

N₁ Addition et soustraction de nombres relatifs

Exemple

• $-4 - 5 = -9$
• $-7 - 2 = 5$

• $-6 - 2 = -4$
• $2 + 3 = 5$

• $-2 + 2 = 0$
• $-7 + 3 = 4$

Règles

• $+(-3) = -3$ • $+(+9) = +9$ • $-(+7) = -7$ • $-(-8) = +8$

Effectuer les opérations suivantes :

1 $(-2) + (+4) = \boxed{}$

2 $-10 - 14 = \boxed{}$

3 $(+7) + (+9) = \boxed{}$

4 $16 - 17 = \boxed{}$

5 $-15 - 16 = \boxed{}$

6 $21 - 23 = \boxed{}$

7 $(-6) - (+21) = \boxed{}$

8 $(-30) - (-42) = \boxed{}$

9 $(-6) - (+21) = \boxed{}$

10 $-6 - 9 + 7 - (-2) = \boxed{}$

11 $4 - 8 + 7 - 6 = \boxed{}$

12 $-5 + 9 - 6 + 3 = \boxed{}$

N₂ Multiplication et division de nombres relatifs

Propriétés : multiplication

① $(+5) \times (-3) = -15$ ② $(+2) \times (+9) = +18$ ③ $(-3) \times (+7) = -21$ ④ $(-5) \times (-8) = +40$

Propriétés : division

① $(+10) \div (-2) = -5$ ② $(+2) \div (+2) = +1$ ③ $(-9) \div (+3) = -3$ ④ $(-2) \div (-3) = +6$

Propriété

Si le nombre de signe "-" est pair le produit ou le quotient est positif. Si le nombre de signe "-" est impair le produit ou le quotient est négatif.

Effectuer les opérations suivantes :

1 $(-2) \times (+4) = \boxed{}$

2 $(-2) \times 5 \times (-2) = \boxed{}$

3 $(-1) \times (-3) = \boxed{}$

4 $8 \div (-4) = \boxed{}$

5 $-1 \times (+3) \times (-2) = \boxed{}$

6 $(-1) \div (-1) = \boxed{}$

7 $(-5) \times (-9) = \boxed{}$

8 $21 \div 3 = \boxed{}$

9 $(-2) \times 10 = \boxed{}$

10 $(-2) \times (-1) \times (-1) = \boxed{}$

11 $36 \div (-3) = \boxed{}$

12 $(-108) \times 0 = \boxed{}$

N₃ Avec des fractions

Propriétés

① $\frac{8}{-2} = -\frac{8}{2} = -4$ ② $\frac{+6}{+5} = \frac{6}{5}$ ③ $-\frac{12}{-6} = \frac{12}{6} = 2$ ④ $\frac{-13}{6} = -\frac{13}{6}$

Simplifier les expressions suivantes :

1 $\frac{2}{-3} = \boxed{}$

2 $\frac{12}{4} = \boxed{}$

3 $-\frac{1}{-5} = \boxed{}$

4 $\frac{-70}{-10} = \boxed{}$

5 $-\frac{-6}{-18} = \boxed{}$

6 $\frac{-20}{5} = \boxed{}$

N₄ Priorités opératoires

Propriétés

Dans un calcul, on commence en priorité par :

- ① Les parenthèses (des plus intérieures au plus extérieures)
- ② Les divisions et les multiplications (de gauche à droite)
- ③ Les additions et les soustractions (de gauche à droite)

Calculer les expressions suivantes :

1 $A = (-1) \times [(2 - 7) + (-3 + 1)] - 5 \times (-2) - 8 \div 2 = \boxed{}$

2 $B = 9 \div (-13 + 2 \times 5) - (2 - (5 - 7) \div (-2) + 6) - 5 = \boxed{}$

3 $C = 10 - 2 - (+3)(6 - 7) + (5 - 6)(-4) \div (-2) = \boxed{}$

N₅ Simplifier une fraction

Exemple

$$\frac{24}{66} = \frac{2 \times 12}{2 \times 33} = \frac{12}{33} = \frac{3 \times 4}{3 \times 11} = \frac{4}{11}$$

Simplifier les fractions suivantes :

1 $\frac{22}{154} = \boxed{}$

2 $\frac{48}{16} = \boxed{}$

3 $\frac{75}{30} = \boxed{}$

4 $\frac{120}{150} = \boxed{}$

5 $\frac{654}{122} = \boxed{}$

6 $\frac{66}{18} = \boxed{}$

7 $\frac{21}{49} = \boxed{}$

8 $\frac{104}{18} = \boxed{}$

N₆ Additionner ou soustraire des fractions

Exemples

$$\frac{7}{6} + \frac{5}{9} = \frac{7 \times 3}{6 \times 3} + \frac{5 \times 2}{9 \times 2} = \frac{21}{18} + \frac{10}{18} = \frac{31}{18}$$

$$\frac{7}{3} - 2 = \frac{7}{3} - \frac{2}{1} = \frac{7 \times 1}{3 \times 1} - \frac{2 \times 3}{1 \times 3} = \frac{7}{3} - \frac{6}{3} = \frac{1}{3}$$

Pour soustraire ou additionner des fractions, il faut les mettre au même dénominateur.

Calculer et simplifier les expressions suivantes :

1 $\frac{3}{21} + \frac{2}{14} = \boxed{}$

2 $\frac{4}{18} + \frac{5}{27} = \boxed{}$

3 $\frac{1}{5} - \frac{2}{3} = \boxed{}$

4 $\frac{11}{3} + \frac{1}{7} - \frac{8}{21} = \boxed{}$

5 $1 - \frac{5}{4} = \boxed{}$

6 $\frac{11}{8} + \frac{7}{3} - \frac{6}{5} = \boxed{}$

7 $\frac{2}{5} + \frac{1}{15} - \frac{1}{3} = \boxed{}$

8 $2 - \frac{1}{9} = \boxed{}$

9 $\frac{5}{9} + \frac{2}{3} - \frac{1}{6} = \boxed{}$

N₇ Multiplier des fractions**[Exemple]**

$$E = \frac{9}{7} \times \frac{14}{15} = \frac{\cancel{3} \times 3}{\cancel{7}} \times \frac{2 \times \cancel{7}}{\cancel{3} \times 5} = \frac{6}{5}$$

Calculer les expressions suivantes :

1 $A = \frac{-2}{-21} \times \frac{-14}{3}$

2 $B = \frac{2}{6} \times \frac{-21}{7}$

3 $C = \frac{-3}{-10} \times \frac{11}{3}$

4 $D = \frac{8}{15} \times \frac{35}{24}$

5 $E = \left(\frac{-1}{2}\right)^2$

6 $F = \frac{16}{-63} \times \frac{-35}{8}$

N₈ Diviser des fractions**[Exemple]**

$$E = \frac{10}{3} \div \frac{5}{9} = \frac{10}{3} \times \frac{9}{5} = \frac{\cancel{3} \times 3}{\cancel{5}} \times \frac{2 \times \cancel{7}}{\cancel{3} \times 5} = \frac{6}{5}$$

$$F = \frac{1}{\frac{3}{8}} = \frac{1}{3} \div \frac{8}{7} = \frac{1}{3} \times \frac{7}{8} = \frac{1 \times 7}{3 \times 8} = \frac{7}{24}$$

Calculer les expressions suivantes :

1 $A = \frac{-4}{13} \div \frac{-76}{9}$

2 $B = \frac{1}{8} \div \frac{7}{11}$

3 $C = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{12}{15}}$

4 $D = \frac{-13}{6} \div \frac{-1}{32}$

5 $E = 9 \div \frac{-1}{4}$

6 $F = \frac{\frac{-5}{12}}{2}$

N₉ Priorités opératoires et fractions

Calculer les expressions suivantes :

1 $A = \frac{\frac{1}{3} - 3}{\frac{5}{7} - \frac{2}{5}}$

2 $B = \frac{\frac{4}{7} - 2}{2 - \frac{11}{14}}$

3 $C = \frac{2 - \frac{1}{3}}{3 + \frac{1}{4}}$

4 $D = \frac{2}{9} - \frac{3}{4} \div \frac{5}{2}$

5 $E = \frac{26}{7} - \frac{22}{7} \times \frac{10}{33}$

6 $F = \frac{(-1) - \frac{-1}{3}}{\frac{-2}{3} - (-1)}$

N₁₀ Fraction d'un nombre**[Exemple]**

Calculer les trois dixièmes de 34 revient à calculer :

$$\frac{3}{10} \times 34 = \frac{3}{10} \times \frac{34}{1} = \frac{3}{\cancel{2} \times 5} \times \frac{\cancel{2} \times 17}{1} = \frac{51}{5}$$

1 Calculer les six septièmes de 49.

3 Calculer les 25% de quatre neuvièmes.

5 Calculer les $\frac{5}{11}$ de 100.

2 Calculer les deux tiers de six demi.

4 Calculer les $\frac{3}{4}$ de $\frac{12}{7}$.6 Calculer les 11% de $\frac{27}{121}$.N₁₁ Proportionnalité et pourcentages1 Aux USA, les températures sont exprimées en degrés Fahrenheit ($^{\circ}F$) : $77^{\circ}F$ équivaut à $25^{\circ}C$ et $86^{\circ}F$ équivaut à $30^{\circ}C$. Les mesures des températures en $^{\circ}F$ et en $^{\circ}C$ sont-elles proportionnelles ?

2 Dans un établissement scolaire de 560 élèves, il y a 224 garçons. Quel est le pourcentage de garçons ?

3 Jean obtient une réduction de 45% sur une vélo valant 158 €. Quel est le montant de la réduction obtenue par Jean ?

4 Un robinet d'eau fuit de telle sorte qu'il s'écoule 5 litres d'eau en 35 minutes et 7 litres d'eau en 49 minutes. S'agit-il d'une situation de proportionnalité ?

5 Aux USA, les distances routières sont exprimées en miles (*mi*) : 250 *mi* équivaut à 402,336 *km* et 1250 *mi* équivaut à 2011,68 *km*. Les distances en *mi* et en *km* sont-elles proportionnelles ?

6 Patrick a obtenu une réduction de 65,25 € sur une console de jeu qui valait 225 €. Quel pourcentage de réduction a-t-il obtenu ? Justifier.

7 J'ai utilisé 50 kg de semences pour un terrain de 1600 m^2 . Quelle surface aurais-je pu ensemencer avec 90 kg de semences ?

8 Saïd a obtenu une baisse de 45 € sur un appareil photo, soit une baisse de 15% du prix initial. Quel était le prix initial de l'appareil photo ?

9 En roulant à une vitesse moyenne de 72 km/h, quelle est la distance parcourue en 25 min ?

10 Un magasin réalise une augmentation de 25% sur des pantalons coûtant initialement 110 €. Quel est le nouveau prix des pantalons ?

11 Au théâtre pour 4 places achetées, on paye 48 €. Pour 3 places, on paye 36 € et pour 7 places on paye 80 €. Est-ce proportionnel ?

12 Maurice a construit une maquette de la tour Eiffel au 1/600. Sachant que la tour Eiffel a une hauteur de 324 m, quelle est la hauteur de la maquette en cm ?

13 Lors des soldes, un magasin propose une réduction de 30% sur des blousons coûtant initialement 150 €. Quel est le nouveau prix des blousons ?

14 En 2010 le prix du *KWh* d'électricité (mesure de consommation électrique) était de 0,1423 €. En 2011 il était de 0,1494 €. Quel était le taux d'évolution (augmentation ou diminution) du prix du *KWh* entre 2010 et 2011 ?

15 En 2012 une voiture d'occasion était évalué (côte: prix de revente) à 6 000 €. En 2013 sa côte a baissé de 11%. Déterminer le prix de revente de cette voiture en 2013.

16 En 2012 la production de déchets municipaux, par an et par habitant, était de 522 kg. En 2013 cette production était de 518 kg. Quel était le taux d'évolution (augmentation ou diminution) de la production de déchets entre 2012 et 2013 ?

17 A paris, en 2015 le prix du m^3 d'eau potable était de 3,28 €. En 2016 ce prix a augmenté de 1,52%. Déterminer le prix du m^3 d'eau potable en 2016.

N₁₂ Racines carrées

Définition et propriétés

On considère deux nombres entiers naturels a et b .

- $\sqrt{a^2} = a$
- $\sqrt{0} = 0$
- $\sqrt{16} = 4$
- $\sqrt{64} = 8$
- $\sqrt{a^2} = a$
- $\sqrt{1} = 1$
- $\sqrt{25} = 5$
- $\sqrt{81} = 9$
- $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$
- $\sqrt{4} = 2$
- $\sqrt{36} = 6$
- $\sqrt{121} = 11$
- $\sqrt{a^2 \times b} = a\sqrt{b}$
- $\sqrt{9} = 3$
- $\sqrt{49} = 7$
- $\sqrt{144} = 12$

Simplifier les racines carrées suivantes :

1 $\sqrt{50} =$

2 $\sqrt{20} =$

3 $\sqrt{48} =$

4 $\sqrt{45} =$

5 $\sqrt{176} =$

6 $\sqrt{80} =$

7 $\sqrt{243} =$

8 $\sqrt{99} =$

9 $\sqrt{108} =$

N₁₃ Puissances

Définition et propriétés

Soient x un nombre réel et n un nombre entier relatif.

- $x^n = \underbrace{x \times x \times \cdots \times x}_{n \text{ facteurs}}$ pour $n > 0$
- $x^0 = 1$
- $x^{-n} = \frac{1}{\underbrace{x \times x \times \cdots \times x}_{n \text{ facteurs}}}$ pour $n > 0$

Soit a et b deux nombres entiers :

- $x^a \times x^b = x^{a+b}$
- $x^a \div x^b = x^{a-b}$
- $\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$
- $(x^a)^b = x^{a \times b}$

Simplifier les expressions suivantes :

1 $2^3 \times 2^{-4} \div 2^3 =$

2 $3^{-5} \times 3^{-5} \times (3^2)^{-8} =$

3 $49 \times 7^{-8} \div (7^5)^2 =$

4 $10^3 \times 10^{-5} \div 10^6 =$

5 $\frac{(6^2)^{-1} \times (36^5)^{-1}}{6^{-7} \div 36^{-7} \times 6^{-6}} =$

6 $\frac{5^3 \times 25^{-4}}{(5^2)^{-8} \times 5^4} =$

N₁₄ Arrondir

Arrondir à l'unité les nombres suivants :

1 $\frac{-1}{3} \approx$

2 $\frac{5}{7} \approx$

3 $3,56 \approx$

4 $-8,08 \approx$

Arrondir au dixième les nombres suivants :

5 $\frac{2}{3} \approx$

6 $\frac{-6}{11} \approx$

7 $\sqrt{2} \approx$

8 $-5,673 \approx$

Arrondir au centième les nombres suivants :

9 $\pi \approx$

10 $\frac{-\pi}{2} \approx$

11 $\sqrt{3} \approx$

12 $0,7653 \approx$

Arrondir au millième les nombres suivants :

13 $\frac{-1}{9} \approx$

14 $\frac{11}{7} \approx$

15 $\sqrt{\pi} \approx$

16 $\frac{10}{7} \approx$

N₁₅ Ensemble de nombres

Définitions

- L'ensemble des **nombres entiers naturels** est $\{0; 1; 2; 3; \dots; 1023; \dots\}$. Il se note \mathbb{N} .
- L'ensemble des **nombres entiers relatifs** est $\{\dots; -76; \dots; -2; -1; 0; 1; 2; \dots; 13; \dots\}$. Il se note \mathbb{Z} .
- L'ensemble des **nombres entiers relatifs positifs** se note $\mathbb{Z}^+ = \mathbb{N}$.
- L'ensemble des **nombres entiers relatifs négatifs** est $\{\dots; -15; \dots; -2; -1; 0\}$. Il se note \mathbb{Z}^- .
- L'ensemble des **nombres décimaux** se note \mathbb{D} .
- L'ensemble des **nombres rationnels** se note \mathbb{Q} .
- L'ensemble des **nombres réels** se note \mathbb{R} .
- L'ensemble des **nombres réels positifs** se note \mathbb{R}^+ .
- L'ensemble des **nombres réels négatifs** se note \mathbb{R}^- .

On a : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Donner le plus petit ensemble auquel les nombres suivants appartiennent :

1 -2

2 $\sqrt{16}$

3 π

4 $\sqrt{5}$

5 $\frac{5}{3}$

6 $\sqrt{2}$

7 $\frac{-9}{10}$

8 $-\frac{3\pi}{\pi}$

N₁₆ Intervalle

Définition

Un intervalle est un ensemble contigu de nombres c'est à dire qu'il n'y pas de "trou" dans un intervalle. Par exemple l'ensemble \mathbb{N} n'est pas un intervalle car c'est un ensemble discret.

Un intervalle possède une borne inférieure et une borne supérieure :

- L'ensemble des réels x tels que $a \leq x \leq b$ est représenté par l'intervalle $[a; b]$
- L'ensemble des réels x tels que $a < x \leq b$ est représenté par l'intervalle $]a; b]$
- L'ensemble des réels x tels que $a \leq x < b$ est représenté par l'intervalle $[a; b[$
- L'ensemble des réels x tels que $a < x < b$ est représenté par l'intervalle $]a; b[$
- L'ensemble des réels x tels que $x \geq b$ est représenté par l'intervalle $] - \infty; b]$
- L'ensemble des réels x tels que $x < b$ est représenté par l'intervalle $] - \infty; b[$
- L'ensemble des réels x tels que $a \leq x$ est représenté par l'intervalle $[a; +\infty[$
- L'ensemble des réels x tels que $a < x$ est représenté par l'intervalle $]a; +\infty[$

Exemples

- L'ensemble des réels \mathbb{R} est l'intervalle $] - \infty; +\infty[$
- L'ensemble des réels \mathbb{R}^+ est l'intervalle $[0; +\infty[$
- L'ensemble des réels \mathbb{R}^- est l'intervalle $] - \infty; 0]$
- L'ensemble des réels \mathbb{R}^{+*} est l'intervalle $[0; +\infty[$
- L'ensemble des réels \mathbb{R}^{-*} est l'intervalle $] - \infty; 0[$

Des ensembles de nombres peuvent être représenté par des réunions d'intervalles disjoints (des "sommes" d'intervalles qui n'ont pas de nombre en commun) :

- L'ensemble $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ correspond à $] - \infty; a[\cup]a; +\infty[$
- L'ensemble $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ correspond à $] - \infty; 0[\cup]0; +\infty[$
- L'ensemble des réels \mathbb{R}^+ est l'intervalle $[0; +\infty[$
- L'ensemble des réels \mathbb{R}^- est l'intervalle $] - \infty; 0[$

Donner sous forme d'intervalles l'ensemble des nombres réels x suivants :

1 $-2 \leq x \leq 4$

2 $3 < x \leq 5$

3 $x \geq 7$

4 $-8 \leq x \leq -6$ ou $0 < x < 3$

5 $-2 < x \leq 2$ ou $x \in \mathbb{R}^*$

6 $x \in \mathbb{R}^{+*} \setminus \{3\}$

N₁ Simplifier une expression littérale Règles

- $2 \times x = 2x$
- $x \times y = xy$
- $x \times x = x^2$
- $x = 1 \times x = 1x$
- $(-3x)^2 = (-3x) \times (-3x) = (-3) \times (-3) \times x \times x = 9x^2$

Simplifier les expressions littérales suivantes :

- 1 $A = 5x + 4x^2 - 6x - 7x^2 - 8$
 3 $C = -(5x)^2 + 6x - 8 + 7x - 6 + 3x^2$
 5 $E = 9 - 8x + 3x^2 + 2x - 5 - 4x^2$
 7 $G = 7x^2 - 7 + 3x - 8\left(\frac{x}{2}\right)^2$

- 2 $B = 12x - 6x^2 - 6 - 9 + 5x + x^2$
 4 $D = 7x^2 - 9x + 5^2x - (2x)^2$
 6 $F = -6x - x^2 + 2^2x^2 - 6x^2 - 3$
 8 $H = -9\left(\frac{x}{3}\right)^2 + x + 4 - 5$

N₂ Simple distributivité Règles

$$\begin{aligned} a \times (b + c) &= a \times b + a \times c \quad \text{et} \quad a \times (b - c) = a \times b - a \times c \\ -(b + c - d) &= -b - c + d \quad \text{et} \quad +(b + c - d) = b + c - d \end{aligned}$$

Développer et réduire les expressions suivantes :

- 1 $x \times (12 - 2x)$
 4 $(x - 8)4x$
 7 $-(x - x^2 + 9)$
 10 $-(3x - 1) + 3(-5x + 2)$
- 2 $2x(3x - 5)$
 5 $-5x(2x - 3)$
 8 $2x - 5 - (8x + 7x^2 - 10)$
 11 $-3(4 - 4x) + (3 - 9x)$
- 3 $7x \times (5x - 3)$
 6 $-x(-x + 2)$
 9 $-(2 - 3x - x^2) + 7x^2 - 2$
 12 $-\left(\frac{x}{3} - 4\right) - 6 \times \frac{x}{5}$

N₃ Double distributivité Règles

$$(a + b) \times (c + d) = a \times c + a \times d + b \times c + b \times d$$

Développer et réduire les expressions suivantes :

- 1 $(y - 5)(6 - y)$
 4 $(-4x - 5)(7 - x)$
 7 $(-\sqrt{2}x - 5)(1 - x)$
- 2 $(-5x + 2)(3 - x)$
 5 $(-\frac{1}{2}x - 5)(\frac{1}{5}x + x)$
 8 $(3 - \frac{x}{2})(\frac{3}{3} - x)$
- 3 $(x - 9)(-2x + 6)$
 6 $(3x - 5)(8 - 2x)$
 9 $(5x - \sqrt{3})(3x - \sqrt{6})$

N₄ Développer avec l'identité remarquable n°1 Règles

$$(a + b)^2 = a^2 + 2 \times a \times b + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Développer et réduire les expressions suivantes :

- 1 $(y + 5)^2$
 4 $(4x + 5)^2$
 7 $(-8x + 2)^2$
 10 $(\sqrt{2}x + \sqrt{5})^2$
- 2 $(-5x + 2)^2$
 5 $(\frac{1}{2}x + 2)^2$
 8 $(2 + \frac{x}{6})^2$
 11 $(\frac{\sqrt{2}}{2}x + 3)^2$
- 3 $(3 + 2x)^2$
 6 $(-3x + 4)^2$
 9 $(8 + 2x)^2$
 12 $(-\frac{x}{3} + \frac{1}{6})^2$

N₅ Développer avec l'identité remarquable n°2 Règles

$$(a - b)^2 = a^2 - 2 \times a \times b + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Développer et réduire les expressions suivantes :

- 1 $(2y - 5)^2$
 4 $(4x - 1)^2$
 7 $(-3x - 1)^2$
 10 $(8 - 2x)^2$
 13 $(-\frac{x}{2} - \frac{1}{6})^2$
- 2 $(-3x - 2)^2$
 5 $(\frac{1}{3}x - 3)^2$
 8 $(-2 - 7x)^2$
 11 $(\sqrt{3}x - \sqrt{2})^2$
 14 $(-\frac{x}{3} - \sqrt{2})^2$
- 3 $(2x - 4)^2$
 6 $(-2x - 1)^2$
 9 $(2 - \frac{x}{3})^2$
 12 $(\frac{\sqrt{3}}{2}x - 1)^2$
 15 $(\sqrt{3}x - \frac{1}{2})^2$

N₆ Développer avec l'identité remarquable n°3 Règles

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Développer et réduire les expressions suivantes :

- 1 $(2y + 6)(2y - 6)$
 4 $(-2x - 1)(-1 + 2x)$
 7 $(\frac{1}{2}x - 1)(\frac{1}{2}x + 1)$
- 2 $(-3x + 2)(-3x - 2)$
 5 $(5 - 7x)(7x + 5)$
 8 $(\sqrt{2} + x)(\sqrt{2} - x)$
- 3 $(3x - 4)(3x + 4)$
 6 $(5x + 8)(5x - 8)$
 9 $(\frac{1}{3}x + \sqrt{3})(\frac{1}{3}x - \sqrt{3})$

N₇ Valeurs d'une expression littérale

- 1 Soit $B = 5x - 7x^2 + 2$. Pour $x = -1$ on a $B =$
- 2 Soit $C = 2(x - 1)(x - 6)$. Pour $x = 6$ on a $C =$
- 3 Soit $D = 3(x - 1)^2 - 2$. Pour $x = -2$ on a $D =$

N₈ Factorisation simple Règles

$$a \times b + a \times c = a \times (b + c) \quad a \text{ est le facteur commun.}$$

Factoriser les expressions suivantes :

- 1 $4x^2 - 3x$
 4 $7x^2 - 21x + 49$
- 2 $12x - 8x^2$
 5 $144x^2 - 12x$
- 3 $-\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x$
 6 $x^2 + x$

N₉ Factoriser avec une identité remarquable

Factoriser les expressions suivantes en utilisant une identité remarquable :

- 1 $9x^2 + 25 + 30x$
 4 $64 - 16x^2$
 7 $9x^2 - 25$
 10 $9x^2 + 1 - 6x$
- 2 $-12x + 9 + 4x^2$
 5 $25x^2 + 4 - 20x$
 8 $16x^2 + 40x + 25$
 11 $3 + 2x^2 + \sqrt{24}x$
- 3 $4x^2 + 4 + 8x$
 6 $12x + 36 + x^2$
 9 $3x^2 - 5$
 12 $8 - 7x^2$

N₁₀ Calcul littéral et fractions

Simplifier au maximum les expressions suivantes :

1 $\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$

2 $\frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{b}}$

3 $\frac{2x}{x^2 - 1} - \frac{2}{x+1}$

N₁₁ Equation du premier degré

Règles

$3x - 9 = -2x + 5$
 $3x - 9 + 2x = -2x + 5 + 2x$

$5x - 9 = 5$

$5x - 9 + 9 = 5 + 9$

$5x = 14$

$5x = \frac{14}{5}$

$5 = \frac{14}{5}$

$x = \frac{14}{5}$

$3x - 9 = -2x + 5$
 $3x - 9 + 2x = -2x + 5 + 2x$

$5x - 9 = 5$

$5x - 9 + 9 = 5 + 9$

$5x = 14$

$5x = \frac{14}{5}$

$5 = \frac{14}{5}$

$x = \frac{14}{5}$

Résoudre les équations suivantes :

1 $6x + 7 = 7x - 2$

3 $17a = -19a + 4$

5 $-3x + 3 = 2 + 6x$

7 $7 - 4x = -9 + x$

9 $7a - 4 = -9a - 2$

2 $4t - 2 + 7t = -2t - 3 - t$

4 $(2 - 4)x = 7x + 8$

6 $-x + 6 + -x = -2x + 2x - 5x + 6$

8 $-5 \frac{y}{3} + 1 = -3 \frac{y}{2} + \frac{1}{5}$

10 $-\frac{\beta}{7} - \frac{1}{2} = -\frac{\beta}{5} - \frac{1}{3}$

N₁₂ Inéquation du premier degré

Règles

$3x - 9 \leq 10x + 5$
 $3x - 9 - 10x \leq 10x + 5 - 10x$

$-7x - 9 \leq 5$

$-7x - 9 + 9 \leq 5 + 9$

$-7x \leq 14$

$-7x \geq \frac{14}{-7}$

$-7 = \frac{14}{-7}$

$x \geq -\frac{14}{7}$

$x \geq -2$

$3x - 9 \leq 10x + 5$
 $3x - 9 - 10x \leq 10x + 5 - 10x$

$-7x - 9 \leq 5$

$-7x - 9 + 9 \leq 5 + 9$

$-7x \leq 14$

$-7x \geq \frac{14}{-7}$

$-7 = \frac{14}{-7}$

$x \geq -\frac{14}{7}$

$x \geq -2$

Résoudre les inéquations suivantes :

1 $12t - 7 \leq 8 - 4t$

3 $17a = -19a + 4$

5 $12x + 1 \geq 87x - 7$

7 $5a - 8 > -a + 7$

9 $3x - 7 \leq -7x + 2$

2 $12x - 56 < 21x + 8$

4 $5x + 2 > 2x - 4$

6 $3 - 9t \leq 9t - 6$

8 $-\frac{y}{3} + 1 \leq -\frac{y}{2} + \frac{1}{3}$

10 $-\frac{x}{1} + \frac{1}{3} \geq -\frac{x}{5} - \frac{1}{3}$

N₁₃ Equation produit

M Méthode

L'objectif est de résoudre l'équation : $(12x - 7)(7x + 10) = 0$ Ce qui donne soit $12x - 7 = 0$ ou bien soit $7x + 10 = 0$. Il faut donc maintenant résoudre 2 équations.

Résoudre les équations suivantes :

1 $(7x - 3)^2 - (7x - 3)(3x + 8) = 0$

3 $(7x - 3)^2 - 16 = 0$

5 $(6x - 2)^2 = 49$

2 $16x^2 - 24x + 9 = 0$

4 $25x^2 = 16$

6 $64 = 4x^2$

N₁₄ Système de deux équations

M Méthode

L'objectif est de résoudre le système de deux équations : $\begin{cases} 9x + 3y = 15 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$ • On multiplie la 2^e équation par (-3) : $\begin{cases} 9x + 3y = 15 \\ -6x - 3y = -3 \end{cases}$ • On ajoute les deux équations pour en obtenir qu'une seule : $9x - 6x + 3y - 3y = 15 - 3$ • on résoud l'équation obtenue : $3x = 12$ ce qui donne $x = 4$ • il suffit de remplacer la valeur de x obtenue dans une des deux équations de départ pour obtenir la valeur de y soit : $y = -7$

Résoudre les systèmes d'équations suivants :

1 $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + 3y = 13 \end{cases}$

2 $\begin{cases} 5x + 2y = 27 \\ 2x + 10y = 30 \end{cases}$

3 $\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 8x + 5y = 2 \end{cases}$

4 $\begin{cases} -x + 2y = 8 \\ 4x + 6y = 52 \end{cases}$

5 $\begin{cases} 100x + 7y = -207 \\ 20x + 21y = -61 \end{cases}$

6 $\begin{cases} 7x + 5y = -11 \\ 3x + 9y = 9 \end{cases}$

N₁₅ Tableau de signes

M Méthode

On considère la forme factorisée de l'expression $A = -2(3x - 9)(-2x + 2)$. Il suffit alors de déterminer le signe de chaque facteur et placer les signes dans un tableau :

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
-2	-	-	-	-
$(3x - 9)$	-	0	-	+
$(-2x + 2)$	+	-	0	-
A	+	0	-	+

Déterminer le signe des expressions factorisées suivantes :

1 $A = (x - 2)(x - 4)(x + 1)$

2 $B = -5(2x - 2)(4 - 5x)$

3 $C = -2x(4x - 6)(2 - 7x)$

4 $D = \frac{x - 6}{x + 2}$

5 $E = \frac{4 - 5x}{2x + 1}$

6 $F = \frac{(x - 6)(7x - 1)}{(x + 5)(2x - 3)}$

N₁ Définitions et vocabulaire

Fonction

On considère un ensemble de nombres réels \mathcal{D} . Une fonction f sur \mathcal{D} est un processus transformant un nombre réel $x \in \mathcal{D}$ en un réel et **un seul** que l'on appelle **image** du réel x .

\mathcal{D} est l'ensemble de définition de la fonction f que l'on note souvent \mathcal{D}_f . L'ensemble de définition d'une fonction peut être tous les nombres réels noté \mathbb{R} ou bien être constitué d'une ou plusieurs parties de \mathbb{R} .

Soit $a \in \mathcal{D}$ alors l'image **unique** du réel a par la fonction f se note $f(a)$ et se dit " f de a ". On peut noter aussi $f : a \mapsto f(a)$.

Si le réel b est l'image du réel a par la fonction f alors $b = f(a)$. On dit que a est l'**antécédent** de b par la fonction f :

- $f(a) = b$ signifie que l'image (unique) de b par la fonction f est égale à a
- $f(a) = b$ signifie qu'un antécédent de a par la fonction f est égal à b

Un site internet propose l'achat de morceaux de musique. On peut donc exprimer le prix à payer sur internet en fonction du nombre de morceaux de musique achetés. On représente cet énoncé par la fonction f .

1 On sait que $f(10) = 9$.

a) Un antécédent de est égal à par la fonction f .

b) L'image de est égale à par la fonction f .

c) Si on achète morceaux de musique, on paiera €.

2 Si on achète 2 morceaux de musique, on paiera 2,6 €.

a) Un antécédent de est égal à par la fonction f .

b) L'image de est égale à par la fonction f .

c) $f(\quad) = \quad$

3 L'image de 5 est égale à 6 par la fonction f .

a) Un antécédent de est égal à par la fonction f .

b) $f(\quad) = \quad$

c) Si on achète morceaux de musique, on paiera €.

4 Un antécédent de 17 est égal à 18 par la fonction f .

a) $f(\quad) = \quad$

b) L'image de est égale à par la fonction f .

c) Si on achète morceaux de musique, on paiera €.

N₂ Tableau de valeurs

Tableau de valeurs

On considère une fonction f définie sur \mathcal{D}_f . Un **tableau de valeurs** de f est un tableau où la première ligne (ou colonne) représente des antécédents x et sur la deuxième ligne (ou colonne) les images correspondantes $f(x)$:

x	-1	4	2,3	$\sqrt{2}$	$\frac{1}{3}$	a
$f(x)$	$f(-1)$	$f(4)$	$f(2,3)$	$f(\sqrt{2})$	$f(\frac{1}{3})$	$f(a)$

On peut exprimer la taille ($f(x)$ en centimètres) d'un nourrisson en fonction de son âge (x en jour). On traduit cet énoncé par la fonction m . Voici les relevés effectués sur un nourrisson :

x	1	10	20	34	54	<input type="text"/>
$m(x)$	50,1	51	53,5	58	60	<input type="text"/>

1 Pour la **deuxième** colonne du tableau :

a) Un antécédent de est égal à par la fonction m .

b) L'image de est égale à par la fonction m .

c) on a $m(\quad) = \quad$

d) A jours, ce nourrisson mesure cm.

2 Pour la **troisième** colonne du tableau :

a) Un antécédent de est égal à par la fonction m .

b) L'image de est égale à par la fonction m .

c) on a $m(\quad) = \quad$

d) A jours, ce nourrisson mesure cm.

3 Pour la **quatrième** colonne du tableau :

a) Un antécédent de est égal à par la fonction m .

b) L'image de est égale à par la fonction m .

c) on a $m(\quad) = \quad$

d) A jours, ce nourrisson mesure cm.

4 Pour la **dernière** colonne du tableau, on a $m(18) = 52$:

a) Un antécédent de est égal à par la fonction m .

b) L'image de est égale à par la fonction m .

c) Compléter le tableau.

d) A jours, ce nourrisson mesure cm.

N₃ Courbe représentative d'une fonction

D Courbe représentative

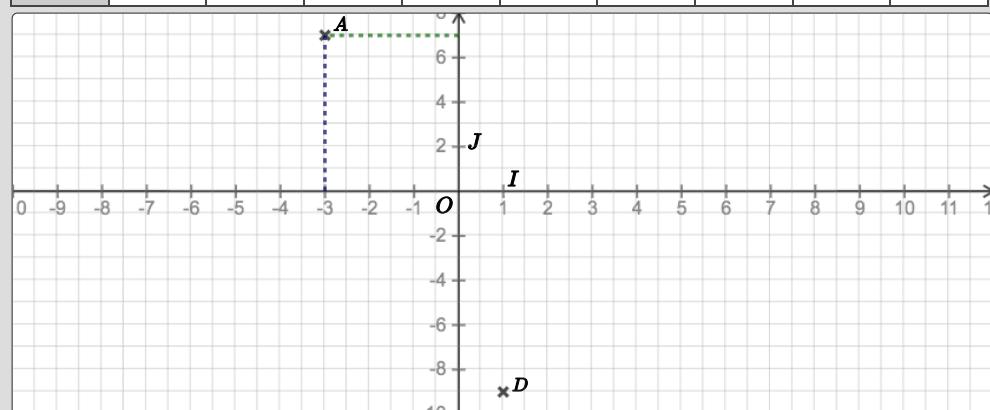
On considère une fonction f définie sur \mathcal{D}_f . On se place dans un repère $(O; I; J)$, la **courbe représentative** de la fonction f , notée C_f est l'ensemble des points de coordonnées $(x; f(x))$. L'**équation de la courbe représentative** de la fonction f est alors $y = f(x)$ (y est alors l'ordonnée du point d'abscisse x).

Dans un repère $(O; I; J)$:

- **(OI)** (axe horizontal) est l'axe des abscisses et correspond aux **antécédents**.
- **(OJ)** (axe horizontal) est l'axe des ordonnées et correspond aux **images**.

On considère la fonction n définie par $n(x) = x^2 - 2x - 8$ dont voici un tableau de valeurs :

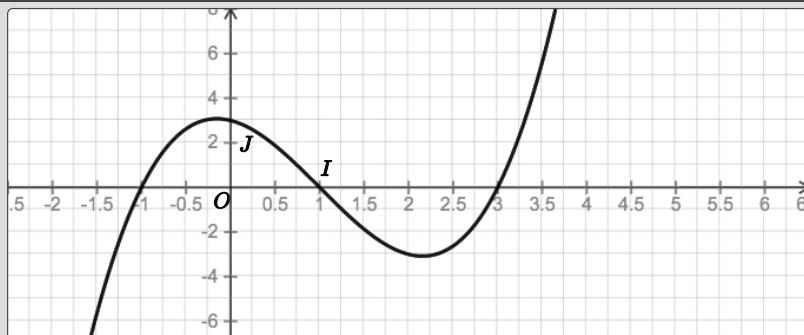
x	-3	-1	0		2	2,5	3	4	5
$n(x)$	7								
Point	A	B	C	D	E	F	G	H	K



- 1 Compléter le tableau ci-dessus puis placer les points manquants. Tracer la représentation graphique C_n de la fonction n .

On considère la fonction k dont voici un tableau de valeurs :

x	-1,5	-1	0	0,5	1	1,5		
$k(x)$							2	6



- 2 Compléter le tableau ci-dessus à partir de la représentation graphique C_k de la fonction k .

N₄ Expression d'une fonction

D Expression d'une fonction-

Soit f une fonction, \mathcal{D}_f son ensemble de définition et $x \in \mathcal{D}_f$. L'expression algébrique d'une fonction donne directement $f(x)$ en fonction de la variable x .

On considère la fonction h suivante : $h(x) = (x - 1)^2 + 2$

- 1 Quelle est l'image de **-1** par la fonction h ?
- 2 Donner un antécédent de **2** par la fonction h
- 3 Recopier et compléter : $h(-2) = \dots$
- 4 Recopier et compléter : $h(\dots) = 3$.
- 5 Recopier et compléter : $h(3) = \dots$
- 6 En utilisant les questions 1. ; 2. ; 3. ; 4. et 5., construire un tableau de valeurs de la fonction h .
- 7 Tracer la représentation graphique de la fonction h .

n°1 Fonction d

On considère la fonction d suivante : $d(x) = 3x + 4$

- 1 Quelle est l'image de **-2** par la fonction d ?
- 2 Quel est l'antécédent de **13** par la fonction d ?
- 3 Recopier et compléter : $d(-1) = \dots$ et $d(\dots) = -26$
- 4 Recopier et compléter le tableau suivant :

x	0			-4
$d(x)$		2,5	5	

- 5 Tracer la représentation graphique de la fonction d .
- 6 En utilisant la représentation graphique de d déterminer l'image de **1** par la fonction d puis l'antécédent de **7** par la fonction d .

n°2 Programme de calcul

On considère le programme de calcul suivant :

- On choisit un nombre.
- On élève au carré ce nombre.
- On retranche **2** fois le nombre choisi.
- On ajoute **1**.

On traduit par la fonction u ce programme de calcul.

- 1 Quel est le résultat obtenu si on choisit **-1** comme nombre de départ ? si on choisit **2** ?
- 2 Recopier et compléter le tableau suivant :

Nombre choisi : x	0	-2	5
Résultat : $u(x)$			

- 3 Quel est l'antécédent de **1** par la fonction u ?
- 4 Quelle est l'image de **10** par la fonction u ?
- 5 Recopier et compléter : $u(2, 3) = \dots$ et $u(\dots) = 9$
- 6 Tracer la représentation graphique de la fonction u . En utilisant cette représentation graphique déterminer l'image de **1,5** par la fonction u puis les antécédents de **7**.
- 7 Ecrire un algorithme permettant de donner le résultat de ce programme de calcul en fonction d'un nombre en entrée.

n°3 Tableau de valeurs

- 1 Construire un tableau de 10 valeurs de la fonction f_1 définie par $f_1(x) = -2x + 3$ à partir de $x = -1$ et de pas 1
- 2 Construire un tableau de 8 valeurs de la fonction f_2 définie par $f_2(x) = -x^2 + 2x - 3$ à partir de $x = -6$ et de pas 2
- 3 Construire un tableau de 10 valeurs de la fonction f_3 définie par $f_3(x) = \sqrt{-2x + 4}$ à partir de $x = -2$ et de pas 0,5
- 4 Construire un tableau de 5 valeurs de la fonction f_4 définie par $f_4(x) = \frac{6x - 3}{2 - x}$ à partir de $x = -1$ et de pas 3

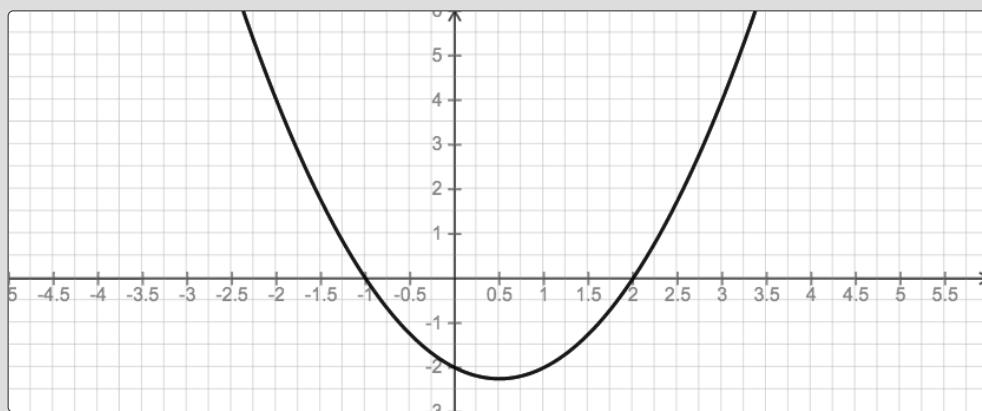
n°4 Parabole

Soit la fonction f définie par : $f(x) = x^2 - x - 2$.

- 1 Calculer l'image de -1 par f . Déterminer un antécédent de -2 par f .
- 2 Recopier et compléter le tableau suivant :

x	-2	-1,5	-1	0	1	2	3
$f(x)$							
Point	A	B	C	D	E	F	G

- 3 Dans le repère ci-dessous on a tracé la représentation graphique de f . Placer dans ce repère les points **A**; **B**; **C**; **D**; **E**; **F** et **G**.



- 4 Graphiquement, déterminer l'image de $-1,75$ et de $2,5$ par f .

- 5 Graphiquement, déterminer les antécédents de 4.

n°5 Fonction r

On considère la fonction r suivante : $d(x) = 2x^2 + 5$

- 1 Calculer $r(1)$. Quelle est l'image de 2 par r ? Quelle est l'image de $\frac{1}{3}$ par r ? calculer : $r(-\frac{3}{5})$.

- 2 Recopier et compléter le tableau suivant :

x	-1	-2	-1	0	1	2	3
$r(x)$							

- 3 Tracer la représentation graphique de la fonction r .

N₁ Ensemble de définition

D Ensemble de définition

L'ensemble de définition d'une fonction f représente l'ensemble des réels x (antécédents) pour lesquels il existe une image $f(x)$ (qui est unique). On note souvent cet ensemble de définition \mathcal{D}_f .

En seconde il faut vérifier 2 points :

- On ne peut pas diviser par 0 : ce qui entraîne généralement la résolution d'une équation
- Sous une racine carrée, il doit y avoir un nombre positif ou nul : ce qui entraîne généralement la résolution d'une inéquation

1 Résoudre l'équation $(5x - 2)(3 - 8x) = 0$. En déduire l'ensemble de définition de $f_1(x) = \frac{3x - 2}{(5x - 2)(3 - 8x)}$

2 Résoudre l'inéquation $4x - 7 \geq 0$. En déduire l'ensemble de définition de $f_2(x) = \sqrt{4x - 7}$

3 Déterminer l'ensemble de définition de $f_3(x) = -2x^2 - 8x + 2$

N₂ Sens de variation

D Fonction croissante

Une fonction f définie sur un intervalle I est **croissante** lorsque pour tous les réels a et b dans I : si $a \leq b$ alors $f(a) \leq f(b)$ (**l'ordre est respecté**)

D Fonction décroissante

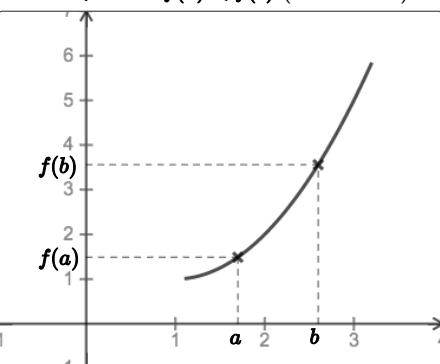
Une fonction f définie sur un intervalle I est **décroissante** lorsque pour tous les réels a et b dans I : si $a \leq b$ alors $f(a) \geq f(b)$ (**l'ordre n'est pas respecté**)

D Fonction monotone

Une fonction f est **monotone** sur un intervalle I si elle est soit croissante ou soit décroissante sur I (mais pas les deux).

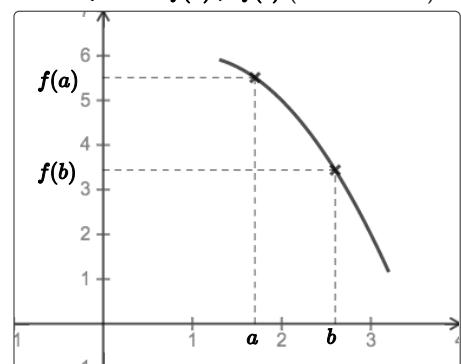
f est croissante.

$a \leq b$ donc $f(a) \leq f(b)$ (même ordre)



f est décroissante.

$a \leq b$ donc $f(a) \geq f(b)$ (ordre différent)



1 Soit $f_1(x) = 3x - 9$. Donner son ensemble de définition. Démontrer que f_1 est croissante sur \mathbb{R} .

2 Soit $f_2(x) = -2x + 1$. Donner son ensemble de définition. Démontrer que f_2 est décroissante sur \mathbb{R} .

3 Soit $f_3(x) = 2x^2$. Démontrer que f_3 est croissante sur $[0; +\infty[$ et décroissante sur $] - \infty; 0]$.

4 Soit $f_4(x) = -4x^2$. Démontrer que f_4 est décroissante sur $[0; +\infty[$ et croissante sur $] - \infty; 0]$.

5 Soit $f_5(x) = 2\sqrt{x}$. Démontrer que f_5 est croissante sur $[0; +\infty[$.

6 Soit $f_6(x) = \frac{-3}{x}$. Démontrer que f_6 est croissante sur $]0; +\infty[$.

N₃ Tableau variation

D Tableau variation

Au lieu de spécifier qu'une fonction est croissante sur un intervalle, on place une flèche montante dans un tableau. Au lieu de spécifier qu'une fonction est décroissante sur un intervalle, on place une flèche descendante dans un tableau :

Tableau de variation d'une fonction f_1 :

- décroissante sur $] -\infty; a[$
- croissante sur $[a; +\infty[$
- $f_1(a) = b$

x	$-\infty$	a	$+\infty$
f_1		b	

Tableau de variation d'une fonction f_3 :

- croissante sur $] -\infty; a[$
- croissante sur $[a; +\infty[$
- a est une valeur interdite

x	$-\infty$	a	$+\infty$
f_3			

Tableau de variation d'une fonction f_5 :

- croissante sur $] -\infty; -\infty[$

x	$-\infty$	$+\infty$
f_5		

1 Soit $f_1(x) = 2 - 3x$.

- Donner l'ensemble de définition de f_1
- Démontrer que f_1 est décroissante sur \mathbb{R}
- Dresser le tableau de variation de f_1

2 Soit $f_2(x) = \frac{2}{2 - 4x}$.

- Donner l'ensemble de définition de f_2
- Démontrer que f_2 est croissante sur son ensemble de définition
- Dresser le tableau de variation de f_2

Tableau de variation d'une fonction f_2 :

- croissante sur $[a; b]$
- décroissante sur $[b; +\infty[$
- $f_2(a) = c$ et $f_2(b) = d$

x	a	b	$+\infty$
f_2			

Tableau de variation d'une fonction f_4 :

- décroissante sur $[a; b]$
- croissante sur $]b; +\infty[$
- b est une valeur interdite

x	a	b	$+\infty$
f_4			

Tableau de variation d'une fonction f_6 :

- décroissante sur $[a; +\infty[$
- $f(a) = b$

x	a	$+\infty$
f_6		

N₄ Extremum

D Maximum et minimum d'une fonction

- Dire que f admet un **maximum** en a sur l'intervalle I signifie que : Il existe un réel M tel que pour tout x dans I : $f(x) \leq M$ et $M = f(a)$.
- Dire que f admet un **minimum** en a sur l'intervalle I signifie que : Il existe un réel m tel que pour tout x dans I : $f(x) \geq m$ et $m = f(a)$.
- f admet un **extremum** en a sur l'intervalle I si elle admet un maximum ou un minimum.

1 Soit la fonction f_1 définie par $f_1(x) = -2x^2 - 4x + 16$.

- Démontrer que f_1 est croissante sur $] -\infty; -1[$

- Démontrer que f_1 est décroissante sur $[-1; +\infty[$

- Dresser le tableau de variation de f_1

- Conjecturer l'extremum de f_1

- Démontrer que f_1 admet un maximum en -1 . Donner sa valeur.

2 Soit la fonction f_2 définie par $f_2(x) = -9 + 3x^2 - 6x$.

- Démontrer que f_2 est décroissante sur $] -\infty; 1[$

- Démontrer que f_2 est croissante sur $[1; +\infty[$

- Dresser le tableau de variation de f_2

- Conjecturer l'extremum de f_2

- Démontrer que f_2 admet un minimum en 1 . Donner sa valeur.

N₅ Résoudre graphiquement une équation et une inéquation

M Méthode pour résoudre une équation graphiquement

Pour résoudre graphiquement une équation du type $f(x) = g(x)$, il suffit de tracer les représentations graphiques C_f et C_g de f puis g puis de déterminer graphiquement le point ou les points d'intersection (s'ils existent) de C_f et C_g .

M Méthode pour résoudre une inéquation graphiquement

Pour résoudre graphiquement une inéquation du type $f(x) \leq g(x)$, il suffit de tracer les représentations graphiques C_f et C_g de f puis g :

- Quand C_f est en dessous de C_g alors $f(x) \leq g(x)$
- Quand C_f est au dessus de C_g alors $f(x) \geq g(x)$

On considère les fonctions f et g définies par $f(x) = -3 + 3x^2 - 6x$ et $g(x) = 4\sqrt{x}$

1 Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant (arrondir au dixième):

x	$-1,5$	-1	$-0,5$	0	$0,5$	1	$1,5$	2
$f(x)$								
$g(x)$								

2 Dans un même repère tracer les représentations graphiques C_f et C_g de f et g

3 Déterminer graphiquement le nombre x tel que $-3 + 3x^2 - 6x = 4\sqrt{x}$

4 Déterminer graphiquement les nombres x tel que $-3 + 3x^2 - 6x \leq 4\sqrt{x}$

5 Déterminer graphiquement les nombres x tel que $-3 + 3x^2 - 6x \geq 4\sqrt{x}$

N₆ Fonction $u + k$

Soit u une fonction définie sur D_u et k un nombre réel.

D Définition

La fonction $u + k$ est définie sur D_u et par : $(u + k)(x) = u(x) + k$

P Propriété : courbe représentative

Dans un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) , si u a pour courbe représentative C_u alors la courbe représentative C_{u+k} de $u + k$ est l'image de C_u par la translation de vecteur \vec{k} .

P Propriété : variations

Si u est monotone (croissante ou décroissante) sur un intervalle I alors $u + k$ a le même sens de variation que u sur I .

Dans des repères différents, tracer les courbes représentatives de :

1 $f_1(x) = x^2 + 2$ 2 $f_2(x) = x^2 - 4$ 3 $f_3(x) = \sqrt{x} - 1$ 4 $f_4(x) = \frac{1}{x} - 5$

Construire le tableau de variations de :

5 $f_5(x) = x^2 + 9$ sur $]-\infty; 0]$ 6 $f_6(x) = \frac{4}{x} + 2$ sur $]-\infty; 0[$
7 $f_7(x) = \sqrt{x} - 1$ sur $[0; +\infty[$

N₇ Fonction ku

Soit u une fonction définie sur D_u et k un nombre réel.

D Définition

La fonction ku est définie sur D_u et par : $(ku)(x) = k \times u(x)$

P Propriété : variations

Si $k > 0$ alors u et ku ont la même monotonie (croissante ou décroissante) sur un intervalle I .

Si $k < 0$ alors u et ku sont de monotonie contraire (croissante ou décroissante) sur un intervalle I .

Construire un tableau de variation des fonctions suivantes sur leur ensemble de définition :

1 $f_1(x) = 3x^2$ 2 $f_2(x) = -2x^2$ 3 $f_3(x) = 3\sqrt{x}$ 4 $f_4(x) = \frac{2}{x}$

n°1 Ensemble de définition

1 Résoudre l'équation $7x - 9 = 0$. En déduire l'ensemble de définition de $f_1(x) = \frac{x}{7x - 9}$

2 Résoudre l'inéquation $(3x - 8)(2 - 5x) \geq 0$. En déduire l'ensemble de définition de $f_2(x) = \sqrt{(3x - 8)(2 - 5x)}$

3 Déterminer l'ensemble de définition de $f_3(x) = x^2 + 8x - 7$

4 Déterminer l'ensemble de définition de $f_4(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 4}$

5 Résoudre l'équation $4x^2 - 12x + 9 = 0$. En déduire l'ensemble de définition de $f_5(x) = \frac{7x}{4x^2 - 12x + 9}$

6 Résoudre l'inéquation $8x(x - 2)(x + 4) \geq 0$. En déduire l'ensemble de définition de $f_6(x) = \sqrt{8x(x - 2)(x + 4)}$

7 Déterminer l'ensemble de définition de $f_7(x) = \frac{4x}{x^2 + 1}$

n°2 Tableau de variation

1 Soit $f_1(x) = 2x - 10$.

a) Donner l'ensemble de définition de f_1

b) Démontrer que f_1 est croissante sur \mathbb{R}

c) Dresser le tableau de variation de f_1

2 Soit $f_2(x) = 3\sqrt{3x + 6}$.

a) Donner l'ensemble de définition de f_2

b) Démontrer que f_2 est croissante sur son ensemble de définition

c) Dresser le tableau de variation de f_2

n°3 Extremum

1 Soit la fonction f_1 définie par $f_1(x) = -10x^2 - 100x + 2000$.

a) Démontrer que f_1 est croissante sur $]-\infty; -5]$

b) Démontrer que f_1 est décroissante sur $[-5; +\infty[$

c) Dresser le tableau de variation de f_1

d) Conjecturer l'extremum de f_1

e) Démontrer que f_1 admet un maximum en -5 . Donner sa valeur.

2 Soit la fonction f_2 définie par $f_2(x) = 5\sqrt{(x - 2) - 10}$.

a) Démontrer que f_2 est croissante sur $[2; +\infty[$

c) Dresser le tableau de variation de f_2

d) Conjecturer l'extremum de f_2

e) Démontrer que f_2 admet un minimum en 2 . Donner sa valeur.

3 Soit la fonction f_3 définie par $f_3(x) = \frac{2}{x+2}$ et sur \mathbb{R}^+ .

a) Démontrer que f_3 est décroissante sur \mathbb{R}^+

b) Dresser le tableau de variation de f_3 sur \mathbb{R}^+

c) Conjecturer l'extremum de f_3 sur \mathbb{R}^+

d) Démontrer que f_3 admet un maximum en 0 sur \mathbb{R}^+ . Donner sa valeur.

n°4 Équation et inéquation

On considère les fonctions f et g définies par $f(x) = -2x^2 + 2$ et $g(x) = 2(x + 0,5)(x - 3)$

1 Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant :

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$							
$g(x)$							

2 Dans un même repère tracer les représentations graphiques C_f et C_g de f et g

3 Déterminer graphiquement le nombre x tel que $-2x^2 + 2 = 2(x + 0,5)(x - 3)$

4 Déterminer graphiquement les nombres x tel que $-2x^2 + 2 \leq 2(x + 0,5)(x - 3)$

5 Déterminer graphiquement les nombres x tel que $-2x^2 + 2 \geq 2(x + 0,5)(x - 3)$

N₁ Définitions et propriétés

Fonction affine

Une fonction affine f est définie par $f(x) = a \times x + b = ax + b$ où a et b sont deux nombres réels.

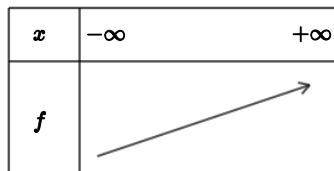
a est le **coefficent directeur** de la fonction f et b est l'**ordonnée à l'origine**.

Quand $b = 0$ alors la fonction $f(x) = a \times x = ax$ est appelée fonction **linéaire**.

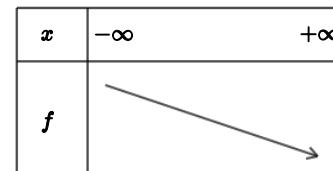
Tableau de variation

On considère une fonction affine $f(x) = ax + b$ avec $a \neq 0$. Si $a = 0$ cette fonction affine est **constante** et vaut $f(x) = b$. L'ensemble de définition de f est $D_f =]-\infty; +\infty[= \mathbb{R}$.

si $a > 0$



si $a < 0$



Pour chaque fonction affine, donner le coefficient directeur, l'ordonnée à l'origine puis dresser le tableau de variation :

1 $f_1(x) = 4x - 6$

2 $f_2(x) = -3x + 9$

3 $f_3(x) = -3x$

4 $f_4(x) = -9$

5 $f_5(x) = 6 - 2x$

6 $f_6(x) = 2 + 8x$

7 $f_7(x) = 6x$

8 $f_8(x) = 2(5 - 2x)$

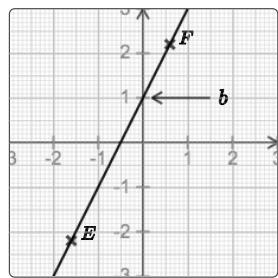
9 $f_9(x) = -3(2x + 1)$

N₂ Représentation graphique d'une fonction affine

Représentation graphique

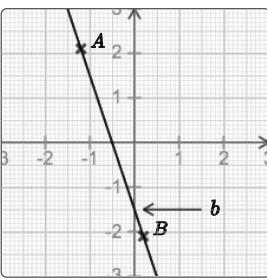
On considère une fonction affine $f(x) = ax + b$. La représentation graphique \mathcal{C}_f de f est une **droite non verticale**. Pour la tracer il suffit de placer **2 points**. Cette droite a pour équation $y = f(x) = ax + b$.

si $a > 0$



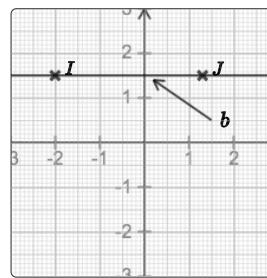
\mathcal{C}_f est la droite (EF)

si $a < 0$



\mathcal{C}_f est la droite (AB)

si $a = 0$



Pour chaque fonction affine, tracer sa représentation graphique :

1 $f_1(x) = 2x - 1$

2 $f_2(x) = -2x + 8$

3 $f_3(x) = -2x$

4 $f_4(x) = 7$

5 $f_5(x) = 2 - x$

6 $f_6(x) = \frac{x}{3} - 1$

Tracer les courbes d'équation :

7 $y = 5x - 1$

8 $y = -2x$

9 $y = 1 - x$

10 $y = 2(1 - 2x)$

11 $y = \frac{1}{3}(2x - 5)$

12 $y = \sqrt{2}x + 1$

N₃ Signe d'une fonction affine

Signe d'une fonction affine

On considère une fonction affine $f(x) = ax + b$. Si $a = 0$ alors $f(x)$ est du signe de b sinon :
si $a > 0$

x	−∞	$\frac{-b}{a}$	+∞
f(x)	−	0	+

x	−∞	$\frac{-b}{a}$	+∞
f(x)	+	0	−

Construire un tableau de signes des fonctions affines suivantes :

1 $f_1(x) = 7x - 8$

2 $f_2(x) = -2x + 1$

3 $f_3(x) = -4x$

4 $f_4(x) = 2$

5 $f_5(x) = 1 - x$

6 $f_6(x) = 2 + \frac{1}{3}x$

7 $f_7(x) = \frac{x}{5} + \frac{5}{3}$

8 $f_8(x) = \frac{1}{5}(5 - 2x)$

9 $f_9(x) = \frac{\sqrt{2}x}{2} - \frac{1}{3}$

Construire un tableau de signes des produits suivants de fonctions affines :

10 $(5x - 1)(2x - 8)$

11 $(x - 1)(x + 2)$

12 $(\frac{x}{3} - \frac{1}{5})(5 - 2x)$

13 $(\frac{1}{3} - \sqrt{2}x)(\frac{x}{5} - \frac{1}{2})$

14 $(-3 - 2x)(9 - x)(7x - 8)$

15 $(-1 - x)(2x - 3)(3x + 2)$

Construire un tableau de signes des quotients suivants de fonctions affines :

16 $\frac{2x - 7}{5 - 3x}$

17 $\frac{4 - 2x}{-2x - 8}$

18 $\frac{(x + 1)(6x - 1)}{2 - 3x}$

19 $\frac{(x - 2)(x + 1)}{(-2x - 3)(8 - 4x)}$

N₄ Intersection de deux droites affines

Intersection

On considère deux fonctions affines $f_1(x) = a_1x + b_1$ et $f_2(x) = a_2x + b_2$ de représentation graphique \mathcal{C}_{f_1} et \mathcal{C}_{f_2} d'équation respective $y = a_1x + b_1$ et $y = a_2x + b_2$.

• Le point d'intersection (s'il existe) $M(x_m; y_m)$ des courbes (droites) \mathcal{C}_{f_1} et \mathcal{C}_{f_2} est tel que son abscisse x_m est la solution de l'équation : $a_1x + b_1 = a_2x + b_2$ et son ordonnée vaut : $y_m = a_1x_m + b_1 = a_2x_m + b_2$

• \mathcal{C}_{f_1} est au dessus de \mathcal{C}_{f_2} quand x est solution de l'inéquation $a_1x + b_1 \geq a_2x + b_2$

• \mathcal{C}_{f_1} est en dessous de \mathcal{C}_{f_2} quand x est solution de l'inéquation $a_1x + b_1 \leq a_2x + b_2$

Déterminer graphiquement et par le calcul, la solution (si elle existe) des équations suivantes :

1 $3x - 1 = 2x - 9$

2 $7x - 1 = 6x + 3$

3 $\frac{x}{3} + 1 = \frac{-2x}{3} + 2$

4 $\frac{2x - 1}{5x - 2} = 1$

5 $\frac{3 - 2x}{x + 3} = 2$

6 $\frac{2 - 2x}{3x - 1} = -3$

Déterminer graphiquement et par le calcul, les solutions (si elles existent) des inéquations suivantes :

7 $3x - 2 \leq 2x - 4$

8 $5x - 2 \geq 2x + 6$

9 $\frac{x}{5} + 1 \leq \frac{-2x}{5} + 2$

10 $\frac{3x - 1}{5x - 1} \leq 1$

11 $\frac{4 - x}{3x + 2} \geq 2$

12 $\frac{1 - 2x}{2x - 2} \leq -3$

n°1 Au théâtre

Un théâtre propose deux prix de places :

- Plein tarif : 20 €. (h_1)
- Tarif adhérent : réduction de 30% du plein tarif. (h_2)

Pour avoir le droit à la réduction de 30% pour chaque entrée, l'adhérent doit acheter en début de saison une carte d'abonnement de 50 €.

On désigne par x le nombre d'entrées et on note :

- h_1 la dépense totale d'un spectateur qui n'est pas adhérent.
- h_2 la dépense totale d'un adhérent.

1 Démontrer que le prix d'une entrée au tarif adhérent est de 14 €.

2 Recopier et compléter le tableau suivant :

Nombre d'entrées : x	0	1	10	15
Prix total h_1 en €				
Prix total h_2 en €				

3 Donner les expressions des fonctions h_1 et h_2 .

4 Quelle est l'image de 5 par la fonction h_1 ? Quel est l'antécédent de 330 par la fonction h_2 ?

5 Quelle est l'image de 2 par la fonction h_2 ? Quel est l'antécédent de 300 par la fonction h_1 ?

6 Représenter graphiquement dans un même repère les fonctions h_1 et h_2 .

7 Déterminer par le calcul et graphiquement le nombre d'entrées pour lequel les deux tarifs sont identiques.

8 Déterminer par le calcul et graphiquement le nombre d'entrées pour lequel l'abonnement est avantageux.

n°2 Parc d'attraction

Un parc d'attraction pratique les tarifs suivants :

- Tarif 1 : par jour de présence dans le parc, la prix à payer est de 12 € pour un enfant et de 18 € pour un adulte.
- Tarif 2 : quel que soit le nombre de jours de présence dans le parc et le nombre de membres de la famille, le prix pour la famille est constitué d'un forfait de 100 € auquel s'ajoute une participation de 10 € par jour.

Dans toute la suite du problème, on considère une famille constituée d'un adulte et d'un enfant.

On désigne par x le nombre de jours passés dans le parc et on note :

- p_1 le prix payé par la famille avec le tarif 1 pour x jours passés dans le parc.
- p_2 le prix payé par la famille avec le tarif 2 pour x jours passés dans le parc.

1 Recopier et compléter le tableau suivant :

Nombre de jours : x	1	4	6	10	14
Prix total p_1 en €					
Prix total p_2 en €					

2 Donner les expressions des fonctions p_1 et p_2 .

3 Quelle est l'image de 3 par la fonction p_1 ? Quel est l'antécédent de 170 par la fonction p_2 ?

4 Quelle est l'image de 2 par la fonction p_2 ? Quel est l'antécédent de 150 par la fonction p_1 ?

5 Représenter graphiquement dans un même repère les fonctions p_1 et p_2 .

6 Déterminer par le calcul et graphiquement le nombre de jours pour lequel les deux tarifs sont égaux.

7 Déterminer par le calcul et graphiquement le nombre de jours pour lequel le tarif 2 est avantageux.

N₁ Forme développée

D Définition : Fonction du second degré

Une fonction f définie sur \mathbb{R} est une **fonction polynôme du second degré** ou **fonction du second degré** si elle est de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a , b et c sont des réels tels que $a \neq 0$.

D Définition : Parabole

La représentation graphique ou courbe représentative d'une fonction du second degré est une **parabole**.

L'équation de la parabole est : $y = ax^2 + bx + c$

V Vocabulaire

• L'expression algébrique $ax^2 + bx + c$ est appelée **trinôme du second degré**.

• L'écriture $f(x) = ax^2 + bx + c$ de la fonction f est la **forme développée de f** .

Déterminer si les fonctions suivantes sont des fonctions du second degré et donner le cas échéant les trois coefficients a , b et c :

1 $f_1(x) = 6 - 3x^2 + 2x$

4 $f_4(x) = (8 + 4x)^2$

2 $f_2(x) = 4 + 7x$

5 $f_5(x) = (3x + 7)(3x - 7)$

3 $f_3(x) = (6x - 7)^2$

6 $f_6(x) = 4(2x - 3)^2$

N₂ Forme canonique

T Théorème : Forme canonique

La **forme canonique** de la fonction du second degré f définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ est :

$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ avec $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$. Cette **forme canonique** est **unique**.

Donner la forme canonique des fonctions du second degré suivantes :

1 $f_1(x) = 4x^2 + 5x + 9$

4 $f_4(x) = 9x^2 + 16 - 24x$

2 $f_2(x) = -3x^2 - 7x + 9$

5 $f_5(x) = 81 - 49x^2$

3 $f_3(x) = 7x - x^2 - 10$

6 $f_6(x) = 7 + \sqrt{140}x + 5x^2$

7 $f_7(x) = 6x^2 - 9x + 1$

8 $f_8(x) = \frac{x^2}{3} - \frac{x}{6} + 1$

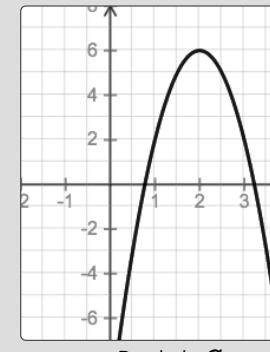
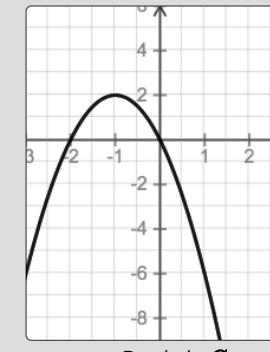
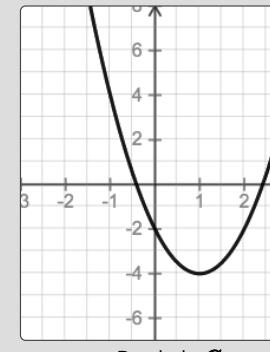
9 $f_9(x) = 4 - 12x + 9x^2$

N₃ Forme canonique : parabole

P Propriété

La parabole C_f , courbe représentative de la fonction du second degré f de forme canonique $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ a pour sommet $S(\alpha; \beta)$

Donner la forme canonique des fonctions du second degré suivantes :



N₄ Symétrie de la parabole

Propriété : Symétrie de la parabole

La parabole C_f , courbe représentative de la fonction du second degré f de forme canonique $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ est symétrique par rapport à la droite verticale d'équation $x = \alpha$.

Tracer la courbe représentative des fonctions suivantes en traçant l'axe de symétrie :

1 $f_1(x) = (x - 8)^2 + 2$

2 $f_2(x) = 2(x + 1)^2 + 3$

3 $f_3(x) = -2(4 + x)^2 - 3$

4 $f_4(x) = (3x - 3)^2$

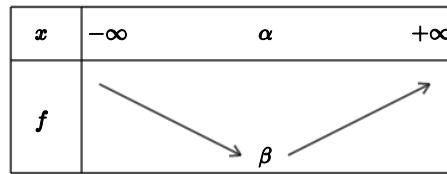
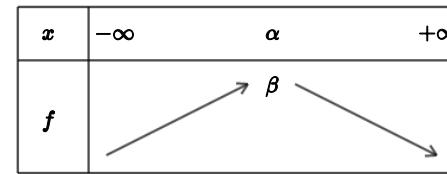
5 $f_5(x) = 6x^2 - 8x + 3$

6 $f_6(x) = (2x + 5)(2x - 5)$

N₅ Sens de variation

Sens de variation

On considère la fonction du second degré f de forme canonique $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ alors :

si $a > 0$ si $a < 0$ 

Construire le tableau de variations des fonctions du second degré suivantes :

1 $f_1(x) = -2(x - 3)^2 + 2$

2 $f_2(x) = 4(x + 2)^2 + 6$

3 $f_3(x) = (5x - 8)(2 - 6x)$

4 $f_4(x) = (5x - 3)^2$

5 $f_5(x) = 9x^2 - 2x + 5$

6 $f_6(x) = (7x + 8)(7x - 8)$

7 $f_7(x) = (x - 3)^2$

8 $f_8(x) = x^2 - x + 3$

9 $f_9(x) = (2x + 3)(x - 1)$

10 $f_{10}(x) = (3x + 1)^2$

11 $f_{11}(x) = x^2 - 2x + 1$

12 $f_{12}(x) = (2x + 4)(x + 1)$

N₆ Extremum

Extremum

On considère la fonction du second degré f de forme canonique $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ alors :

f admet β comme extremum qui est atteint pour $x = \alpha$.

- C'est un maximum si a est négatif.
- C'est un minimum si a est positif.

Construire le tableau de variations des fonctions du second degré suivantes :

1 $f_1(x) = -(x - 4)^2 + 1$

2 $f_2(x) = 3(x + 1)^2 + 2$

3 $f_3(x) = (2x - 4)(2 - x)$

4 $f_4(x) = (3x - 2)^2$

5 $f_5(x) = 5x^2 - 5x + 1$

6 $f_6(x) = (6x + 4)(6x - 4)$

7 $f_7(x) = (3x + 6)^2$

8 $f_8(x) = 2x^2 - 4x + 3$

9 $f_9(x) = (x + 1)(x - 1)$

10 $f_{10}(x) = (4x + 1)^2$

11 $f_{11}(x) = x^2 - 4x + 4$

12 $f_{12}(x) = (2x + 4)(2x - 4)$

N₇ Inéquation du second degré et signe d'un trinôme : forme canonique

Définition et propriétés

Soient a , b et c des nombres réels tels que $a \neq 0$ et f la fonction du second degré définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ de courbe représentative C_f .

Une inéquation du second degré est du type :

- $ax^2 + bx + c < 0 \rightarrow$ les abscisses x des points de C_f strictement en dessous de l'axe des abscisses.
- $ax^2 + bx + c > 0 \rightarrow$ les abscisses x des points de C_f strictement au dessus de l'axe des abscisses.
- $ax^2 + bx + c \leq 0 \rightarrow$ les abscisses x des points de C_f en dessous de l'axe des abscisses.
- $ax^2 + bx + c \geq 0 \rightarrow$ les abscisses x des points de C_f au dessus de l'axe des abscisses.

Signe

On considère le trinôme $ax^2 + bx + c$ associé à la fonction $f(x) = ax^2 + bx + c$ de forme canonique $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ alors :

si $a > 0$ et $\beta \geq 0$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	+		

si $a < 0$ et $\beta \geq 0$

x	$-\infty$	$\alpha - \sqrt{\frac{\beta}{-a}}$	$\alpha + \sqrt{\frac{\beta}{-a}}$	$+\infty$
$f(x)$	-	0	0	-

si $a < 0$ et $\beta \leq 0$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	-		

si $a > 0$ et $\beta \leq 0$

x	$-\infty$	$\alpha - \sqrt{\frac{-\beta}{a}}$	$\alpha + \sqrt{\frac{-\beta}{a}}$	$+\infty$
$f(x)$	+	0	0	+

Construire le tableau de variations des fonctions du second degré suivantes :

1 $f_1(x) = -2(x - 3)^2 + 2$

2 $f_2(x) = 4(x + 2)^2 + 6$

3 $f_3(x) = (5x - 8)(2 - 6x)$

4 $f_4(x) = -3(x - 2)^2 + 1$

5 $f_5(x) = 2(x + 1)^2 + 3$

6 $f_6(x) = (3x - 6)(2 - x)$

N₈ Forme factorisée

Théorème

Soit la forme développée de la fonction $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$). Dans certains cas, il est possible d'écrire f sous forme factorisée : $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

On remarque que $f(x_1) = 0$ et $f(x_2) = 0$: c'est un bon moyen de trouver la forme factorisée de la fonction f .

On appelle les nombres x_1 et x_2 les racines de f .

1 On considère la fonction f définie par $f(x) = 3x^2 + 6x - 45$

a) Calculer $f(3)$ et $f(-5)$

b) Donner la forme factorisée de la fonction f

2 On considère la fonction f définie par $f(x) = -2x^2 + 4x + 16$

a) Démontrer que -2 est une racine de f .

d) Démontrer que 4 est une racine de f .

c) Donner la forme factorisée de la fonction f

n°9 Signe d'un trinôme: forme factorisée

Propriétés

On considère le trinôme $ax^2 + bx + c$ associé à la fonction $f(x) = ax^2 + bx + c$ dont la forme factorisée existe : $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ avec $x_1 \leq x_2$.

- Pour $a > 0$

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
a	+		+	+
$(x - x_1)$	-	0	+	+
$(x - x_2)$	-	-	0	+
$f(x)$	+	0	-	0

- Pour $a < 0$

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
a	-		-	-
$(x - x_1)$	-	0	+	+
$(x - x_2)$	-	-	0	+
$f(x)$	-	0	+	0

- On considère la fonction f définie par $f(x) = 5x^2 - 5x - 10$

a) Démontrer que -1 est une racine de f .

b) Démontrer que 2 est une racine de f .

c) Donner la forme factorisée de la fonction f puis dresser le tableau de signes

- On considère la fonction f définie par $f(x) = -4x^2 - 4x + 80$

a) Démontrer que 4 est une racine de f .

b) Démontrer que -5 est une racine de f .

c) Donner la forme factorisée de la fonction f puis dresser le tableau de signes

- On considère la fonction f définie par $f(x) = -4x^2 - 4x + 8$

a) Démontrer que -2 est une racine de f .

b) Trouver une autre racine de f .

c) Donner la forme factorisée de la fonction f puis dresser le tableau de signes

n°1 Paramétrage

On considère l'équation (E) : $x^2 + 2x + m = 0$. L'objectif de l'exercice est de déterminer pour quelles valeurs de m l'équation (E) admet au moins une solution.

- Résoudre, dans \mathbb{R} , les équations : $x^2 + 2x = 0$ et $x^2 + 2x + 1 = 0$

- Vérifier que pour tout réel x : $x^2 + 2x + m = (x + 1)^2 - 1 + m$

- Justifier alors que résoudre l'équation (E) revient à résoudre l'équation $(x + 1)^2 = 1 - m$.

- Conclure.

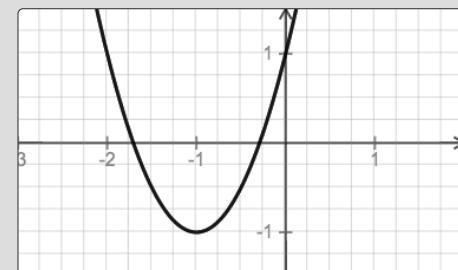
n°2 Algorithme : forme canonique

Soit une fonction du second degré $f(x) = ax^2 + bx + c$ de forme canonique $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$. Ecrire un algorithme qui détermine les réels α et β de la forme canonique d'une fonction du second degré.

n°3 A partir d'une parabole

Le graphique ci-contre donne la courbe représentative d'un trinôme défini sur \mathbb{R} par $f(x) = ax^2 + bx + c$:

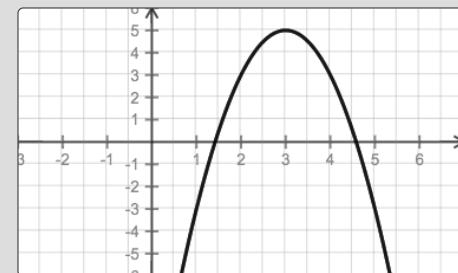
- Donner par lecture graphique $f(0)$; $f(-1)$; $f(-2)$.
- En déduire a , b et c puis l'expression de f .



n°4 A partir de la forme canonique

Ci-contre est donnée la représentation graphique C_f d'une fonction trinôme f définie sur \mathbb{R} par sa forme canonique $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$.

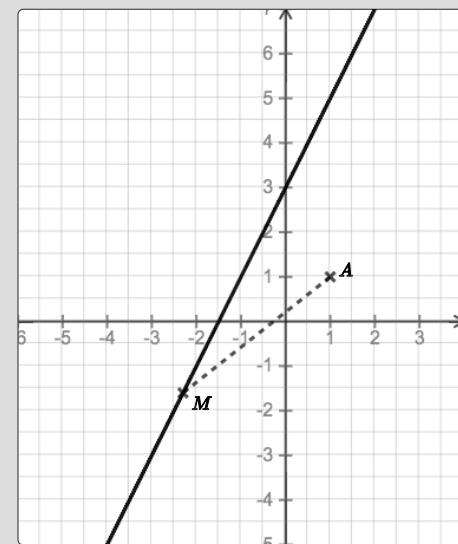
- Lire graphiquement les coordonnées du sommet de la parabole représentant la fonction f .
- Déterminer l'expression de f .



n°5

On considère la droite (d) d'équation $y = 2x + 3$ et A le point de coordonnées $(1; 1)$. M est un point quelconque de la droite (d) et on note x l'abscisse de M . On considère le point B de coordonnées $(0; 3)$. On définit la fonction f par : $f(x) = AM^2$.

- Justifier que l'ordonnée de M est $y_M = 2x + 3$. Vérifier que $f(x) = 5x^2 + 6x + 5$.
- Vérifier que l'expression $5(x + 0,6)^2 + 3,2$ est la forme canonique du trinôme f .
- Étudier les variations de la fonction f . Pour quelle valeur x_0 la fonction atteint-elle son extrémum ?
- M_0 est le point de la droite (d) tel que la distance AM_0^2 soit minimale. Justifier que les coordonnées de M_0 sont $(-0,6; 1,8)$.
- Vérifier que B est un point de la droite (d).
- Déterminer la nature du triangle ABM_0 . Que peut-on dire des droites (AM_0) et (d) ?



n°6 Vases

Un artisan fabrique entre **0** et **60** vases par jour et estime que le coût de production de x vases est modélisé par la fonction $C(x) = x^2 - 10x + 500$. On note $R(x)$ la recette, en euros, correspondant à la vente de x vases fabriqués.

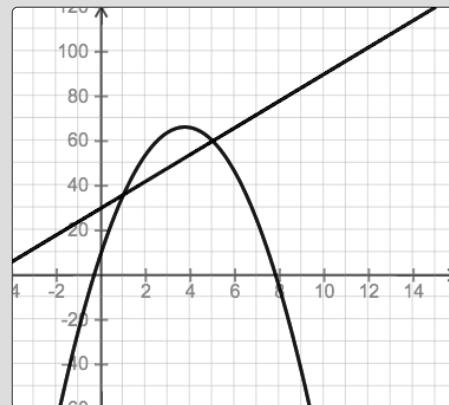
Un vase est vendu **50 €**.

- 1 Exprimer $R(x)$ en fonction de x .
- 2 Calculer le coût, la recette et le bénéfice réalisés lorsque l'artisan vend **50** vases.
- 3 Vérifier que le bénéfice, en euros, réalisé par l'artisan est donné par la fonction B dont l'expression est : $B(x) = -x^2 + 60x - 500$.
- 4 Développe l'expression : $-(x - 30)^2 + 400$. En déduire le nombre de vases à vendre pour réaliser un bénéfice maximum.

n°7 Position relative

Voici la droite (**d**) d'équation $y = 6x + 30$ et la parabole \mathcal{P} représentant la fonction f : $f(x) = -4x^2 + 30x + 10$.

- 1 Démontrer, qu'étudier les positions relatives de la droite (**d**) et de la parabole \mathcal{P} revient à résoudre l'inéquation $-4x^2 + 24x - 20 \geq 0$.
- 2 Vérifier que l'expression $5(x + 0,6)^2 + 3,2$ est la forme canonique du trinôme f .
- 3 Vérifier que, pour tout réel x : $-4x^2 + 24x - 20 = -4(x - 3)^2 + 16$.
- 4 Résoudre alors l'inéquation $-4x^2 + 24x - 20 \geq 0$.
- 5 Conclure.



n°8 Une parabole et 3 points

La parabole \mathcal{P} coupe l'axe des ordonnées en **A(0; 3)** et passe par **B(1; -1)** et **C(3; 1)**. Déterminer son équation sous la forme $y = ax^2 + bx + c$ puis sous la forme canonique. Tracer cette parabole.

n°9 Dans un théâtre

Le directeur d'une salle de théâtre a remarqué qu'à **40 €** la place, il peut compter jusqu'à **500** spectateurs et que chaque baisse de **2,50 €** lui amène **100** personnes de plus.

Soit x le nombre de baisses du prix de la place de **2,50 €**. On modélise cette situation par la fonction g .

- 1 Déterminer l'expression de la fonction g .
- 2 Dresser le tableau de variation de g puis tracer sa courbe représentative dans un repère.
- 3 Combien doit-il faire payer la place pour avoir une recette maximale ?

n°10 Une belle volée

Un tennismen frappe droit devant lui une volée à **1 m** du filet alors que la balle est à **0,9 m** de hauteur en **A**. La balle franchit le filet en **B** à une hauteur de **1,1 m** et atteint en **C** une hauteur maximale de **1,3 m**. La longueur d'un terrain de tennis est **23,77 m**. La balle sortira-t-elle du cours ?

N₁ Définitions et propriétés

D Fonction inverse

Une fonction **inverse** f est définie par $f(x) = \frac{1}{ax + b}$ où a et b sont deux nombres réels tels que $a \neq 0$. (c'est l'inverse d'une fonction affine).

P Ensemble de définition

Soit f une fonction inverse telle que $f(x) = \frac{1}{ax + b}$ alors son ensemble de définition est :

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{b}{a} \right\} =]-\infty; -\frac{b}{a}[\cup]\frac{b}{a}; +\infty[$$

En effet comme on ne peut pas "diviser" par **0**, il faut donc que $ax + b \neq 0$

P Tableau de variation

On considère une fonction inverse $f(x) = \frac{1}{ax + b}$ avec $a \neq 0$. Si $a = 0$ cette fonction inverse est **constante** et vaut $f(x) = \frac{1}{b}$.

si $a > 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
f			

si $a < 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
f			

Pour chaque fonction inverse suivante, dresser le tableau de variation :

$$1 \quad f_1 = \frac{1}{2x - 4}$$

$$2 \quad f_2 = \frac{1}{12 - 6x}$$

$$3 \quad f_3 = \frac{1}{-x - 2}$$

$$4 \quad f_4 = \frac{1}{x}$$

$$5 \quad f_5 = \frac{1}{\frac{x}{3} + 1}$$

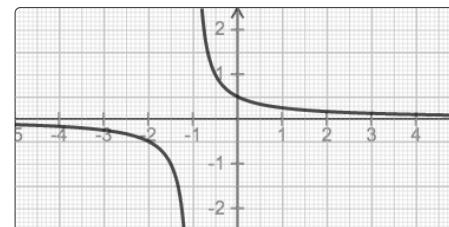
$$6 \quad f_6 = \frac{1}{2 - \sqrt{2}x}$$

N₂ Représentation graphique d'une fonction inverse

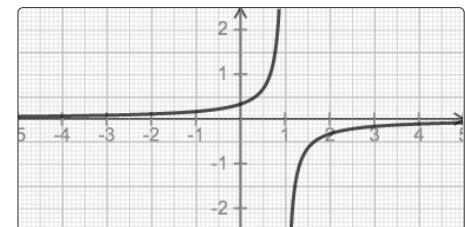
P Représentation graphique

On considère une fonction inverse $f(x) = \frac{1}{ax + b}$. La représentation graphique \mathcal{C}_f de f est une **hyperbole**.

si $a > 0$



si $a < 0$



Pour chaque fonction inverse suivante, tracer la représentation graphique :

$$1 \quad f_1 = \frac{1}{3x - 9}$$

$$2 \quad f_2 = \frac{1}{2 - 4x}$$

$$3 \quad f_3 = \frac{1}{-x - 1}$$

$$4 \quad f_4 = \frac{1}{x}$$

$$5 \quad f_5 = \frac{1}{\frac{x}{2} - 1}$$

$$6 \quad f_6 = \frac{1}{1 - \sqrt{2}x}$$

N₃ Signe d'une fonction inverse

Signe d'une fonction inverse

On considère une fonction inverse $f(x) = \frac{1}{ax+b}$:
si $a > 0$

x	$-\infty$	$\frac{-b}{a}$	$+\infty$
$f(x)$	-		+

x	$-\infty$	$\frac{-b}{a}$	$+\infty$
$f(x)$	+		-

Déterminer le tableau de signe de chaque fonction suivante :

1 $f_1 = \frac{-7}{x-4}$

2 $f_2 = \frac{8}{6-3x}$

3 $f_3 = \frac{-9}{-2x-2}$

4 $f_4 = \frac{3}{x}$

5 $f_5 = \frac{-1}{\frac{x}{3}+1}$

6 $f_6 = \frac{3}{1-\sqrt{3}x}$

N₄ Fonction $\frac{1}{u}$

Soit u une fonction définie sur D_u telle pour tout $x \in D_u$: $u(x) \neq 0$.

D Définition

La fonction $\frac{1}{u}$ est définie sur D_u et par : $(\frac{1}{u})(x) = \frac{1}{u(x)}$

P Propriété : variations

Si u est monotone sur un intervalle I et si pour tout $x \in I$, $u(x) \neq 0$ alors la fonction $\frac{1}{u}$ a le sens de variation contraire à celui de u sur I .

Construire un tableau de variation des fonctions suivantes sur leur ensemble de définition :

1 $f_1 = \frac{1}{\sqrt{x}}$

2 $f_2 = \frac{1}{x^2}$

3 $f_3 = \frac{1}{x^2+1}$

N₅ Fonction homographique

D Fonction homographique

Une fonction homographique f est définie par $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ où a, b, c et d sont quatre nombres réels tels que $c \neq 0$. (c'est le quotient de deux fonctions affines).

P Ensemble de définition

Soit f une fonction homographique telle que $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ alors son ensemble de définition est :

$D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\} =]-\infty; -\frac{d}{c}[\cup]\frac{-d}{c}; +\infty[$

En effet comme on ne peut pas "diviser" par 0, il faut donc que $cx+d \neq 0$

Pour chaque fonction homographique suivante, donner l'ensemble de définition :

1 $f_1 = \frac{9x-8}{3x-4}$

2 $f_2 = \frac{x}{12-4x}$

3 $f_3 = \frac{8x-9}{-2x-7}$

4 $f_4 = \frac{9-2x}{x}$

5 $f_5 = \frac{-x-3}{\frac{2x}{7}-1}$

6 $f_6 = \frac{\sqrt{3}x-8}{8-3\sqrt{2}x}$

N₆ Signe d'une fonction homographique

Signe

Soit f une fonction homographique telle que $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ avec $a \neq 0$ et $c \neq 0$:

Dans le cas où $\frac{-b}{a} \leq \frac{-d}{c}$

x	$-\infty$	$\frac{-b}{a}$	$\frac{-d}{c}$	$+\infty$
$(ax+b)$	-	0	+	
$(cx+d)$	-		0	+
$f(x)$	+	0	-	

Dans le cas où $\frac{-b}{a} \geq \frac{-d}{c}$

x	$-\infty$	$\frac{-d}{c}$	$\frac{-b}{a}$	$+\infty$
$(ax+b)$	-	0	-	
$(cx+d)$	-		0	+
$f(x)$	+		-	0

Pour chaque fonction homographique suivante, dresser un tableau de signes :

1 $f_1 = \frac{2x-9}{2x-6}$

2 $f_2 = \frac{6-5x}{7-2x}$

3 $f_3 = \frac{3x+1}{-2x-5}$

4 $f_4 = \frac{-9+2x}{3x}$

5 $f_5 = \frac{\frac{x}{7}-1}{\frac{x}{5}+1}$

6 $f_6 = \frac{\sqrt{3}x-2}{1-3\sqrt{2}x}$

n°1 Fonction f

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x}{x+1}$

1 Donner l'ensemble de définition de f

2 Dresser le tableau de signes de f

3 Recopier et compléter le tableau suivant :

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$									

4 Tracer la représentation graphique de f

N₁ Définitions et propriétés**D** Fonction inverse

Une fonction racine carrée f est définie par $f(x) = \sqrt{ax + b}$ où a et b sont deux nombres réels tels que $a \neq 0$. (c'est la racine carrée d'une fonction affine).

P Ensemble de définition

Soit f une fonction inverse telle que $f(x) = \sqrt{ax + b}$ alors son ensemble de définition est :

$$\mathcal{D}_f = [\frac{-b}{a}; +\infty[\text{ si } a > 0 \text{ et } \mathcal{D}_f =]-\infty; \frac{-b}{a}] \text{ si } a < 0$$

En effet comme on ne peut pas avoir de nombre négatif sous la racine carrée, il faut donc que $ax + b \geqslant 0$

P Tableau de variation

On considère une fonction racine carrée $f(x) = \sqrt{ax + b}$ avec $a \neq 0$. Si $a = 0$ cette fonction inverse est constante et vaut $f(x) = \sqrt{b}$ si $b \geqslant 0$.

si $a > 0$

x	$\frac{-b}{a}$	$+\infty$
f		

si $a < 0$

x	$-\infty$	$\frac{-b}{a}$
f		

Pour chaque fonction suivante, donner l'ensemble de définition puis dresser le tableau de variation :

1 $f_1(x) = \sqrt{4x - 6}$

2 $f_2(x) = \sqrt{-3x + 9}$

3 $f_3(x) = \sqrt{-3x}$

4 $f_4(x) = \sqrt{x}$

5 $f_5(x) = \sqrt{6 - 2x}$

6 $f_6(x) = \sqrt{2 + 8x}$

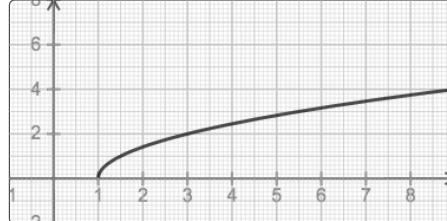
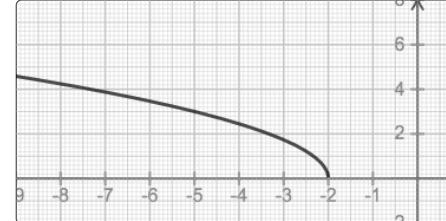
7 $f_7(x) = \sqrt{6x}$

8 $f_8(x) = \sqrt{2(5 - 2x)}$

9 $f_9(x) = \sqrt{-3(2x + 1)}$

N₂ Représentation graphique d'une fonction racine carrée**P** Représentation graphique

On considère une fonction inverse $f(x) = \sqrt{ax + b}$. La représentation graphique \mathcal{C}_f est :

si $a > 0$ si $a < 0$ 

Pour chaque fonction suivante, tracer sa représentation graphique :

1 $f_1(x) = \sqrt{2x - 6}$

2 $f_2(x) = \sqrt{-3x + 6}$

3 $f_3(x) = \sqrt{-2x}$

4 $f_4(x) = \sqrt{x}$

5 $f_5(x) = \sqrt{3 - 3x}$

6 $f_6(x) = \sqrt{16 + 8x}$

7 $f_7(x) = \sqrt{4x}$

8 $f_8(x) = \sqrt{2(1 - 2x)}$

9 $f_9(x) = \sqrt{-2(2x + 3)}$

N₃ Signe d'une fonction racine carrée**P** Signe d'une fonction racine carrée

On considère une fonction affine $f(x) = \sqrt{ax + b}$:

si $a > 0$

x	$\frac{-b}{a}$	$+\infty$
$f(x)$	+	

si $a < 0$

x	$-\infty$	$\frac{-b}{a}$
$f(x)$	+	

Pour chaque fonction suivante, dresser un tableau de signe sur son ensemble de définition :

1 $f_1(x) = \sqrt{3x - 6}$

2 $f_2(x) = \sqrt{-6x + 6}$

3 $f_3(x) = \sqrt{-5x}$

4 $f_4(x) = \sqrt{x}$

5 $f_5(x) = \sqrt{6 - 3x}$

6 $f_6(x) = \sqrt{16 + 4x}$

7 $f_7(x) = \sqrt{8x}$

8 $f_8(x) = \sqrt{3(2 - 2x)}$

9 $f_9(x) = \sqrt{-4(x - 2)}$

N₄ Fonction \sqrt{u}

Soit u une fonction définie sur \mathcal{D}_u telle pour tout $x \in \mathcal{D}_u$: $u(x) \geqslant 0$.

D Définition

La fonction \sqrt{u} est définie sur \mathcal{D}_u et par : $(\sqrt{u})(x) = \sqrt{u(x)}$

P Propriété : variations

Si u est monotone sur un intervalle I et si pour tout $x \in I$, $u(x) \geqslant 0$ alors la fonction \sqrt{u} a le même sens de variation que u sur I .

Construire un tableau de variation des fonctions suivantes sur leur ensemble de définition :

1 $f_1(x) = \sqrt{3x^2}$

2 $f_2(x) = \sqrt{\frac{1}{x}}$

3 $f_3(x) = \sqrt{\frac{1}{x^2}}$

4 $f_4(x) = \sqrt{\sqrt{x}}$

n°1 Fonction f

On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{-2x + 4}$

1 Résoudre l'inéquation $-2x + 4 \geqslant 0$. En déduire l'ensemble de définition de f

2 Pour deux réels a et b tels que $a \leqslant b$, calculer $f(a) - f(b)$

3 Dresser le tableau de variation de f

4 Dresser le tableau de signe de f

5 Tracer la représentation graphique de f

n°2 Fonction g

On considère la fonction g définie par $g(x) = \sqrt{-2x^2 - 2x + 4}$ et on pose $h(x) = -2x^2 - 2x + 4$

1 Démontrer que 1 et -2 sont les deux racines de h .

2 Déterminer la forme factorisée de h .

3 En déduire le tableau de variations et le tableau de signes de h

4 Déterminer alors l'ensemble de définition de g . Déterminer le tableau de variation de g

5 Tracer la représentation graphique de g

6 g possède-t-elle un extrémum ? Si oui le déterminer.

N₁ Repère et coordonnées**R** Définition : repère

Un repère c'est donner trois points O ; I et J non alignés. On note un repère $(O; I; J)$ avec :

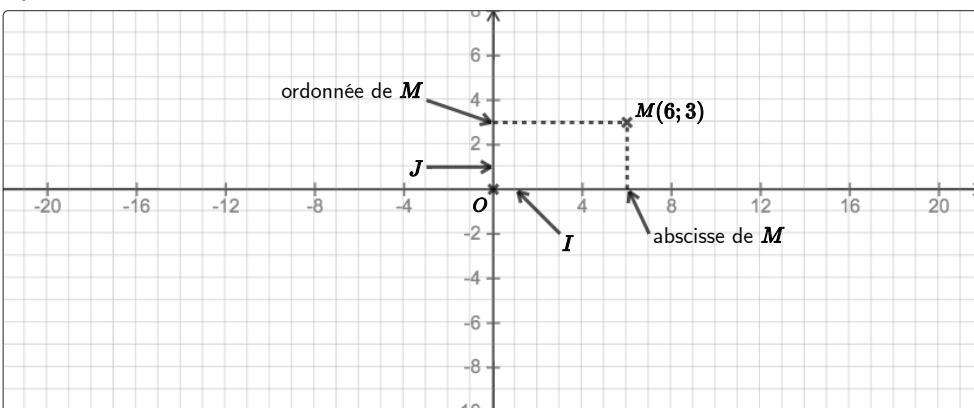
- O est l'**origine** du repère.
- La droite (OI) est l'**axes des abscisses** (orienté de O vers I). L'axe des abscisses (OI) est très fréquemment horizontal.
- La droite (OJ) est l'**axes des ordonnées** (orienté de O vers J). L'axe des abscisses (OJ) est très fréquemment vertical.
- La longueur OI est l'unité sur l'axe des abscisses qui correspond à la distance entre deux graduations sur cet axe.
- La longueur OJ est l'unité sur l'axe des ordonnées qui correspond à la distance entre deux graduations sur cet axe.

Dans la grande majorité des cas le repère est **orthogonal** c'est à dire que le triangle OIJ est rectangle en O (quand ce n'est pas spécifié, le repère est orthogonal).

Quand le triangle OIJ est isocèle-rectangle en O ($OI = OJ$) on dit que le repère $(O; I; J)$ est **orthonormé**.

R Définition : coordonnées

On considère un repère $(O; I; J)$. Un point est repéré par un couple de deux réels. Le premier réel est le repérage sur l'axe des abscisses et correspond à l'abscisse du point. Le deuxième réel est le repérage sur l'axe des ordonnées et correspond à l'ordonnée du point. Le couple de ces deux réels est appelé **coordonnées** du point. Pour le point M on note ses coordonnées $M(x; y)$ où x est l'abscisse du point M et y son ordonnée.



Dans un repère $(O; I; J)$: $O(0; 0)$; $I(1; 0)$ et $J(0; 1)$

1 Construire un repère orthonormé $(O; I; J)$ d'unité 2 cm

- Placer $A(2; -2)$; $B(5; 4)$ et $C(0; 3)$
- Placer le point D pour que $ABCD$ soit un parallélogramme.
- Donner les coordonnées de D .

2 Construire un repère orthonormé $(O; I; J)$ d'unité 1 cm

- Placer $E(5; 0)$; $F(2; -2)$
- Placer les points G et H pour que $EFGH$ soit un losange.
- Donner les coordonnées de G et H .

N₂ Milieu d'un segment**P** Propriété

On considère un repère $(O; I; J)$ et deux points A et B tels que $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$. Le point I , milieu du segment $[AB]$ a pour coordonnées : $I\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$

Dans un repère $(O; I; J)$, on donne les points : $R(-1; 4)$; $S(-2; 1)$; $T(3; 0)$ et $U(4; 3)$

- Construire $(O; I; J)$ puis placer les points R ; S ; T et U
- Calculer les coordonnées du milieu de $[RT]$ et $[SU]$. Que conclure ?

N₃ Longueur d'un segment**P** Propriété

On considère un repère orthonormé $(O; I; J)$ et deux points A et B tels que $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$. La longueur du segment $[AB]$ vaut : $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

Dans un repère orthonormé $(O; I; J)$, on donne les points : $R(1; 4)$; $S(-2; 0)$; $T(0; 6)$ et $U(3; 5)$

- Construire $(O; I; J)$ puis placer les points R ; S ; T et U
- Calculer RT et SU . Que conclure ?

n°1 Triangles équilatéraux

Dans un repère orthonormé $(O; I; J)$, on considère les points A et B de coordonnées $(2; 0)$ et $(5; 0)$.

- On appelle C le point d'ordonnée positive tel que ABC soit un triangle équilatéral. Déterminer les coordonnées du point C .
- Soit G le centre de gravité du triangle ABC . Déterminer les coordonnées du point G .
- Les points I , J et K sont les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[AC]$ et $[BC]$.
 - Calculer les coordonnées des points I , J et K .
 - Démontrer que le triangle IJK est équilatéral.
 - Démontrer que le point G est le centre de gravité de IJK .

n°2 Rectangle et triangle rectangle

On munit le plan d'un repère orthonormé $(O; I; J)$. On place les points suivants :

- $T(-2; 2; 1; 2)$
- $A(-1; 2; 3; 6)$
- $C(6; 0; 6)$

- Calculer les valeurs exactes des longueurs des trois côtés du triangle TAC .
- Démontrer que le triangle TAC est rectangle.
- On appelle K le milieu de $[TC]$. Calculer les coordonnées de K .
- Quelles sont les coordonnées du point E tel que $ECAT$ soit un rectangle ?

n°3 Carré et triangle isocèle

On munit le plan d'un repère orthonormé $(O; I; J)$. On place les points suivants :

- $S(-3; 2; 3; 2)$
- $A(8; 1; 6)$
- $W(3; 2; 8)$
- $P(1; 6; -3; 2)$

- Calculer les longueurs des trois côtés de SWA .
- Montrer que le triangle SWA est isocèle rectangle.
- Calculer les coordonnées des milieux des segments $[SA]$ et $[WP]$.
- Montrer que $SWAP$ est un carré.

N₁ Vecteur

Définition : vecteur

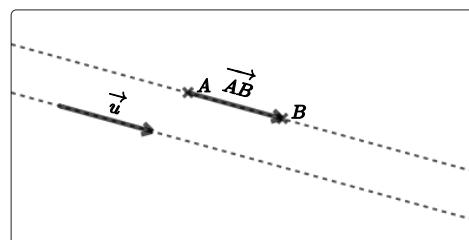
Un vecteur \vec{u} est associé à une translation. Le point B est le symétrique du point A par la translation de vecteur \vec{u} quand $\vec{AB} = \vec{u}$ c'est à dire :

- les vecteurs \vec{AB} et \vec{u} ont même longueur. On parle de **norme** pour un vecteur et on note

$$\vec{AB} = \|\vec{AB}\| = \|\vec{u}\|$$

- les vecteurs \vec{AB} et \vec{u} ont la même direction c'est à dire qu'ils sont portés par deux droites parallèles.

- les vecteurs \vec{AB} et \vec{u} ont le même sens.



Définition : vecteur nul

Le vecteur associé à la translation qui transforme un point en lui-même est le **vecteur nul** que l'on note $\vec{0}$.
 $\vec{0} = \vec{AA} = \vec{MM}$

Définition : opposé

Le vecteur \vec{BA} associé à la translation qui transforme B en A est le **vecteur opposé** à \vec{AB} .
 $\vec{BA} = -\vec{AB}$ ou $\vec{BA} + \vec{AB} = \vec{0}$

Propriété : parallélogramme

$\vec{AB} = \vec{CD}$ si et seulement si $ABCD$ est un parallélogramme.

Propriété : milieu

$\vec{AI} = \vec{IB}$ si et seulement si I est le milieu du segment $[AB]$.

- 1 Soit 2 parallélogrammes $ABCD$ et $DCEF$.

- a) Faire une figure.

- b) Démontrer que $\vec{AB} = -\vec{EF}$

- 2 Soient 6 points G, H, I, J, K, L tel que $\vec{GH} = \vec{JI}$ et $\vec{IJ} = -\vec{KL}$.

- a) Faire une figure.

- b) Donner tous les parallélogrammes présents. Justifier.

- 3 Soit O milieu de $[AB]$ et le point D est le symétrique du point C par rapport à O .

- a) Faire une figure.

- b) Démontrer que $\vec{AC} = \vec{DB}$ ou que $\vec{AD} = \vec{CB}$

- 4 Soit le point A tel que $\vec{AB} = -\vec{AC}$. Faire une figure puis indiquer la position du point A . Justifier.

- 5 Soit le point M tel que $\vec{ME} + \vec{MF} = \vec{0}$. Faire une figure puis indiquer la position du point M . Justifier.

N₂ Addition de deux vecteurs

Propriétés

Addition

Soient \vec{AB} et \vec{CD} 2 vecteurs :

- $\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{CD} + \vec{AB}$
- $\vec{AB} + \vec{0} = \vec{AB}$

Relation de Chasles

Soient A, B et C trois points alors : $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$

Propriété du parallélogramme

Soient A, B, C et D quatre points.

$ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{AC}$

Démontrer la propriété du parallélogramme.

N₃ Coordonnées d'un vecteur

Définition

Dans un repère d'origine O , le point M a pour coordonnées $(a; b)$ alors le vecteur $\vec{u} = \vec{OM}$ a les mêmes coordonnées que le point M et on note : $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

Propriété : unicité

Deux vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}$ sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes coordonnées c'est à dire $a_1 = a_2$ et $b_1 = b_2$.

Propriété

Dans un repère, $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ alors : $\vec{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$

- 1 Dans un repère orthonormé, on a $A(1; 2)$, $B(5, 6)$, $C(8; 9)$ et $D(10; 67)$:

- a) Placer ces 4 points.

- b) Démontrer que $ABCD$ est un parallélogramme.

- c) Donner les coordonnées de \vec{AD} puis \vec{BC} .

- 2 Dans un repère orthonormé, on a $A(1; 2)$, $B(5, 6)$, $C(8; 9)$:

- a) Placer ces 3 points.

- b) Placer un point D pour que $ABCD$ est un parallélogramme.

- c) Donner les coordonnées de \vec{CD} .

- d) Donner les coordonnées de \vec{AD} puis de \vec{BC} .

N₄ Norme d'un vecteur

Définition

Si $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans un repère orthonormé alors $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Calculer la norme des vecteurs :

1 $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

2 \vec{AB} avec $A(-1; 8)$ et $B(6; 12)$.

3 $\vec{w} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$

N₆ Propriétés

P Addition de deux vecteurs

Soient deux vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ alors $\vec{w} \begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 \end{pmatrix}$

P Multiplication par un réel

Soit un vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$ et λ un réel et $\vec{w} = \lambda \vec{u}$ alors $\vec{w} \begin{pmatrix} \lambda \times a_1 \\ \lambda \times b_1 \end{pmatrix}$

P Propriétés

Soit deux vecteurs \vec{AB} et \vec{CD} et λ un réel tels que $\vec{AB} = \lambda \vec{CD}$ alors :

• Si $\lambda > 0$ alors \vec{AB} et \vec{CD} ont le même sens et $\vec{AB} = \lambda \vec{CD}$

• Si $\lambda < 0$ alors \vec{AB} et \vec{CD} sont de sens contraire et $\vec{AB} = -\lambda \vec{CD}$

1 Soient $\vec{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{BC} \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$. Déterminer les coordonnées de $\vec{AB} - 2\vec{BC}$.

2 Soient $E(-1; 2)$; $F(2; -3)$ et $G(-3; 4)$. Déterminer les coordonnées de $2\vec{EF} - 3\vec{FG}$.

N₆ Colinéarité de deux vecteurs

D Définition

Deux vecteurs non nuls \vec{u} et \vec{v} sont **colinéaires** quand il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$

P Propriété

Soient deux vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

\vec{u} et \vec{v} sont colinéaires si et seulement si leurs coordonnées sont **proportionnelles** c'est à dire $xy' = x'y$ ou $xy' - x'y = 0$. C'est les produits en croix des coordonnées de \vec{u} et \vec{v} .

Déterminer si les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires. Si oui, déterminer le réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$ (a et b sont deux réels) :

1 $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -11 \\ 5 \end{pmatrix}$

2 $\vec{u} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 15 \\ 4 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix}$

3 $\vec{u} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -2 \\ -3\sqrt{2} \end{pmatrix}$

N₇ Droites parallèles

P Propriété

Les vecteurs \vec{AB} et \vec{CD} sont colinéaires si et seulement si les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

Tracer les droites (AB) et (CD) puis déterminer si elles sont parallèles :

1 $A(3; -2)$, $B(-1; -1)$, $C(-3; 2)$ et $D(1; 3)$

2 $A(-9; -2)$, $B(1; -3)$, $C(3; -2)$ et $D(1; -3)$

3 $A(-1; 2)$, $B(-1; 3)$, $C(3; 2)$ et $D(4; 2)$

4 $A(-1; 2)$, $B(-1; 3)$, $C(3; 2)$ et $D(4; 2)$

N₈ Points alignés

P Propriété

Les points A , B et C sont alignés si et seulement si \vec{AB} et \vec{AC} sont colinéaires.

Déterminer si les points sont alignés:

1 $F\left(\frac{2}{3}; 1\right)$, $G\left(-2; \frac{1}{3}\right)$, et $H(5; 2)$

3 $E(1; 2)$, $F(-3; 8)$ et $G(3; -1)$

5 $A(-4; 4)$, $T(-4; -6)$ et $P(-3; 2)$

2 $B(0; 0)$, $C(\sqrt{2}; \sqrt{6})$ et $D(4; 4\sqrt{3})$

4 $A(-9; 4)$, $B(1; -1)$ et $C(4; -2)$

6 $C(\pi; \pi)$, $D(1; 2 - \pi)$ et $H(\pi - 4; \pi - 2)$

N₉ Vecteurs directeurs

D Définition

Un vecteur \vec{u} est un vecteur **directeur** de la droite (AB) quand les vecteurs \vec{u} et \vec{AB} sont colinéaires.

P Propriété

Deux droites sont parallèles si et seulement si un vecteur directeur de l'une est colinéaire à un vecteur directeur de l'autre.

1 Soient $A(3; 2)$ et $B(6; 3)$. Tracer (AB) .

3 Placer $C(1, 0)$

2 Donner 3 vecteurs directeurs de la droite (AB) .

4 Placer un point D pour que (AB) et (CD) soient parallèles.

5 Donner 3 vecteurs directeurs de la droite (CD) .

N₁₀ équation de droite

P Propriétés

• Soit a et b deux réels. Le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite d'équation $y = ax + b$ avec a qui est le **coeffcient directeur** de cette droite.

• Soit k un réel. Le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite verticale d'équation $x = k$

1 Déterminer l'équation d'une droite de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ et passant par $A(3; 5)$.

2 Déterminer l'équation d'une droite de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et passant par $B(2; 3)$.

3 Déterminer l'équation d'une droite de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et passant par $B(-1; -1)$.

4 Déterminer l'équation d'une droite de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix}$ et passant par $B(1; 1)$.

5 Déterminer l'équation d'une droite de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}$ et passant par $B(3; 0)$.

6 Déterminer l'équation d'une droite de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \end{pmatrix}$ et passant par $B(6; -3)$.

7 Déterminer l'équation d'une droite de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$ et passant par $B(0; -2)$.

N₁₁ équation réduite de droite

Propriétés

- Soit $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points tels que $x_A \neq x_B$. Le vecteur $\vec{u} \left(\begin{array}{c} 1 \\ y_B - y_A \\ x_B - x_A \end{array} \right)$ est un vecteur directeur de la droite (AB) d'équation réduite :

$$y = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} x + \frac{x_B y_A - y_B x_A}{x_B - x_A} \text{ avec } \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \text{ qui est le coefficient directeur de la droite } (AB).$$

- Soit $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points tels que $x_A = x_B$. Le vecteur $\vec{u} \left(\begin{array}{c} 0 \\ x_A \end{array} \right)$ est un vecteur directeur de la droite verticale d'équation $x = x_A$

Corollaire

Deux droites non-verticales sont parallèles si et seulement si elles ont le même coefficient directeur.

- Déterminer l'équation d'une droite de vecteur directeur $\vec{u} \left(\begin{array}{c} 1 \\ -3 \end{array} \right)$ et passant par $A(3; 5)$.
- Déterminer l'équation d'une droite de vecteur directeur $\vec{u} \left(\begin{array}{c} 2 \\ 8 \end{array} \right)$ et passant par $B(1; -2)$.
- On considère les points $A(2; 3)$; $B(4; 7)$ et $C(4; 7)$. Tracer (AB) puis déterminer son équation réduite. Déterminer une équation réduite de la droite parallèle à (AB) et passant par C , la tracer.
- Dans un repère orthonormé, on a $E(-2; 3)$ et $F(-2; -1)$. Tracer (EF) puis déterminer son équation réduite.

N₁₂ équation cartésienne de droite

Définition

Une équation d'une droite (d) de la forme $ax + by + c = 0$ est appelée une équation cartésienne de (d) .

Propriétés

- Soit A un point et \vec{u} un vecteur non nul et (d) la droite de vecteur directeur \vec{u} et passant par A . Un point M appartient à (d) si et seulement si les vecteurs \vec{AM} et \vec{u} sont colinéaires.

- La droite d'équation $ax + by + c = 0$ a pour vecteur directeur $\vec{u} \left(\begin{array}{c} -b \\ a \end{array} \right)$ et passe par le point de coordonnées $\left(1; \frac{a-c}{b}\right)$.

- Réciproquement une droite de vecteur directeur $\vec{u} \left(\begin{array}{c} -b \\ a \end{array} \right)$ a pour équation $ax + by + c = 0$

- Déterminer l'équation cartésienne d'une droite de vecteur directeur $\vec{u} \left(\begin{array}{c} 2 \\ -3 \end{array} \right)$ et passant par $A(2; 5)$.

- Déterminer l'équation cartésienne d'une droite de vecteur directeur $\vec{u} \left(\begin{array}{c} \sqrt{2} \\ \sqrt{5} \end{array} \right)$ et passant par $C(0; 2)$.

- On considère les points $A(2; 3)$; $B(4; 7)$ et $C(4; 7)$. Tracer (AB) puis déterminer son équation cartésienne. Déterminer une équation cartésienne de la droite parallèle à (AB) et passant par C , la tracer.

- Dans un repère orthonormé, on a $E(-2; 3)$ et $F(-2; -1)$. Tracer (EF) puis déterminer son équation cartésienne.

N₁₃ Intersection de deux droites

Par le calcul

On considère deux droites (d_1) et (d_2) d'équation cartésienne $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ (ou réduite $y = a_1x + b_1$) et $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ (ou réduite $y = a_2x + b_2$). Le point d'intersection (s'il existe) a pour coordonnées la solution du système :

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} y = a_1x + b_1 \\ y = a_2x + b_2 \end{cases}$$

Graphiquement

On considère deux droites (d_1) et (d_2) . Il suffit de tracer ces deux droites et de lire les coordonnées du point d'intersection. Attention, les coordonnées sont toujours des valeurs approchées.

- On considère les points $A(2; 3)$; $B(4; 7)$; $C(4; 7)$ et $D(4; 7)$. Tracer (AB) et (CD) puis déterminer les coordonnées du point d'intersection de (AB) et (CD) (en utilisant les équations cartésiennes). Vérifier graphiquement.
- On considère les points $A(2; 3)$; $B(4; 7)$; $C(4; 7)$ et $D(4; 7)$. Tracer (AB) et (CD) puis déterminer les coordonnées du point d'intersection de (AB) et (CD) (en utilisant les équations réduites). Vérifier graphiquement.

n°1 Triangle EFG

- On considère un triangle EFG et H tel que : $\vec{EH} = \frac{2}{3} \vec{EG} + \frac{1}{3} \vec{EF}$. Faire une figure.
- En écrivant $\vec{FH} = \vec{FE} + \vec{EH}$, démontrer que \vec{FH} et \vec{FG} sont colinéaires.
- Que peut-on en déduire concernant le point H ?

n°2 Une génération de droites

On considère le vecteur $\vec{u} \left(\begin{array}{c} 1 \\ m \end{array} \right)$ où m est un nombre réel et le point $A(-2; 0)$. Soit (d_m) la droite passant par A et de vecteur directeur \vec{u} .

- Déterminer une équation cartésienne de (d_m) .
- Peut-on trouver m tel que le point $B(3; 2)$ appartienne à (d_m) ?
- Peut-on trouver m tel que (d_m) soit parallèle à la droite (D) d'équation $-5x + 2y - 7 = 0$?
- Peut-on trouver m tel que (d_m) soit parallèle à la droite (D') d'équation $-4x + 12 = 0$?
- Quels sont les points du plan qui n'appartiennent à aucune droite (d_m) ?

n°3 Vecteurs directeurs de norme 1

Déterminer tous les vecteurs directeurs de norme 1 de la droite :

- | | | | |
|---|---------------------------------|---|--------------------------------------|
| 1 | (d_1) d'équation $x - 8 = 2$ | 2 | (d_2) d'équation $2x + 3y + 5 = 0$ |
| 3 | (d_3) d'équation $y = 5x + 3$ | 4 | (d_3) d'équation $y = 5x + 3$ |
| 5 | (d_3) d'équation $y = 5x + 3$ | 6 | (d_3) d'équation $y = 5x + 3$ |
| 7 | (d_3) d'équation $y = 5x + 3$ | 8 | (d_3) d'équation $y = 5x + 3$ |

n°4 Droites parallèles

Dans chacun des cas suivants, déterminer une équation de la droite (d') parallèle à (d) passant par A .

1 $A(2; 1)$ et (d) d'équation $-3x + y = 0$

3 $A(1; 1)$ et (d) d'équation $-\frac{x}{3} + \frac{y}{6} + 4 = 0$

2 $A(-1; 3)$ et (d) d'équation $-x - 2y + 1 = 0$

4 $A\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right)$ et (d) d'équation $-x + y - 2 = 0$

n°5 Alignement

On considère un parallélogramme $ABCD$ et les points E et F définis par : • $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AD}$ • $\overrightarrow{AF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

1 Faire une figure.

2 Que peut-on conjecturer sur les points B , F et E ?

3 Calculer \overrightarrow{BE} en fonction de \overrightarrow{CD} et \overrightarrow{AC}

4 Calculer \overrightarrow{BF} en fonction de \overrightarrow{CD} et \overrightarrow{AC}

5 En déduire que \overrightarrow{BE} et \overrightarrow{BF} sont colinéaires.

6 Conclure.

n°6 Parallélisme et calcul vectoriel

On considère trois points non alignés A , B et C . Le point E est défini par $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

1 Faire une figure.

2 Établir une conjecture sur les droites (CE) et (AB).

3 Démontrer que $\overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{AB}$.

4 Conclure.

n°7 Milieu et calcul vectoriel

On considère trois points non alignés A , B et C .

Les points P et Q sont définis par : $\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

1 Faire une figure.

2 Que peut-on conjecturer sur le point Q ? Et sur B ?

3 Démontrer que $\overrightarrow{PC} = -2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$. En déduire la position du point B .

4 Exprimer \overrightarrow{BQ} en fonction de \overrightarrow{BC} . En déduire la position du point C .

n°8 Droites parallèles

On considère le point $A(-7; 1)$ et la droite (D) d'équation réduite $y = -5x + 1$. Déterminer x , abscisse du point B de coordonnées $(x; 8)$ tel que les droites (AB) et (D) soient parallèles.

n°9 Points alignés

On considère les points A et B de coordonnées respectives $(1; -5)$ et $(-1; 3)$. Déterminer y , ordonnée du point C de coordonnées $(2; y)$ tel que A , B et C soient alignés.

N₁ Cercle trigonométrique

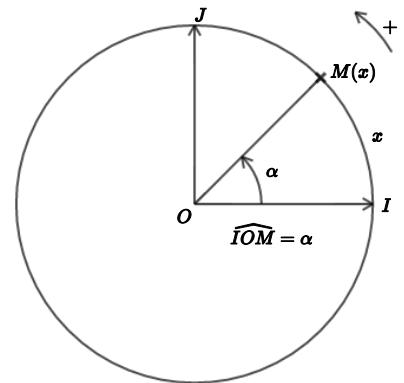
D Définition

Dans un repère orthonormé $(O; I; J)$, le cercle trigonométrique (C) est le cercle de centre O et de rayon 1. Ce cercle est muni d'un sens de parcours appelé **sens direct** (sens inverse des aiguilles d'une montre).

La mesure en **radian** d'un angle correspond à la longueur de l'arc du cercle trigonométrique qu'il intercepte. La mesure en radian est **proportionnelle** à la mesure en degré.

Pour repérer un point M du cercle trigonométrique, on enroule autour du cercle un axe orienté, gradué, d'origine le point I . On peut alors associer, au point M , un réel x , abscisse d'un point de l'axe qui vient se superposer au point M .

Quand on fait un tour alors on se retrouve avec le même point sur le cercle trigonométrique. De ce fait le même point M est associé aux réels x ; $x + 2\pi$; $x - 2\pi$; $x + k \times 2\pi$ et $x - k \times 2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)



1 Convertir $\frac{\pi}{5}$, $\frac{5\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{4}$ en degré puis les placer sur le cercle trigonométrique.

2 Placer sur le cercle trigonométrique $-\frac{\pi}{3}$, $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{11\pi}{8}$, $-\frac{5\pi}{8}$ et $\frac{17\pi}{6}$.

3 Soit un point A du cercle trigonométrique associé au nombre $-\frac{\pi}{2}$. Donner quatre autres nombres qui correspondent au même point A .

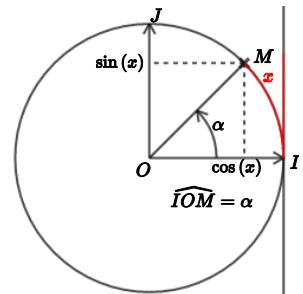
N₂ Coordonnées et cercle trigonométrique

D Définition

On se place dans un repère orthonormé $(O; I; J)$. Soit M un point sur le cercle trigonométrique associé au nombre x (x est la longueur de l'arc de cercle de I à M). On note $\alpha = \widehat{IOM}$ alors :

$M(\cos(x); \sin(x))$ ou $M(\cos x; \sin x)$ ou encore

$M(\cos(\alpha); \sin(\alpha))$ ou $M(\cos \alpha; \sin \alpha)$



Pour $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{Z}$:

• $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$

• $-1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq \sin x \leq 1$

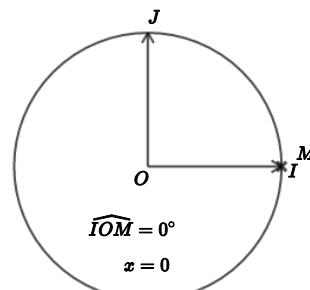
• $\cos(x + k \times 2\pi) = \cos x$ et $\sin(x + k \times 2\pi) = \sin x$

• $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

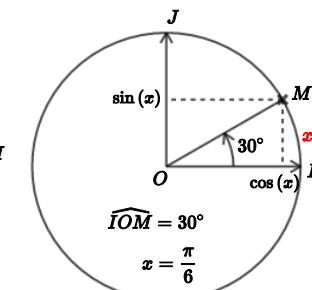
On se place dans un repère orthonormé $(O; I; J)$. Soit M un point sur le cercle trigonométrique associé au nombre x : x est la longueur de l'arc de cercle de I à M . On note $\alpha = \widehat{IOM}$. On pose $A(\cos(x); 0)$ et $B(0; \sin(x))$. En utilisant le triangle AOM , démontrer que $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$.

N₃ Valeurs usuelles

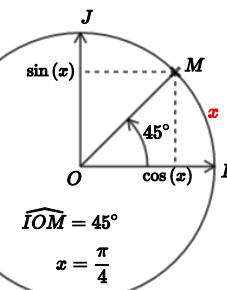
Propriétés



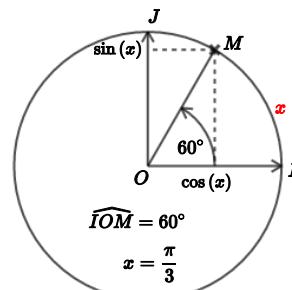
$$\cos(0) = 1 ; \sin(0) = 0$$



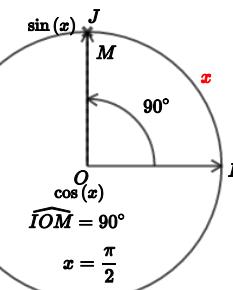
$$\cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2} ; \sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$$



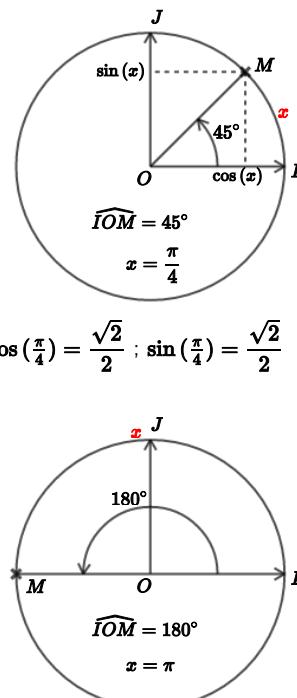
$$\cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} ; \sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



$$\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2} ; \sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



$$\cos(\frac{\pi}{2}) = 0 ; \sin(\frac{\pi}{2}) = 1$$



$$\cos(\pi) = -1 ; \sin(\pi) = 0$$

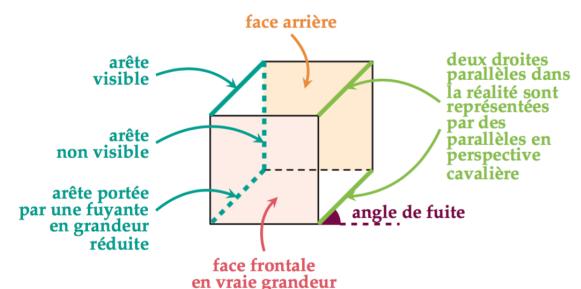
On se place dans un repère orthonormé $(O; I; J)$. Soit M un point sur le cercle trigonométrique associé au nombre $\frac{\pi}{6} : \frac{\pi}{6}$ est la longueur de l'arc de cercle de I à M . On note $\alpha = \widehat{IOM}$. On pose $A(\cos(\frac{\pi}{6}); 0)$ et $B(0; \sin(\frac{\pi}{6}))$.

- 1 Faire une figure.
- 2 Donner la mesure de α en degré.
- 3 Démontrer que $OA = BM$
- 4 Démontrer que OMJ est un triangle isocèle.
- 5 Démontrer que $\widehat{MOJ} = 60^\circ$
- 6 Démontrer que OMJ est un triangle équilatéral.
- 7 Que dire de la droite (BM) dans le triangle OMJ ?
- 8 En déduire que B est le milieu de $[OJ]$. Donner la longueur OB .
- 9 Calculer la longueur BM .
- 10 Déduire des questions précédentes les valeurs exactes de $\sin(\frac{\pi}{6})$ et $\cos(\frac{\pi}{6})$

N₁ Solides usuels

Définitions

- Un **solide** est un objet en relief. On ne peut pas le tracer en vraie grandeur sur une feuille de papier plane.
- Un **patron** permet de fabriquer le solide par pliage.
- La **perspective cavalière** permet de représenter le solide sur une feuille papier en donnant l'impression de la 3D.



Solides usuels

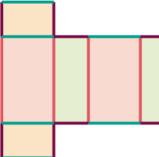
Parallélépipède rectangle

$$\mathcal{V} = \text{largeur} \times \text{hauteur} \times \text{profondeur}$$



Le patron est composé de rectangles.

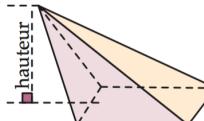
L'aire d'un rectangle est : $\mathcal{A} = \text{Longueur} \times \text{largeur}$



Les segments de la même couleur ont même mesure

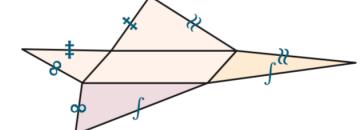
Pyramides

$$\mathcal{V} = (\text{Aire de la base} \times \text{hauteur}) \div 3$$



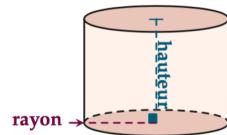
Le patron est composé d'un polygone et de triangles.

L'aire d'un triangle est : $\mathcal{A} = (\text{base} \times \text{hauteur}) \div 2$

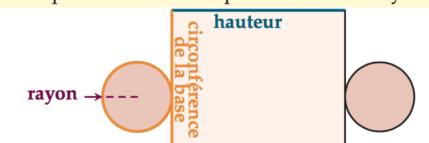


Cylindre de révolution

$$\mathcal{V} = \text{Aire de la base} \times \text{hauteur}$$



Le patron est composé d'un rectangle et de deux disques. L'aire d'un disque est : $\mathcal{A} = \pi \times \text{rayon}^2$



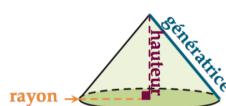
- 1 On considère un parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$ tel que $AB = 5 \text{ cm}$; $BC = 4 \text{ cm}$ et $AE = 3 \text{ cm}$. Calculer le volume de ce solide. Tracer en vraie grandeur un patron de ce solide. En déduire l'aire de ce patron.

- 2 On considère un cylindre de révolution de rayon 5 cm et de hauteur 9 cm . Calculer le volume de ce solide. Tracer en vraie grandeur un patron de ce solide. En déduire l'aire de ce patron.

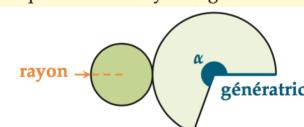
- 3 On considère une pyramide régulière $SABCD$ à base carrée (de centre O) telle que $AB = 8 \text{ cm}$ et de hauteur 6 cm . Déterminer les longueurs SO et BC . Calculer le volume de ce solide. Tracer en vraie grandeur un patron de ce solide. En déduire l'aire de ce patron.

N₂ Autres solides usuels**D** Autres solides usuels**Cône de révolution**

$$\mathcal{V} = \text{Aire de la base} \times \text{hauteur} \div 3$$

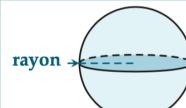


Le patron est composé d'un disque et d'une portion de disque avec $\alpha = \text{rayon} \div \text{génératrice} \times 360^\circ$

**Sphère et boule**

$$\mathcal{V} = \frac{4}{3}\pi \times \text{rayon}^3$$

$$\mathcal{A} = 4 \times \pi \times \text{rayon}^2$$



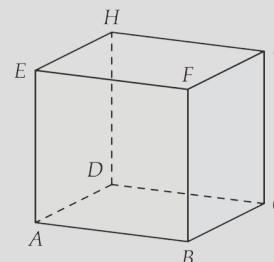
La sphère n'a pas de patron.

- 1 On considère un cône de révolution de rayon **$OC = 6 \text{ cm}$** et de hauteur **$OH = 12 \text{ cm}$** . Calculer le volume de ce solide. Tracer en vraie grandeur un patron de ce solide. En déduire l'aire de ce patron.
- 2 On considère une sphère de rayon **8 cm** . Calculer le volume et l'aire de ce solide.

n°1 Intersections de plans

On considère un parallélépipède rectangle **$ABCDEFGH$** et **I** un point de **$[AB]$** .

- 1 Reproduire la figure ci-contre et y placer le point **I** .
- 2 Construire sur cette figure :
 - les intersections des plans **(EHI)** et **(AFB)**;
 - les intersections des plans **(EHI)** et **(HDG)**;
 - les intersections des plans **(EHI)** et **(BDF)**;
 - les intersections des plans **(EHI)** et **(FBC)**.

**n°2** Pyramide régulière

On considère une pyramide régulière **$SABCD$** à base carrée (de centre **O**) telle que **$AB = 5 \text{ cm}$** et **$SA = 10 \text{ cm}$** .

- 1 Représenter en perspective cavalière cette pyramide en prenant comme angle de fuite $\alpha = 45^\circ$
- 2 Quelle est la nature du triangle **SAB** et du triangle **SAO** ?
- 3 Tracer en vraie grandeur un patron de cette pyramide.
- 4 Calculer **AO** . En déduire la hauteur (valeur exacte) de cette pyramide.
- 5 Calculer le volume exact **\mathcal{V}_1** de cette pyramide puis la valeur approchée au millième.
- 6 On coupe cette pyramide par un plan horizontal à sa base et qui passe par le point **O'** qui est le milieu du segment **$[SO]$** . Cela forme deux solides dont **$SA'B'C'D'$** qui est une pyramide à base carrée de centre **O'** .
 - a) Tracer en vraie grandeur un patron de la pyramide **$SA'B'C'D'$** .
 - b) Calculer le volume **\mathcal{V}_2** de **$SA'B'C'D'$** puis le rapport $\frac{\mathcal{V}_2}{\mathcal{V}_1}$.

N₁ Série statistique**D** Définitions

Lors d'un relevé de mesures effectué sur un **caractère quantitatif** des individus d'une population, l'ensemble des données collectées constitue une série statistique : c'est une liste de nombres que l'on appelle généralement en statistique des **valeurs**.

- Une série statistique à caractère quantitatif est dite ordonnée après que les valeurs collectées ont été rangées dans l'ordre croissant (ou décroissant).
- L'**étendue** désigne l'écart entre la plus grande et la plus petite des valeurs prises par le caractère.
- L'**effectif total** désigne le nombre de valeurs présents dans la série statistique.

D Modalités

Les différentes valeurs possibles pour un caractère s'appellent les **modalités** du caractère.

- Si le nombre **p** de modalités, notées **x_1, x_2, \dots, x_p** rangées dans l'ordre croissant, est petit, on représente une série statistique par un **tableau d'effectifs** :

Modalités du caractère	x_1	x_2	...	x_p
Nombre de valeurs par modalité (effectif)	n_1	n_2	...	n_p

L'étendue de cette série statistique vaut : **$x_p - x_1$** . Cette série statistique possède **n_1** valeurs toutes égales à **x_1** et **n_p** valeurs toutes égales à **x_p** . L'effectif total vaut : **$n_1 + n_2 + \dots + n_p$**

- Si le nombre **p** de modalités est grand, on remplace la première ligne par des intervalles de modalités appelés **classe de valeurs**. On choisit généralement le centre de la classe pour représenter celle-ci :

Classe de modalités du caractère	$[a_1; a_2[$	$[a_2; a_3[$...	$[a_p; a_{p+1}]$
Centre de classe	$c_1 = \frac{a_1 + a_2}{2}$	$c_2 = \frac{a_2 + a_3}{2}$...	$c_p = \frac{a_p + a_{p+1}}{2}$
Nombre de valeurs par classe (effectif)	n_1	n_2	...	n_p

L'étendue de cette série statistique vaut : **$a_p - a_1$** . Cette série statistique possède **n_1** valeurs comprises entre **a_1** et **a_2** et **n_p** valeurs comprises entre **a_p** et **a_{p+1}** . L'effectif total vaut : **$n_1 + n_2 + \dots + n_p$**

- 1 On a demandé aux élèves d'une classe de seconde de donner leur taille en **cm**. Voici leur réponse : **156; 158; 154; 156; 165; 172; 181; 176; 169; 162; 180; 173; 151; 152; 174; 162; 179; 165; 164; 1172; 177; 169; 150; 157; 160; 165; 168; 175; 154; 161; 178**

a) Dresser un tableau d'effectifs de cette série statistique.

d) Déterminer l'étendue et l'effectif total de cette série statistique.

- 2 On a demandé aux élèves d'une classe de seconde de donner le nombre d'enfant dans leur famille. Voici leur réponse : **1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 2, 4, 2, 3, 2, 2, 1, 1, 1, 4, 2, 1, 1, 2, 3, 3, 2, 2, 4, 2, 3, 2, 1, 4, 1, 2**

a) Dresser un tableau d'effectifs de cette série statistique.

d) Déterminer l'étendue et l'effectif total de cette série statistique.

- 3 On lance un dé à six faces plusieurs fois. Voici le numéro des faces obtenues : **1, 1, 3, 3, 4, 4, 2, 3, 2, 4, 5, 2, 6, 3, 2, 6, 6, 5, 1, 2, 4, 5, 4**

a) Dresser un tableau d'effectifs de cette série statistique.

d) Déterminer l'étendue et l'effectif total de cette série statistique.

- 4 Voici des températures relevées à six heures du matin au mois de janvier : **-1.2; -2.1; 1.9; 0.3; -0.3; -2.7; -2.1; -0.6; -1.7; -2.1; 0.2; 0.4; -2.8; -0.1; -0.8; -0.2; 0.9; -1; -0.4; -1.2; 0; 0.1; -0.1; -1.1; 0.4; -0.9; -0.8; -1.5; -1.6; -1.9; -2**

a) Dresser un tableau d'effectifs de cette série statistique.

d) Déterminer l'étendue et l'effectif total de cette série statistique.

N₂ Fréquence d'apparition

D Définition

On considère une série statistique comportant p modalités (ou p classes) d'effectifs n_1, \dots, n_p et d'effectif total $N = n_1 + n_2 + \dots + n_p$. La **fréquence d'apparition** de la modalité (ou de la classe) correspond à la proportion d'individus dont le caractère est égal à cette modalité (ou appartenant à cette classe). Ainsi, pour tout entier i compris entre 1 et p : $f_i = \frac{n_i}{N}$ et $f_1 + f_2 + \dots + f_p = 1$

Le tableau ci-contre indique la répartition du nombre d'enfants de moins de 25 ans dans les familles des Bouches-du-Rhône en 1999 et 2009.

- 1 Construire un tableau avec les fréquences d'apparition en pourcentages (arrondir au dixième)
- 2 Construire un diagramme en barres comparatif de 1999 et 2009.

Nombre de famille avec	2009	1999
Aucun enfant	244 918	220 109
1 enfant	131 271	124 597
2 enfants	109 776	102 135
3 enfants	35 907	35 708
4 enfants et plus	13 311	14 564
Total	535 183	497 113

N₃ Médiane

D Définition

Dans une série statistique ordonnée : une **médiane** partage les valeurs prises par le caractère en deux groupes de même effectif (soit 50% de l'effectif total).

La médiane correspond donc à la plus petite valeur prise par le caractère telle qu'au moins 50% des valeurs lui soient inférieures ou égales.

On a demandé à un groupe d'élèves de donner leur âge. Les réponses sont rassemblées ci-contre.

16; 15; 15; 16; 17; 16; 18; 18; 16; 17; 17; 15; 16; 17; 16; 17; 18; 16; 15; 18; 17

- 1 Déterminer la médiane (**effectif total impair**) en ordonnant la série statistique.

On a demandé à un groupe d'élèves de donner leur âge. Les réponses sont rassemblées ci-contre.

15; 16; 17; 15; 17; 15; 16; 18; 18; 15; 16; 17; 17; 15; 15; 16; 18; 17

- 2 Déterminer la médiane (**effectif total pair**) en ordonnant la série statistique.

Les résultats d'un contrôle de vitesse dans une agglomération (vitesse limitée à 50 km/h) sont consignés dans le tableau ci-contre.

Vitesse en km/h	Effectif
[20; 50[104
[50; 70[54
[70; 80[13
[80; 90[7
[90; 100[5
[100; 130]	2

Le tableau ci-contre indique la pointure d'un groupe d'élèves

Pointure	Effectif
35	78
36	82
37	43
38	21
39	17
40	5

- 4 Déterminer la médiane en construisant le polygone des **fréquences cumulées croissantes** d'apparition en pourcentages.

N₄ Quartiles

D Définition

Le **premier quartile** d'une série statistique numérique est la plus petite valeur prise par le caractère telle qu'au moins 25% des valeurs lui soient inférieures ou égales. Le **troisième quartile** d'une série statistique numérique est la plus petite valeur prise par le caractère telle qu'au moins 75% des valeurs lui soient inférieures ou égales.

La médiane correspondrait au deuxième quartile soit à plus petite valeur prise par le caractère telle qu'au moins 50% des valeurs lui soient inférieures ou égales.

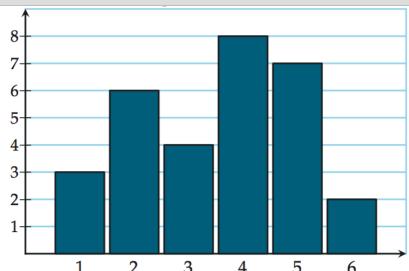
Le montant des dépenses (en euros) de chaque client lors d'une journée de soldes a été relevé et trié dans le tableau ci-contre.

- 1 Déterminer la médiane, le premier et troisième quartiles en construisant un tableau avec les fréquences d'apparition en pourcentages et les **fréquences cumulées croissantes** d'apparition en pourcentages.

Dépense en €	Nombre de clients
[10; 30[46
[30; 50[74
[50; 70[28
[70; 90[62
[90; 110[31
[110; 130]	19

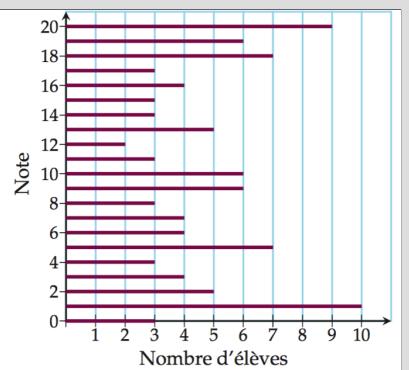
Une enquête réalisée auprès d'un groupe d'élèves pour connaître le nombre d'enfants présents dans leur foyer est représentée par le graphique ci-contre.

- 2 Déterminer une approximation de la médiane, du premier et troisième quartiles en construisant le **polygone des fréquences cumulées croissantes** d'apparition en pourcentages.



Voici les notes au dernier contrôle commun de trois classes de 2e du Lycée de Mathyville.

- 3 Déterminer la médiane, le premier et troisième quartiles en construisant un tableau avec les fréquences d'apparition en pourcentages et les **fréquences cumulées croissantes** d'apparition en pourcentages.



Une entreprise vend des boîtes de 100 g de maquereaux et effectue des relevés de masse.

- 4 Déterminer une approximation de la médiane, du premier et troisième quartiles en construisant le **polygone des fréquences cumulées croissantes** d'apparition en pourcentages.

Masse en g	Nombre de boîtes
[95; 97[2
[97; 99[4
[99; 101[26
[101; 103[95
[103; 105[69
[105; 107]	4

N₅ Moyenne**Définition**

La **moyenne** d'une série statistique se note \bar{x} et vaut :

$$\bullet \bar{x} = \frac{n_1 \times x_1 + n_2 \times x_2 + \cdots + n_p \times x_p}{n_1 + n_2 + \cdots + n_p}$$

où x_1, x_2, \dots, x_p désignent les p modalités et n_1, n_2, \dots, n_p désignent les effectifs correspondants.

$$\bullet \bar{x} = \frac{n_1 \times c_1 + n_2 \times c_2 + \cdots + n_p \times c_p}{n_1 + n_2 + \cdots + n_p}$$

où c_1, c_2, \dots, c_p désignent les centres des p classes de modalités et n_1, n_2, \dots, n_p désignent les effectifs correspondants.

Fréquences

La **moyenne** d'une série statistique se note \bar{x} et vaut :

$$\bullet \bar{x} = f_1 \times x_1 + f_2 \times x_2 + \cdots + f_p \times x_p$$

où x_1, x_2, \dots, x_p désignent les p modalités et f_1, f_2, \dots, f_p désignent les fréquences d'apparition correspondantes.

$$\bullet \bar{x} = f_1 \times c_1 + f_2 \times c_2 + \cdots + f_p \times c_p$$

où c_1, c_2, \dots, c_p désignent les centres des p classes de modalités et f_1, f_2, \dots, f_p désignent les fréquences d'apparition correspondantes.

- 1 Voici les résultats du sondage « Combien de fois par semaine consultez-vous le cahier de texte en ligne ? » réalisé auprès des élèves de 2eZ. Quel est le nombre moyen de connexions ?

Nombre de connexions	0	1	2	3	4	5	6	7
Nombre d'élèves	2	4	3	4	8	9	4	1

- 2 Sur la totalité du mois de janvier 2012, il y a eu 57 nouveau-nés à la maternité « Beaux jours ». Leur taille est donnée dans le tableau ci-dessous. Quelle est la moyenne des tailles des nouveau-nés ?

Taille	46	47,5	48	48,5	49	49,5	50	50,5	51	51,5	52	52,5	53
Effectifs	1	2	3	5	5	7	9	8	7	5	2	2	1

- 3 Nathalina lance un dé à 6 faces 200 fois. À partir des résultats présentés dans le tableau, calculer la moyenne des nombres indiqués par le dé.

Face	1	2	3	4	5	6
Fréquence en %	15	16,5	16	14	18,5	20

- 4 Voici les résultats d'un sondage sur la pointure de chaussure des clients du magasin TOPCHAUSS. Quelle est la pointure moyenne de ses clients ?

Pointure	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46
Fréquence en %	2,3	4,3	7,6	10,8	11,4	13,6	12,7	10,3	8,4	8,1	5,3	5,2

N₁ Expérience aléatoire**Définition**

Une **expérience aléatoire** est une expérience renouvelable dont les résultats possibles, généralement appelés **issues**, sont connus sans qu'on puisse déterminer lequel sera réalisé.

Univers fini

L'**univers** d'une expérience aléatoire est l'ensemble des issues possibles appelées également résultats ou éventualités. On le note Ω .

Cardinal de l'univers

Le **cardinal** de l'univers d'une expérience aléatoire est le nombre d'**issues** de cet univers. On le note $\text{card}(\Omega)$

Donner les univers Ω des expériences aléatoires suivantes ainsi que leur cardinal :

1 E_1 : Lancer un dé à six faces.

2 E_2 : Lancer une pièce de monnaie.

3 E_3 : Choisir un nombre entier dans [0; 10]

4 E_4 : Le sexe d'un nourrisson.

N₂ Événements**Définition**

Une **événement** d'une expérience aléatoire est un sous-ensemble de l'univers c'est à dire un sous-ensemble comprenant des **issues**.

Union

Soient deux événements A et B d'une même expérience aléatoire.

L'**union** des événements A et B , notée $A \cup B$, est l'ensemble des issues qui réalisent A ou B . On dit "**A** union **B**".

Intersection

Soient deux événements A et B d'une même expérience aléatoire.

L'**intersection** des événements A et B , notée $A \cap B$, est l'ensemble des issues qui réalisent A et B . On dit "**A** inter **B**".

On considère l'expérience aléatoire : "lancer un dé à six faces". Décrire les événements suivants :

1 A : "Faire un nombre pair"

2 B : "Faire un nombre multiple de 3"

3 $A \cup B$

4 $A \cap B$

N₃ Observation des fréquences**Modèle : Loi faible des grands nombres**

Lorsqu'on répète n fois, de façon indépendante, une expérience aléatoire, la fréquence d'une issue va avoir tendance à se stabiliser lorsque n augmente. La probabilité de l'issue est très proche de la valeur stabilisée observée. Il faut s'assurer que la somme des probabilités fasse 1

On considère l'expérience aléatoire E_1 : "lancer un dé à six faces" que l'on réalise un certain nombre de fois.

Voici les résultats ci-contre.

1 Pour $n = 100$, $n = 500$ et $n = 1\ 000$, estimer les probabilités de choisir les faces $n^{\circ}1$, $n^{\circ}2$, $n^{\circ}3$, $n^{\circ}4$, $n^{\circ}5$ et $n^{\circ}6$ du dé.

Nbr d'expériences E_1 : n	100	1 000	500
Face $n^{\circ}1$	18	165	78
Face $n^{\circ}2$	16	189	82
Face $n^{\circ}3$	17	187	85
Face $n^{\circ}4$	15	169	79
Face $n^{\circ}5$	15	174	87
Face $n^{\circ}6$	19	116	89

N₄ Equiprobabilité

Modèle : équiprobabilité

Dans un modèle **équiréparti**, chaque issue a la même probabilité qui vaut :

$$\frac{1}{\text{Nombre d'issues possibles}} = \frac{1}{\text{card}(\Omega)}$$

On dit aussi que c'est une situation d'**équiprobabilité**.

On considère l'expérience aléatoire **E₁** : "lancer un dé à six faces". On suppose qu'il s'agisse d'une situation d'équiprobabilité.

1 Pourquoi est-il raisonnable de choisir l'équiprobabilité comme modèle.

3 Quelle est la probabilité d'obtenir la face n°3

2 Quelle est la probabilité d'obtenir la face n°1

4 Quelle est la probabilité d'obtenir la face n°6

N₅ Loi de probabilité

D Loi de probabilité

Une **loi de probabilité** sur un univers Ω associe à chaque issue qui le réalise un nombre compris entre 0 et 1 appelé **probabilité**. La somme des probabilités des issues est 1.

P Propriétés

- Une probabilité valant 1 indique que l'issue se réalise à chaque expérience.
- Une probabilité valant 0 indique que l'issue ne se réalise jamais et ce quelque soit expérience.

D Probabilité d'un événement

La **probabilité d'un événement** est la somme des probabilités des issues qui le réalisent. Pour un événement **A**, on note sa probabilité $P(A)$.

N Notations

- Un événement **impossible** est un événement qui ne se réalise jamais. Sa probabilité vaut 0.
- Un événement **certain** est un événement qui est sûr de se réaliser. Sa probabilité vaut 1.

D Événement contraire

Soit **A** un événement. L'événement **contraire** à **A** est constitué des issues de Ω ne se réalisant pas dans **A** et se note \bar{A} . Sa probabilité vaut : $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

P Propriété

Si **A** et **B** sont deux événements alors : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

On lance un dé équilibré à 20 faces et on note le numéro de la face du dessus. On note **A** l'événement : "obtenir un nombre pair" et l'événement **B** : "obtenir un nombre multiple de 3".

1 Est-ce une situation d'équiprobabilité ?

3 Décrire l'événement \bar{A} .

5 Décrire l'événement \bar{B} .

7 Déterminer $P(A \cup B)$ et $P(A \cap B)$. Vérifier la propriété.

2 Déterminer $P(A)$

4 Déterminer $P(\bar{A})$

6 Déterminer $P(\bar{B})$

8 Décrire les événements $\bar{A} \cup B$, $A \cup \bar{B}$ et $\bar{A} \cup \bar{B}$. Déterminer les probabilités correspondantes.

N₁ Menus

Au restaurant scolaire, les élèves ont le choix :

- entre 2 entrées : Artichaut ou Betterave;
- entre 3 plats : Cheval, Daube ou Escalope;
- entre 2 desserts : Fromage ou Gâteau.

Un menu se compose : • d'une entrée ; • d'un plat ; • d'un dessert.

1 En utilisant un arbre, représenter tous les menus.

2 Combien de menus différents sont possibles ?

3 On choisit un menu au hasard. Quelle est la probabilité :

- qu'il comporte une escalope ?
- qu'il comporte de l'artichaut et du fromage ?
- qu'il ne comporte pas de cheval ?

N₂ Rangement de CD

Trois CD notés **a**, **b** et **c** ont respectivement des boîtes nommées **A**, **B** et **C**. On range les 3 CD au hasard dans les boîtes sans voir leur étiquette.

1 Combien de rangements sont possibles ?

2 Quelle est la probabilité :

- que les 3 CD soient bien rangés ?
- qu'exactement 1 CD soit bien rangé ?
- qu'exactement 2 CD soient bien rangés ?

3 En déduire la probabilité qu'aucun CD ne soit bien rangé.

N₃ Ordinateurs

Une entreprise fabrique des ordinateurs portables. Ils peuvent présenter deux défauts : • un défaut de clavier ou • un défaut d'écran.

Sur un grand nombre d'ordinateurs, une étude statistique montre que : • 2% présentent un défaut d'écran; • 2,4% présentent un défaut de clavier; • 1,5% présentent les deux défauts.

1 On choisit au hasard un ordinateur et on considère les événements suivants.

- **E** : « L'ordinateur présente un défaut d'écran »;
- **C** : « L'ordinateur présente un défaut de clavier ». Déterminer $P(E)$, $P(C)$ et $P(E \cap C)$.

2 On considère les événements suivants.

- « L'ordinateur présente au moins un défaut »;
- « L'ordinateur ne présente que le défaut d'écran ». Traduire ces 2 événements à l'aide de **E** et **C**. Calculer leur probabilité.

N₄ Jetons dans une urne

Une urne contient 4 jetons : • deux jaunes ; • un rose ; • un violet.

On tire au hasard un jeton de l'urne puis un second sans remettre le premier.

On suppose que tous les tirages sont équiprobables.

1 Représenter cette situation par un arbre. Combien y-a-t-il de tirages possibles ?

2 On considère les événements suivants : • **R** : « Le premier jeton tiré est rose » et • **J** : « Le deuxième jeton tiré est jaune »

a) Déterminer $P(R)$ et $P(J)$.

b) Traduire par une phrase **R** ∩ **J** puis calculer $P(R \cap J)$. Calculer $P(R \cup J)$.

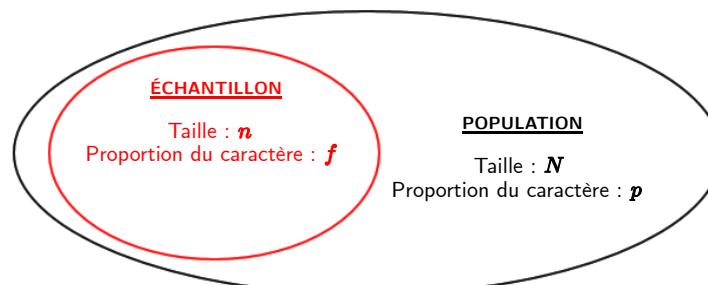
3 On considère l'événement : • **N** : « Aucun jeton tiré n'est jaune »

a) Calculer $P(N)$. Exprimer par une phrase **N** puis calculer $P(\bar{N})$.

N₁ Intervalle de fluctuation

D Echantillon

Soit une **population** (ce n'est pas forcément des êtres humains) de $N \in \mathbb{N}$ individus. On choisit avec remise n individus, on obtient un **échantillon** de taille n . On note p la proportion du caractère étudié dans la population et on note f cette proportion dans l'échantillon.



P Intervalle de fluctuation

Quand on choisit un échantillon de taille n (tel que $n \geq 25$) dans une population qui contient une proportion p (telle que $p \in [0; 2; 0,8]$) du caractère étudié alors la proportion f du caractère dans l'échantillon est telle que :

$$f \in \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}; p + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$$

avec une probabilité de 95%.

Cet intervalle est appelé **intervalle de fluctuation asymptotique à 95%** qui a pour amplitude $\frac{2}{\sqrt{n}}$.

- 1 On prélève un échantillon de taille 100 dans une population qui contient 23% d'éléments du type **A**. Donner l'intervalle de fluctuation asymptotique à 95% de la proportion f d'éléments du type **A** dans l'échantillon.
- 2 Dans l'article du site Wikipédia consacré au sex-ratio (c'est à dire au rapport du nombre d'hommes sur le nombre de femmes), on trouve l'affirmation suivante : "en France, il y a environ 105 garçons pour 100 filles à la naissance". Dans une clinique il y a environ 1 500 naissances par an.
 - a) Quel est l'intervalle de fluctuation asymptotique à 95% de la proportion f de garçons dans cette clinique ?
 - b) Quel est l'intervalle de fluctuation asymptotique à 95% de la proportion f de filles dans cette clinique ?
- 3 Lors du deuxième tour de l'élection présidentielle, il ne reste plus que deux candidats, nommés **A** et **B**. Un sondage est effectué la veille du second tour. Le candidat **A** est crédité de 48% des intentions de vote.
 - a) Si on choisit un échantillon de taille $n = 1 000$ au hasard dans la population française, quel est l'intervalle de fluctuation asymptotique à 95% de la proportion f de personnes favorables au candidat **A** ?
 - b) Si $f = 48\%$ et si on veut que la limite supérieure de l'intervalle de fluctuation à 95% soit 50%, quelle valeur de la taille de l'échantillon n doit-on choisir ?

N₂ Prise de décision

M Méthode

On prélève un échantillon de taille n tel que $n \geq 25$. La proportion p (telle que $p \in [0; 2; 0,8]$) dans la population est connue et la proportion f dans cet échantillon est connue.

L'échantillon provient-il de la population ? **On fait l'hypothèse que oui.**

$$\text{Si : } f \notin \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}; p + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$$

Il y a 95% de chance que l'hypothèse précédente soit fausse : on rejette l'hypothèse au seuil de 95% ou avec un risque de 5% (sinon on ne la rejette pas).

Une chaîne de production de tablettes numériques est contrôlée régulièrement. Ces contrôles ont fait apparaître que 20% des tablettes présentent un léger défaut au niveau de la finition de l'écran qui nécessite un travail supplémentaire.

On décide de changer les méthodes de travail des équipes de cette chaîne de production. Quelques temps après cette modification, on prélève un échantillon de 300 tablettes, et on compte 50 tablettes ayant un défaut de finition de l'écran. Peut-on conclure que la réorganisation du travail a été efficace ?

N₃ Intervalle de confiance

P Intervalle de confiance

Quand un échantillon de taille n (tel que $n \geq 25$) contient une proportion f (telle que $f \in [0; 2; 0,8]$) du caractère étudié alors la proportion p du caractère dans la population est telle que :

$$p \in \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}; f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$$

avec une probabilité de 95%.

Cet intervalle est appelé **intervalle de confiance à 95%** qui a pour amplitude $\frac{2}{\sqrt{n}}$.

En Italie, un sondage est effectué sur la politique budgétaire du pays. La question posée est : "pensez-vous que la rigueur actuelle soit suffisante pour régler le problème du déficit de l'Etat".

Sur les 1 000 personnes interrogées, 30% ont répondu non. Donner l'intervalle de confiance à 95% du pourcentage d'Italiens qui répondraient non.

n°1 Dé pipé

Un dé semble sortir un nombre anormalement élevé de "6". Il est lancé 150 fois, on relève que la face portant le "6" est sortie 40 fois. Tester l'hypothèse suivante : ce dé n'est pas pipé.

n°2 Urne

Une urne contient 40% de boules noires et le reste de boules rouges. Elle contient un très grand nombre de boules. On présente trois échantillons de boules noires et rouges mais on ignore si ces échantillons proviennent effectivement de l'urne.

- L'échantillon **A** contient 30 boules dont 12 noires.
- L'échantillon **B** contient 81 boules dont 40 noires.
- L'échantillon **C** contient 260 boules dont 80 noires.

Pour chacun des échantillons, examiner l'hypothèse suivante : cet échantillon a été prélevé dans l'urne.

n^o4 Comparaison de 2 échantillons

M Méthode

Soyent deux échantillons de proportions respectives f_1 et f_2 d'un caractère. On détermine les deux intervalles de confiance de ces deux échantillons. On fait l'hypothèse qu'ils proviennent d'une même population.

Si les deux intervalles à 95% sont disjoints (aucun nombre en commun) alors on rejette l'hypothèse, sinon on ne la rejette pas.

Le premier janvier 2012 a été décidé une augmentation sur les prix du tabac. Pour étudier l'impact de cette augmentation sur la consommation de cigarettes, un institut de sondage a demandé à deux cents personnes choisies au hasard dans la population française s'ils ont fumés des cigarettes durant la dernière semaine.

Pour la semaine qui a précédé l'augmentation du prix du tabac, le pourcentage de personnes ayant répondu favorablement est de **35%**.

Pour la semaine qui a suivi l'augmentation du prix du tabac, le pourcentage de personnes ayant répondu favorablement est de **32%**.

Peut-on conclure qu'il y a une baisse significative de la consommation de cigarettes ?

n^o3 Mouches drosophiles

On élève des mouches drosophiles dans un aquarium. Dans cette grande population de drosophiles de plusieurs milliers d'insectes, il y a **25%** de mouches qui ont les yeux rouges. On prélève un échantillon d'une centaine de mouches et on appelle f la proportion de mouches qui ont les yeux rouges. Donner l'intervalle de fluctuation à 95% de la proportion f .

n^o4 Précaution

Lors du second tour de l'élection présidentielle, on considère que l'on peut annoncer la victoire d'un candidat si l'intervalle de confiance à 95% ne "mord" pas la barre des **50%**.

- 1 Dans un échantillon de **100** personnes, un candidat est crédité de **53%** des voix. Peut-on annoncer sa victoire ?
- 2 Dans un échantillon de **2 000** personnes, un candidat est crédité de **53%** des voix. Peut-on annoncer sa victoire ?

n^o5 Lecteur MP3

Une unité de production réalisant des lectures MP3 a modifié récemment ses méthodes. Avant la modification, sur un échantillon de **130** lecteurs MP3, on a constaté que **42** lecteurs MP3 avaient un défaut. Après la modification, sur un échantillon de **90** lecteurs MP3, on constate que **25** lecteurs MP3 ont un défaut.

Peut-on dire que la modification des méthodes de production a eu un impact significatif sur la qualité de la production ?

n^o6 Surpoids

Une nouvelle pilule est testée qui serait censée aider les personnes qui souffrent de surpoids à maigrir. Cette pilule est administrée à une centaine de personnes en surpoids et, après un traitement d'un mois, on constate que **30%** des personnes ont effectivement perdu du poids (on considère que la perte de poids est significative à partir de **2** kilos). Par ailleurs, un placebo est administré à une centaine de personnes en surpoids et on constate que, dans cet échantillon, **28%** des personnes ont perdu du poids.

Peut-on conclure que cette pilule est efficace au vu des résultats obtenus sur ces deux échantillons ?

n^o7 Epidémie

Le département de la Réunion a fait face à une épidémie. Pour évaluer le budget nécessaire qui permettra d'affronter efficacement cette maladie, il faut connaître le nombre de patients qui seront atteints par cette maladie. L'épidémie est partie du Sud de la Réunion et on estime qu'elle est dans cette partie en phase de disparition. Dans un village de **1 800** habitants, on a comptabilisé **430** cas maintenant que l'épidémie est finie.

- 1 Donner par intervalle de confiance à **95%** la proportion de réunionnais qui seront atteints.
- 2 Sachant que sur l'île de la Réunion on compte environ **800 000** personnes, donner par intervalle de confiance à **95%** le nombre de réunionnais qui seront atteints par cette maladie.
- 3 Si le coût par personne de cette maladie est de **120 €**, quel est par l'intervalle de confiance à **95%**, le budget qu'il faut prévoir pour affronter cette maladie ?

n^o8 Répression des fraudes

La répression des fraudes a enquêté au casino « Le Lion Vert ». Elle a estimé que la roulette française n'était pas équilibrée et que le casino avait fraudé avec une probabilité d'environ **95%**. Ils ont, pour cela, effectué une analyse informatique des tirages de l'année précédente et remarqué que la couleur rouge était sortie avec une fréquence de **49%** sur un certain nombre de lancers au jeu de la mise sur chance simple Noir-Rouge.

Quelle est la taille minimale de l'échantillon pour que la répression des fraudes puisse arriver à cette conclusion ? La veille, un client notant le déséquilibre en a profité pour l'utiliser. Quelle stratégie le client a-t-il utilisé ?

n^o9 Sur internet

En décembre 2012, un sondage a été réalisé auprès de 1 003 personnes résidant en France, âgées de 18 ans et plus. L'échantillon a été constitué d'après la méthode des quotas (sexe, âge, catégorie socioprofessionnelle du répondant) par région et taille d'agglomération. **772** personnes interrogées ont déclaré avoir déjà été confrontées à une arnaque ou une tentative d'arnaque sur Internet. Dans le même temps, **211** personnes interrogées déclarent avoir déjà été piégées sur Internet par un mail ou un site Internet leur demandant leurs coordonnées personnelles.

Estimer le pourcentage de personnes en France confrontées à une arnaque sur Internet puis le pourcentage de personnes en France ayant déjà été piégées sur internet.

n^o10 Acteur préféré

Un institut de sondage interroge un groupe de filles sur leur acteur préféré.

- 1 Sur un premier échantillon de 800 filles, 38 % ont répondu : Léonard Ducapre. Déterminer l'intervalle de confiance de ce premier échantillon.
- 2 Sur un deuxième échantillon de **650** filles, **42%** ont, elles, répondu Brad Flip. Déterminer l'intervalle de confiance de ce deuxième échantillon.
- 3 Ces deux intervalles sont-ils disjoints ? Peut-on en déduire que chez les filles Brad Flip a plus de succès que Léonard Ducapre ?

n^o11 Photographe

Un photographe vend des appareils photographiques. Il veut estimer par un intervalle de confiance le pourcentage p d'acheteurs d'appareils autofocus avec zoom dans sa clientèle

- 1 Dans un échantillon de **100** clients, **60** achètent un tel appareil. Donner une estimation de p .
- 2 On considère l'affirmation suivante : « la fréquence p est obligatoirement dans l'intervalle de confiance obtenu à la question précédente ». Est-elle vraie ?
- 3 Déterminer la taille n , $n \geq 30$, d'un échantillon de clients pour qu'un intervalle de confiance de p , au seuil de **95%** soit $[0,557; 0,643]$.