N_1 Expérience aléatoire

Expérience aléatoire

Une **expérience aléatoire** est une expérience renouvelable dont les résultats possibles, généralement appelés issues, sont connus sans qu'on puisse déterminer lequel sera réalisé.

Univers fini

L'**univers** d'une expérience aléatoire est l'ensemble des issues possibles appelées également résultats ou éventualités. On le note Ω.

Cardinal de l'univers

Le **cardinal** de l'univers d'une expérience aléatoire est le nombre d'issues de cet univers. On le note $\mathbf{card}(\Omega)$

Donner les univers Ω des expériences aléatoires suivantes ainsi que leur cardinal :

1. E_1 : Lancer un dé à six faces.
2. E_2 : Lancer une pièce de monnaie.
3. E_3 : Choisir un nombre entier dans $[0; 10]$
4. E_4 : Le sexe d'un nourrisson.

N_2 Evènements

Evènement

Une **évènement** d'une expérience aléatoire est un sous-ensemble de l'univers c'est à dire un sous-ensemble comprenant des issues.

Union

Soient deux évènements A et B d'une même expérience aléatoire.
L'**union** des évènements A et B, notée $A \cup B$, est l'ensemble des issues qui réalise A **ou** B. On dit "A union B".

Intersection

Soient deux évènements A et B d'une même expérience aléatoire.
L'**intersection** des évènements A et B, notée $A \cap B$, est l'ensemble des issues qui réalise A **et** B. On dit " A inter B".

On considère l'expérience aléatoire : "lancer un dé à six faces". Décrire les évènements suivants :

1. A : "Faire un nombre pair"
2. B : "Faire un nombre multiple de 3"
3. $A \cup B$
4. $A \cap B$

N_3 Observation des fréquences

Modèle : Loi faible des grands nombres

Lorsqu'on répète n fois, de façon indépendante, une expérience aléatoire, la fréquence d'une issue va avoir tendance à se stabiliser lorsque n augmente. La probabilité de l'issue est très proche de la valeur stabilisée observée. Il faut s'assurer que la somme des probabilités fasse 1

On considère l'expérience aléatoire E_1 : "lancer un dé à six faces" que l'on réalise un certain nombre de fois. Voici les résultats ci-contre.

1. Pour $n = 100$, $n = 500$ et $n = 1\,000$, estimer les probabilités de choisir les faces $n°1$, $n°2$, $n°3$, $n°4$, $n°5$ et $n°6$ du dé.

Nbr d'expériences E_1 : n	100	1 000	500
Face $n°1$	18	165	78
Face $n°2$	16	189	82
Face $n°3$	17	187	85
Face $n°4$	15	169	79
Face $n°5$	15	174	87
Face $n°6$	19	116	89

N_4 Equiprobabilité

Modèle : équiprobabilité

Dans un modèle **équiréparti**, chaque issue a la même probabilité qui vaut :

$$\frac{1}{\text{Nombre d'issues possibles}} = \frac{1}{\text{card}(\Omega)}$$

On dit aussi que c'est une situation d'**équiprobabilité**.

On considère l'expérience aléatoire E_1 : "lancer un dé à six faces". On suppose qu'il s'agisse d'une situation d'équiprobabilité.

1. Pourquoi est-il raisonnable de choisir l'équiprobabilité comme modèle.
2. Quelle est la probabilité d'obtenir la face $n°1$
3. Quelle est la probabilité d'obtenir la face $n°3$
4. Quelle est la probabilité d'obtenir la face $n°6$

N_5 Loi de probabilité

D *Loi de probabilité*

Une **loi de probabilité** sur un univers Ω associe à chaque issue qui le réalise un nombre compris entre 0 et 1 appelé **probabilité**. La somme des probabilités des issues est 1.

P *Propriétés*

- Une probabilité valant 1 indique que l'issue se réalise à chaque expérience.
- Une probabilité valant 0 indique que l'issue ne se réalise jamais et ce quelque soit expérience.

D *Probabilité d'un évènement*

La **probabilité d'un événement** est la somme des probabilités des issues qui le réalisent. Pour un évènement A, on note sa probabilité $P(A)$.

N *Notations*

- Un événement **impossible** est un événement qui ne se réalise jamais. Sa probabilité vaut 0.
- Un événement **certain** est un événement qui est sûr de se réaliser. Sa probabilité vaut 1.

D *Evènement contraire*

Soit A un événement. L'événement **contraire** à A est constitué des issues de Ω ne se réalisant pas dans A et se note $\overline{A}$. Sa probabilité vaut : $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

P *Propriété*

Si A et B sont deux événements alors : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

On lance un dé équilibré à 20 faces et on note le numéro de la face du dessus. On note A l'évènement : "obtenir un nombre pair" et l'évènement B : "obtenir un nombre multiple de 3".

1. Est-ce une situation d'équiprobabilité ?
2. Déterminer $P(A)$
3. Décrire l'évènement $\overline{A}$.
4. Déterminer $P(\overline{A})$
5. Décrire l'évènement $\overline{B}$.
6. Déterminer $P(\overline{B})$
7. Déterminer $P(A \cup B)$ et $P(A \cap B)$. Vérifier la propriété.
8. Décrire les évènements $\overline{A} \cup B$, $A \cup \overline{B}$ et $\overline{A} \cup \overline{B}$. Déterminer les probabilités correspondantes.

$n°1$ *Menus*

Au restaurant scolaire, les élèves ont le choix :
• entre 2 entrées :Artichaut ou Betterave;
• entre 3 plats : Cheval, Daube ou Escalope;
• entre 2 desserts : Fromage ou Gâteau.
Un menu se compose : • d'une entrée ; • d'un plat ; • d'un dessert.

1. En utilisant un arbre, représenter tous les menus.
2. Combien de menus différents sont possibles ?
3. On choisit un menu au hasard. Quelle est la probabilité :
   a) qu'il comporte une escalope ?
   b) qu'il comporte de l'artichaut et du fromage ?
   c) qu'il ne comporte pas de cheval ?

$n°2$ *Rangement de CD*

Trois CD notés a, b et c ont respectivement des boîtes nommées A, B et C. On range les 3 CD au hasard dans les boîtes sans voir leur étiquette.

1. Combien de rangements sont possibles ?
2. Quelle est la probabilité :
   a) que les 3 CD soient bien rangés ?
   b) qu'exactement 1 CD soit bien rangé ?
   c) qu'exactement 2 CD soient bien rangés ?
3. En déduire la probabilité qu'aucun CD ne soit bien rangé.

$n°3$ *Ordinateurs*

Une entreprise fabrique des ordinateurs portables. Ils peuvent présenter deux défauts : • un défaut de clavier ou • un défaut d'écran.
Sur un grand nombre d'ordinateurs, une étude statistique montre que : • 2% présentent un défaut d'écran; • $2,4\%$ présentent un défaut de clavier; • $1,5\%$ présentent les deux défauts.

1. On choisit au hasard un ordinateur et on considère les événements suivants.
   • E : « L'ordinateur présente un défaut d'écran »;
   • C : « L'ordinateur présente un défaut de clavier ». Déterminer $P(E)$, $P(C)$ et $P(E \cap C)$.
2. On considère les événements suivants.
   • « L'ordinateur présente au moins un défaut »;
   • « L'ordinateur ne présente que le défaut d'écran ». Traduire ces 2 événements à l'aide de E et C. Calculer leur probabilité.

$n°4$ *Jetons dans une urne*

Une urne contient 4 jetons :• deux jaunes ; • un rose ; • un violet.
On tire au hasard un jeton de l'urne puis un second sans remettre le premier.
On suppose que tous les tirages sont équiprobables.

1. Représenter cette situation par un arbre. Combien y-a-t-il de tirages possibles ?
2. On considère les événements suivants : • R : « Le premier jeton tiré est rose » et • J : « Le deuxième jeton tiré est jaune »
   a) Déterminer $P(R)$ et $P(J)$.
   b) Traduire par une phrase $R \cap J$ puis calculer $P(R \cap J)$. Calculer $P(R \cup J)$.
3. On considère l'événement : • N : « Aucun jeton tiré n'est jaune »
   a) Calculer $P(N)$. Exprimer par une phrase $\overline{N}$ puis calculer $P(\overline{N})$.