N_1 Variable aléatoire discrète et loi discrète de probabilité

D N *Variable aléatoire discrète*

Soit $\Omega = \{e_1; e_2; \cdots; e_p\}$ l'univers fini d'une expérience aléatoire. Son cardinal vaut p. Une **variable aléatoire discrète** X sur Ω est une fonction qui à chaque issue élémentaire e_i $(1 \leqslant i \leqslant p)$ associe un nombre réel x_j $(1 \leqslant j \leqslant n)$.

L'évènement "X prend la valeur x_j" est noté $(X = x_j)$ et est formé de toutes les issues élémentaires e_i de Ω ayant pour image x_j.

D *Loi discrète de probabilité*

Soit X une variable aléatoire discrète prenant les valeurs $\{x_1; x_2; \cdots; x_n\}$. Lorsqu'à chaque valeur x_j ($1 \leqslant j \leqslant n$) on associe la probabilité de l'évènement $(X = x_j)$, on définit la **loi de probabilité** de X. On représente généralement une loi de probabilité sous forme de tableau :

x_j	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
$P(X = x_j)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

Il faut vérifier que $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = \sum_{j=1}^{j=n} p_i = 1$

1 Une urne contient cinq jetons indiscernables au toucher numérotés de 1 à 5. Un joueur participe à la loterie en payant 2 €, ce qui lui donne le droit de prélever au hasard un jeton dans l'urne.
- Si le numéro est pair, il gagne en euros le double de la valeur indiquée par le jeton.
- Si le numéro est impair, il perd sa mise.

Soit X la variable aléatoire égale au "gain algébrique". Déterminer la loi de probabilité de X (sous forme de tableau).

2 On lance deux dés équilibrés à 6 faces et on note S la variable aléatoire donnant la somme des deux résultats obtenus. Déterminer la loi de probabilité de S sous forme de tableau.

3 Une boulangerie industrielle utilise une machine pour fabriquer des pains devant peser normalement 500 g. Seuls les pains pesant au moins 490 g vont être commercialisés. On note X la variable aléatoire donnant les masses possibles des pains en grammes. On donne la loi de probabilité de X :

x_j	480	490	500	510	520
$P(X = x_j)$	$0,08$	$0,29$	$0,41$	$0,12$	$0,1$

a) Quelle est la probabilité qu'un pain pèse au moins 500 g ?

b) Quelle est la probabilité qu'un pain soit commercialisé ?

N_2 Espérance

D *Espérance mathématique*

Soit X une variable aléatoire discrète prenant les valeurs $\{x_1; x_2; \cdots; x_n\}$ associées aux probabilités $\{p_1; p_2; \cdots; p_n\}$. L'**espérance** ou **moyenne** de X, notée $E(X)$, est :

$$\boxed{E(X) = p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n = \sum_{i=1}^{i=n} p_ix_i}$$

Lorsque X désigne le gain dans un jeu de hasard par exemple, $E(X)$ est le gain moyen que l'on peut **espérer**. Un jeu est **équitable** lorsque l'espérance du gain vaut 0 et **défavorable** quand elle est négative.

Le tableau suivant donne la loi de probabilité du gain algébrique X (variable aléatoire) d'un jeu de hasard :

x_j	-2	-1	0	1	2
$P(X = x_j)$	$0,1$	$0,25$	$0,4$	$0,2$	$0,05$

Calculer $E(X)$ et donner la nature de ce jeu.

N_3 Variance et écart-type

D *Variance et écart-type*

Soit X une variable aléatoire discrète prenant les valeurs $\{x_1; x_2; \cdots; x_n\}$ associées aux probabilités $\{p_1; p_2; \cdots; p_n\}$. La **variance** de X, notée $V(X)$, est :

$$V(X) = p_1(x_1 - E(X))^2 + \cdots + p_n(x_n - E(X))^2 = \sum_{i=1}^{i=n} p_i(x_i - E(X))^2 = E(X^2) - E(X)^2$$

L'**écart-type** de X, notée $\sigma(X)$, est :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

On donne les lois de probabilités du gain algébrique X et Y (variables aléatoires) de deux jeux :

x_j	-5	-1	0	1	3
$P(X = x_j)$	$0,2$	$0,3$	$0,1$	$0,1$	$0,3$

y_j	-3	-1	0	1	2
$P(Y = y_j)$	$0,1$	$0,4$	$0,2$	$0,2$	$0,1$

Quel jeu peut-on conseiller au joueur ?

N_4 Transformation affine

D *Transformation affine*

Soient X une variable aléatoire discrète prenant les valeurs $\{x_1; x_2; \cdots; x_n\}$. Pour $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, on peut définir une autre variable aléatoire, en associant à chaque issue donnant la valeur x_j, le nombre $ax_j + b$. On note cette variable aléatoire $aX + b$.

P *Propriétés*

$$E(aX + b) = aE(X) + b \qquad \text{et} \qquad V(aX + b) = a^2V(X)$$

1 Pour une variable aléatoire X, on donne $E(X) = 3$ et $V(X) = 16$. On pose la variable aléatoire $Y = -2X + 5$. Calculer $E(Y)$, $V(Y)$ et $\sigma(Y)$.

2 Un coiffeur se déplace à domicile. On note X le nombre de rendez-vous sur une journée. X est une variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée par :

x_j	0	1	2	3	4	5
$P(X = x_j)$	3%	9%	15%	38%	18%	17%

Chaque rendez-vous lui rapporte 30 €, et ses frais de fonctionnement quotidiens s'élèvent à 15 €. On note Y son gain journalier. Y est une variable aléatoire.

a) Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

b) Quelle relation lie X et Y ? Calculer $E(Y)$, $V(Y)$ et $\sigma(Y)$.

$n°1$ Bons d'achat

On distribue au hasard 150 bons d'achat à la sortie d'une parfumerie. Parmi les bons d'achat offerts :

- 5 donnent droit à 20 € de réduction;
- 10 donnent droit à 10 € de réduction;
- 40 donnent droit à 5 € de réduction;
- les autres donnent droit à 2 € de réduction.

Soit X la variable aléatoire qui donne le montant de la réduction offerte pour un bon d'achat distribué.

Donner la loi de probabilité de X puis calculer $E(X)$ et $V(X)$.

n°2 Espérance et variance

La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est donnée par le tableau ci-dessous.

x_j	2	$2,5$	3	$3,5$
$P(X = x_j)$	$0,3$	p	20%	$\frac{3}{10}$

Calculer p puis calculer $E(X)$ et $V(X)$.

n°3 Roulette

La roulette comporte 37 cases numérotées de 0 à 36. Les entiers pairs sont sur des cases noires, les entiers impairs sont sur des cases rouges mais 0 est sur une case verte. Un joueur veut participer, il a deux stratégies possibles.

- **Stratégie** 1 : Le joueur mise 5 euros sur un numéro entre 1 et 36. S'il gagne il remporte 35 fois sa mise et récupère sa mise, sinon il perd sa mise.

- **Stratégie** 2 : Le joueur mise 5 euros sur une couleur (noir ou rouge). S'il gagne il remporte 1 fois sa mise et récupère sa mise, sinon il perd sa mise.

Calculer l'espérance et l'écart-type du gain du joueur dans les deux cas. Commenter.

n°4 Deux jeux

On propose deux jeux dont les règles sont décrites ci-dessous.

- Jeu $n°1$: On lance un dé cubique équilibré numéroté de 1 à 6. Si on obtient 5 ou 6, on gagne 2 euros, sinon on perd 1 euro. Ensuite on lance une pièce équilibrée, si on obtient pile on gagne 1 euro, sinon on ne gagne rien.
- Jeu $n°2$: On lance un dé tétraédrique équilibré numéroté de 1 à 4. Si on obtient 4, on gagne 3 euros, sinon on perd 1 euro. Ensuite, on lance une pièce équilibrée, si on obtient pile on gagne 2 euros, sinon on perd 1 euro.

1. Déterminer les lois de probabilité des variables aléatoires X et Y donnant le gain de chacun de ces jeux.
2. Quel est le meilleur jeu à choisir pour un joueur ?

n°5 Réponses au hasard

Un exercice est composé de cinq questions pour lesquelles, on doit répondre obligatoirement par "vrai" ou "faux". Une réponse juste rapporte 2 points, une réponse fausse retire 1 point. En cas de score final négatif, la note est ramenée à zéro. On note X la variable aléatoire qui donne la note d'un candidat ayant répondu au hasard.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Quelle note peut espérer le candidat ?
3. On décide de ramener la note de chaque candidat sur 20. Quelle note peut espérer alors le candidat ?

n°6 Vente de fauteuils

Un commerçant vend entre 0 et 5 fauteuils d'un modèle donné par jour. Soit X la variable aléatoire qui indique le nombre de fauteuils vendus quotidiennement. X suit la loi de probabilité suivante :

x_i	0	1	2	3	4	5
$P(X = x_i)$	$0,1$	18%	$0,23$	$\frac{4}{10}$	a	$0,05$

1. Calculer a puis $E(X)$.
2. Le vendeur perçoit une commission de 100 € par fauteuil. De plus, il a des frais qui s'élèvent à 25 € par jour. Déterminer le salaire qu'il peut espérer sur un mois où il travaille 20 jours.

$n°7$ Un dé truqué

Un dé tétraédrique a été truqué de telle sorte que $p_2 = p_4 = 2p_1 = 2p_3$ (où p_i est la probabilité d'apparition du résultat i). Un joueur lance ce dé. S'il obtient un résultat pair, il perd x euros, sinon il gagne y euros. Calculer x et y pour que le jeu soit équitable et que la variance du gain soit égale à 8.

$n°8$ Plusieurs pièces

1. Un jeu consiste à lancer 3 fois une pièce parfaitement équilibrée. Le joueur gagne 100 euros s'il obtient trois fois pile. Sinon il perd 1 euro. Soit X la variable aléatoire donnant le gain algébrique du joueur.
   a) Représenter à l'aide d'un arbre les issues de cette expérience aléatoire.
   b) Donner la loi de probabilité de X.
   c) Le jeu est-il favorable au joueur ?
2. Dans cette question, la pièce est lancée n fois, n étant un nombre entier naturel non nul. Le joueur gagne 100 euros s'il obtient n fois pile ; sinon le joueur perd 1 euro. On note X_n la variable aléatoire donnant le gain algébrique du joueur.
   a) Démontrer que $P(X_n = 100) = \dfrac{1}{2^n}$ puis donner la loi de probabilité de X_n.
   b) Calculer $E(X_n)$.
   c) À l'aide de la calculatrice, déterminer le plus petit entier naturel n tel que le jeu soit défavorable au joueur.

$n°9$ Feux tricolores

Paul effectue en voiture le même trajet tous les jours. Sur sa route, il y a trois feux. Une étude statistique, portant sur le nombre X de feux rouges a permis d'établir les résultats suivants :

x_j	0	1	2	3
$P(X = x_j)$	$\frac{1}{10}$	$0,3$	$0,4$	20%

1. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.
2. Le trajet sans aucun arrêt dure 15 min et chaque feu rouge rallonge la durée du trajet de 2 min. Soit T la variable aléatoire qui donne la durée du trajet de Paul.
   a) Quelle relation lie X et T ?
   b) En déduire $E(T)$ et $V(T)$.

$n°10$ Dans un parc d'attraction

Un parc d'attractions propose une carte d'entrée pour la journée au prix de 30 €. Cette carte donne accès à des attractions avec un prix unique de 2 € par attraction. Une étude statistique a permis d'obtenir le tableau suivant :

Nombre d'attractions	2	3	4	5	6
% de clients	10	25	35	25	5

Soit X la variable aléatoire qui donne le nombre d'attractions choisies par un visiteur pris au hasard.
On note S la variable aléatoire qui donne la somme totale qu'il dépense.

1. Quelle relation lie X et S ?
2. Calculer $E(X)$ et en déduire $E(S)$.
3. Le parc a des frais d'organisation qui s'élèvent en moyenne à 25 € par client. Avec 200 visiteurs par jour, quel bénéfice peut espérer le gérant sur un an, en ouvrant le parc 365 jours ?