

N₁ Cercle trigonométrique

D Définition

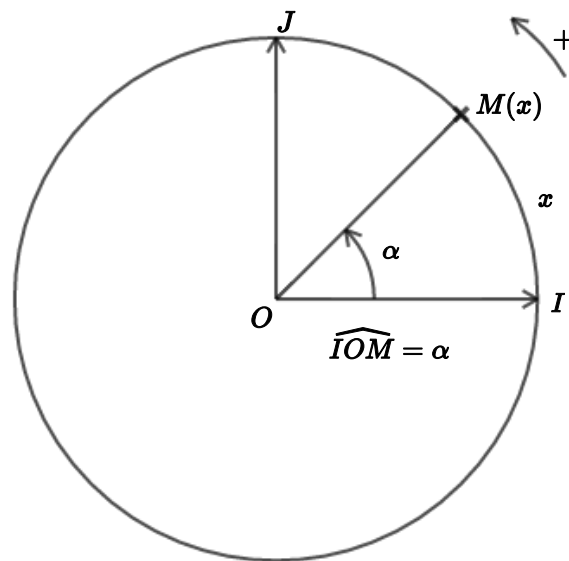
Dans un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OJ})$, le **cercle trigonométrique** (\mathcal{C}) est le cercle de centre O et de rayon 1.

1. Ce cercle est muni d'un sens de parcours appelé **sens direct** (sens inverse des aiguilles d'une montre).

La mesure en **radian** d'un angle correspond à la longueur de l'arc du cercle trigonométrique qu'il intercepte. La mesure en radian est **proportionnelle** à la mesure en degré.

Pour repérer un point M du cercle trigonométrique, on enroule autour du cercle un axe orienté, gradué, d'origine le point I . On peut alors associer, au point M , un réel x , abscisse d'un point de l'axe qui vient se superposer au point M .

Quand on fait un tour alors on se retrouve avec le même point sur le cercle trigonométrique. De ce fait le même point M est associé aux réels x ; $x + 2\pi$; $x - 2\pi$; $x + k \times 2\pi$ et $x - k \times 2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)



1 Convertir $\frac{\pi}{5}$, $\frac{5\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{4}$ en degré puis les placer sur le cercle trigonométrique.

2 Placer sur le cercle trigonométrique $-\frac{\pi}{3}$, $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{11\pi}{8}$, $-\frac{5\pi}{8}$ et $\frac{17\pi}{6}$.

3 Soit un point A du cercle trigonométrique associé au nombre $-\frac{\pi}{2}$. Donner quatre autres nombres qui correspondent au même point A .

N₂ Angles orientés

D Angles orientés

Soient deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} . Soient deux points M et N du cercle trigonométrique tels que : \overrightarrow{OM} et \vec{u} sont colinéaires et de même sens et \overrightarrow{ON} et \vec{v} sont colinéaires et de même sens. L'angle orienté, noté (\vec{u}, \vec{v}) , entre \vec{u} et \vec{v} correspond à l'angle formé entre les demi-droites $[OM)$ et $[ON)$.

P Propriétés

Un angle orienté a une infinité de mesures différentes en effet pour $k \in \mathbb{Z}$: $(\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + k \times 2\pi$

L'angle orienté (\vec{u}, \vec{v}) a une **unique** mesure α dans l'intervalle $] -\pi; \pi]$ appelée **mesure principale**. On a donc pour $k \in \mathbb{Z}$: $(\vec{u}, \vec{v}) = \alpha + k \times 2\pi$ et pour simplifier $(\vec{u}, \vec{v}) = \alpha$

1 Sur le cercle trigonométrique, placer les points A , B , C et D tels que $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA}) = -\frac{\pi}{4}$,

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \frac{12\pi}{4}, (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) = \frac{\pi}{2} \text{ et } (\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}) = -\frac{21\pi}{2}.$$

2 Déterminer la mesure principale des angles orientés $-\frac{7\pi}{5}$, $-\frac{18\pi}{4}$, $\frac{4\pi}{3}$, $-\frac{7\pi}{10}$, $-\frac{21\pi}{4}$, $\frac{37\pi}{7}$, $-\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{23\pi}{10}$.

3 Tracer un carré $ABCD$ de centre O puis donner une mesure des angles orientés $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA})$, $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC})$, $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA})$, $(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AD})$, $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD})$ et $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$

N₃ Propriétés des angles orientés

P Propriétés

- $(\vec{u}, \vec{v}) = -(\vec{v}, \vec{u})$
- $(-\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + \pi$
- $(k\vec{u}, k'\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v})$ si $kk' > 0$
- $(-\vec{u}, -\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v})$
- $(\vec{u}, -\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + \pi$
- $(k\vec{u}, k'\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + \pi$ si $kk' < 0$

P Relation de Chasles

Soient trois vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} non nuls :

$$(\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{w})$$

P Colinéarité

Deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires si et seulement si $(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ ou $(\vec{u}, \vec{v}) = \pi$.

Soit A , B , C et D quatre points tels que $(\vec{AB}, \vec{AC}) = -\frac{\pi}{5}$ et $\vec{BD} = -2\vec{AC}$. Donner la mesure principale des angles orientés :

- 1 (\vec{BA}, \vec{AC}) , (\vec{AC}, \vec{BA}) , (\vec{AC}, \vec{AB}) et (\vec{AB}, \vec{CA}) .
- 2 (\vec{AC}, \vec{BD}) et (\vec{AB}, \vec{BD})

N₄ Coordonnées et cercle trigonométrique

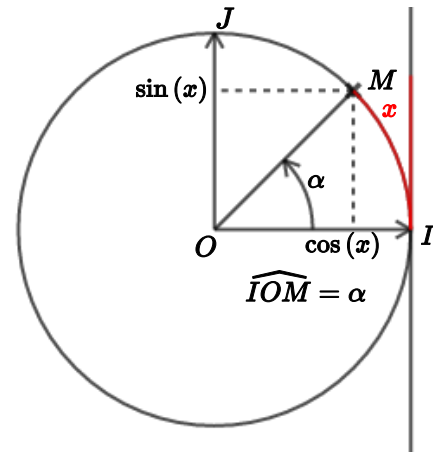
D Définition

On se place dans un repère orthonormé $(O; \vec{OI}; \vec{OJ})$. Soit M un point sur le cercle trigonométrique tel que $(\vec{OI}, \vec{OM}) = x$ (x est donc la mesure principale de l'angle vecteur (\vec{OI}, \vec{OM})) alors :

$M(\cos(x); \sin(x))$ ou $M(\cos x; \sin x)$ ou encore $M(\cos(\alpha); \sin(\alpha))$ ou $M(\cos \alpha; \sin \alpha)$

Pour $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{Z}$:

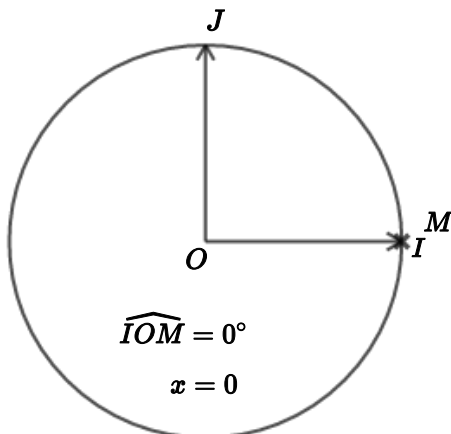
- $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$
- $-1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq \sin x \leq 1$
- $\cos(x + k \times 2\pi) = \cos x$ et $\sin(x + k \times 2\pi) = \sin x$
- $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$



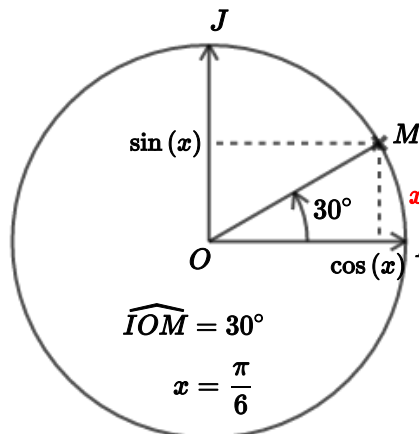
- 1 Démontrer que $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$.
- 2 Soient A et B tels que $(\vec{OI}, \vec{OA}) = -\frac{3\pi}{4}$ et $(\vec{OB}, \vec{OA}) = \frac{\pi}{5}$. Donner les coordonnées de A et B .
- 3 Démontrer que $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.
- 4 Calculer $\sin \frac{\pi}{3}$.
- 5 Démontrer que $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

N₅ Valeurs usuelles de cosinus et sinus

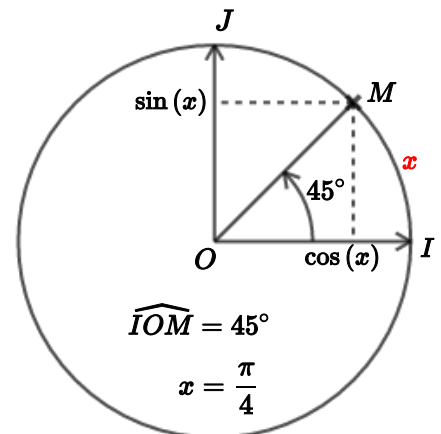
P Propriétés



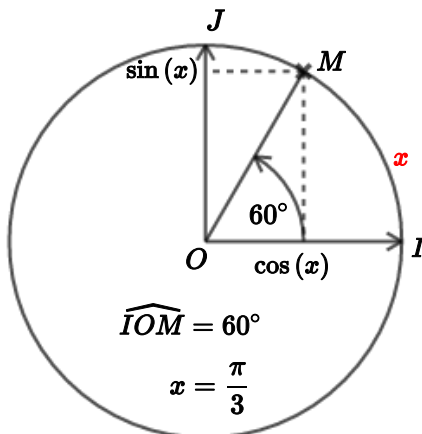
$$\cos(0) = 1 ; \sin(0) = 0$$



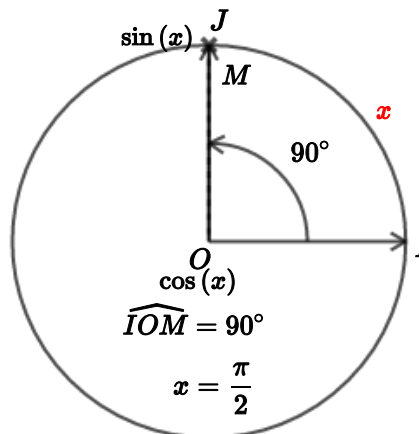
$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} ; \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$



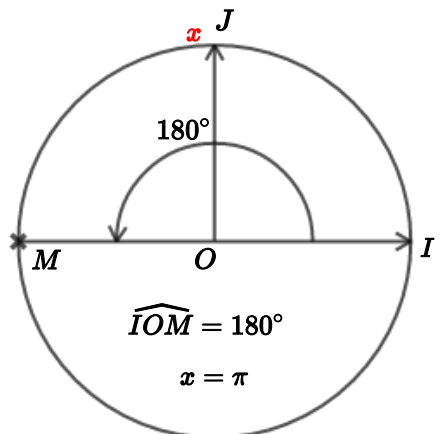
$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} ; \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} ; \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 ; \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$



$$\cos(\pi) = -1 ; \sin(\pi) = 0$$

On se place dans un repère orthonormé $(O; I; J)$. Soit M un point sur le cercle trigonométrique associé au nombre $\frac{\pi}{6}$: $\frac{\pi}{6}$ est la longueur de l'arc de cercle de I à M . On note $\alpha = \widehat{IOM}$. On pose $A(\cos(\frac{\pi}{6}); 0)$ et $B(0; \sin(\frac{\pi}{6}))$.

- 1 Faire une figure.
- 2 Donner la mesure de α en degré.
- 3 Démontrer que $OA = BM$
- 4 Démontrer que OMJ est un triangle isocèle.
- 5 Démontrer que $\widehat{MOJ} = 60^\circ$
- 6 Démontrer que OMJ est un triangle équilatéral.
- 7 Que dire de la droite (BM) dans le triangle OMJ ?
- 8 En déduire que B est le milieu de $[OJ]$. Donner la longueur OB .
- 9 Calculer la longueur BM .
- 10 Déduire des questions précédentes les valeurs exactes de $\sin(\frac{\pi}{6})$ et $\cos(\frac{\pi}{6})$

N₆ Angles associés

P Propriétés

Soit $x \in \mathbb{R}$:

- $\cos(-x) = \cos x$
- $\cos(\pi - x) = -\cos x$
- $\cos(\pi + x) = -\cos x$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$
- $\sin(-x) = -\sin x$
- $\sin(\pi - x) = \sin x$
- $\sin(\pi + x) = -\sin x$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$

1 Calculer $\cos \frac{-\pi}{3}$, $\cos \frac{4\pi}{3}$, $\sin \frac{\pi}{6}$ et $\sin \frac{5\pi}{6}$

2 Calculer $\cos \frac{3\pi}{4}$, $\cos \frac{-3\pi}{4}$, $\sin \frac{-\pi}{4}$ et $\sin \frac{3\pi}{4}$

N₇ Formules de duplication

P Formules de duplication

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$:

- $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
- $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
- $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$
- $\cos(2a) = 2 \cos^2 a - 1$
- $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$
- $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$
- $\sin(2a) = 2 \sin a \cos a$
- $\cos(2a) = 1 - 2 \sin^2 a$

1 Calculer $\cos(2x)$ quand $\cos x = -\frac{1}{4}$

2 Calculer $\cos(2x)$ quand $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

3 Calculer $\sin(2x)$ quand $\sin x = \frac{1}{3}$ et $x \in \left] \frac{\pi}{2}; \pi \right[$

4 Calculer $\sin(2x)$ quand $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ et $x \in \left] -\frac{\pi}{2}; 0 \right[$

5 Exprimer en fonction de $\cos x$ et $\sin x$, $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

6 Exprimer en fonction de $\cos x$ et $\sin x$, $\sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$

N₈ Équations trigonométriques

1 Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$. Puis préciser les solutions contenues dans l'intervalle $]0; 2\pi]$.

2 Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $\cos x = \frac{1}{2}$. Puis préciser les solutions contenues dans l'intervalle $] -\pi; \pi]$.

3 Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $\sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{8}\right)$ puis dans l'intervalle $]0; 4\pi]$.

4 Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ puis dans l'intervalle $] -\pi; \pi]$.

N₉ Inéquations trigonométriques

- 1 Résoudre dans $] -\pi; \pi]$ l'inéquation $\cos x \geq 0$. Représenter sur le cercle trigonométrique ces solutions.
- 2 Résoudre dans $] -\pi; \pi]$ l'inéquation $\sin x > \frac{\sqrt{2}}{2}$. Représenter sur le cercle trigonométrique ces solutions.
- 3 Résoudre dans $] -\pi; \pi]$ l'inéquation $\sin x \leq \frac{1}{2}$. Représenter sur le cercle trigonométrique ces solutions.

n°1 Une construction

Soient A et B deux points du plan tels que $AB = 4 \text{ cm}$.

- 1 Construire le point C tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{4}$ et $AB = AC$.
- 2 Construire le point D tel ACD soit un triangle équilatéral et $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CD}) = \frac{\pi}{3}$.
- 3 Construire le point E tel que $(\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DC}) = \frac{11\pi}{12}$ et $DE = 3 \text{ cm}$.
- 4 Démontrer que les droites (AB) et (DE) sont parallèles.
- 5 Construire le point F tel que A , F et C soient alignés et $(\overrightarrow{BF}, \overrightarrow{CD}) = \frac{5\pi}{12}$.
- 6 Démontrer que les droites (AB) et (BF) sont perpendiculaires.

n°2 Triangle ABD

Soit A, B, C et D des points du plan tels que : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{6}$ et $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{3}$. Démontrer que le triangle ABD est rectangle.

n°3 Un petit calcul

Pour tout nombre réel x , calculer : $(\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2$

n°4 Système d'inéquations

Résoudre dans \mathbb{R} , les systèmes d'inéquations suivants :

$$\begin{array}{ll} 1 \quad \begin{cases} \cos x \geq \frac{1}{2} \\ \sin x \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} & 2 \quad \begin{cases} \cos x \leq 0 \\ \sin x \geq -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \end{array}$$

n°5 Une équation

Résoudre dans \mathbb{R} : $(\sin(2x) + 1)(2\cos x + \sqrt{2}) = 0$

n°6 Points alignés

Soient A , B , C et D quatre points tels que : $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) = \frac{\pi}{3}$ et $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = \frac{\pi}{2}$.

Montrer que les points A , C et D sont alignés.

n°7 Équations trigonométriques

Résoudre dans $] -\pi; \pi]$ les équations suivantes et placer les solutions sur le cercle trigonométrique :

1 $\cos(2x) = -\frac{1}{2}$

2 $\sin(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

3 $\cos(2x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

n°8 Démonstrations

1 Démontrer que $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ en déduire que $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

2 Démontrer que $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ en déduire que $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ et que $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

n°9 Triangle magique

L'objectif est de résoudre le système d'équations dans $] -\pi; \pi]$:

$$\begin{cases} \cos(3x) = 1 \\ \sin(3x) = 0 \end{cases}$$

1 Méthode n°1 :

- (a) Montrer que les solutions de l'équation $\cos(3x) = 1$ dans \mathbb{R} s'écrivent : $x = \frac{2k\pi}{3}$ avec $k \in \mathbb{Z}$
- (b) Montrer que les solutions de l'équation $\sin(3x) = 0$ dans \mathbb{R} s'écrivent : $x = \frac{k\pi}{3}$ avec $k \in \mathbb{Z}$
- (c) En déduire les solutions du système d'équations initial.

2 Méthode n°2 :

- (a) En utilisant les formules d'addition, montrer l'égalité suivante :
 $\cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x)$ quel que soit x réel.
- (b) Montrer que l'équation $\cos 3x = 1$ est équivalente à $4X^3 - 3X - 1 = 0$ en posant $X = \cos(x)$ ($X \in [-1; 1]$).
- (c) Montrer que pour tout nombre réel X :
 $4X^3 - 3X - 1 = (X - 1)(4X^2 + 4X + 1)$
- (d) En déduire les solutions de l'équation : $4X^3 - 3X - 1 = 0$ et conclure sur les solutions de l'équation :
 $\cos(3x) = 1$ dans $] -\pi; \pi]$.
- (e) Vérifier que les solutions trouvées en (d) sont également solutions de $\sin(3x) = 0$.

3 Représentation graphique :

- (a) Placer sur le cercle trigonométrique les réels solutions du système. On les notera I, A et B .
- (b) Quelle est la nature du triangle IAB ? Justifier.