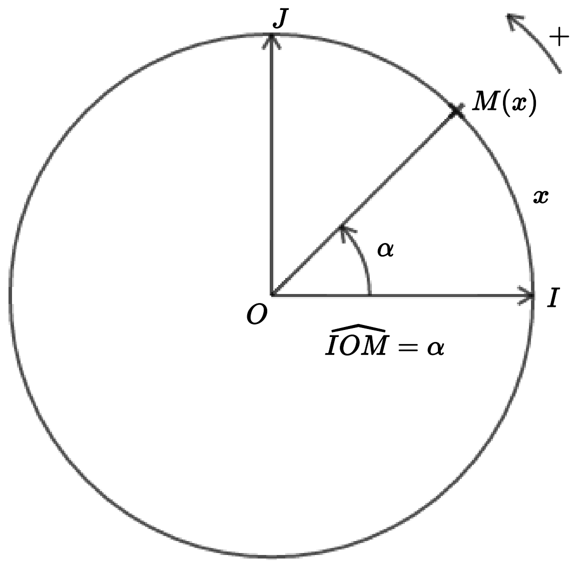
N_1 Cercle trigonométrique

D *Définition*

Dans un repère orthonormé $(O; I; J)$, le **cercle trigonométrique** $(\mathcal{C})$ est le cercle de centre O et de rayon 1. Ce cercle est muni d'un sens de parcours appelé **sens direct** (sens inverse des aiguilles d'une montre).

La mesure en **radian** d'un angle correspond à la longueur de l'arc du cercle trigonométrique qu'il intercepte. La mesure en radian est **proportionnelle** à la mesure en degré.



Pour repérer un point M du cercle trigonométrique, on enroule autour du cercle un axe orienté, gradué, d'origine le point I. On peut alors associer, au point M, un réel x, abscisse d'un point de l'axe qui vient se superposer au point M.

Quand on fait un tour alors on se retrouve avec le même point sur le cercle trigonométrique. De ce fait le même point M est associé aux réels x; $x + 2\pi$; $x - 2\pi$; $x + k \times 2\pi$ et $x - k \times 2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

1 Convertir $\frac{\pi}{5}$, $\frac{5\pi}{2}$ et $\frac{-\pi}{4}$ en degré puis les placer sur le cercle trigonométrique.

2 Placer sur le cercle trigonométrique $-\frac{\pi}{3}$, $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{11\pi}{8}$, $-\frac{5\pi}{8}$ et $\frac{17\pi}{6}$.

3 Soit un point A du cercle trigonométrique associé au nombre $-\frac{\pi}{2}$. Donner quatre autres nombres qui correspondent au même point A.

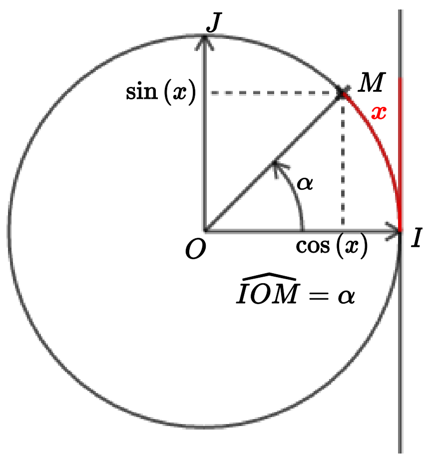
N_2 Coordonnées et cercle trigonométrique

D *Définition*

On se place dans un repère orthonormé $(O; I; J)$. Soit M un point sur le cercle trigonométrique associé au nombre x (x est la longueur de l'arc de cercle de I à M. On note $\alpha = \widehat{IOM}$) alors :

$M\Big(\cos(x); \sin(x)\Big)$ ou $M\Big(\cos x; \sin x\Big)$ ou encore

$M\Big(\cos(\alpha); \sin(\alpha)\Big)$ ou $M\Big(\cos\alpha; \sin\alpha\Big)$



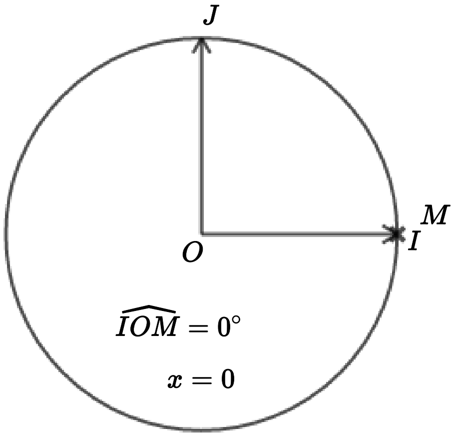
Pour $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{Z}$:

- $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$
- $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$
- $\cos(x + k \times 2\pi) = \cos x$ et $\sin(x + k \times 2\pi) = \sin x$
- $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$

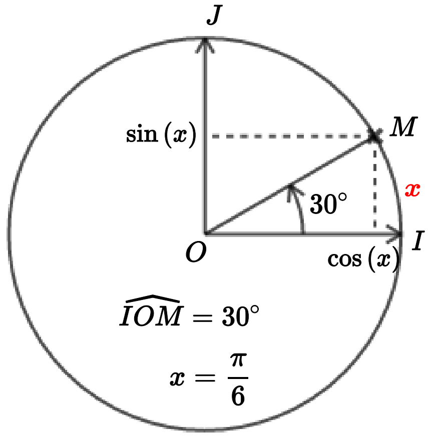
On se place dans un repère orthonormé $(O; I; J)$. Soit M un point sur le cercle trigonométrique associé au nombre x : x est la longueur de l'arc de cercle de I à M. On note $\alpha = \widehat{IOM}$. On pose $A(\cos(x); 0)$ et $B(0; \sin(x))$. En utilisant le triangle AOM, démontrer que $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$.

N_3 *Valeurs usuelles*

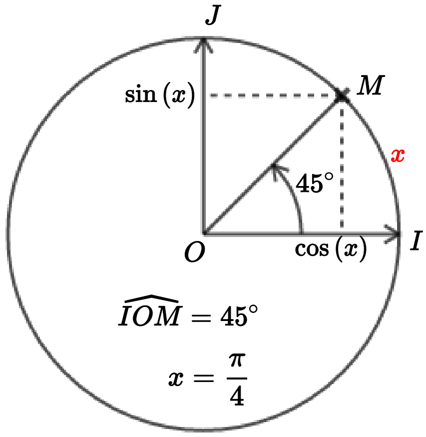
Propriétés



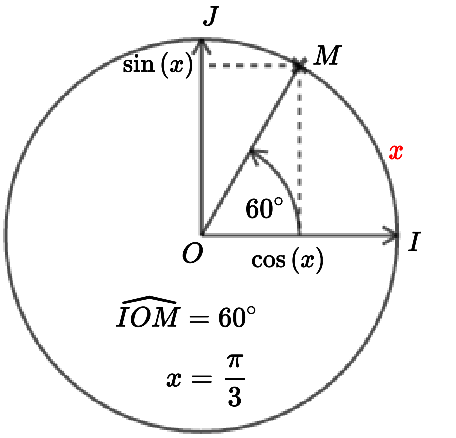
$\cos(0) = 1$; $\sin(0) = 0$



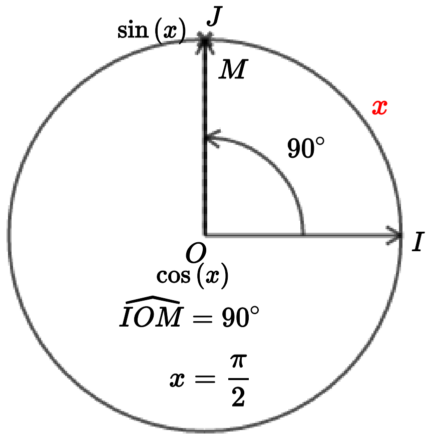
$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$



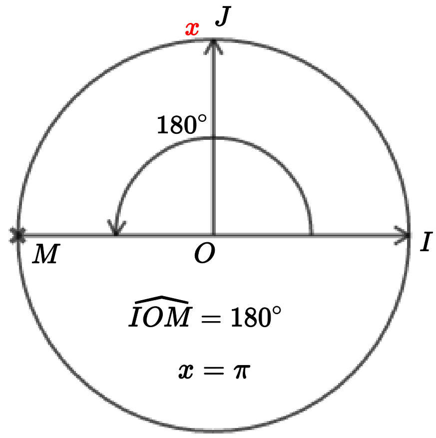
$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$



$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$; $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$



$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$; $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$



$\cos(\pi) = -1$; $\sin(\pi) = 0$

On se place dans un repère orthonormé $(O; I; J)$. Soit M un point sur le cercle trigonométrique associé au nombre $\frac{\pi}{6}$: $\frac{\pi}{6}$ est la longueur de l'arc de cercle de I à M. On note $\alpha = \widehat{IOM}$. On pose $A(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right); 0)$ et $B(0; \sin\left(\frac{\pi}{6}\right))$.

1. Faire une figure.
2. Donner la mesure de α en degré.
3. Démontrer que $OA = BM$
4. Démontrer que OMJ est un triangle isocèle.
5. Démontrer que $\widehat{MOJ} = 60°$
6. Démontrer que OMJ est un triangle équilatéral.
7. Que dire de la droite (BM) dans le triangle OMJ ?
8. En déduire que B est le milieu de $[OJ]$. Donner la longueur OB.
9. Calculer la longueur BM.
10. Déduire des questions précédentes les valeurs exactes de $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$ et $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$