

n°1 Forme développée

D Définition : Fonction du second degré

Une fonction f définie sur \mathbb{R} est une **fonction polynôme du second degré** ou **fonction du second degré** si elle est de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a , b et c sont des réels tels que $a \neq 0$.

D Définition : Parabole

La représentation graphique ou courbe représentative d'une fonction du second degré est une **parabole**.
L'équation de la parabole est : $y = ax^2 + bx + c$

V Vocabulaire

- L'expression algébrique $ax^2 + bx + c$ est appelée **trinôme du second degré**.
- L'écriture $f(x) = ax^2 + bx + c$ de la fonction f est la **forme développée de f** .

Déterminer si les fonctions suivantes sont des fonctions du second degré et donner le cas échéant les trois coefficients a , b et c :

1 $f_1(x) = 6 - 3x^2 + 2x$

2 $f_2(x) = 4 + 7x$

3 $f_3(x) = (6x - 7)^2$

4 $f_4(x) = (8 + 4x)^2$

5 $f_5(x) = (3x + 7)(3x - 7)$

6 $f_6(x) = 4(2x - 3)^2$

n°2 Forme canonique

T Théorème : Forme canonique

La **forme canonique** de la fonction du second degré f définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ est :

$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ avec $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$. Cette **forme canonique** est **unique**.

Donner la forme canonique des fonctions du second degré suivantes :

1 $f_1(x) = 4x^2 + 5x + 9$

2 $f_2(x) = -3x^2 - 7x + 9$

3 $f_3(x) = 7x - x^2 - 10$

4 $f_4(x) = 9x^2 + 16 - 24x$

5 $f_5(x) = 81 - 49x^2$

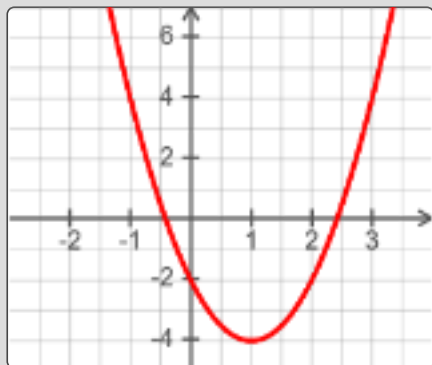
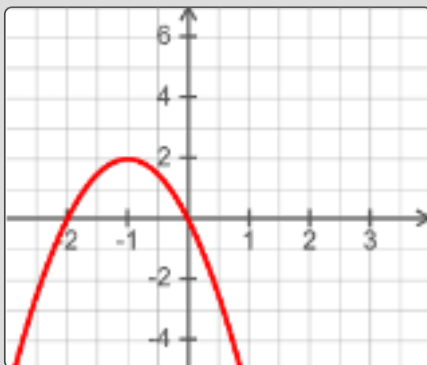
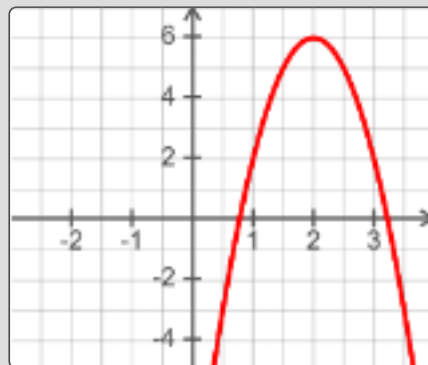
6 $f_6(x) = 7 + \sqrt{140}x + 5x^2$

n°3 Forme canonique : parabole

P Propriété

La parabole C_f , courbe représentative de la fonction du second degré f de forme canonique $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ a pour sommet $S(\alpha; \beta)$

Donner la forme canonique des fonctions du second degré suivantes :

Parabole C_{f_1} Parabole C_{f_2} Parabole C_{f_3}

n°4 Symétrie de la parabole

P Propriété : Symétrie de la parabole

La parabole C_f , courbe représentative de la fonction du second degré f de forme canonique $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ est symétrique par rapport à la droite verticale d'équation $x = \alpha$.

Tracer la courbe représentative des fonctions suivantes en traçant l'axe de symétrie :

1 $f_1(x) = (x - 8)^2 + 2$

2 $f_2(x) = 2(x + 1)^2 + 3$

3 $f_3(x) = -2(4 + x)^2 - 3$

4 $f_4(x) = (3x - 3)^2$

5 $f_5(x) = 6x^2 - 8x + 3$

6 $f_6(x) = (2x + 5)(2x - 5)$

n°5 Sens de variation

■ Propriété : sens de variation avec $a > 0$

La fonction du second degré f de forme canonique $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ avec $a > 0$ est :

- décroissante pour $x \in]-\infty; \alpha]$
- croissante pour $x \in [\alpha; +\infty[$

■ Propriété : sens de variation avec $a < 0$

La fonction du second degré f de forme canonique $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ avec $a < 0$ est :

- croissante pour $x \in]-\infty; \alpha]$
- décroissante pour $x \in [\alpha; +\infty[$

Construire le tableau de variations des fonctions du second degré suivantes :

1 $f_1(x) = -2(x - 3)^2 + 2$

2 $f_2(x) = 4(x + 2)^2 + 6$

3 $f_3(x) = (5x - 8)(2 - 6x)$

4 $f_4(x) = (5x - 3)^2$

5 $f_5(x) = 9x^2 - 2x + 5$

6 $f_6(x) = (7x + 8)(7x - 8)$

n°6 Equation du second degré

■ Définition : équation du second degré

Une équation du type $ax^2 + bx + c = 0$ avec a , b et c des nombres réels tels que $a \neq 0$ est appelée **équation du second degré**.

■ Définition : discriminant

$\Delta = b^2 - 4ac$ est le **discriminant** du trinôme du second degré $ax^2 + bx + c$.

Construire le tableau de variations des fonctions du second degré suivantes :

1 $f_1(x) = -2(x - 3)^2 + 2$

2 $f_2(x) = 4(x + 2)^2 + 6$

3 $f_3(x) = (5x - 8)(2 - 6x)$

4 $f_1(x) = -2(x - 3)^2 + 2$

5 $f_2(x) = 4(x + 2)^2 + 6$

6 $f_3(x) = (5x - 8)(2 - 6x)$

n°7 Racines d'une équation du 2nd degré**■ Vocabulaire : racines**

Les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ sont appelées **racines** ou **zéros**.

Construire le tableau de variations des fonctions du second degré suivantes :

1 $f_1(x) = -2(x - 3)^2 + 2$

2 $f_2(x) = 4(x + 2)^2 + 6$

3 $f_3(x) = (5x - 8)(2 - 6x)$

4 $f_1(x) = -2(x - 3)^2 + 2$

5 $f_2(x) = 4(x + 2)^2 + 6$

6 $f_3(x) = (5x - 8)(2 - 6x)$

n°8 Racines d'une équation du 2nd degré et discriminant■ **Théorème : racines quand $\Delta > 0$**

Lorsque le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ est **positif** :

L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ possède 2 racines x_1 et x_2 avec $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

■ **Théorème : racines quand $\Delta = 0$**

Lorsque le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ est **nul** :

L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ possède 1 racine x_0 avec $x_0 = \frac{-b}{2a}$

■ **Théorème : racines quand $\Delta < 0$**

Lorsque le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ est **négatif**, $ax^2 + bx + c = 0$ ne possède pas de racine réelle

Construire le tableau de variations des fonctions du second degré suivantes :

1	$f_1(x) = -2(x-3)^2 + 2$	2	$f_2(x) = 4(x+2)^2 + 6$	3	$f_3(x) = (5x-8)(2-6x)$
4	$f_1(x) = -2(x-3)^2 + 2$	5	$f_2(x) = 4(x+2)^2 + 6$	6	$f_3(x) = (5x-8)(2-6x)$

n°9 Racines et parabole

■ **Théorème**

La courbe représentative C_f de la fonction $f(x) = ax^2 + bx + c$:

- Lorsque le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ est **positif**, C_f coupe l'axe des abscisses en deux points

$$\left(x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}; 0\right) \text{ et } \left(x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}; 0\right)$$

- Lorsque le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ est **égal à 0**, C_f coupe l'axe des abscisses en un seul point

$$\left(x_0 = \frac{-b}{2a}; 0\right) \text{ qui est le sommet de la parabole.}$$

- Lorsque le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ est **négatif**, C_f ne coupe pas l'axe des abscisses.

Construire le tableau de variations des fonctions du second degré suivantes :

1	$f_1(x) = -2(x-3)^2 + 2$	2	$f_2(x) = 4(x+2)^2 + 6$	3	$f_3(x) = (5x-8)(2-6x)$
4	$f_1(x) = -2(x-3)^2 + 2$	5	$f_2(x) = 4(x+2)^2 + 6$	6	$f_3(x) = (5x-8)(2-6x)$

n°10 Forme factorisée

■ **Théorème**

Soit la forme développée de la fonction $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) :

- Lorsque le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ est **positif**, $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$

$$\text{avec } x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Lorsque le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ est **égal à 0**, $f(x) = a(x-x_0)^2$ avec $x_0 = \frac{-b}{2a}$

- Lorsque le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ est **négatif**, f ne possède pas de forme factorisée dans \mathbb{R}

Construire le tableau de variations des fonctions du second degré suivantes :

1	$f_1(x) = -2(x-3)^2 + 2$	2	$f_2(x) = 4(x+2)^2 + 6$	3	$f_3(x) = (5x-8)(2-6x)$
4	$f_1(x) = -2(x-3)^2 + 2$	5	$f_2(x) = 4(x+2)^2 + 6$	6	$f_3(x) = (5x-8)(2-6x)$

n°11 Inéquation du second degré

■ Définition et propriétés

Soient a , b et c des nombres réels tels que $a \neq 0$ et f la fonction du second degré définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ de courbe représentative \mathcal{C}_f .

Une inéquation du second degré est du type :

- $ax^2 + bx + c < 0 \rightarrow$ les abscisses x des points de \mathcal{C}_f strictement en **dessous** de l'axe des abscisses.
- $ax^2 + bx + c > 0 \rightarrow$ les abscisses x des points de \mathcal{C}_f strictement au **dessus** de l'axe des abscisses.
- $ax^2 + bx + c \leq 0 \rightarrow$ les abscisses x des points de \mathcal{C}_f en **dessous** de l'axe des abscisses.
- $ax^2 + bx + c \geq 0 \rightarrow$ les abscisses x des points de \mathcal{C}_f au **dessus** de l'axe des abscisses.

Construire le tableau de variations des fonctions du second degré suivantes :

- | | | | | | |
|---|--------------------------|---|-------------------------|---|-------------------------|
| 1 | $f_1(x) = -2(x-3)^2 + 2$ | 2 | $f_2(x) = 4(x+2)^2 + 6$ | 3 | $f_3(x) = (5x-8)(2-6x)$ |
| 4 | $f_1(x) = -2(x-3)^2 + 2$ | 5 | $f_2(x) = 4(x+2)^2 + 6$ | 6 | $f_3(x) = (5x-8)(2-6x)$ |

n°12 Signe d'un trinôme

■ Propriétés

On considère le trinôme $ax^2 + bx + c$ associé à la fonction $f(x) = ax^2 + bx + c$ et de discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$. x_1 , x_2 et x_0 sont les racines de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ lorsque $\Delta > 0$ et $\Delta = 0$.

- Quand $a > 0$ et $\Delta > 0$ alors $f(x) \geq 0$ sur $] -\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty[$ et $f(x) \leq 0$ sur $[x_1; x_2]$
- Quand $a < 0$ et $\Delta > 0$ alors $f(x) \leq 0$ sur $] -\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty[$ et $f(x) \geq 0$ sur $[x_1; x_2]$
- Quand $a > 0$ et $\Delta = 0$ alors $f(x) \geq 0$ sur \mathbb{R} et $f(x_0) = 0$
- Quand $a < 0$ et $\Delta = 0$ alors $f(x) \leq 0$ sur \mathbb{R} et $f(x_0) = 0$
- Quand $a > 0$ et $\Delta < 0$ alors $f(x) > 0$ sur \mathbb{R} et $f(x) \neq 0$ pour $x \in \mathbb{R}$
- Quand $a < 0$ et $\Delta < 0$ alors $f(x) < 0$ sur \mathbb{R} et $f(x) \neq 0$ pour $x \in \mathbb{R}$

Construire le tableau de variations des fonctions du second degré suivantes :

- | | | | | | |
|---|--------------------------|---|-------------------------|---|-------------------------|
| 1 | $f_1(x) = -2(x-3)^2 + 2$ | 2 | $f_2(x) = 4(x+2)^2 + 6$ | 3 | $f_3(x) = (5x-8)(2-6x)$ |
| 4 | $f_1(x) = -2(x-3)^2 + 2$ | 5 | $f_2(x) = 4(x+2)^2 + 6$ | 6 | $f_3(x) = (5x-8)(2-6x)$ |

n°13 Inéquation $f(x) \geq g(x)$

Soient 2 fonctions f et g définies par $f(x) = x^2 - 6x + 2$ et $g(x) = -2x^2 - 3x + 8$ de courbes représentatives \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g .

- | | | | |
|---|--|---|--|
| 1 | Etudier le signe de $f(x) - g(x)$ | 2 | Résoudre $f(x) \geq g(x)$ |
| 3 | Etudier la position de \mathcal{C}_f par rapport à \mathcal{C}_g . | 4 | Dans un même repère, tracer \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g . |

n°14 Histoire de pont

Un pont est soutenu par un arc parabolique d'une portée de **200 m** et d'une hauteur de **80 m**. Le pont et l'arc se coupent à **40 m** de la rive. Quelle est la hauteur du pont ?

n°15

Algorithme : forme canonique

Soit une fonction du second degré $f(x) = ax^2 + bx + c$ de forme canonique $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$. Ecrire un algorithme en **javascript** qui détermine les réels α et β de la forme canonique d'une fonction du second degré.

n°16

Dans un jardin

À l'intérieur d'un jardin carré dont la longueur du côté est **10** mètres, un jardinier souhaite installer, le long du bord, une allée en graviers de largeur constante. Comment faire en sorte que l'aire de l'allée soit égale à celle du carré intérieur ?

n°17

Algorithme : Racines d'un trinôme

Ecrire un algorithme en **javascript** qui détermine les solutions de l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$