vec{u}-5\vec{v})^2$

3 $(5\vec{u}+4\vec{v})\cdot(5\vec{u}-4\vec{v})$

4 $(2\vec{u}-3\vec{v})^2$

N_7 *Théorème de la médiane*

Théorème

Soient A et B deux points distincts du plan et I le milieu de $[AB]$. Pour tout point M du plan :

$$\boxed{MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}}$$

Démontrer le théorème de la médiane.

N_8 *Produit scalaire et cosinus*

Propriétés

- Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls : $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{u}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$
- Soient trois points A , B et C distincts du plan : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$

1 Calculer $\vec{u}\cdot\vec{v}$ avec :

a) $\|\vec{u}\| = 5$, $\|\vec{v}\| = 2$ et $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = 0,1$

b) $\|\vec{u}\| = 5$, $\|\vec{v}\| = 8$ et $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{6}\ (2\pi)$

c) $\|\vec{u}\| = 7$, $\|\vec{v}\| = 2$ et $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{5\pi}{2}\ (2\pi)$

d) $\|\vec{u}\| = \frac{5}{6}$, $\|\vec{v}\| = \frac{\sqrt{3}}{8}$ et $(\vec{u}, \vec{v}) = -\frac{5\pi}{6}\ (2\pi)$

e) $\|\vec{u}\| = 9$, $\|\vec{v}\| = 6$ et $\vec{u} = -1,5\,\vec{v}$

f) $\|\vec{u}\| = 2\sqrt{2}$, $\|\vec{v}\| = \sqrt{8}$ et $(\vec{u}, \vec{v}) = \pi\ (2\pi)$

g) $\|\vec{u}\| = \sqrt{2}+1$ et $\vec{u} = \sqrt{3}\,\vec{v}$

2 Soient $R(-1;-2)$, $S(5;-4)$ et $T(3;6)$.
Déterminer une mesure de $\widehat{SRT}$.

3 ABC est un triangle tel que $AB = 5$; $BC = 6$ et $\widehat{ABC} = 60°$

a) Faire une figure.

b) Calculer $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$

4 Soient $A(0;0)$, $B(5;1)$ et $C(2;4)$

a) Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$, AB et AC

b) En déduire une mesure de l'angle $\widehat{BAC}$.

5 ABC est un triangle tel que $AB = 7$, $BC = 8$ et $AC = 12$.

a) Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

b) En déduire une mesure de l'angle $\widehat{BAC}$.

6 Soient $M(0;2)$, $N(2;-2)$ et $A(-3;1)$.
Déterminer une mesure de $\widehat{MNA}$.

N_9 **Produit scalaire et colinéarité**

Propriété

Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires alors :

- $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = ||\overrightarrow{u}|| \times ||\overrightarrow{v}||$ si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont de même sens
- $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = -||\overrightarrow{u}|| \times ||\overrightarrow{v}||$ si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont de sens opposé

Démontrer la propriété précédente.

N_{10} **Projection orthogonale**

Projeté orthogonal

Dans le plan, soient une droite (AB) et un point $C \notin (AB)$. H, **projeté orthogonal** de C sur (AB), est l'intersection de (AB) et de la perpendiculaire à (AB) passant par C.

Propriété

Soient A, B et C trois points distincts du plan et H le projeté orthogonal de C sur (AB). On a :

$$\boxed{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}}$$

On considère un carré $ABCD$ de côté 2 et I le milieu de $[AB]$. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ puis $\overrightarrow{IC} \cdot \overrightarrow{BI}$

N_{11} **Vecteur normal**

Vecteur normal

Dans le plan, un vecteur non nul $\overrightarrow{n}$ est **normal** à une droite (d) quand il est orthogonal à un vecteur directeur de la droite (d).

Propriété

Dans un repère orthonormé du plan, soient deux réels $a \neq 0$ et $b \neq 0$.

- La droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ admet $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ pour vecteur normal.
- Réciproquement, une droite qui a pour vecteur normal $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ a pour équation cartésienne $ax + by + c = 0$.

1 Donner un vecteur normal à la droite :

a) (d_1) d'équation $2x - 3y + 5 = 0$

b) (d_2) d'équation $12x - 3y = 2$

c) (d_3) d'équation $y = 7x - 3$

d) (d_4) d'équation $y = -1$

e) (d_5) d'équation $x = 5$

2 Déterminer une équation de la droite de vecteur normal $\overrightarrow{u}$ et passant par M :

a) $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $M(2; -5)$

b) $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $M(-3; 6)$

c) $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $M(2; -3)$

d) $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$ et $M(7; 8)$

N_{12} Equation de cercle

P Propriétés

Dans un repère orthonormé du plan : • Le cercle $(\mathcal{C})$ de centre $A(x_A;y_A)$ et de rayon r a pour équation :

$$\boxed{(x-x_A)^2+(y-y_A)^2=r^2}$$

• Le cercle $(\mathcal{C})$ de diamètre $[AB]$ est l'ensemble des points M vérifiant :

$$\boxed{\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0}$$

1. Soient $A(2;3)$ et $B(5;-1)$. Déterminer une équation de $(\mathcal{C})$, cercle de diamètre $[AB]$.
2. Soient $G(1;5)$ et $C(-2;1)$. Déterminer une équation de $(\mathcal{C})$, cercle de rayon $[GC]$.

$n°3$ Aire de ABC

On considère trois points $A(-1;1)$, $B(2;2)$ et $C(0;7)$ et B' le pied de la hauteur issue de B dans ABC.

1. Exprimer $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$ en fonction de CB'
2. En déduire CB' puis BB'
3. Calculer l'aire de ABC

$n°4$ Développements

On considère deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que : $\vec{u}\cdot\vec{v}=4$, $||\vec{u}||=3$ et $||\vec{v}||=2$.

1. Calculer $(\vec{u}+\vec{v})^2-(\vec{u}-\vec{v})^2$
2. Calculer $||2\vec{u}-3\vec{v}||^2+||4\vec{u}+5\vec{v}||^2$

$n°5$ Rectangle $ABCD$

On considère un rectangle $ABCD$ avec $AB=5$ et $AD=3$, E un point quelconque de $[AD]$ et F un point quelconque de $[BC]$. Soit G un point de $[CD]$

1. Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EF}$
2. Exprimer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EG}$ en fonction de DG
3. Exprimer $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{GF}$ en fonction de BF

$n°6$ Tangentes perpendiculaires

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x)=\dfrac{1}{x}$ et $g(x)=-\dfrac{1}{x}$

Les courbes représentatives de f et g admettent-elles des tangentes perpendiculaires ? Si oui, préciser lesquelles.

$n°7$ Intersection droites et cercle

Déterminer les points d'intersection éventuels du cercle d'équation $(x+5)^2+y^2=9$ et de la droite :

1. (d_1) d'équation $3x-y+20=0$.
2. (d_2) d'équation $3x+y=5$.

$n°8$ Quelques configurations

1. $ABCD$ est un parallélogramme avec $AB = 4$, $AD = 3$ et $AC = 6$. Calculer $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DA}$.
2. $ABCD$ est un parallélogramme avec $AB = a$ ($a \in \mathbb{R}$) et I est à la fois le milieu de $[AB]$ et le projeté orthogonal de C sur (AB). Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
3. $ABCD$ est un losange de côté 4 et vérifiant $\widehat{BAD} = 60°$. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
4. $ABCD$ est un carré de côté 1 et I est le milieu de $[DC]$ et J est le milieu de $[AD]$. Calculer $\overrightarrow{JI} \cdot \overrightarrow{BI}$.
5. $ABCD$ est un parallélogramme avec $AB = 5$ et $BD = 8$ et $\widehat{ABD} = 20°$. Calculer $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD}$, arrondir à $0,1$ près.

$n°9$ Un autre rectangle $ABCD$

On considère un rectangle $ABCD$ tel que $AB = 4$ et $AD = 3$. Le point E appartient à $[CB]$ tel que $EC = 1$. On cherche à déterminer où placer le point F de $[CD]$ tel que (DE) et (AF) soient perpendiculaires.

1. Faire une figure.
2. Calculer $(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CE}) \cdot (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DF})$
3. En déduire que le point F de $[CD]$ tel que (DE) et (AF) soient perpendiculaires vérifie : $DF = \dfrac{3}{4}$

$n°10$ Distance d'un point à une droite

On dit que la distance entre une droite (d) et un point A du plan est la longueur AA' où A' est le projeté orthogonal de A sur (d).

1. **Formule explicite**. On considère une droite (d) d'équation $ax + by + c = 0$ et un point $A(x_A ; y_A)$. a, b, c, x_A et y_A sont des réels.
   - **a)** Dans un repère du plan, tracer une droite (d) quelconque, un point A extérieur à (d) et $A'(x_{A'} ; y_{A'})$ son projeté orthogonal sur (d).
   - **b)** Soit $\overrightarrow{n}$ le vecteur normal à (d). Montrer que : $|\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{AA'}| = AA'\sqrt{a^2 + b^2}$
   - **c)** Exprimer $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{AA'}$ en fonction de a, b, x_A, y_A, $x_{A'}$ et $y_{A'}$.
   - **d)** Justifier que $-ax_{A'} - by_{A'} = c$
   - **e)** En déduire que la distance entre A et (d) est égale à : $\dfrac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$
2. **Application**. Soit trois points $F(0; 6)$, $G(2; -1)$ et $H(-1; 3)$.
   - **a)** Déterminer une équation de (FG).
   - **b)** En déduire la distance de H à (FG).
   - **c)** Calculer l'aire de FGH.
3. **Algorithme**. Ecrire un algorithme :
   - demandant à l'utilisateur de rentrer les coordonnées des points A, B et C.
   - affichant la distance de C à (AB).

   Vérifier la validité de cet algorithme en utilisant les points de la question **2**

$n°11$ Démonstration

En utilisant le produit scalaire, pour deux réels a et b, démontrer que : $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$