

N₁ Suite numérique

N Notation

\mathbb{N} désigne l'ensemble des nombres entiers positifs appelés **entiers naturels**.

D Suite numérique

Une **suite numérique**, notée (u_n) ou u , est une fonction définie sur \mathbb{N} . L'image de l'entier n , notée u_n

(sans les parenthèses), est appelée **terme de la suite u d'indice n** . Ainsi :

$$\begin{array}{ccc} (u_n) : \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & u_n \end{array}$$

D Suite explicite

Une **suite explicite** est une suite dont les termes sont de la forme : $u_n = f(n)$ ou f est une fonction définie sur un intervalle I de \mathbb{R} .

1 Soit u une suite numérique définie par :

$$u_n = n^2$$

- Pour quelle(s) valeur(s) de n , u_n n'est pas définie.
- Calculer les termes u_0 , u_1 , ... et u_8 .
- Dans un repère, placer les points $(n; u_n)$ pour tous les entiers naturels plus petits que 8.
- Quel est l'indice de u tel que $u_n = 12167$?
- Quels sont les indices de u tels que $u_n \leq 99$?
- Quel est l'indice de u tel que $u_n = 10$?

3 Soit u une suite numérique définie par :

$$u_n = \sqrt{n}$$

- Pour quelle(s) valeur(s) de n , u_n n'est pas définie.
- Calculer les termes u_0 , u_1 , u_4 , u_9 , u_{16} , u_{25} .
- Dans un repère, placer les points $(n; u_n)$ pour tous les entiers naturels correspondants à la question précédente.
- Quel est l'indice de u tel que $u_n = 12167$?
- Quels sont les indices de u tels que $u_n \leq 99$?
- Quel est l'indice de u tel que $u_n = 10$?

2 Soit u une suite numérique définie par :

$$u_n = \frac{1}{n}$$

- Pour quelle(s) valeur(s) de n , u_n n'est pas définie.
- Calculer les termes u_1 , ... et u_5 .
- Dans un repère, placer les points $(n; u_n)$ pour tous les entiers naturels plus petits que 5.
- Quel est l'indice de u tel que $u_n = 10^{-34}$?
- Quels sont les indices de u tels que $u_n \geq 1$?

4 Soit u une suite numérique correspondant aux nombres impairs.

- Donner la fonction f telle que $u_n = f(n)$.
- Calculer les 10 premiers termes de la suite u .
- Dans un repère, placer les 10 points correspondants aux indices de la question précédente.
- Ces points sont-ils alignés ? Justifier.

N₂ Relation de récurrence

D Définition

Une suite numérique u est définie par une **relation de récurrence** quand son premier terme est connu et le terme u_{n+1} peut être calculé en fonction du terme u_n .

1 Soit u une suite numérique définie par : $u_0 = 1$
et $u_{n+1} = 3u_n - 2$

- Calculer les termes u_0 , u_1 , ... et u_8 .
- Dans un repère, placer les points $(n; u_n)$ pour tous les entiers naturels plus petits que 8.

2 Soit u une suite numérique définie par : $u_0 = 2$
et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$

- Déterminer la fonction f telle que $u_{n+1} = f(u_n)$.
- Dans un même repère, tracer la courbe représentative de f puis la droite d'équation $y = x$. Enfin, placer les termes u_1 , u_2 , u_3 .

N₃ Suite arithmétique : relation de récurrence

D Définition

Une suite u est **arithmétique** si il existe un réel r tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$u_{n+1} = u_n + r \text{ ou } u_{n+1} - u_n = r$$

Le réel r est la ***{bld::raison de la suite arithmétique u .**

Les suites (u_n) suivantes sont-elles arithmétiques ? Si oui donner leur raison.

- 1 u est une suite numérique définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + 2$.
- 2 u est une suite numérique définie par : $u_1 = 2$ et $u_{n+1} = u_n - 4$.
- 3 u est une suite numérique définie par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_n^2 + 1$.
- 4 u est une suite numérique définie par : $u_n = -5n + 1$ pour $n \in \mathbb{N}$.
- 5 u est une suite numérique définie par : $u_n = 4n^2 + 3$ pour $n \in \mathbb{N}$.
- 6 u est une suite numérique définie par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_n + 2n$.

N₄ Suite arithmétique : forme explicite

P Propriétés

Si la suite u est arithmétique de raison r alors pour un entier k et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$u_n = u_k + (n - k)r \text{ et pour } k = 0 ; u_n = u_0 + nr$$

Déterminer la forme explicite des suites suivantes :

- 1 (u_n) est une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison -2 .
- 2 u est une suite arithmétique telle que $u_2 = 8$ et de raison 5 .
- 3 (u_n) est une suite arithmétique de raison -1 et telle que $u_5 = 10$.
- 4 u est une suite arithmétique telle que $u_2 = 3$ et $u_3 = 8$.
- 5 (u_n) est une suite arithmétique telle que $u_5 = 38$ et $u_8 = 21$.

N₅ Suite géométrique : relation de récurrence

D Définition

Une suite u est **géométrique** si il existe un réel $q \neq 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$u_{n+1} = q \times u_n = qu_n \text{ ou } \frac{u_{n+1}}{u_n} = q$$

Le réel q est la **raison** de la suite géométrique u .

Les suites (u_n) suivantes sont-elles géométriques ? Si oui donner leur raison.

- 1 u est une suite numérique définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2u_n$.
- 2 u est une suite numérique définie par : $u_1 = 2$ et $u_{n+1} = -u_n$.
- 3 u est une suite numérique définie par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_n^2 + 2u_n$.
- 4 u est une suite numérique définie par : $u_n = 10^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.
- 5 u est une suite numérique définie par : $u_n = (-1)^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.
- 6 u est une suite numérique définie par : $u_n = 4n^2$ pour $n \in \mathbb{N}$.
- 7 u est une suite numérique définie par : $u_n = \frac{2^{n+1}}{3^{2n}}$ pour $n \in \mathbb{N}$.
- 8 u est une suite numérique définie par : $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = u_n \times 2n$.

N₆ Somme des n premiers entiers

Démontrer que la somme S des n premiers entiers est égale à :

$$S = \sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

N₇ Suite géométrique : forme explicite

P Propriétés

Si la suite u est géométrique de raison q alors pour un entier k et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$u_n = u_k \times q^{n-k} \text{ et pour } k = 0 ; u_n = u_0 \times q^n$$

Déterminer la forme explicite des suites suivantes :

1 (u_n) une suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison -2 .

2 u est une suite géométrique telle que $u_2 = 8$ et de raison 3 .

3 (u_n) est une suite géométrique de raison -1 et telle que $u_5 = -8$.

4 u est une suite géométrique telle que $u_2 = 28$ et $u_3 = 63$.

5 (u_n) est une suite géométrique telle que $u_5 = -243$ et $u_8 = 6521$.

N₈ Somme des premières puissance de q 

Démontrer que la somme S des n premières puissance de q , réel non nul et différent de 1 , est égale à :

$$S = \sum_{k=0}^n q^k = 1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

n°1 Est-ce arithmétique ?

Déterminer si les suites (u_n) , définies pour $n \in \mathbb{N}$ sont arithmétiques. Si oui, donner le premier terme et la raison.

1 $4n + 7$

2 $n^2 + 1$

3 $\frac{n}{2} + 5$

4 8^n

5 $\frac{n+1}{n}$

6 $\frac{2n+5}{2}$

7 $\frac{n^2+3n+2}{n+2}$

8 $\frac{n^2+1}{n+1}$

n°2 Est-ce géométrique ?

Déterminer si les suites (u_n) , définies pour $n \in \mathbb{N}$ sont géométriques. Si oui, donner le premier terme et la raison.

1 -4×3^n

2 3

3 $\frac{3^n}{2^{n+2}}$

4 8^{n+2}

5 $(-2)^n$

6 $4n$

7 $\frac{2}{n} - 3^n$

8 4^{n-1}

n°3 Représentation graphique

Dans un repère, représenter graphiquement les cinq premiers termes des suites définies explicitement par :

1 $5 - 2n$

2 $\frac{n-1}{n+1}$

3 $\frac{1}{2}n^2 - 1$

n°4 Ni, ni

Soit (u_n) la suite définie pour $n \in \mathbb{N}$ par : $u_{n+1} = 2u_n + 5$ et $u_0 = 1$.

- 1 Calculer u_1 , u_2 et u_3 .
- 2 Montrer que (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.
- 3 On pose $v_n = u_n + 5$ pour $n \in \mathbb{N}$. Montrer que (v_n) est une suite géométrique. Donner sa raison et son premier terme.
- 4 Donner la forme explicite de (v_n) .
- 5 En déduire la forme explicite de (u_n) .

n°5 Suite u

Soit (u_n) la suite définie pour $n \in \mathbb{N}$ par : $u_{n+1} = 2u_n + 5$ et $u_0 = 1$.

- 1 Calculer u_1 , u_2 et u_3 .
- 2 Montrer que (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.
- 3 On pose $v_n = u_n + 5$ pour $n \in \mathbb{N}$. Montrer que (v_n) est une suite géométrique. Donner sa raison et son premier terme.
- 4 Donner la forme explicite de (v_n) .
- 5 En déduire la forme explicite de (u_n) .

n°6 Une autre suite u

Soit (u_n) la suite définie pour $n \in \mathbb{N}$ par : $u_{n+1} = -3u_n + 8$ et $u_0 = 6$.

- 1 Calculer u_1 , u_2 et u_3 .
- 2 On pose $v_n = u_n - 2$ pour $n \in \mathbb{N}$. Montrer que (v_n) est une suite géométrique. Donner sa raison et son premier terme.
- 3 Donner la forme explicite de (v_n) .
- 4 En déduire la forme explicite de (u_n) .

n°7 Augmentation

La population d'une ville augmente de 1% chaque année. En 2000, la ville comportait 110 000 habitants. En 2014, combien la ville comportait-elle d'habitants ?

n°8 Vitesse des tornades

A partir des mesures relevées lors d'observations de tornades, des météorologues ont admis la règle suivante : la vitesse des vents dans les tornades diminue régulièrement de 10% toutes les 5 minutes.

Lors de la formation d'une tornade, on a mesuré la vitesse des vents par un radar météorologique et on a trouvé une vitesse initiale de 300 kmh^{-1} .

Soit la suite (u_n) dont le terme u_n correspond à la vitesse des vents après $5 \times n$ minutes. On a donc $u_0 = 300$ et u_1 la vitesse des vents après 5 minutes et u_2 la vitesse des vents après 10 minutes.

- 1 Calculer u_1 , u_2 et u_3 . Que représente u_3 dans le contexte de l'exercice ?
- 2 Démontrer que (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,9$.
- 3 Déterminer sa forme explicite et sa forme récurrente
- 4 Ecrire un algorithme permettant de déterminer le plus entier n pour que la vitesse des vents de cette tornade soit inférieure ou égale à 150 kmh^{-1}
- 5 En dressant un tableau donner la valeur de n de la question précédente.