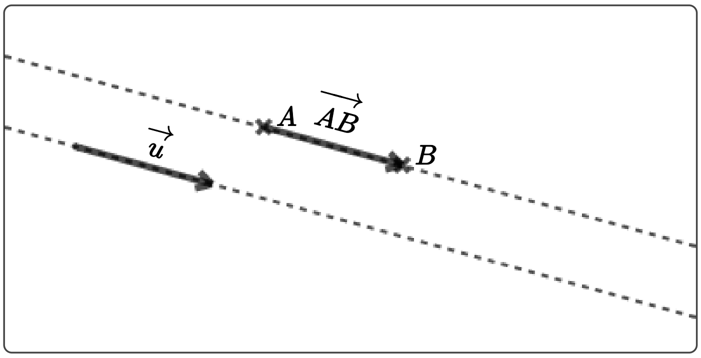
N_1 Vecteur

D *Définition : vecteur*

Un **vecteur** $\overrightarrow{u}$ est associé à une translation.
Le point B est le symétrique du point A par la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ quand $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$ c'est à dire :

- les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{u}$ ont même longueur. On parle de **norme** pour un vecteur et on note $AB = ||\overrightarrow{AB}|| = ||\overrightarrow{u}||$
- les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{u}$ ont la même direction c'est à dire qu'ils sont portés par deux droites parallèles.
- les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{u}$ ont le même sens.



D *Définition : vecteur nul*

Le vecteur associé à la translation qui transforme un point en lui-même est le **vecteur nul** que l'on note $\overrightarrow{0}$.
$\overrightarrow{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{MM}$

D *Définition : opposé*

Le vecteur $\overrightarrow{BA}$ associé à la translation qui transforme B en A est le **vecteur opposé** à $\overrightarrow{AB}$.
$\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$ ou $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$

P *Propriété : parallélogramme*

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si $ABCD$ est un parallélogramme.

P *Propriété : milieu*

$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ si et seulement si I est le milieu du segment $[AB]$.

1 Soit 2 parallélogrammes $ABCD$ et $DCEF$.

a) Faire une figure.

b) Démonter que $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{EF}$

2 Soient 6 points G , H, I, J, K , L tel que $\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{JI}$ et $\overrightarrow{IJ} = -\overrightarrow{KL}$.

a) Faire une figure.

b) Donner tous les parallélogrammes présents. Justifier.

3 Soit O milieu de $[AB]$ et le point D est le symétrique du point C par rapport à O.

a) Faire une figure.

b) Démontrer que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DB}$ ou que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB}$

4 Soit le point A tel que $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AC}$. Faire une figure puis indiquer la position du point A. Justifier.

5 Soit le point M tel que $\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \overrightarrow{0}$. Faire une figure puis indiquer la position du point M. Justifier.

N_2 Addition de deux vecteurs

Propriétés

Addition

Soient $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ 2 vecteurs :

- $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AB}$
- $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{0}=\overrightarrow{AB}$

Relation de Chasles

Soient A, B et C trois points alors : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

Propriété du parallélogramme

Soient A, B, C et D quatre points.
$ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

Démontrer la propriété du parallélogramme.

N_3 Coordonnées d'un vecteur

Définition

Dans un repère d'origine O, le point M a pour coordonnées $(a;b)$ alors le vecteur $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{OM}$ a les mêmes coordonnées que le point M et on note : $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$

Propriété : unicité

Deux vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}a_1\\b_1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}a_2\\b_2\end{pmatrix}$ sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes coordonnées c'est à dire $a_1=a_2$ et $b_1=b_2$.

Propriété

Dans un repère, $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ alors : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}$

1 Dans un repère orthonormé, on a $A(1;2)$, $B(5,6)$, $C(8;9)$ et $D(10;67)$:

a) Placer ces 4 points.

b) Démontrer que $ABCD$ est un parallélogramme.

c) Donner les coordonnées de $\overrightarrow{AD}$ puis $\overrightarrow{BC}$.

2 Dans un repère orthonormé, on a $A(1;2)$, $B(5,6)$, $C(8;9)$:

a) Placer ces 3 points.

b) Placer un point D pour que $ABCD$ est un parallélogramme.

c) Donner les coordonnées de $\overrightarrow{CD}$.

d) Donner les coordonnées de $\overrightarrow{AD}$ puis de $\overrightarrow{BC}$.

N_4 Norme d'un vecteur

Définition

Si $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ dans un repère orthonormé alors $||\overrightarrow{u}||=\sqrt{x^2+y^2}$

Calculer la norme des vecteurs :

1 $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}$

2 $\overrightarrow{AB}$ avec $A(-1;8)$ et $B(6;12)$.

3 $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\1\end{pmatrix}$

N_5 Propriétés

P *Addition de deux vecteurs*

Soient deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}a_1\\b_1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}a_2\\b_2\end{pmatrix}$ et $\vec{w}=\vec{u}+\vec{v}$ alors $\vec{w}\begin{pmatrix}a_1+a_2\\b_1+b_2\end{pmatrix}$

P *Multiplication par un réel*

Soit un vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}a_1\\b_1\end{pmatrix}$ et λ un réel et $\vec{w}=\lambda\vec{u}$ alors $\vec{w}\begin{pmatrix}\lambda\times a_1\\\lambda\times b_1\end{pmatrix}$

P *Propriétés*

Soit deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ et λ un réel tels que $\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{CD}$ alors :

- Si $\lambda>0$ alors $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont le même sens et $AB=\lambda CD$
- Si $\lambda<0$ alors $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont de sens contraire et $AB=-\lambda CD$

1 Soient $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}5\\-3\end{pmatrix}$. Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{BC}$.

2 Soient $E(-1;2)$; $F(2;-3)$ et $G(-3;4)$. Déterminer les coordonnées de $2\overrightarrow{EF}-3\overrightarrow{FG}$.

N_6 Colinéarité de deux vecteurs

D *Définition*

Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** quand il existe un réel k tel que $\vec{u}=k\vec{v}$

P *Propriété*

Soient deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si leurs coordonnées sont **proportionnelles** c'est à dire $xy'=x'y$ ou $xy'-x'y=0$. C'est les produits en croix des coordonnés de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Déterminer si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires. Si oui, déterminer le réel k tel que $\vec{u}=k\vec{v}$ (a et b sont deux réels) :

1 $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-11\\5\end{pmatrix}$

2 $\vec{u}\begin{pmatrix}\frac{5}{2}\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\frac{15}{4}\\\frac{9}{2}\end{pmatrix}$

3 $\vec{u}\begin{pmatrix}-\sqrt{2}\\-3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\-3\sqrt{2}\end{pmatrix}$

N_7 Droites parallèles

P *Propriété*

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires si et seulement si les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

Tracer les droites (AB) et (CD) puis déterminer si elles sont parallèles :

1 $A(3;-2)$, $B(-1;-1)$, $C(-3;2)$ et $D(1;3)$

2 $A(-9;-2)$, $B(1;-3)$, $C(3;-2)$ et $D(1;-3)$

3 $A(-1;2)$, $B(-1;3)$, $C(3;2)$ et $D(4;2)$

4 $A(-1;2)$, $B(-1;3)$, $C(3;2)$ et $D(4;2)$

N_8 Points alignés

P *Propriété*

Les points A , B et C sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Déterminer si les points sont alignés:

1. $F\left(\dfrac{2}{3};1\right)$, $G\left(-2;\dfrac{1}{3}\right)$,et $H(5;2)$
2. $B(0;0)$, $C(\sqrt{2};\sqrt{6})$ et $D(4;4\sqrt{3})$
3. $E(1;2)$, $F(-3;8)$ et $G(3;-1)$
4. $A(-9;4)$, $B(1;-1)$ et $C(4;-2)$
5. $A(-4;4)$, $T(-4;-6)$ et $P(-3;2)$
6. $C(\pi;\pi)$, $D(1;2-\pi)$ et $H(\pi-4;\pi-2)$

N_9 Vecteurs directeurs

D *Définition*

Un vecteur $\overrightarrow{u}$ est un vecteur **directeur** de la droite (AB) quand les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

P *Propriété*

Deux droites sont parallèles si et seulement si un vecteur directeur de l'une est colinéaire à un vecteur directeur de l'autre.

1. Soient $A(3;2)$ et $B(6;3)$. Tracer (AB).
2. Donner 3 vecteurs directeurs de la droite (AB).
3. Placer $C(1,0)$
4. Placer un point D pour que (AB) et (CD) soient parallèles.
5. Donner 3 vecteurs directeurs de la droite (CD).

N_{10} équation de droite

P *Propriétés*

• Soit a et b deux réels. Le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\a\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite d'équation $y=ax+b$ avec a qui est le **coefficient directeur** de cette droite.

• Soit k un réel. Le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite verticale d'équation $x=k$

1. Déterminer l'équation d'une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$ et passant par $A(3;5)$.
2. Déterminer l'équation d'une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ et passant par $B(2;3)$.
3. Déterminer l'équation d'une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et passant par $B(-1;-1)$.
4. Déterminer l'équation d'une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}0\\-5\end{pmatrix}$ et passant par $B(1;1)$.
5. Déterminer l'équation d'une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}2\\8\end{pmatrix}$ et passant par $B(3;0)$.
6. Déterminer l'équation d'une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-3\\9\end{pmatrix}$ et passant par $B(6;-3)$.
7. Déterminer l'équation d'une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-3\\-2\end{pmatrix}$ et passant par $B(0;-2)$.

N_{11} équation réduite de droite

P *Propriétés*

• Soit $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ deux points tels que $x_A \neq x_B$. Le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\ \dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (AB) d'équation réduite :

$y=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}x+\dfrac{x_By_A-y_Bx_A}{x_B-x_A}$ avec $\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$ qui est **le coefficient directeur** de la droite (AB).

• Soit $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ deux points tels que $x_A = x_B$. Le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}0\\x_A\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite verticale d'équation $x=x_A$

P *Corrolaire*

Deux droites non-verticales sont parallèles si et seulement si elles ont le même coefficient directeur.

1. Déterminer l'équation d'une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$ et passant par $A(3;5)$.
2. Déterminer l'équation d'une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}2\\8\end{pmatrix}$ et passant par $B(1;-2)$.
3. On considère les points $A(2;3)$; $B(4;7)$ et $C(4;7)$. Tracer (AB) puis déterminer son équation réduite. Déterminer une équation réduite de la droite parallèle à (AB) et passant par C, la tracer.
4. Dans un repère orthonormé, on a $E(-2;3)$ et $F(-2;-1)$. Tracer (EF) puis déterminer son équation réduite.

N_{12} équation cartésienne de droite

D *Définition*

Une équation d'une droite (d) de la forme $ax+by+c=0$ est appelée une **équation cartésienne** de (d).

P *Propriétés*

• Soit A un point et $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul et (d) la droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ et passant par A. Un point M appartient à (d) si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires.

• La droite d'équation $ax+by+c=0$ a pour vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ et passe par le point de coordonnées $\left(1;\dfrac{a-c}{b}\right)$.

• Réciproquement une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ a pour équation $ax+by+c=0$

1. Déterminer l'équation cartésienne d'une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$ et passant par $A(2;5)$.
2. Déterminer l'équation cartésienne d'une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\\sqrt{5}\end{pmatrix}$ et passant par $C(0;2)$.
3. On considère les points $A(2;3)$; $B(4;7)$ et $C(4;7)$. Tracer (AB) puis déterminer son équation cartésienne. Déterminer une équation cartésienne de la droite parallèle à (AB) et passant par C, la tracer.
4. Dans un repère orthonormé, on a $E(-2;3)$ et $F(-2;-1)$. Tracer (EF) puis déterminer son équation cartésienne.

N_{13} Intersection de deux droites

Par le calcul

On considère deux droites (d_1) et (d_2) d'équation cartésienne $a_1x+b_1y+c_1=0$ (ou réduite $y=a_1x+b_1$) et $a_2x+b_2y+c_2=0$ (ou réduite $y=a_2x+b_2$). Le point d'intersection (s'il existe) a pour coordonnées la solution du système :

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1 & = & 0 \\ a_2x+b_2y+c_2 & = & 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} y & = & a_1x+b_1 \\ y & = & a_2x+b_2 \end{cases}$$

Graphiquement

On considère deux droites (d_1) et (d_2). Il suffit de tracer ces deux droites et de lire les coordonnées du point d'intersections. Attention, les coordonnées sont toujours des valeurs approchées.

1. On considère les points $A(2;3)$; $B(4;7)$; $C(4;7)$ et $D(4;7)$. Tracer (AB) et (CD) puis déterminer les coordonnées du point d'intersection de (AB) et (CD) (en utilisant les équations cartésiennes). Vérifier graphiquement.
2. On considère les points $A(2;3)$; $B(4;7)$; $C(4;7)$ et $D(4;7)$. Tracer (AB) et (CD) puis déterminer les coordonnées du point d'intersection de (AB) et (CD) (en utilisant les équations réduites). Vérifier graphiquement.

$n°1$ Triangle EFG

1. On considère un triangle EFG et H tel que : $\overrightarrow{EH}=\frac{2}{3}\overrightarrow{EG}+\frac{1}{3}\overrightarrow{EF}$. Faire une figure.
2. En écrivant $\overrightarrow{FH}=\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{EH}$, démontrer que $\overrightarrow{FH}$ et $\overrightarrow{FG}$ sont colinéaires.
3. Que peut-on en déduire concernant le point H ?

$n°2$ Une génération de droites

On considère le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$ où m est un nombre réel et le point $A(-2;0)$. Soit (d_m) la droite passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$.

1. Déterminer une équation cartésienne de (d_m).
2. Peut-on trouver m tel que le point $B(3;2)$ appartienne à (d_m) ?
3. Peut-on trouver m tel que (d_m) soit parallèle à la droite (D) d'équation $-5x+2y-7=0$?
4. Peut-on trouver m tel que (d_m) soit parallèle à la droite (D') d'équation $-4x+12=0$?
5. Quels sont les points du plan qui n'appartiennent à aucune droite (d_m) ?

$n°3$ Vecteurs directeurs de norme 1

Déterminer tous les vecteurs directeurs de norme 1 de la droite :

1. (d_1) d'équation $x-8=2$
2. (d_2) d'équation $2x+3y+5=0$
3. (d_3) d'équation $y=5x+3$
4. (d_3) d'équation $y=5x+3$
5. (d_3) d'équation $y=5x+3$
6. (d_3) d'équation $y=5x+3$
7. (d_3) d'équation $y=5x+3$
8. (d_3) d'équation $y=5x+3$

$n°4$ Droites parallèles

Dans chacun des cas suivants, déterminer une équation de la droite (d') parallèle à (d) passant par A.

1. $A(2;1)$ et (d) d'équation $-3x+y=0$
2. $A(-1;3)$ et (d) d'équation $-x-2y+1=0$
3. $A(1;1)$ et (d) d'équation $-\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{6}+4=0$
4. $A\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{3}\right)$ et (d) d'équation $-x+y-2=0$

$n°5$ Alignement

On considère un parallélogramme $ABCD$ et les points E et F définis par : • $\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{AD}$ • $\overrightarrow{AF}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

1. Faire une figure.
2. Que peut-on conjecturer sur les points B, F et E ?
3. Calculer $\overrightarrow{BE}$ en fonction de $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AC}$
4. Calculer $\overrightarrow{BF}$ en fonction de $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AC}$
5. En déduire que $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{BF}$ sont colinéaires.
6. Conclure.

$n°6$ Parallélisme et calcul vectoriel

On considère trois points non alignés A, B et C. Le point E est défini par $\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.

1. Faire une figure.
2. Établir une conjecture sur les droites (CE) et (AB).
3. Démontrer que $\overrightarrow{CE}=2\overrightarrow{AB}$.
4. Conclure.

$n°7$ Milieu et calcul vectoriel

On considère trois points non alignés A, B et C.

Les points P et Q sont définis par : $\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AQ}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

1. Faire une figure.
2. Que peut-on conjecturer sur le point Q ? Et sur B ?
3. Démontrer que $\overrightarrow{PC}=-2\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$. En déduire la position du point B.
4. Exprimer $\overrightarrow{BQ}$ en fonction de $\overrightarrow{BC}$. En déduire la position du point C.

$n°8$ Droites parallèles

On considère le point $A(-7;1)$ et la droite (D) d'équation réduite $y=-5x+1$. Déterminer x, abscisse du point B de coordonnées $(x;8)$ tel que les droites (AB) et (D) soient parallèles.

$n°9$ Points alignés

On considère les points A et B de coordonnées respectives $(1;-5)$ et $(-1;3)$. Déterminer y, ordonnée du point C de coordonnées $(2;y)$ tel que A, B et C soient alignés.