N_1 Produit scalaire

D *Produit scalaire*

Le **produit scalaire** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u}\cdot\vec{v}$, (se lit " $\vec{u}$ scalaire $\vec{v}$") est défini par :

$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(||\vec{u}+\vec{v}||^2-||\vec{u}||^2-||\vec{v}||^2\right)}$$

P *Propriétés*

- $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$ (**commutatif**)
- Si $\vec{u}=\vec{0}$ ou $\vec{v}=\vec{0}$ alors $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$
- $\vec{u}\cdot\vec{u}=\vec{u}^2$ (**carré scalaire**)
- $\vec{u}^2=||\vec{u}||^2$

1. Soit ABC un triangle tel que $AB=6$, $AC=5$ et $BC=8$. Calculer $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC}$
2. Soit EFG un triangle tel que $EF=10$, $FG=3$ et $EG=8$. Calculer $\overrightarrow{GE}\cdot\overrightarrow{EF}$
3. Soit TRI un triangle tel que $RI=5$, $RT=6$ et $IT=4$. Calculer $\overrightarrow{IR}\cdot\overrightarrow{TI}$

N_2 Vecteurs orthogonaux

D *Vecteurs orthogonaux*

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** quand $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$. On note alors $\vec{u}\perp\vec{v}$.

P *Propriété*

Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls et $k\in\mathbb{Z}$.
$\vec{u}\perp\vec{v}$ si et seulement si $(\vec{u},\vec{v})=\frac{\pi}{2}+k\times 2\pi$ ou $(\vec{u},\vec{v})=-\frac{\pi}{2}+k\times 2\pi$

1. Soit ABC un triangle tel que $AB=5$, $AC=12$ et $BC=13$. $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont-ils orthogonaux ?
2. Soit EFG un triangle tel que $EF=17$, $FG=8$ et $EG=15$. $\overrightarrow{GF}$ et $\overrightarrow{EG}$ sont-ils orthogonaux ?
3. Soit KTD un triangle tel que $KT=18$, $TD=54$ et $KD=45$. $\overrightarrow{TK}$ et $\overrightarrow{KD}$ sont-ils orthogonaux ?
4. Soit TRI un triangle tel que $RI=24$, $RT=7$ et $IT=25$. Démontrer que $(\overrightarrow{RT},\overrightarrow{RI})=\frac{\pi}{2}$
5. Soit MLA un triangle tel que $ML=55$, $LA=73$ et $MA=48$. Démontrer que $(\overrightarrow{ML},\overrightarrow{MA})=-\frac{\pi}{2}$
6. Soit CXV un triangle tel que $CX=77$, $CV=35$ et $XV=85$. $\overrightarrow{CX}$ et $\overrightarrow{CV}$ sont-ils orthogonaux ?

$n°1$ Algorithme et produit scalaire

Ecrire un algorithme qui détermine le produit scalaire de deux vecteurs à partir de leur coordonnées.

$n°2$ Algorithme et droites perpendiculaires

Ecrire un algorithme :
- demandant à l'utilisateur de saisir les coordonnées de quatre points A, B, C et D;
- affichant en sortie si les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires ou si elles ne le sont pas.

N_3 *Produit scalaire et coordonnées*

Propriété

Dans un repère orthonormé du plan , soient $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, on alors : $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = xx' + yy'$

Calculer le produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$

1. $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} 7 \\ -5 \end{pmatrix}$
2. $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 15 \\ -8 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} 6 \\ -9 \end{pmatrix}$
3. $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}$
4. $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -7 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -\sqrt{6} \end{pmatrix}$
5. $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} \sqrt{3}-2 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} \sqrt{3}+2 \\ 1 \end{pmatrix}$
6. $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} \sqrt{6} \\ 2 \end{pmatrix}$, $A(\sqrt{24}+5;1)$ et $B(5;\sqrt{2})$

N_4 *Orthogonalité et angles orientés*

Propriété

Soient deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ non nuls et $k \in \mathbb{Z}$.
$\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$ si et seulement si $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \dfrac{\pi}{2} + k \times 2\pi$ ou $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = -\dfrac{\pi}{2} + k \times 2\pi$

Droites perpendiculaire

Deux droites du plan sont **perpendiculaires** si et seulement si un vecteur directeur de l'une est **orthogonal** à un vecteur directeur de l'autre.

1. Soient quatre points $A(-1;2)$, $B(5;0)$, $C(3;4)$ et $D(6;13)$. Montrer que les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.
2. Soient quatre points $E(1;3)$, $F-2;-2)$, $G(3;1)$ et $H(13;-5)$. Montrer que les droites (EF) et (GH) sont perpendiculaires.
3. Soient deux droites (d_1) et (d_2) d'équations respectives $2x+3y+8=0$ et $-6x+4y+10=0$. Montrer que $(d_1$ est perpendiculaire à (d_2).
4. Soient deux droites (d_1) et (d_2) d'équations respectives $-7x+6y-1=0$ et $y=-5x+8$. $(d_1$ et (d_2) sont-elles perpendiculaires ?

N_5 *Distributivité*

Propriétés

Soient k et k' deux réels et $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs :

- $\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w}$
- $(k\overrightarrow{u}) \cdot (k'\overrightarrow{v}) = (k \times k')\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$
- $(-\overrightarrow{u}) \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} \cdot (-\overrightarrow{v}) = -\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$

Développer puis exprimer les produits scalaires en fonction de $||\overrightarrow{u}||$, $||\overrightarrow{v}||$ et $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$

1. $3\overrightarrow{u} \cdot (5\overrightarrow{u} + 4\overrightarrow{v})$
2. $-2\overrightarrow{u} \cdot (-\overrightarrow{v} + 2\overrightarrow{u})$
3. $(5\overrightarrow{u} - 4\overrightarrow{v}) \cdot (-\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u})$
4. $(-2\overrightarrow{v} + 3\overrightarrow{u}) \cdot (4\overrightarrow{u} - 5\overrightarrow{v})$

N_6 Identités remarquables

Propriétés

- $(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 + 2\,\vec{u}\cdot\vec{v}$
- $(\vec{u}-\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 - 2\,\vec{u}\cdot\vec{v}$
- $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$
- $||\vec{u}+\vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 + 2\,\vec{u}\cdot\vec{v}$
- $||\vec{u}-\vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 - 2\,\vec{u}\cdot\vec{v}$
- $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2$

Développer puis exprimer les produits scalaires en fonction de $||\vec{u}||$, $||\vec{v}||$ et $\vec{u}\cdot\vec{v}$

1 $(5\vec{u}+4\vec{v})^2$

2 $(-\vec{u}-5\vec{v})^2$

3 $(5\vec{u}+4\vec{v})\cdot(5\vec{u}-4\vec{v})$

4 $(2\vec{u}-3\vec{v})^2$

N_7 Théorème de la médiane

Théorème

Soient A et B deux points distincts du plan et I le milieu de $[AB]$. Pour tout point M du plan :

$$\boxed{MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}}$$

Démontrer le théorème de la médiane.

N_8 Produit scalaire et cosinus

Propriétés

- Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls : $\vec{u}\cdot\vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{u}|| \times \cos(\vec{u},\vec{v})$
- Soient trois points A , B et C distincts du plan : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$

1 Calculer $\vec{u}\cdot\vec{v}$ avec :

a) $||\vec{u}|| = 5$, $||\vec{v}|| = 2$ et $\cos(\vec{u},\vec{v}) = 0,1$

b) $||\vec{u}|| = 5$, $||\vec{v}|| = 8$ et $(\vec{u},\vec{v}) = \frac{\pi}{6}\ (2\pi)$

c) $||\vec{u}|| = 7$, $||\vec{v}|| = 2$ et $(\vec{u},\vec{v}) = \frac{5\pi}{2}\ (2\pi)$

d) $||\vec{u}|| = \frac{5}{6}$, $||\vec{v}|| = \frac{\sqrt{3}}{8}$ et $(\vec{u},\vec{v}) = -\frac{5\pi}{6}\ (2\pi)$

e) $||\vec{u}|| = 9$, $||\vec{v}|| = 6$ et $\vec{u} = -1,5\,\vec{v}$

f) $||\vec{u}|| = 2\sqrt{2}$, $||\vec{v}|| = \sqrt{8}$ et $(\vec{u},\vec{v}) = \pi\ (2\pi)$

g) $||\vec{u}|| = \sqrt{2}+1$ et $\vec{u} = \sqrt{3}\,\vec{v}$

2 Soients $R(-1;-2)$, $S(5;-4)$ et $T(3;6)$. Déterminer une mesure de $\widehat{SRT}$.

3 ABC est un triangle tel que $AB = 5$; $BC = 6$ et $\widehat{ABC} = 60°$

a) Faire une figure.

b) Calculer $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$

4 Soient $A(0;0)$, $B(5;1)$ et $C(2;4)$.

a) Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$, AB et AC

b) En déduire une mesure de l'angle $\widehat{BAC}$.

5 ABC est un triangle tel que $AB = 7$, $BC = 8$ et $AC = 12$.

a) Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

b) En déduire une mesure de l'angle $\widehat{BAC}$.

6 Soient $M(0;2)$, $N(2;-2)$ et $A(-3;1)$. Déterminer une mesure de $\widehat{MNA}$.

N_9 *Produit scalaire et colinéarité*

P *Propriété*

Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires alors :

- $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = ||\overrightarrow{u}|| \times ||\overrightarrow{v}||$ si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont de même sens
- $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = -||\overrightarrow{u}|| \times ||\overrightarrow{v}||$ si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont de sens opposé

Démontrer la propriété précédente.

N_{10} *Projection orthogonale*

D *Projeté orthogonal*

Dans le plan, soient une droite (AB) et un point $C \notin (AB)$. H, **projeté orthogonal** de C sur (AB), est l'intersection de (AB) et de la perpendiculaire à (AB) passant par C.

P *Propriété*

Soient A, B et C trois points distincts du plan et H le projeté orthogonal de C sur (AB). On a :

$$\boxed{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}}$$

On considère un carré $ABCD$ de côté 2 et I le milieu de $[AB]$. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ puis $\overrightarrow{IC} \cdot \overrightarrow{BI}$

N_{11} *Vecteur normal*

D *Vecteur normal*

Dans le plan, un vecteur non nul $\overrightarrow{n}$ est **normal** à une droite (d) quand il est orthogonal à un vecteur directeur de la droite (d).

P *Propriété*

Dans un repère orthonormé du plan, soient deux réels $a \neq 0$ et $b \neq 0$.

- La droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ admet $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ pour vecteur normal.
- Réciproquement, une droite qui a pour vecteur normal $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ a pour équation cartésienne $ax + by + c = 0$.

1 Donner un vecteur normal à la droite :

a) (d_1) d'équation $2x - 3y + 5 = 0$

b) (d_2) d'équation $12x - 3y = 2$

c) (d_3) d'équation $y = 7x - 3$

d) (d_4) d'équation $y = -1$

e) (d_5) d'équation $x = 5$

2 Déterminer une équation de la droite de vecteur normal $\overrightarrow{u}$ et passant par M :

a) $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $M(2; -5)$

b) $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $M(-3; 6)$

c) $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $M(2; -3)$

d) $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$ et $M(7; 8)$

N_{12} Equation de cercle

P Propriétés

Dans un repère orthonormé du plan : • Le cercle $(\mathcal{C})$ de centre $A(x_A; y_A)$ et de rayon r a pour équation :

$$\boxed{(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = r^2}$$

• Le cercle $(\mathcal{C})$ de diamètre $[AB]$ est l'ensemble des points M vérifiant :

$$\boxed{\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0}$$

1. Soient $A(2; 3)$ et $B(5; -1)$. Déterminer une équation de $(\mathcal{C})$, cercle de diamètre $[AB]$.
2. Soient $G(1; 5)$ et $C(-2; 1)$. Déterminer une équation de $(\mathcal{C})$, cercle de rayon $[GC]$.

$n°3$ Aire de ABC

On considère trois points $A(-1; 1)$, $B(2; 2)$ et $C(0; 7)$ et B' le pied de la hauteur issue de B dans ABC.

1. Exprimer $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$ en fonction de CB'
2. En déduire CB' puis BB'
3. Calculer l'aire de ABC

$n°4$ Développements

On considère deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ tels que : $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 4$, $||\overrightarrow{u}|| = 3$ et $||\overrightarrow{v}|| = 2$.

1. Calculer $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})^2 - (\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v})^2$
2. Calculer $||2\overrightarrow{u} - 3\overrightarrow{v}||^2 + ||4\overrightarrow{u} + 5\overrightarrow{v}||^2$

$n°5$ Rectangle $ABCD$

On considère un rectangle $ABCD$ avec $AB = 5$ et $AD = 3$, E un point quelconque de $[AD]$ et F un point quelconque de $[BC]$. Soit G un point de $[CD]$

1. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EF}$
2. Exprimer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EG}$ en fonction de DG
3. Exprimer $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{GF}$ en fonction de BF

$n°6$ Tangentes perpendiculaires

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \dfrac{1}{x}$ et $g(x) = -\dfrac{1}{x}$

Les courbes représentatives de f et g admettent-elles des tangentes perpendiculaires ? Si oui, préciser lesquelles.

$n°7$ Intersection droites et cercle

Déterminer les points d'intersection éventuels du cercle d'équation $(x + 5)^2 + y^2 = 9$ et de la droite :

1. (d_1) d'équation $3x - y + 20 = 0$.
2. (d_2) d'équation $3x + y = 5$.

$n°8$ *Quelques configurations*

1 $ABCD$ est un parallélogramme avec $AB = 4$, $AD = 3$ et $AC = 6$. Calculer $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DA}$.

2 $ABCD$ est un parallélogramme avec $AB = a$ ($a \in \mathbb{R}$) et I est à la fois le milieu de $[AB]$ et le projeté orthogonal de C sur (AB). Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

3 $ABCD$ est un losange de côté 4 et vérifiant $\widehat{BAD} = 60°$. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

4 $ABCD$ est un carré de côté 1 et I est le milieu de $[DC]$ et J est le milieu de $[AD]$. Calculer $\overrightarrow{JI} \cdot \overrightarrow{BI}$.

5 $ABCD$ est un parallélogramme avec $AB = 5$ et $BD = 8$ et $\widehat{ABD} = 20°$. Calculer $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD}$, arrondir à $0,1$ près.

$n°9$ *Un autre rectangle $ABCD$*

On considère un rectangle $ABCD$ tel que $AB = 4$ et $AD = 3$. Le point E appartient à $[CB]$ tel que $EC = 1$. On cherche à déterminer où placer le point F de $[CD]$ tel que (DE) et (AF) soient perpendiculaires.

1 Faire une figure.

2 Calculer $(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CE}) \cdot (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DF})$

3 En déduire que le point F de $[CD]$ tel que (DE) et (AF) soient perpendiculaires vérifie : $DF = \dfrac{3}{4}$

$n°10$ *Distance d'un point à une droite*

On dit que la distance entre une droite (d) et un point A du plan est la longueur AA' où A' est le projeté orthogonal de A sur (d).

1 **Formule explicite**. On considère une droite (d) d'équation $ax + by + c = 0$ et un point $A(x_A; y_A)$. a, b, c, x_A et y_A sont des réels.

a) Dans un repère du plan, tracer une droite (d) quelconque, un point A extérieur à (d) et $A'(x_{A'}; y_{A'})$ son projeté orthogonal sur (d).

b) Soit $\overrightarrow{n}$ le vecteur normal à (d). Montrer que : $|\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{AA'}| = AA'\sqrt{a^2 + b^2}$

c) Exprimer $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{AA'}$ en fonction de a, b, x_A, y_A, $x_{A'}$ et $y_{A'}$.

d) Justifier que $-ax_{A'} - by_{A'} = c$

e) En déduire que la distance entre A et (d) est égale à : $\dfrac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

2 **Application**. Soit trois points $F(0; 6)$, $G(2; -1)$ et $H(-1; 3)$.

a) Déterminer une équation de (FG).

b) En déduire la distance de H à (FG).

c) Calculer l'aire de FGH.

3 **Algorithme**. Ecrire un algorithme :

- demandant à l'utilisateur de rentrer les coordonnées des points A, B et C.
- affichant la distance de C à (AB).

Vérifier la validité de cet algorithme en utilisant les points de la question **2**

$n°11$ *Démonstration*

En utilisant le produit scalaire, pour deux réels a et b, démontrer que : $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$