N_1 *Forme développée*

☐ *Définition : Fonction du second degré*

Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est une **fonction polynôme du second degré** ou **fonction du second degré** si elle est de la forme $\boxed{f(x) = ax^2 + bx + c}$ où a, b et c sont des réels tels que $a \neq 0$.

☐ *Définition : Parabole*

La représentation graphique ou courbe représentative d'une fonction du second degré est une **parabole**.

L'équation de la parabole est : $\boxed{y = ax^2 + bx + c}$

☐ *Vocabulaire*

- L'expression algébrique $ax^2 + bx + c$ est appelée **trinôme du second degré**.
- L'écriture $f(x) = ax^2 + bx + c$ de la fonction f est la **forme développée de f**.

Déterminer si les fonctions suivantes sont des fonctions du second degré et donner le cas échéant les trois coefficients a, b et c :

1. $f_1(x) = 6 - 3x^2 + 2x$
2. $f_2(x) = 4 + 7x$
3. $f_3(x) = (6x - 7)^2$
4. $f_4(x) = (8 + 4x)^2$
5. $f_5(x) = (3x + 7)(3x - 7)$
6. $f_6(x) = 4(2x - 3)^2$

N_2 *Forme canonique*

☐ *Théorème : Forme canonique*

La **forme canonique** de la fonction du second degré f définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ est :

$\boxed{f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta}$ avec $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$. Cette **forme canonique** est **unique**.

Donner la forme canonique des fonctions du second degré suivantes :

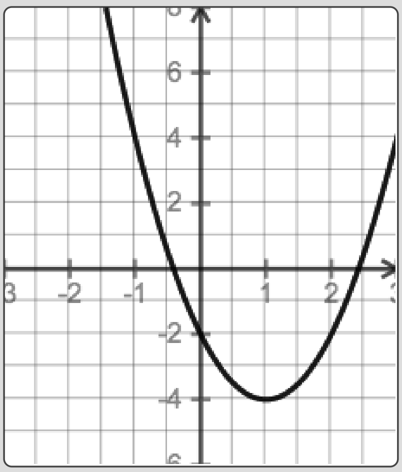
1. $f_1(x) = 4x^2 + 5x + 9$
2. $f_2(x) = -3x^2 - 7x + 9$
3. $f_3(x) = 7x - x^2 - 10$
4. $f_4(x) = 9x^2 + 16 - 24x$
5. $f_5(x) = 81 - 49x^2$
6. $f_6(x) = 7 + \sqrt{140}x + 5x^2$
7. $f_7(x) = 6x^2 - 9x + 1$
8. $f_8(x) = \frac{x^2}{3} - \frac{x}{6} + 1$
9. $f_9(x) = 4 - 12x + 9x^2$

N_3 *Forme canonique et parabole*

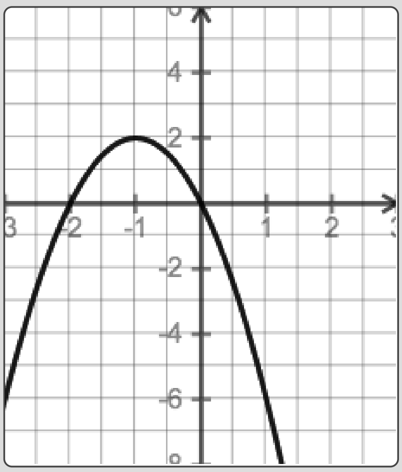
☐ *Propriété*

La parabole C_f, courbe représentative de la fonction du second degré f de forme canonique $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ a pour sommet $S(\alpha; \beta)$

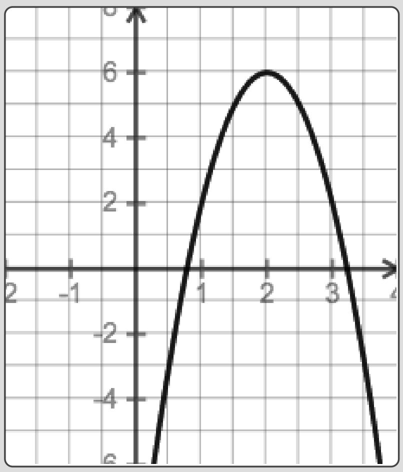
Donner la forme canonique des fonctions du second degré suivantes :



Parabole C_{f_1}



Parabole C_{f_2}



Parabole C_{f_3}

N_4 Symétrie de la parabole

Propriété : Symétrie de la parabole

La parabole C_f, courbe représentative de la fonction du second degré f de forme canonique $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ est symétrique par rapport à la droite verticale d'équation $x = \alpha$.

Tracer la courbe représentative des fonctions suivantes en traçant l'axe de symétrie :

1. $f_1(x) = (x-8)^2 + 2$
2. $f_2(x) = 2(x+1)^2 + 3$
3. $f_3(x) = -2(4+x)^2 - 3$
4. $f_4(x) = (3x-3)^2$
5. $f_5(x) = 6x^2 - 8x + 3$
6. $f_6(x) = (2x+5)(2x-5)$

N_5 Sens de variation

Sens de variation

On considère la fonction du second degré f de forme canonique $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ alors :

si $a > 0$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	β	$\nearrow$	$+\infty$

si $a < 0$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
f	$-\infty$	$\nearrow$	β	$\searrow$	$-\infty$

Construire le tableau de variations des fonctions du second degré suivantes :

1. $f_1(x) = -2(x-3)^2 + 2$
2. $f_2(x) = 4(x+2)^2 + 6$
3. $f_3(x) = (5x-8)(2-6x)$
4. $f_4(x) = (5x-3)^2$
5. $f_5(x) = 9x^2 - 2x + 5$
6. $f_6(x) = (7x+8)(7x-8)$
7. $f_7(x) = (x-3)^2$
8. $f_8(x) = x^2 - x + 3$
9. $f_9(x) = (2x+3)(x-1)$
10. $f_{10}(x) = (3x+1)^2$
11. $f_{11}(x) = x^2 - 2x + 1$
12. $f_{12}(x) = (2x+4)(x+1)$

N_6 Extremum

Extremum

On considère la fonction du second degré f de forme canonique $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ alors :
f admet β comme extremum qui est atteint pour $x = \alpha$.

- C'est un maximum si a est négatif.
- C'est un minimum si a est positif.

Déterminer l'extremum des fonctions du second degré suivantes :

1. $f_1(x) = -(x-5)^2 + 1$
2. $f_2(x) = 4(x+2)^2 + 2$
3. $f_3(x) = (3x-9)(2-x)$
4. $f_4(x) = (7x-1)^2$
5. $f_5(x) = 10x^2 - 10x + 2$
6. $f_6(x) = (6x+4)(6x-4)$
7. $f_7(x) = (9x+6)^2$
8. $f_8(x) = 6x^2 - 12x + 9$
9. $f_9(x) = (x+2)(x-2)$
10. $f_{10}(x) = (5x+1)^2$
11. $f_{11}(x) = x^2 - 4x + 4$
12. $f_{12}(x) = (2x+4)(2x-4)$

N_7 *Équation du second degré*

D *équation du second degré*

Une équation du type $\boxed{ax^2+bx+c=0}$ avec a, b et c des nombres réels tels que $a \neq 0$ est appelée **équation du second degré**.

D *discriminant*

$\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$ est le **discriminant** du trinôme du second degré ax^2+bx+c.

Déterminer le discriminant des équations du second degré suivantes :

1. $4x^2+5x-8=0$
2. $8x-x^2+2=0$
3. $4(x+2)^2-8=0$
4. $-5(x-3)^2+1=0$
5. $4(x+2)^2=-6$
6. $(5x-8)(2-6x)=0$

N_8 *Racines d'une équation du 2^{nd} degré*

V *racines*

Les solutions de l'équation $ax^2+bx+c=0$ sont appelées **racines** ou **zéros**.

T *racines quand* $\Delta > 0$

Lorsque le discriminant $\Delta = b^2-4ac$ est **positif** :

L'équation $ax^2+bx+c=0$ possède <u>2 racines</u> x_1 et x_2 avec $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

T *racines quand* $\Delta = 0$

Lorsque le discriminant $\Delta = b^2-4ac$ est **nul**, l'équation $ax^2+bx+c=0$ possède <u>1 racine</u> x_0 avec $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$

T *racines quand* $\Delta < 0$

Lorsque le discriminant $\Delta = b^2-4ac$ est **négatif**, $ax^2+bx+c=0$ ne possède pas de <u>racine réelle</u>

Déterminer les racines (ou zéro) des équations suivantes :

1. $4x^2-5x+1=0$
2. $8+2x-3x^2=0$
3. $9x^2-24x+16=0$
4. $(7x+3)(7x-3)=0$
5. $2(x+2)^2=-8$
6. $(5x-8)(2-6x)=0$

N_9 *Racines et parabole*

T *Théorème*

La courbe représentative C_f de la fonction $f(x)=ax^2+bx+c$:

- Lorsque le discriminant $\Delta = b^2-4ac$ est **positif**, C_f coupe l'axe des abscisses en deux points $\left(x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\,;0\right)$ et $\left(x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\,;0\right)$
- Lorsque le discriminant $\Delta = b^2-4ac$ est **égal à** 0, C_f coupe l'axe des abscisses en un seul point $\left(x_0 = \dfrac{-b}{2a}\,;0\right)$ qui est le sommet de la parabole.
- Lorsque le discriminant $\Delta = b^2-4ac$ est **négatif**, C_f ne coupe pas l'axe des abscisses.

Tracer les courbes représentatives des fonctions suivantes et indiquer quand ces représentations graphiques coupent l'axe des abscisses :

1. $f_1(x) = 7x-3+2x^2$
2. $f_2(x) = -3x^2+2x+3$
3. $f_3(x) = (6x-2)^2$

N_{10} Inéquation du second degré et signe d'un trinôme : forme canonique

D P Définition et propriétés

Soient a, b et c des nombres réels tels que $a \neq 0$ et f la fonction du second degré définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ de courbe représentative $\mathcal{C}_f$.

Une inéquation du second degré est du type :

- $ax^2 + bx + c < 0 \to$ les abscisses x des points de $\mathcal{C}_f$ strictement en **dessous** de l'axe des abscisses.
- $ax^2 + bx + c > 0 \to$ les abscisses x des points de $\mathcal{C}_f$ strictement au **dessus** de l'axe des abscisses.
- $ax^2 + bx + c \leqslant 0 \to$ les abscisses x des points de $\mathcal{C}_f$ en **dessous** de l'axe des abscisses.
- $ax^2 + bx + c \geqslant 0 \to$ les abscisses x des points de $\mathcal{C}_f$ au **dessus** de l'axe des abscisses.

P Signe

On considère le trinôme $ax^2 + bx + c$ associé à la fonction $f(x) = ax^2 + bx + c$ de forme canonique $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ alors $\Delta = -4a\beta$ ($\Delta = 0 \Leftrightarrow \beta = 0$) :

si $a > 0$ et $\beta > 0$ ($\Delta < 0$)

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	$+$	

si $a < 0$ et $\beta \geqslant 0$ ($\Delta \geqslant 0$)

x	$-\infty$		$\alpha - \sqrt{\frac{\beta}{-a}}$		$\alpha + \sqrt{\frac{\beta}{-a}}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

si $a < 0$ et $\beta < 0$ ($\Delta < 0$)

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	$-$	

si $a > 0$ et $\beta \leqslant 0$ ($\Delta \geqslant 0$)

x	$-\infty$		$\alpha - \sqrt{\frac{-\beta}{a}}$		$\alpha + \sqrt{\frac{-\beta}{a}}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Construire le tableau de signes des fonctions du second degré suivantes :

1. $f_1(x) = -2(x-3)^2 + 2$
2. $f_2(x) = 4(x+2)^2 + 6$
3. $f_3(x) = (5x-8)(2-6x)$
4. $f_4(x) = -3(x-2)^2 + 1$
5. $f_5(x) = 2(x+1)^2 + 3$
6. $f_6(x) = (3x-6)(2-x)$

N_{11} Forme factorisée

T Théorème

Soit la forme développée de la fonction $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) :

- Lorsque le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ est **positif**, $\boxed{f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)}$

avec $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

- Lorsque le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ est **égal à** 0, $\boxed{f(x) = a(x-x_0)^2}$ avec $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$
- Lorsque le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ est **négatif**, f ne possède pas de forme factorisée dans $\mathbb{R}$

Factoriser, si c'est possible, les expressions suivantes :

1. $A = 2x^2 - 8x + 1$
2. $B = 9 + 3x^2 + 2x$
3. $C = 25 - 9x^2$
4. $D = 5x^2 - 8$
5. $E = 7 - 9x^2 + 4x$
6. $F = 10x^2 + 4x$

N_{12} *Signe d'un trinôme: forme factorisée*

Propriétés

On considère le trinôme ax^2+bx+c associé à la fonction $f(x)=ax^2+bx+c$ dont la forme factorisée existe : $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$ avec $x_1 \leqslant x_2$ c'est à dire $\Delta \geqslant 0$:

- Pour $a>0$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
a		$+$		$+$		$+$	
$(x-x_1)$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x-x_2)$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

- Pour $a<0$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
a		$-$		$-$		$-$	
$(x-x_1)$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x-x_2)$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

En construisant un tableau des signes de la fonction du second degré associée, résoudre les inéquations suivantes :

1. $4x^2+5x+9<0$
2. $8x^2-7x+6 \geqslant 0$
3. $9-6x^2+3>0$
4. $8x-x^2+6 \leqslant 0$
5. $(5x-8)^2 \geqslant 0$
6. $(10x+9)(10x-9)<0$

$n°1$ *Inéquation $f(x) \geqslant g(x)$*

Soient 2 fonctions f et g définies par $f(x)=x^2-6x+2$ et $g(x)=-2x^2-3x+8$ de courbes représentatives $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

1. Étudier le signe de $f(x)-g(x)$
2. Résoudre $f(x) \geqslant g(x)$
3. Étudier la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à $\mathcal{C}_g$.
4. Dans un même repère, tracer $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

$n°2$ *Algorithme : forme canonique*

Soit une fonction du second degré $f(x)=ax^2+bx+c$ de forme canonique $f(x)=a(x-\alpha)^2+\beta$. Écrire un **algorithme** qui détermine les réels α et β de la forme canonique d'une fonction du second degré.

$n°3$ *Histoire de pont*

Un pont est soutenu par un arc parabolique d'une portée de $200\ m$ et d'une hauteur de $80\ m$. Le pont et l'arc se coupent à $40\ m$ de la rive. Quelle est la hauteur du pont ?

$n°4$ Dans un jardin

À l'intérieur d'un jardin carré dont la longueur du côté est 10 mètres, un jardinier souhaite installer, le long du bord, une allée en graviers de largeur constante. Comment faire en sorte que l'aire de l'allée soit égale à celle du carré intérieur ?

$n°5$ Trinômes

Déterminer les racines des trinômes suivants :

1. $\dfrac{3}{2}x - 2x^2 + 1$
2. $x^2 - \sqrt{5}x + 1$
3. $7x - 8x^2 + \dfrac{1}{3}$
4. $\sqrt{10}x - \sqrt{2}x^2 + 1$

$n°6$ Inéquations

Résoudre dans $\mathbb{R}$, les inéquations suivantes :

1. $\dfrac{3x-7}{2x-9} \geqslant \dfrac{x+3}{9+3x}$
2. $\dfrac{x+1}{x-1} < \dfrac{3x+2}{7-2x}$
3. $\dfrac{4x-1}{x+9} \leqslant \dfrac{4x+1}{10-3x}$
4. $\dfrac{x-9}{3x-4} > \dfrac{5x-9}{4x+3}$

$n°7$ Une parabole et 3 points

La parabole $\mathcal{P}$ coupe l'axe des ordonnées en $A(0;3)$ et passe par $B(1;-1)$ et $C(3;1)$. Déterminer son équation sous la forme $y = ax^2 + bx + c$ puis sous la forme canonique. Tracer cette parabole.

$n°8$ Dans un théâtre

Le directeur d'une salle de théâtre a remarqué qu'à 40 € la place, il peut compter jusqu'à 500 spectateurs et que chaque baisse de $2,50$ € lui amène 100 personnes de plus. Soit x le nombre de baisses du prix de la place de $2,50$ €. On modélise cette situation par la fonction g.

1. Déterminer l'expression de la fonction g.
2. Dresser le tableau de variation de g puis tracer sa courbe représentative dans un repère.
3. Combien doit-il faire payer la place pour avoir une recette maximale ?

$n°9$ Une belle volée

Un tennisman frappe droit devant lui une volée à $1\ m$ du filet alors que la balle est à $0,9\ m$ de hauteur en A. La balle franchit le filet en B à une hauteur de $1,1\ m$ et atteint en C une hauteur maximale de $1,3\ m$. La longueur d'un terrain de tennis est $23,77\ m$. La balle sortira-t-elle du cours ?

$n°10$ Une parabole et une droite

Soient $\mathcal{P}$ la parabole d'équation $y = x^2 - x + 1$ et la droite (d) d'équation $y = 4x - 3$

1. Déterminer, par le calcul, les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{P}$ et (d).
2. Dans un même repère, tracer $\mathcal{P}$ et (d).

$n°11$ Paramétrage

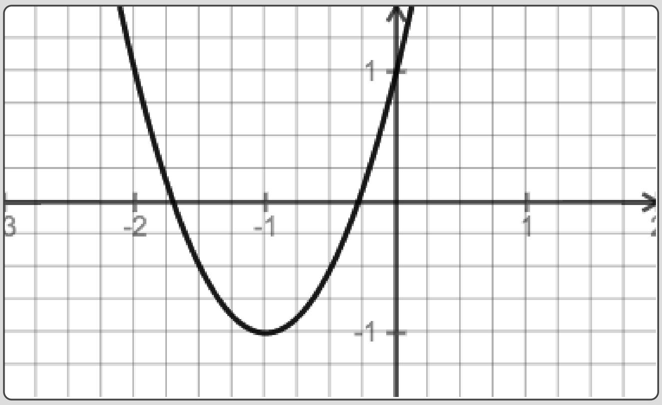
On considère l'équation $(E) : x^2 + 2x + m = 0$. L'objectif de l'exercice est de déterminer pour quelles valeurs de m l'équation (E) admet au moins une solution.

1. Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations : $x^2 + 2x = 0$ et $x^2 + 2x + 1 = 0$
2. Résoudre, dans $\mathbb{R}$, $(E) : x^2 + 2x + m = 0$.

n°12 A partir d'une parabole

Le graphique ci-contre donne la courbe représentative d'un trinôme défini sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$:

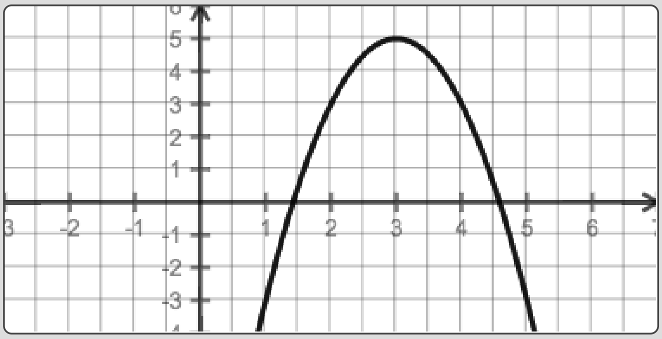
1. Donner par lecture graphique $f(0)$; $f(-1)$; $f(-2)$.
2. En déduire a, b et c puis l'expression de f.



n°13 A partir de la forme canonique

Ci-contre est donnée la représentation graphique $\mathcal{C}_f$ d'une fonction trinône f définie sur $\mathbb{R}$ par sa forme canonique $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$.

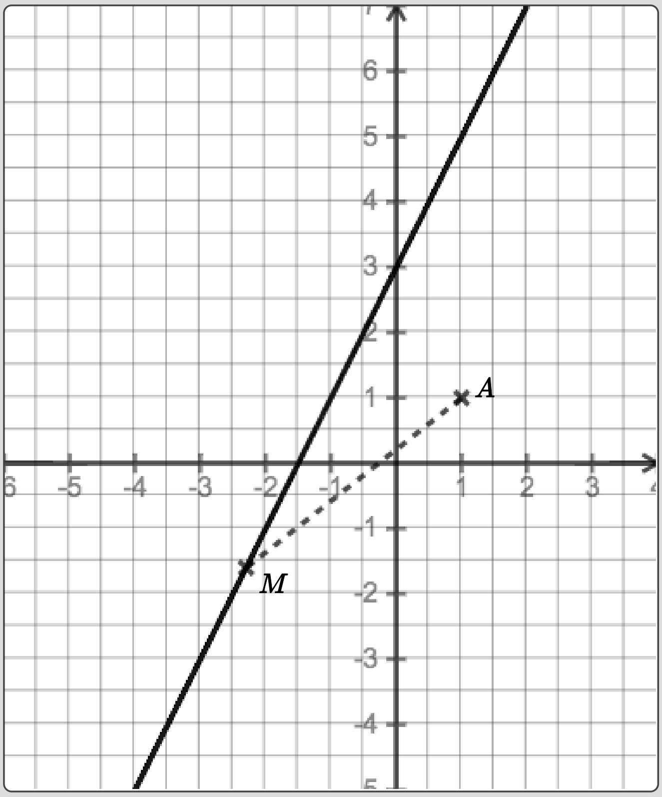
1. Lire graphiquement les coordonnées du sommet de la parabole représentant la fonction f.
2. Déterminer l'expression de f.



n°14

On considère la droite (d) d'équation $y = 2x + 3$ et A le point de coordonnées $(1; 1)$. M est un point quelconque de la droite (d) et on note x l'abscisse de M. On considère le point B de coordonnées $(0; 3)$. On définit la fonction f par : $f(x) = AM^2$.

1. Justifier que l'ordonnée de M est $y_M = 2x + 3$. Vérifier que $f(x) = 5x^2 + 6x + 5$.
2. Vérifier que l'expression $5(x + 0,6)^2 + 3,2$ est la forme canonique du trinôme f.
3. Étudier les variations de la fonction f. Pour quelle valeur x_0 la fonction atteint-elle son extremum ?
4. M_0 est le point de la droite (d) tel que la distance AM^2 soit minimale. Justifier que les coordonnées de M_0 sont $(-0,6; 1,8)$.
5. Vérifier que B est un point de la droite (d).
6. Déterminer la nature du triangle ABM_0. Que peut-on dire des droites (AM_0) et (d) ?



n°15 Équations

Résoudre dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

1. $\dfrac{2x-4}{x-7} = \dfrac{7x+3}{4+x}$
2. $\dfrac{x-8}{3x-7} = \dfrac{4x+3}{8+2x}$

n°16 *Vases*

Un artisan fabrique entre 0 et 60 vases par jour et estime que le coût de production de x vases est modélisé par la fonction C donnée par $C(x) = x^2 - 10x + 500$. On note $R(x)$ la recette, en euros, correspondant à la vente de x vases fabriqués.

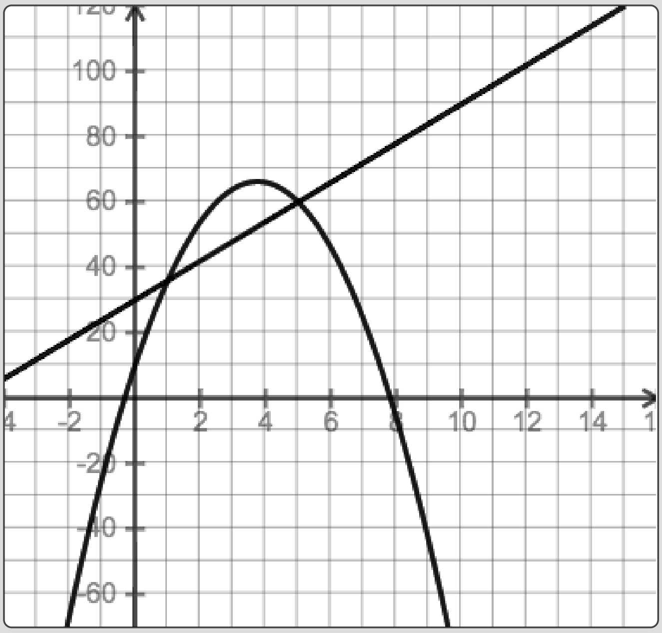
Un vase est vendu 50 €.

1. Exprimer $R(x)$ en fonction de x.
2. Calculer le coût, la recette et le bénéfice réalisés lorsque l'artisan vend 50 vases.
3. Vérifier que le bénéfice, en euros, réalisé par l'artisan est donné par la fonction B dont l'expression est : $B(x) = -x^2 + 60x - 500$.
4. Développe l'expression : $-(x-30)^2 + 400$. En déduire le nombre de vases à vendre pour réaliser un bénéfice maximum.

n°17 *Position relative*

Voici la droite (d) d'équation $y = 6x + 30$ et la parabole $\mathcal{P}$ représentant la fonction f :
$f(x) = -4x^2 + 30x + 10$.

1. Démontrer, qu'étudier les positions relatives de la droite (d) et de la parabole $\mathcal{P}$ revient à résoudre l'inéquation $-4x^2 + 24x - 20 \geqslant 0$.
2. Vérifier que l'expression $5(x+0,6)^2 + 3,2$ est la forme canonique du trinôme f.
3. Vérifier que, pour tout réel x :
$-4x^2 + 24x - 20 = -4(x-3)^2 + 16$.
4. Résoudre alors l'inéquation
$-4x^2 + 24x - 20 \geqslant 0$.
5. Conclure.



n°18 *Une équation difficile*

On considère l'équation : $\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x+1} = 1$

1. Quelles sont les valeurs à exclure des solutions de cette équation ?
2. Démontrer que cette équation revient à résoudre l'équation : $(x+1) + (x-1) = (x+1)(x-1)$
3. Quel est l'ensemble des solutions de cette équation.

n°19 *Deux paraboles*

Soient $\mathcal{P}$ la parabole d'équation $y = 2x^2 + x + 4$ et $\mathcal{P}'$ la parabole d'équation $y = -x^2 - 5x + 1$

1. Déterminer, par le calcul, les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$.
2. Dans un même repère, tracer $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$.

n°20 *Algorithme : Racines d'un trinôme*

Soit une fonction du second degré $f(x) = ax^2 + bx + c$.
Écrire un **algorithme** qui détermine les zéros de l'équation du second degré $f(x) = 0$.