

N<sub>1</sub> Ensemble de définition

## D Ensemble de définition

L'ensemble de définition d'une fonction  $f$  représente l'ensemble des réels  $x$  (antécédents) pour lesquels il existe une image  $f(x)$  (qui est unique). On note souvent cet ensemble de définition  $\mathcal{D}_f$ .

En première il faut vérifier 2 points :

- On ne peut pas diviser par 0 : ce qui entraîne généralement la résolution d'une équation.
- Sous une racine carrée, il doit y avoir un nombre positif ou nul : ce qui entraîne généralement la résolution d'une inéquation.

1 Résoudre l'équation  $(5x - 2)(3 - 8x) = 0$ . En déduire l'ensemble de définition de  $f_1(x) = \frac{3x-2}{(5x-2)(3-8x)}$

2 Résoudre l'inéquation  $4x - 7 \geq 0$ . En déduire l'ensemble de définition de  $f_2(x) = \sqrt{4x - 7}$

3 Déterminer l'ensemble de définition de  $f_3(x) = -2x^2 - 8x + 2$

N<sub>2</sub> Sens de variation

## D Fonction croissante

Une fonction  $f$  définie sur un intervalle  $I$  est **croissante** lorsque pour tous les réels  $a$  et  $b$  dans  $I$  : si  $a \leq b$  alors  $f(a) \leq f(b)$  (l'ordre est respecté)

## D Fonction décroissante

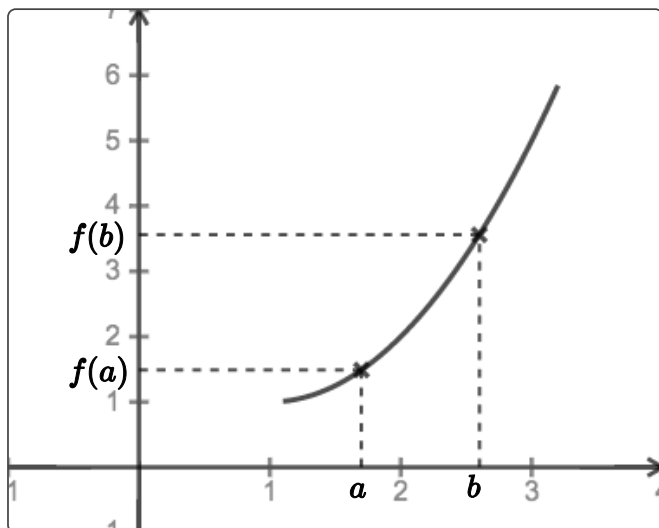
Une fonction  $f$  définie sur un intervalle  $I$  est **décroissante** lorsque pour tous les réels  $a$  et  $b$  dans  $I$  : si  $a \leq b$  alors  $f(a) \geq f(b)$  (l'ordre n'est pas respecté)

## D Fonction monotone

Une fonction  $f$  est **monotone** sur un intervalle  $I$  si elle est soit croissante ou soit décroissante sur  $I$  (mais pas les deux).

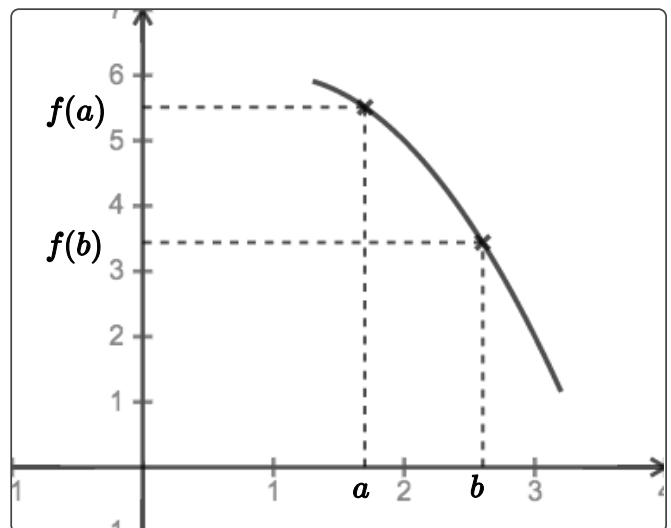
$f$  est croissante.

$a \leq b$  donc  $f(a) \leq f(b)$  (même ordre)



$f$  est décroissante.

$a \leq b$  donc  $f(a) \geq f(b)$  (ordre différent)



1 Soit  $f_1(x) = 3x - 9$ . Donner son ensemble de définition. Démontrer que  $f_1$  est croissante sur  $\mathbb{R}$ .

2 Soit  $f_2(x) = -2x + 1$ . Donner son ensemble de définition. Démontrer que  $f_2$  est décroissante sur  $\mathbb{R}$ .

3 Soit  $f_3(x) = 2x^2$ . Démontrer que  $f_3$  est croissante sur  $[0; +\infty[$  et décroissante sur  $] -\infty; 0]$ .

4 Soit  $f_4(x) = -4x^2$ . Démontrer que  $f_4$  est décroissante sur  $[0; +\infty[$  et croissante sur  $] -\infty; 0]$ .

5 Soit  $f_5(x) = 2\sqrt{x}$ . Démontrer que  $f_5$  est croissante sur  $[0; +\infty[$ .

6 Soit  $f_6(x) = \frac{-3}{x}$ . Démontrer que  $f_6$  est croissante sur  $]0; +\infty[$ .

N<sub>3</sub> Tableau variation

## D Tableau variation

Au lieu de spécifier qu'une fonction est croissante sur un intervalle, on place une flèche montante dans un tableau. Au lieu de spécifier qu'une fonction est décroissante sur un intervalle, on place une flèche descendante dans un tableau :

Tableau de variation d'une fonction  $f_1$  :

- décroissante sur  $] -\infty; a[$
- croissante sur  $[a; +\infty[$
- $f_1(a) = b$

$x$	$-\infty$	$a$	$+\infty$
$f_1$			

Tableau de variation d'une fonction  $f_2$  :

- croissante sur  $[a; b]$
- décroissante sur  $[b; +\infty[$
- $f_2(a) = c$  et  $f_2(b) = d$

$x$	$a$	$b$	$+\infty$
$f_2$			

Tableau de variation d'une fonction  $f_3$  :

- croissante sur  $] -\infty; a[$
- croissante sur  $]a; +\infty[$
- $a$  est une valeur interdite

$x$	$-\infty$	$a$	$+\infty$
$f_3$			

Tableau de variation d'une fonction  $f_4$  :

- décroissante sur  $[a; b]$
- croissante sur  $]b; +\infty[$
- $b$  est une valeur interdite

$x$	$a$	$b$	$+\infty$
$f_4$			

Tableau de variation d'une fonction  $f_5$  :

- croissante sur  $] -\infty; -\infty[$

$x$	$-\infty$	$+\infty$
$f_5$		

Tableau de variation d'une fonction  $f_6$  :

- décroissante sur  $[a; +\infty[$
- $f(a) = b$

$x$	$a$	$+\infty$
$f_6$		

1 Soit  $f_1(x) = 2 - 3x$ .

- Donner l'ensemble de définition de  $f_1$
- Démontrer que  $f_1$  est décroissante sur  $\mathbb{R}$
- Dresser le tableau de variation de  $f_1$

2 Soit  $f_2(x) = \frac{2}{2 - 4x}$ .

- Donner l'ensemble de définition de  $f_2$
- Démontrer que  $f_2$  est croissante sur son ensemble de définition
- Dresser le tableau de variation de  $f_2$

N<sub>4</sub> Extremum

## Maximum et minimum d'une fonction

- Dire que  $f$  admet un **maximum** en  $a$  sur l'intervalle  $I$  signifie que : Il existe un réel  $M$  tel que pour tout  $x$  dans  $I$  :  $f(x) \leq M$  et  $M = f(a)$ .
- Dire que  $f$  admet un **minimum** en  $a$  sur l'intervalle  $I$  signifie que : Il existe un réel  $m$  tel que pour tout  $x$  dans  $I$  :  $f(x) \geq m$  et  $m = f(a)$ .
- $f$  admet un **extremum** en  $a$  sur l'intervalle  $I$  si elle admet un maximum ou un minimum.

- 1 Soit la fonction  $f_1$  définie par  $f_1(x) = -2x^2 - 4x + 16$ .
- Démontrer que  $f_1$  est croissante sur  $] -\infty; -1]$
  - Démontrer que  $f_1$  est décroissante sur  $[-1; +\infty[$
  - Dresser le tableau de variation de  $f_1$
  - Conjecturer l'extremum de  $f_1$
  - Démontrer que  $f_1$  admet un maximum en  $-1$ . Donner sa valeur.
- 2 Soit la fonction  $f_2$  définie par  $f_2(x) = -9 + 3x^2 - 6x$ .
- Démontrer que  $f_2$  est décroissante sur  $] -\infty; 1]$
  - Démontrer que  $f_2$  est croissante sur  $[1; +\infty[$
  - Dresser le tableau de variation de  $f_2$
  - Conjecturer l'extremum de  $f_2$
  - Démontrer que  $f_2$  admet un minimum en  $1$ . Donner sa valeur.

N<sub>5</sub> Résoudre graphiquement une équation et une inéquation

## Méthode pour résoudre une équation graphiquement

Pour résoudre graphiquement une équation du type  $f(x) = g(x)$ , il suffit de tracer les représentations graphiques  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$  de  $f$  puis  $g$  puis de déterminer graphiquement le point ou les points d'intersection (s'ils existent) de  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$ .

## Méthode pour résoudre une inéquation graphiquement

Pour résoudre graphiquement une inéquation du type  $f(x) \leq g(x)$ , il suffit de tracer les représentations graphiques  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$  de  $f$  puis  $g$  :

- Quand  $\mathcal{C}_f$  est **en dessous** de  $\mathcal{C}_g$  alors  $f(x) \leq g(x)$
- Quand  $\mathcal{C}_f$  est **au dessus** de  $\mathcal{C}_g$  alors  $f(x) \geq g(x)$

On considère les fonctions  $f$  et  $g$  définies par  $f(x) = -3 + 3x^2 - 6x$  et  $g(x) = 4\sqrt{x}$

- 1 Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant (arrondir au dixième):

$x$	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2
$f(x)$								
$g(x)$								

- Dans un même repère tracer les représentations graphiques  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$  de  $f$  et  $g$
- Déterminer graphiquement le nombre  $x$  tel que  $-3 + 3x^2 - 6x = 4\sqrt{x}$
- Déterminer graphiquement les nombres  $x$  tel que  $-3 + 3x^2 - 6x \leq 4\sqrt{x}$
- Déterminer graphiquement les nombres  $x$  tel que  $-3 + 3x^2 - 6x \geq 4\sqrt{x}$

N<sub>6</sub> Fonction  $u + k$ 

## D Définition

Soit  $u$  une fonction définie sur  $D_u$  et  $k$  un nombre réel. La fonction  $u + k$  est définie sur  $D_u$  et par :

$$(u + k)(x) = u(x) + k$$

## P Propriété : courbe représentative

Dans un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , si  $u$  a pour courbe représentative  $C_u$  alors la courbe représentative  $C_{u+k}$  de  $u + k$  est l'image de  $C_u$  par la translation de vecteur  $k\vec{j}$ .

## P Propriété : variations

Si  $u$  est monotone (croissante ou décroissante) sur un intervalle  $I$  alors  $u + k$  a le même sens de variation que  $u$  sur  $I$ .

Dans des repères différents, tracer les courbes représentatives de :

$$\boxed{1} \quad f_1(x) = x^2 + 2 \quad \boxed{2} \quad f_2(x) = x^2 - 4 \quad \boxed{3} \quad f_3(x) = \sqrt{x} - 1 \quad \boxed{4} \quad f_4(x) = \frac{1}{x} - 5$$

Construire le tableau de variations de :

$$\boxed{5} \quad f_5(x) = x^2 + 9 \text{ sur } ] - \infty; 0] \quad \boxed{6} \quad f_6(x) = \frac{4}{x} + 2 \text{ sur } ] - \infty; 0[$$

$$\boxed{7} \quad f_7(x) = \sqrt{x} - 1 \text{ sur } [0; +\infty[$$

N<sub>7</sub> Fonction  $ku$ 

## D Définition

Soit  $u$  une fonction définie sur  $D_u$  et  $k \in \mathbb{R}$ . La fonction  $ku$  est définie sur  $D_u$  et par :

$$(ku)(x) = k \times u(x)$$

## P Propriété : variations

Si  $k > 0$  alors  $u$  et  $ku$  ont la même monotonie (croissante ou décroissante) sur un intervalle  $I$ .

Si  $k < 0$  alors  $u$  et  $ku$  sont de monotonie contraire (croissante ou décroissante) sur un intervalle  $I$ .

Construire un tableau de variation des fonctions suivantes sur leur ensemble de définition :

$$\boxed{1} \quad f_1(x) = 3x^2 \quad \boxed{2} \quad f_2(x) = -2x^2 \quad \boxed{3} \quad f_3(x) = 3\sqrt{x} \quad \boxed{4} \quad f_4(x) = \frac{-2}{x}$$

## n°1 Ensemble de définition

$$\boxed{1} \quad \text{Résoudre l'équation } 7x - 9 = 0. \text{ En déduire l'ensemble de définition de } f_1(x) = \frac{x}{7x - 9}$$

$$\boxed{2} \quad \text{Résoudre l'inéquation } (3x - 8)(2 - 5x) \geq 0. \text{ En déduire l'ensemble de définition de } f_2(x) = \sqrt{(3x - 8)(2 - 5x)}$$

$$\boxed{3} \quad \text{Déterminer l'ensemble de définition de } f_3(x) = x^2 + 8x - 7$$

$$\boxed{4} \quad \text{Déterminer l'ensemble de définition de } f_4(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 4}$$

$$\boxed{5} \quad \text{Résoudre l'équation } 4x^2 - 12x + 9 = 0. \text{ En déduire l'ensemble de définition de } f_5(x) = \frac{7x}{4x^2 - 12x + 9}$$

$$\boxed{6} \quad \text{Résoudre l'inéquation } 8x(x - 2)(x + 4) \geq 0. \text{ En déduire l'ensemble de définition de } f_6(x) = \sqrt{8x(x - 2)(x + 4)}$$

$$\boxed{7} \quad \text{Déterminer l'ensemble de définition de } f_7(x) = \frac{4x}{x^2 + 1}$$

n°2 **Tableau de variation**1 Soit  $f_1(x) = 2x - 10$ .

- a) Donner l'ensemble de définition de  $f_1$   
 b) Démontrer que  $f_1$  est croissante sur  $\mathbb{R}$   
 c) Dresser le tableau de variation de  $f_1$

2 Soit  $f_2(x) = 3\sqrt{3x+6}$ .

- a) Donner l'ensemble de définition de  $f_2$   
 b) Démontrer que  $f_2$  est croissante sur son ensemble de définition  
 c) Dresser le tableau de variation de  $f_2$

n°3 **Extremum**1 Soit la fonction  $f_1$  définie par  $f_1(x) = -10x^2 - 100x + 2000$ .

- a) Démontrer que  $f_1$  est croissante sur  $] -\infty; -5]$   
 b) Démontrer que  $f_1$  est décroissante sur  $[-5; +\infty[$   
 c) Dresser le tableau de variation de  $f_1$   
 d) Conjecturer l'extremum de  $f_1$   
 e) Démontrer que  $f_1$  admet un maximum en  $-5$ . Donner sa valeur.

2 Soit la fonction  $f_2$  définie par  $f_2(x) = 5\sqrt{x-2} - 10$ .

- b) Démontrer que  $f_2$  est croissante sur  $[2; +\infty[$   
 c) Dresser le tableau de variation de  $f_2$   
 d) Conjecturer l'extremum de  $f_2$   
 e) Démontrer que  $f_2$  admet un minimum en  $2$ . Donner sa valeur.

3 Soit la fonction  $f_3$  définie par  $f_3(x) = \frac{2}{x+2}$  et sur  $\mathbb{R}^+$ .

- a) Démontrer que  $f_3$  est décroissante sur  $\mathbb{R}^+$   
 b) Dresser le tableau de variation de  $f_3$  sur  $\mathbb{R}^+$   
 c) Conjecturer l'extremum de  $f_3$  sur  $\mathbb{R}^+$   
 d) Démontrer que  $f_3$  admet un maximum en  $0$  sur  $\mathbb{R}^+$ . Donner sa valeur.

n°4 **Equation et inéquation**On considère les fonctions  $f$  et  $g$  définies par  $f(x) = -2x^2 + 2$  et  $g(x) = 2(x+0,5)(x-3)$ 

1 Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant :

$x$	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$							
$g(x)$							

2 Dans un même repère tracer les représentations graphiques  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$  de  $f$  et  $g$ 3 Déterminer graphiquement le nombre  $x$  tel que  $-2x^2 + 2 = 2(x+0,5)(x-3)$ 4 Déterminer graphiquement les nombres  $x$  tel que  $-2x^2 + 2 \leq 2(x+0,5)(x-3)$ 5 Déterminer graphiquement les nombres  $x$  tel que  $-2x^2 + 2 \geq 2(x+0,5)(x-3)$