n°1 Forme développée

D Définition : Fonction du second degré

Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est une **fonction polynôme du second degré** ou **fonction du second degré** si elle est de la forme $\boxed{f(x) = ax^2 + bx + c}$ où a, b et c sont des réels tels que $a \neq 0$.

D Définition : Parabole

La représentation graphique ou courbe représentative d'une fonction du second degré est une **parabole**.
L'équation de la parabole est : $\boxed{y = ax^2 + bx + c}$

V Vocabulaire

- L'expression algébrique $ax^2 + bx + c$ est appelée **trinôme du second degré**.
- L'écriture $f(x) = ax^2 + bx + c$ de la fonction f est la **forme développée de f**.

Déterminer si les fonctions suivantes sont des fonctions du second degré et donner le cas échéant les trois coefficients a, b et c :

1. $f_1(x) = 6 - 3x^2 + 2x$
2. $f_2(x) = 4 + 7x$
3. $f_3(x) = (6x - 7)^2$
4. $f_4(x) = (8 + 4x)^2$
5. $f_5(x) = (3x + 7)(3x - 7)$
6. $f_6(x) = 4(2x - 3)^2$

n°2 Forme canonique

T Théorème : Forme canonique

La **forme canonique** de la fonction du second degré f définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ est :
$\boxed{f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta}$ avec $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$. Cette **forme canonique** est **unique**.

Donner la forme canonique des fonctions du second degré suivantes :

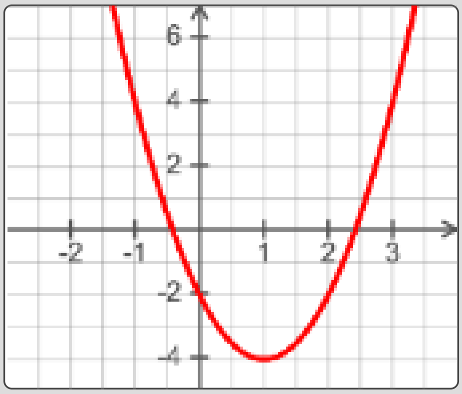
1. $f_1(x) = 4x^2 + 5x + 9$
2. $f_2(x) = -3x^2 - 7x + 9$
3. $f_3(x) = 7x - x^2 - 10$
4. $f_4(x) = 9x^2 + 16 - 24x$
5. $f_5(x) = 81 - 49x^2$
6. $f_6(x) = 7 + \sqrt{140}x + 5x^2$

n°3 Forme canonique : parabole

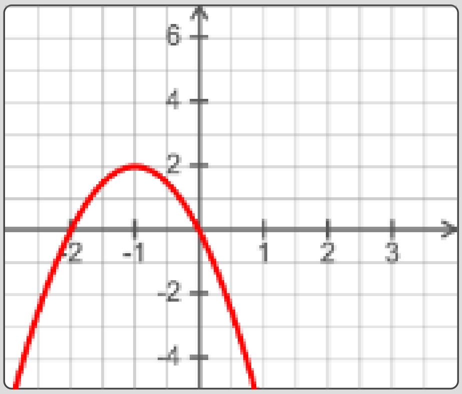
P Propriété

La parabole C_f, courbe représentative de la fonction du second degré f de forme canonique $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ a pour sommet $S(\alpha; \beta)$

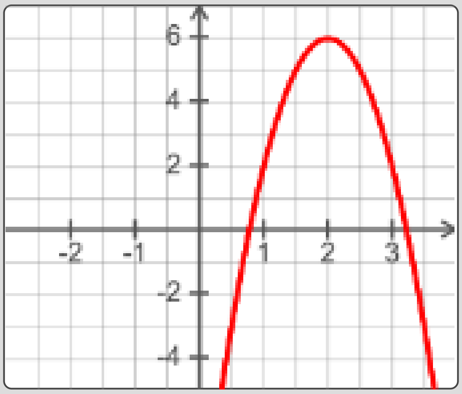
Donner la forme canonique des fonctions du second degré suivantes :



Parabole C_{f_1}



Parabole C_{f_2}



Parabole C_{f_3}

n°4 Symétrie de la parabole

P Propriété : Symétrie de la parabole

La parabole C_f, courbe représentative de la fonction du second degré f de forme canonique $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ est symétrique par rapport à la droite verticale d'équation $x = \alpha$.

Tracer la courbe représentative des fonctions suivantes en traçant l'axe de symétrie :

1. $f_1(x) = (x-8)^2 + 2$
2. $f_2(x) = 2(x+1)^2 + 3$
3. $f_3(x) = -2(4+x)^2 - 3$
4. $f_4(x) = (3x-3)^2$
5. $f_5(x) = 6x^2 - 8x + 3$
6. $f_6(x) = (2x+5)(2x-5)$

n°5 Sens de variation

Propriété : sens de variation avec $a > 0$

La fonction du second degré f de forme canonique $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec $a > 0$ est :
- **décroissante** pour $x \in]-\infty; \alpha]$
- **croissante** pour $x \in [\alpha; +\infty; [$

Propriété : sens de variation avec $a < 0$

La fonction du second degré f de forme canonique $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec $a < 0$ est :
- **croissante** pour $x \in]-\infty; \alpha]$
- **décroissante** pour $x \in [\alpha; +\infty; [$

Construire le tableau de variations des fonctions du second degré suivantes :

1. $f_1(x) = -2(x-3)^2 + 2$
2. $f_2(x) = 4(x+2)^2 + 6$
3. $f_3(x) = (5x-8)(2-6x)$
4. $f_4(x) = (5x-3)^2$
5. $f_5(x) = 9x^2 - 2x + 5$
6. $f_6(x) = (7x+8)(7x-8)$

n°6 Equation du second degré

Définition : équation du second degré

Une équation du type $\boxed{ax^2 + bx + c = 0}$ avec a, b et c des nombres réels tels que $a \neq 0$ est appelée ***équation du second degré***.

Définition : discriminant

$\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$ est le **discriminant** du trinôme du second degré $ax^2 + bx + c$.

Construire le tableau de variations des fonctions du second degré suivantes :

1. $f_1(x) = -2(x-3)^2 + 2$
2. $f_2(x) = 4(x+2)^2 + 6$
3. $f_3(x) = (5x-8)(2-6x)$
4. $f_1(x) = -2(x-3)^2 + 2$
5. $f_2(x) = 4(x+2)^2 + 6$
6. $f_3(x) = (5x-8)(2-6x)$

n°7 Racines d'une équation du 2^{nd} degré

Vocabulaire : racines

Les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ sont appelées **racines** ou **zéros**.

Construire le tableau de variations des fonctions du second degré suivantes :

1. $f_1(x) = -2(x-3)^2 + 2$
2. $f_2(x) = 4(x+2)^2 + 6$
3. $f_3(x) = (5x-8)(2-6x)$
4. $f_1(x) = -2(x-3)^2 + 2$
5. $f_2(x) = 4(x+2)^2 + 6$
6. $f_3(x) = (5x-8)(2-6x)$

n°8 Racines d'une équation du 2^{nd} degré et discrimimant

Théorème : racines quand $\Delta > 0$

Lorsque le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ est **positif** :

L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ possède <u>2 racines</u> x_1 et x_2 avec $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

Théorème : racines quand $\Delta = 0$

Lorsque le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ est **nul**, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ possède <u>1 racine</u> x_0 avec $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$

Théorème : racines quand $\Delta < 0$

Lorsque le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ est **négatif**, $ax^2 + bx + c = 0$ ne possède pas de <u>racine réelle</u>

Construire le tableau de variations des fonctions du second degré suivantes :

1 $f_1(x) = -2(x-3)^2 + 2$ 2 $f_2(x) = 4(x+2)^2 + 6$ 3 $f_3(x) = (5x-8)(2-6x)$

4 $f_1(x) = -2(x-3)^2 + 2$ 5 $f_2(x) = 4(x+2)^2 + 6$ 6 $f_3(x) = (5x-8)(2-6x)$

n°9 Racines et parabole

Théorème

La courbe représentative C_f de la fonction $f(x) = ax^2 + bx + c$:

- Lorsque le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ est **positif**, C_f coupe l'axe des abscisses en deux points $\left(x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\,;0\right)$ et $\left(x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\,;0\right)$
- Lorsque le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ est **égal à** 0, C_f coupe l'axe des abscisses en un seul point $\left(x_0 = \dfrac{-b}{2a}\,;0\right)$ qui est le sommet de la parabole.
- Lorsque le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ est **négatif**, C_f ne coupe pas l'axe des abscisses.

Construire le tableau de variations des fonctions du second degré suivantes :

1 $f_1(x) = -2(x-3)^2 + 2$ 2 $f_2(x) = 4(x+2)^2 + 6$ 3 $f_3(x) = (5x-8)(2-6x)$

4 $f_1(x) = -2(x-3)^2 + 2$ 5 $f_2(x) = 4(x+2)^2 + 6$ 6 $f_3(x) = (5x-8)(2-6x)$

n°10 Forme factorisée

Théorème

Soit la forme développée de la fonction $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$:

- Lorsque le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ est **positif**, $\boxed{f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)}$ avec $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
- Lorsque le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ est **égal à** 0, $\boxed{f(x) = a(x-x_0)^2}$ avec $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$
- Lorsque le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ est **négatif**, f ne possède pas de forme factorisée dans $\mathbb{R}$

Construire le tableau de variations des fonctions du second degré suivantes :

1 $f_1(x) = -2(x-3)^2 + 2$ 2 $f_2(x) = 4(x+2)^2 + 6$ 3 $f_3(x) = (5x-8)(2-6x)$

4 $f_1(x) = -2(x-3)^2 + 2$ 5 $f_2(x) = 4(x+2)^2 + 6$ 6 $f_3(x) = (5x-8)(2-6x)$

n°11 Inéquation du second degré

Définition et propriétés

Soient a, b et c des nombres réels tels que $a \neq 0$ et f la fonction du second degré définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ de courbe représentative $\mathcal{C}_f$.

Une inéquation du second degré est du type :

- $ax^2 + bx + c < 0 \rightarrow$ les abscisses x des points de $\mathcal{C}_f$ strictement en **dessous** de l'axe des abscisses.
- $ax^2 + bx + c > 0 \rightarrow$ les abscisses x des points de $\mathcal{C}_f$ strictement au **dessus** de l'axe des abscisses.
- $ax^2 + bx + c \leqslant 0 \rightarrow$ les abscisses x des points de $\mathcal{C}_f$ en **dessous** de l'axe des abscisses.
- $ax^2 + bx + c \geqslant 0 \rightarrow$ les abscisses x des points de $\mathcal{C}_f$ au **dessus** de l'axe des abscisses.

Construire le tableau de variations des fonctions du second degré suivantes :

1. $f_1(x) = -2(x-3)^2 + 2$
2. $f_2(x) = 4(x+2)^2 + 6$
3. $f_3(x) = (5x-8)(2-6x)$
4. $f_1(x) = -2(x-3)^2 + 2$
5. $f_2(x) = 4(x+2)^2 + 6$
6. $f_3(x) = (5x-8)(2-6x)$

n°12 Signe d'un trinôme

Propriétés

On considère le trinôme $ax^2 + bx + c$ associé à la fonction $f(x) = ax^2 + bx + c$ et de discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$. x_1 , x_2 et x_0 sont les racines de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ lorsque $\Delta > 0$ et $\Delta = 0$.

- Quand $a > 0$ et $\Delta > 0$ alors $f(x) \geqslant 0$ sur $]-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty[$ et $f(x) \leqslant 0$ sur $[x_1; x_2]$
- Quand $a < 0$ et $\Delta > 0$ alors $f(x) \leqslant 0$ sur $]-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty[$ et $f(x) \geqslant 0$ sur $[x_1; x_2]$
- Quand $a > 0$ et $\Delta = 0$ alors $f(x) \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}$ et $f(x_0) = 0$
- Quand $a < 0$ et $\Delta = 0$ alors $f(x) \leqslant 0$ sur $\mathbb{R}$ et $f(x_0) = 0$
- Quand $a > 0$ et $\Delta < 0$ alors $f(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$ et $f(x) \neq 0$ pour $x \in \mathbb{R}$
- Quand $a < 0$ et $\Delta < 0$ alors $f(x) < 0$ sur $\mathbb{R}$ et $f(x) \neq 0$ pour $x \in \mathbb{R}$

Construire le tableau de variations des fonctions du second degré suivantes :

1. $f_1(x) = -2(x-3)^2 + 2$
2. $f_2(x) = 4(x+2)^2 + 6$
3. $f_3(x) = (5x-8)(2-6x)$
4. $f_1(x) = -2(x-3)^2 + 2$
5. $f_2(x) = 4(x+2)^2 + 6$
6. $f_3(x) = (5x-8)(2-6x)$

n°13 Inéquation $f(x) \geqslant g(x)$

Soient 2 fonctions f et g définies par $f(x) = x^2 - 6x + 2$ et $g(x) = -2x^2 - 3x + 8$ de courbes représentatives $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

1. Etudier le signe de $f(x) - g(x)$
2. Résoudre $f(x) \geqslant g(x)$
3. Etudier la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à $\mathcal{C}_g$.
4. Dans un même repère, tracer $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

n°14 Histoire de pont

Un pont est soutenu par un arc parabolique d'une portée de 200 m et d'une hauteur de 80 m. Le pont et l'arc se coupent à 40 m de la rive. Quelle est la hauteur du pont ?

$n°15$ ***Algorithme : forme canonique***

*Soit une fonction du second degré $f(x) = ax^2 + bx + c$ de forme canonique $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$. Ecrire un algorithme en **javascript** qui détermine les réels α et β de la forme canonique d'une fonction du second degré.*

$n°16$ ***Dans un jardin***

À l'intérieur d'un jardin carré dont la longueur du côté est 10 mètres, un jardinier souhaite installer, le long du bord, une allée en graviers de largeur constante. Comment faire en sorte que l'aire de l'allée soit égale à celle du carré intérieur ?

$n°17$ ***Algorithme : Racines d'un trinôme***

*Ecrire un algorithme en **javascript** qui détermine les solutions de l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$*