N_1 Signe de f'(x)

Propriétés

f est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

① Si f est constante sur I alors $f'(x) = 0$ quelque soit $x \in I$.

② Si f est strictement croissante sur I alors $f'(x) \geqslant 0$ quelque soit $x \in I$.

③ Si f est strictement décroissante sur I alors $f'(x) \leqslant 0$ quelque soit $x \in I$.

Donner le signe de la dérivée des fonctions suivantes sans calculer leur fonction dérivée :

1. $f_1(x) = x^2$ sur $[0; +\infty[$
2. $f_2(x) = 4 + 7x$
3. $f_3(x) = (6x - 7)^2$
4. $f_4(x) = (8 + 4x)^2$
5. $f_5(x) = (3x + 7)(3x - 7)$
6. $f_6(x) = 4(2x - 3)^2$
7. $f_7(x) = 8(2 + x)^2$
8. $f_8(x) = \frac{1}{x}$ sur $[0; +\infty[$

N_2 Sens de variation de f

Propriétés

f est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

① Si pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$ alors f est constante sur I.

② Si pour tout $x \in I$, $f'(x) \geqslant 0$ alors f est strictement croissante sur I.

③ Si pour tout $x \in I$, $f'(x) \leqslant 0$ alors f est strictement décroissante sur I.

Construire un tableau de variations, comportant le signe de la dérivée, des fonctions suivantes sur leur ensemble de définition :

1. $f_1(x) = 3x^2 + 8$
2. $f_2(x) = -2x + 9x$
3. $f_3(x) = 7 + 3x$
4. $f_4(x) = 12x^2 + 6x + 2$
5. $f_5(x) = -2x - 2x^2 + 6$
6. $f_6(x) = \dfrac{-2}{6x + 1}$
7. $f_7(x) = \sqrt{x}$
8. $f_8(x) = (4x - 9)^2$
9. $f_9(x) = \dfrac{5}{1 - x^2}$
10. $f_{10}(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

N_3 Extremum

Définitions

f est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et a un réel de I. f admet un **maximum local** (respectivement **minimum local**) en a s'il existe un intervalle ouvert $J =]\alpha; \beta[$ $(\alpha < \beta)$ contenu dans I tel que pour tout $x \in J$, $f(x) \leqslant f(a)$ (respectivement $f(x) \geqslant f(a)$)

f admet un **extremum local** signifie que f admet un maximum local ou un minimum local.

On considère la fonction f définie par $f(x) = 2x^2 + 10x + 5$ sur $\mathbb{R}$:

1. Construire un tableau de variations de f.
2. Dans un repère orthonormé, construire la courbe représentative de $\mathcal{C}_f$ de f.
3. Démontrer que f possède un extrémum local.

N_4 Quand f' s'annule

Propriétés

- f est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et a un réel de I. Si f admet un extremum local alors $f'(a) = 0$
- f est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et a un réel de I. Si f' s'annule en changeant de signe en a alors f admet un extremum local.

On considère la fonction f définie par $f(x) = -3x^2 + 6x - 1$ sur $\mathbb{R}$:

1. Construire un tableau de variations de f.
2. Dans un repère orthonormé, construire la courbe représentative de $\mathcal{C}_f$ de f.
3. Démontrer que f possède un extrémum local.
4. Déterminer la réel a tel que $f'(a) = 0$.

Construire un tableau de signes de la dérivée des fonctions suivantes sur leur ensemble de définition puis déterminer si ces fonctions admettent un extrémum local :

5. $f_1(x) = 7x^2 + 5x + 2$
6. $f_2(x) = x^3$
7. $f_3(x) = -x^3 + 30x^2$
8. $f_4(x) = 4x^4$
9. $f_5(x) = 2x^3 + 3x^2$
10. $f_6(x) = \dfrac{-3}{3x+1}$

$n°1$ Différentes variations

Déterminer l'ensemble de définition puis les variations de la fonction f définie par :

1. $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 5$
2. $f(x) = -x^3 + 2x - 3$
3. $f(x) = x^4 - x^2 + 2$
4. $f(x) = x^5 - x^3$
5. $f(x) = (x-1)\sqrt{x}$
6. $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$
7. $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$
8. $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x^2-1}$
9. $f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{x^3}$
10. $f(x) = \dfrac{10\sqrt{x}}{x+1}$
11. $f(x) = x + \dfrac{1}{2x^2}$
12. $f(x) = 3 + 6x^2 - 9x$

$n°2$ Aire et périmètre d'un rectangle

On étudie dans cet exercice le problème suivant : "Pour un rectangle d'aire x fixée, quelles sont les valeurs y possibles de son périmètre ?" On note l et L les dimensions du rectangle.

1. Étude d'un cas particulier : $x = 36$.
   a) Exprimer y en fonction de l.
   b) Déterminer les variations de $y : l \mapsto y(l)$
   c) Répondre au problème posé.
2. Étudier le cas général.

$n°3$ Application directe

Soit f définie par $f(x) = x^3 + x^2 + x$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .
2. Déterminer $f'(x)$ puis étudier son signe.
3. En déduire les variations de f.

$n°4$ Fonction f

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ et par : $f : x \mapsto \dfrac{12}{x^2+4}$ On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative. Soit $M \in \mathcal{C}_f$ et H son projeté orthogonal sur l'axe des abscisses. Le but de l'exercice est de déterminer l'aire maximale $\mathcal{A}_{OHM}$ de OHM, ainsi que la ou les positions du point M rendant cette aire maximale. Soit x l'abscisse de M.

1. Etudier les variation de f sur $[0;+\infty[$ puis tracer $\mathcal{C}_f$ dans un repère orthonormé.
   a) Placer le point M d'abscisse 2 puis placer H.
   b) Calculer l'aire de OHM.
2. Déterminer une expression de la fonction : $\mathcal{A} : x \mapsto \mathcal{A}_{OHM}$.
3. Déterminer les variations de cette fonction sur son ensemble de définition, que l'on précisera.
4. Répondre au problème posé.

$n°5$ Profit total

Une entreprise fabrique des biens. On note q la quantité de biens produits, $C(q)$ le coût de production de q unités et $R(q) = qp$ la recette issue de la vente de ces q unités, au prix de p \euro{} l'unité. Pour finir, on note $\pi(q) = R(q) - C(q)$ le profit réalisé.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante au fait que $\pi(q)$ admette un maximum en q_0.
2. Expliquer comment on aurait pu intuitivement trouver cette condition sans faire aucun calcul.
3. On donne $C(q) = 0,01q^3 - 0,135q^2 + 0,6q + 15$ milliers d'euros et $p = 2,7$ milliers d'euros.
   a) Déterminer graphiquement la quantité q_0 réalisant le profit maximal.
   b) Retrouver ce résultat algébriquement.

$n°6$ Boîte de conserve

On considère une boîte de conserve classique de forme cylindrique. Pour un volume $\mathcal{V}$ donné, on souhaite minimiser la quantité de métal utilisé pour confectionner cette boîte. On note r le rayon de la base et h la hauteur.

1. Démontrer que la surface $\mathcal{S}$ de métal utilisé est : $\mathcal{S}(r) = 2\pi r^2 + \dfrac{2\mathcal{V}}{r}$
2. Etudier la fonction $\mathcal{S}$ sur son ensemble de définition, que l'on précisera.
3. En déduire les dimensions de la boîte répondant au problème.

$n°7$ Une autre fonction f

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = x^2 + x - \frac{1}{x}$

1. Déterminer $f'(x)$. Démontrer que -1 est une racine évidente de : $x \mapsto 2x^3 + x^2 + 1$
2. On a donc $2x^3 + x^2 + 1 = (x+1)(ax^2 + bx + c)$, où a, b et c sont trois réels. Déterminer a, b et c.
3. A l'aide des question **2.** et **3.** étudier le signe de $f'(x)$.
4. En déduire les variations de f.