

N₁ **Forme développée**

Définition : Fonction du second degré

Une fonction f définie sur \mathbb{R} est une **fonction polynôme du second degré** ou **fonction du second degré** si elle est de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a , b et c sont des réels tels que $a \neq 0$.

Définition : Parabole

La représentation graphique ou courbe représentative d'une fonction du second degré est une **parabole**.

L'équation de la parabole est : $y = ax^2 + bx + c$

Vocabulaire

- L'expression algébrique $ax^2 + bx + c$ est appelée **trinôme du second degré**.
- L'écriture $f(x) = ax^2 + bx + c$ de la fonction f est la **forme développée de f** .

Déterminer si les fonctions suivantes sont des fonctions du second degré et donner le cas échéant les trois coefficients a , b et c :

1 $f_1(x) = 6 - 3x^2 + 2x$

2 $f_2(x) = 4 + 7x$

3 $f_3(x) = (6x - 7)^2$

4 $f_4(x) = (8 + 4x)^2$

5 $f_5(x) = (3x + 7)(3x - 7)$

6 $f_6(x) = 4(2x - 3)^2$

N₂ **Forme canonique**

Théorème : Forme canonique

La **forme canonique** de la fonction du second degré f définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ est :

$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ avec $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$. Cette **forme canonique** est **unique**.

Donner la forme canonique des fonctions du second degré suivantes :

1 $f_1(x) = 4x^2 + 5x + 9$

2 $f_2(x) = -3x^2 - 7x + 9$

3 $f_3(x) = 7x - x^2 - 10$

4 $f_4(x) = 9x^2 + 16 - 24x$

5 $f_5(x) = 81 - 49x^2$

6 $f_6(x) = 7 + \sqrt{140}x + 5x^2$

7 $f_7(x) = 6x^2 - 9x + 1$

8 $f_8(x) = \frac{x^2}{3} - \frac{x}{6} + 1$

9 $f_9(x) = 4 - 12x + 9x^2$

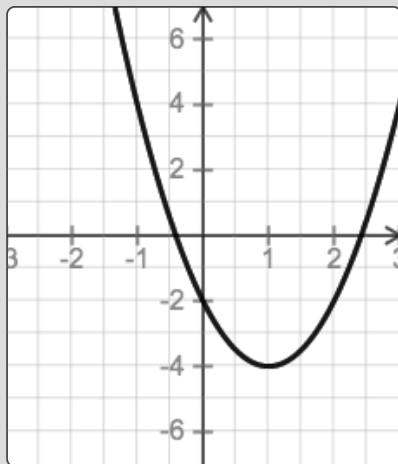
N₃ **Forme canonique : parabole**

Propriété

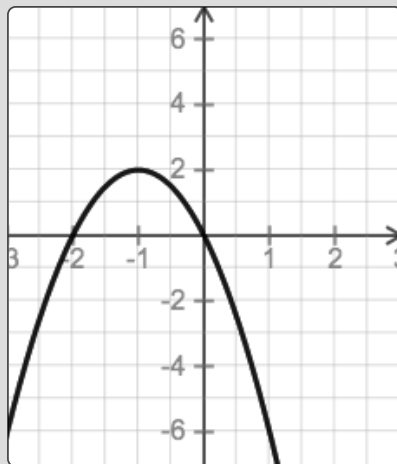
La parabole C_f , courbe représentative de la fonction du second degré f de forme canonique

$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ a pour sommet $S(\alpha; \beta)$

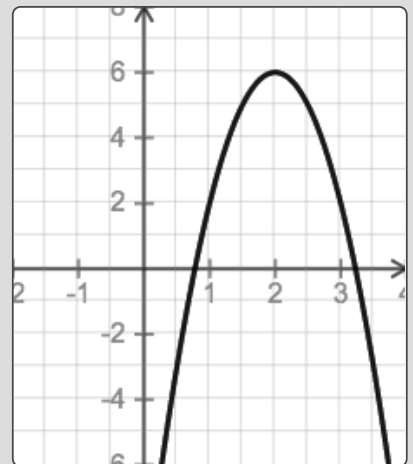
Donner la forme canonique des fonctions du second degré suivantes :



Parabole C_{f_1}



Parabole C_{f_2}



Parabole C_{f_3}

N₄ Symétrie de la parabole

P Propriété : Symétrie de la parabole

La parabole C_f , courbe représentative de la fonction du second degré f de forme canonique $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ est symétrique par rapport à la droite verticale d'équation $x = \alpha$.

Tracer la courbe représentative des fonctions suivantes en traçant l'axe de symétrie :

1 $f_1(x) = (x - 8)^2 + 2$

2 $f_2(x) = 2(x + 1)^2 + 3$

3 $f_3(x) = -2(4 + x)^2 - 3$

4 $f_4(x) = (3x - 3)^2$

5 $f_5(x) = 6x^2 - 8x + 3$

6 $f_6(x) = (2x + 5)(2x - 5)$

N₅ Sens de variation

P Sens de variation

On considère la fonction du second degré f de forme canonique $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ alors :

si $a > 0$ si $a < 0$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
f			

x	$-\infty$	α	$+\infty$
f			

Construire le tableau de variations des fonctions du second degré suivantes :

1 $f_1(x) = -2(x - 3)^2 + 2$

2 $f_2(x) = 4(x + 2)^2 + 6$

3 $f_3(x) = (5x - 8)(2 - 6x)$

4 $f_4(x) = (5x - 3)^2$

5 $f_5(x) = 9x^2 - 2x + 5$

6 $f_6(x) = (7x + 8)(7x - 8)$

N₆ Extremum

P Extremum

On considère la fonction du second degré f de forme canonique $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ alors :

f admet β comme extremum qui est atteint pour $x = \alpha$.

- C'est un maximum si a est négatif.
- C'est un minimum si a est positif.

Construire le tableau de variations des fonctions du second degré suivantes :

1 $f_1(x) = -2(x - 3)^2 + 2$

2 $f_2(x) = 4(x + 2)^2 + 6$

3 $f_3(x) = (5x - 8)(2 - 6x)$

4 $f_4(x) = (5x - 3)^2$

5 $f_5(x) = 9x^2 - 2x + 5$

6 $f_6(x) = (7x + 8)(7x - 8)$

N₇ Inéquation du second degré et signe d'un trinôme : forme canonique

■ Définition et propriétés

Soient a , b et c des nombres réels tels que $a \neq 0$ et f la fonction du second degré définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ de courbe représentative \mathcal{C}_f .

Une inéquation du second degré est du type :

- $ax^2 + bx + c < 0 \rightarrow$ les abscisses x des points de \mathcal{C}_f strictement en **dessous** de l'axe des abscisses.
- $ax^2 + bx + c > 0 \rightarrow$ les abscisses x des points de \mathcal{C}_f strictement au **dessus** de l'axe des abscisses.
- $ax^2 + bx + c \leq 0 \rightarrow$ les abscisses x des points de \mathcal{C}_f en **dessous** de l'axe des abscisses.
- $ax^2 + bx + c \geq 0 \rightarrow$ les abscisses x des points de \mathcal{C}_f au **dessus** de l'axe des abscisses.

□ Signe

On considère le trinôme $ax^2 + bx + c$ associé à la fonction $f(x) = ax^2 + bx + c$ de forme canonique $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ alors:

si $a > 0$ et $\beta \geq 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	+	

si $a < 0$ et $\beta \geq 0$

x	$-\infty$	$\alpha - \sqrt{\frac{\beta}{-a}}$	$\alpha + \sqrt{\frac{\beta}{-a}}$	$+\infty$	
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

si $a < 0$ et $\beta \leq 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	-	

si $a > 0$ et $\beta \leq 0$

x	$-\infty$	$\alpha - \sqrt{\frac{-\beta}{a}}$	$\alpha + \sqrt{\frac{-\beta}{a}}$	$+\infty$	
$f(x)$	+	0	-	0	+

Construire le tableau de variations des fonctions du second degré suivantes :

1 $f_1(x) = -2(x - 3)^2 + 2$

2 $f_2(x) = 4(x + 2)^2 + 6$

3 $f_3(x) = (5x - 8)(2 - 6x)$

4 $f_1(x) = -2(x - 3)^2 + 2$

5 $f_2(x) = 4(x + 2)^2 + 6$

6 $f_3(x) = (5x - 8)(2 - 6x)$

N₈ Forme factorisée

□ Théorème

Soit la forme développée de la fonction $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$). Dans certains cas, il est possible d'écrire f sous forme **factorisée** : $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

Construire le tableau de variations des fonctions du second degré suivantes :

1 $f_1(x) = -2(x - 3)^2 + 2$

2 $f_2(x) = 4(x + 2)^2 + 6$

3 $f_3(x) = (5x - 8)(2 - 6x)$

4 $f_1(x) = -2(x - 3)^2 + 2$

5 $f_2(x) = 4(x + 2)^2 + 6$

6 $f_3(x) = (5x - 8)(2 - 6x)$

N₉ **Signe d'un trinôme: forme factorisée**

Propriétés

On considère le trinôme $ax^2 + bx + c$ associé à la fonction $f(x) = ax^2 + bx + c$ dont la forme factorisée existe : $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ avec $x_1 \leq x_2$.

- Pour $a > 0$

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
a	+			+
$(x - x_1)$	-	0	+	+
$(x - x_2)$	-	-	0	+
$f(x)$	+	0	-	+

- Pour $a < 0$

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
a	-			-
$(x - x_1)$	-	0	+	+
$(x - x_2)$	-	-	0	+
$f(x)$	-	0	+	-

Construire le tableau de variations des fonctions du second degré suivantes :

- | | | |
|------------------------------|-----------------------------|-------------------------------|
| 1 $f_1(x) = -2(x - 3)^2 + 2$ | 2 $f_2(x) = 4(x + 2)^2 + 6$ | 3 $f_3(x) = (5x - 8)(2 - 6x)$ |
| 4 $f_1(x) = -2(x - 3)^2 + 2$ | 5 $f_2(x) = 4(x + 2)^2 + 6$ | 6 $f_3(x) = (5x - 8)(2 - 6x)$ |

n°1 Inéquation $f(x) \geq g(x)$

Soient 2 fonctions f et g définies par $f(x) = x^2 - 6x + 2$ et $g(x) = -2x^2 - 3x + 8$ de courbes représentatives \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g .

- | | |
|--|--|
| 1 Etudier le signe de $f(x) - g(x)$ | 2 Résoudre $f(x) \geq g(x)$ |
| 3 Etudier la position de \mathcal{C}_f par rapport à \mathcal{C}_g . | 4 Dans un même repère, tracer \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g . |

n°2 Histoire de pont

Un pont est soutenu par un arc parabolique d'une portée de **200 m** et d'une hauteur de **80 m**. Le pont et l'arc se coupent à **40 m** de la rive. Quelle est la hauteur du pont ?

n°3 Paramétrage

On considère l'équation $(E) : x^2 + 2x + m = 0$. L'objectif de l'exercice est de déterminer pour quelles valeurs de m l'équation (E) admet au moins une solution.

- Résoudre, dans \mathbb{R} , les équations : $x^2 + 2x = 0$ et $x^2 + 2x + 1 = 0$
- Vérifier que pour tout réel x : $x^2 + 2x + m = (x + 1)^2 - 1 + m$
- Justifier alors que résoudre l'équation (E) revient à résoudre l'équation $(x + 1)^2 = 1 - m$.
- Conclure.

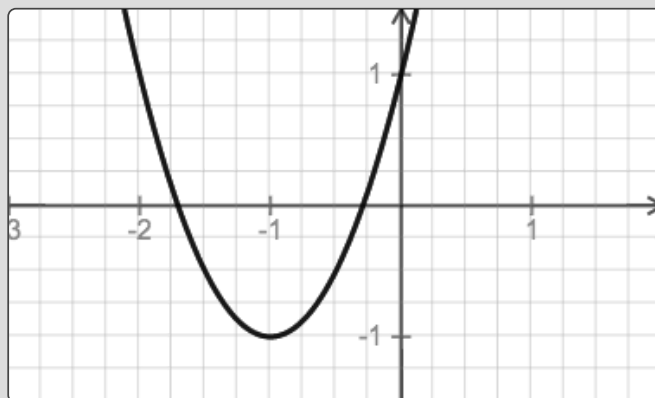
n°4 **Algorithme : forme canonique**

Soit une fonction du second degré $f(x) = ax^2 + bx + c$ de forme canonique $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$. Ecrire un algorithme qui détermine les réels α et β de la forme canonique d'une fonction du second degré.

n°5 **A partir d'une parabole**

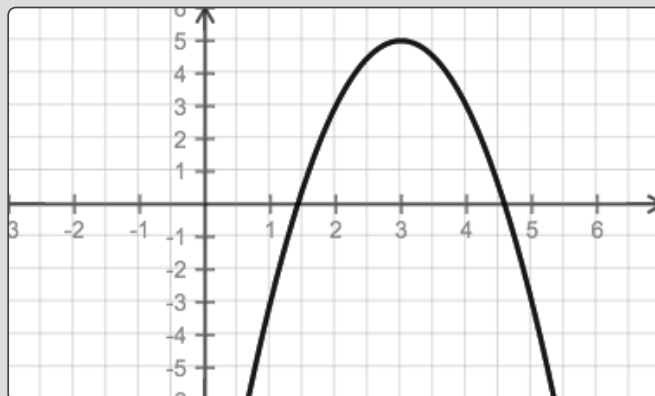
Le graphique ci-contre donne la courbe représentative d'un trinôme défini sur \mathbb{R} par $f(x) = ax^2 + bx + c$:

- 1 Donner par lecture graphique $f(0)$; $f(-1)$; $f(-2)$.
- 2 En déduire a , b et c puis l'expression de f .

n°6 **A partir de la forme canonique**

Ci-contre est donnée la représentation graphique \mathcal{C}_f d'une fonction trinôme f définie sur \mathbb{R} par sa forme canonique $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$.

- 1 Lire graphiquement les coordonnées du sommet de la parabole représentant la fonction f .
- 2 Déterminer l'expression de f .

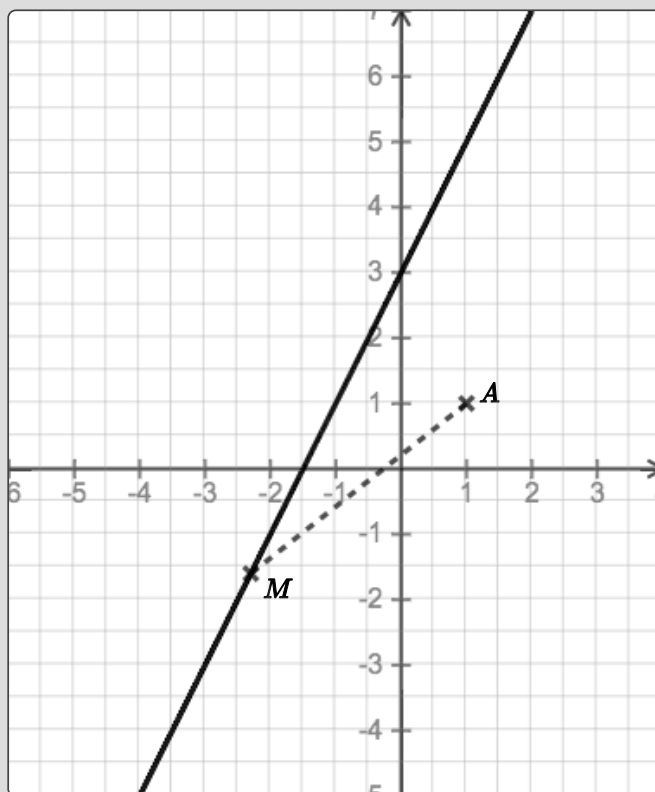


n°7

On considère la droite (d) d'équation $y = 2x + 3$ et A le point de coordonnées $(1; 1)$. M est un point quelconque de la droite (d) et on note x l'abscisse de M . On considère le point B de coordonnées $(0; 3)$.

On définit la fonction f par : $f(x) = AM^2$.

- 1 Justifier que l'ordonnée de M est $y_M = 2x + 3$. Vérifier que $f(x) = 5x^2 + 6x + 5$.
- 2 Vérifier que l'expression $5(x + 0,6)^2 + 3,2$ est la forme canonique du trinôme f .
- 3 Étudier les variations de la fonction f . Pour quelle valeur x_0 la fonction atteint-elle son extremum ?
- 4 M_0 est le point de la droite (d) tel que la distance AM^2 soit minimale. Justifier que les coordonnées de M_0 sont $(-0,6; 1,8)$.
- 5 Vérifier que B est un point de la droite (d) .
- 6 Déterminer la nature du triangle ABM_0 . Que peut-on dire des droites (AM_0) et (d) ?



n°8 Vases

Un artisan fabrique entre 0 et 60 vases par jour et estime que le coût de production de x vases est modélisé par la fonction C donnée par $C(x) = x^2 - 10x + 500$. On note $R(x)$ la recette, en euros, correspondant à la vente de x vases fabriqués.

Un vase est vendu 50 €.

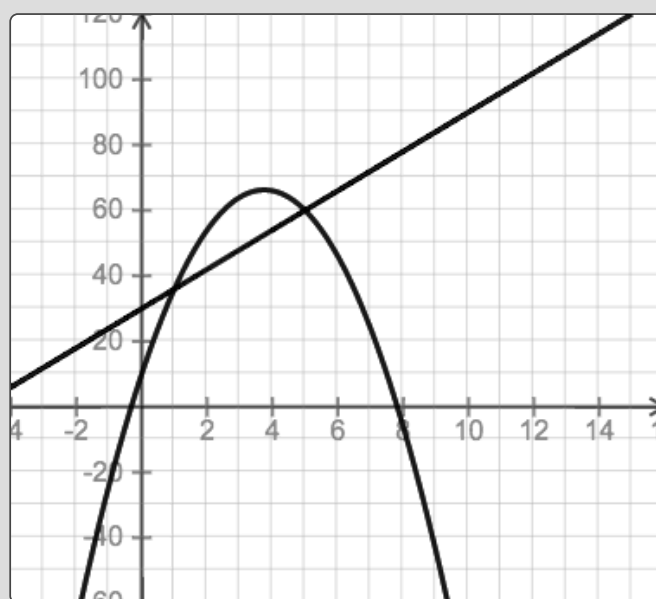
- 1 Exprimer $R(x)$ en fonction de x .
- 2 Calculer le coût, la recette et le bénéfice réalisés lorsque l'artisan vend 50 vases.
- 3 Vérifier que le bénéfice, en euros, réalisé par l'artisan est donné par la fonction B dont l'expression est : $B(x) = -x^2 + 60x - 500$.
- 4 Développe l'expression : $-(x - 30)^2 + 400$. En déduire le nombre de vases à vendre pour réaliser un bénéfice maximum.

n°9 Position relative

Voici la droite (d) d'équation $y = 6x + 30$ et la parabole \mathcal{P} représentant la fonction f :

$$f(x) = -4x^2 + 30x + 10.$$

- 1 Démontrer, qu'étudier les positions relatives de la droite (d) et de la parabole \mathcal{P} revient à résoudre l'inéquation $-4x^2 + 24x - 20 \geq 0$.
- 2 Vérifier que l'expression $5(x + 0,6)^2 + 3,2$ est la forme canonique du trinôme f .
- 3 Vérifier que, pour tout réel x : $-4x^2 + 24x - 20 = -4(x - 3)^2 + 16$.
- 4 Résoudre alors l'inéquation $-4x^2 + 24x - 20 \geq 0$.
- 5 Conclure.



n°10 Une parabole et 3 points

La parabole \mathcal{P} coupe l'axe des ordonnées en $A(0;3)$ et passe par $B(1;-1)$ et $C(3;1)$. Déterminer son équation sous la forme $y = ax^2 + bx + c$ puis sous la forme canonique. Tracer cette parabole.

n°11 Dans un théâtre

Le directeur d'une salle de théâtre a remarqué qu'à 40 € la place, il peut compter jusqu'à 500 spectateurs et que chaque baisse de 2,50 € lui amène 100 personnes de plus.

Soit x le nombre de baisses du prix de la place de 2,50 €. On modélise cette situation par la fonction g .

- 1 Déterminer l'expression de la fonction g .
- 2 Dresser le tableau de variation de g puis tracer sa courbe représentative dans un repère.
- 3 Combien doit-il faire payer la place pour avoir une recette maximale ?

n°12 Une belle volée

Un tennisman frappe droit devant lui une volée à 1 m du filet alors que la balle est à 0,9 m de hauteur en A . La balle franchit le filet en B à une hauteur de 1,1 m et atteint en C une hauteur maximale de 1,3 m. La longueur d'un terrain de tennis est 23,77 m. La balle sortira-t-elle du cours ?