N_1 Addition et soustraction de nombres relatifs

E Exemple

- $-4-5=-9$
- $-6-2=-4$
- $-2+2=0$
- $-7-2=5$
- $2+3=5$
- $-7+3=4$

R Règles

- $+(-3)=-3$
- $+(+9)=+9$
- $-(+7)=-7$
- $-(-8)=+8$

Effectuer les opérations suivantes :

1. $(-2)+(+4)=$
2. $-10-14=$
3. $(+7)+(+9)=$
4. $16-17=$
5. $-15-16=$
6. $21-23=$
7. $(-6)-(+21)=$
8. $(-30)-(-42)=$
9. $(-6)-(+21)=$
10. $-6-9+7-(-2)=$
11. $4-8+7-6=$
12. $-5+9-6+3=$

N_2 Multiplication et division de nombres relatifs

P Propriétés : multiplication

① $(+5)\times(-3)=-15$ ② $(+2)\times(+9)=+18$ ③ $(-3)\times(+7)=-21$ ④ $(-5)\times(-8)=+40$

P Propriétés : division

① $(+10)\div(-2)=-5$ ② $(+2)\div(+2)=+1$ ③ $(-9)\div(+3)=-3$ ④ $(-2)\div(-3)=+6$

P Propriété

Si le nombre de signe "-" est pair le produit ou le quotient est positif. Si le nombre de signe "-" est impair le produit ou le quotient est négatif.

Effectuer les opérations suivantes :

1. $(-2)\times(+4)=$
2. $(-2)\times5\times(-2)=$
3. $(-1)\times(-1)\times(-1)=$
4. $(-2)\times(+4)=$
5. $(-2)\times(+4)=$
6. $(-2)\times(+4)=$
7. $(-2)\times(+4)=$
8. $(-2)\times(+4)=$
9. $(-2)\times(+4)=$
10. $(-2)\times(+4)=$
11. $(-2)\times(+4)=$
12. $(-2)\times(+4)=$

N_3 Avec des fractions

P Propriétés

① $\dfrac{8}{-2}=-\dfrac{8}{2}=-4$ ② $\dfrac{+6}{+5}=\dfrac{6}{5}$ ③ $-\dfrac{12}{-6}=\dfrac{12}{6}=2$ ④ $\dfrac{-13}{6}=-\dfrac{13}{6}$

Simplifier les expressions suivantes :

1. $\dfrac{2}{-3}=$
2. $\dfrac{2}{-3}=$
3. $\dfrac{2}{-3}=$
4. $\dfrac{2}{-3}=$
5. $\dfrac{2}{-3}=$
6. $\dfrac{2}{-3}=$

N_4 Priorités opératoires

P Propriétés

Dans un calcul, on commence en priorité par :

① Les parenthèses (des plus intérieures au plus extérieures)
② Les divisions et les multiplications (de gauche à droite)
③ Les additions et les soustractions (de gauche à droite)

Calculer les expressions suivantes :

1. $A=(-1)\times\Big[(2-7)+(-3+1)\Big]-5\times(-2)-8\div2=$
2. $B=9\div(-13+2\times5)-\Big(2-(5-7)\div(-2)+6\Big)-5=$
3. $C=10-2-(+3)(6-7)+(5-6)(-4)\div(-2)=$

N_5 Simplifier une fraction

E Exemple

$$\frac{24}{66}=\frac{\cancel{2}\times12}{\cancel{2}\times33}=\frac{12}{33}=\frac{\cancel{3}\times4}{\cancel{3}\times11}=\frac{4}{11}$$

Simplifier les fractions suivantes :

1. $\dfrac{22}{154}$
2. $\dfrac{48}{16}$
3. $\dfrac{75}{30}$
4. $\dfrac{120}{150}$
5. $\dfrac{654}{122}$
6. $\dfrac{66}{18}$
7. $\dfrac{21}{49}$
8. $\dfrac{104}{18}$

N_6 Additionner ou soustraire des fractions

E Exemples

$$\frac{7}{6}+\frac{5}{9}=\frac{7\times\mathbf{3}}{6\times\mathbf{3}}+\frac{5\times\mathbf{2}}{9\times\mathbf{2}}=\frac{21}{18}+\frac{10}{18}=\frac{31}{18}$$

$$\frac{7}{3}-2=\frac{7}{3}-\frac{2}{1}=\frac{7\times\mathbf{1}}{3\times\mathbf{1}}-\frac{2\times\mathbf{3}}{1\times\mathbf{3}}=\frac{7}{3}-\frac{6}{3}=\frac{1}{3}$$

Pour soustraire ou additionner des fractions, il faut les mettre au même dénominateur.

Calculer et simplifier les expressions suivantes :

1. $\dfrac{3}{21}+\dfrac{2}{14}$
2. $\dfrac{4}{18}+\dfrac{5}{27}$
3. $\dfrac{1}{5}-\dfrac{2}{3}$
4. $\dfrac{11}{3}+\dfrac{1}{7}-\dfrac{8}{21}$
5. $1-\dfrac{5}{4}$
6. $\dfrac{11}{8}+\dfrac{7}{3}-\dfrac{6}{5}$
7. $\dfrac{11}{3}+\dfrac{1}{7}-\dfrac{8}{21}$
8. $1-\dfrac{5}{4}$
9. $\dfrac{11}{8}+\dfrac{7}{3}-\dfrac{6}{5}$

N_7 Multiplier des fractions

Exemple

$$E=\frac{9}{7}\times\frac{14}{15}=\frac{\cancel{3}\times 3}{\cancel{7}}\times\frac{2\times\cancel{7}}{\cancel{3}\times 5}=\frac{6}{5}$$

Calculer les expressions suivantes :

1. $A=\frac{-2}{-21}\times\frac{-14}{3}$
2. $B=\frac{2}{6}\times\frac{-21}{7}$
3. $C=\frac{-3}{-10}\times\frac{11}{3}$
4. $D=\frac{8}{15}\times\frac{35}{24}$
5. $E=\left(\frac{-1}{2}\right)^2$
6. $F=\frac{16}{-63}\times\frac{-35}{8}$

N_8 Diviser des fractions

Exemple

$$E=\frac{10}{3}\div\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{9}}=\frac{10}{3}\times\frac{\mathbf{9}}{\mathbf{5}}=\frac{\cancel{3}\times 3}{\cancel{7}}\times\frac{2\times\cancel{7}}{\cancel{3}\times 5}=\frac{6}{5}$$

$$F=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{8}{7}}=\frac{1}{3}\div\frac{8}{7}=\frac{1}{3}\times\frac{7}{8}=\frac{1\times 7}{3\times 8}=\frac{7}{24}$$

Calculer les expressions suivantes :

1. $A=\frac{-4}{13}\div\frac{-76}{9}$
2. $B=\frac{1}{8}\div\frac{7}{11}$
3. $C=\frac{\frac{3}{5}}{\frac{12}{15}}$
4. $D=\frac{-13}{6}\div\frac{-1}{32}$
5. $E=9\div\frac{-1}{4}$
6. $F=\frac{\frac{-5}{12}}{2}$

N_9 Priorités opératoires et fractions

Calculer les expressions suivantes :

1. $A=\dfrac{\frac{1}{3}-3}{\frac{5}{7}-\frac{2}{5}}$
2. $B=\dfrac{\frac{4}{7}-2}{2-\frac{11}{14}}$
3. $C=\dfrac{2-\frac{1}{3}}{3+\frac{1}{4}}$
4. $D=\frac{2}{9}-\frac{3}{4}\div\frac{5}{2}$
5. $E=\frac{26}{7}-\frac{22}{7}\times\frac{10}{33}$
6. $F=\dfrac{(-1)-\frac{-1}{3}}{\frac{-2}{3}-(-1)}$

N_{10} Fraction d'un nombre

Exemple

Calculer les trois dixièmes de **34** revient à calculer :

$$\frac{3}{10}\times 34=\frac{3}{10}\times\frac{34}{1}=\frac{3}{\cancel{2}\times 5}\times\frac{\cancel{2}\times 17}{1}=\frac{51}{5}$$

1. Calculer les six septièmes de **49**.
2. Calculer les deux tiers de six demi.
3. Calculer les **25%** de quatre neuvièmes.
4. Calculer les $\frac{3}{4}$ de $\frac{12}{7}$.
5. Calculer les $\frac{5}{11}$ de **100**.
6. Calculer les **11%** de $\frac{27}{121}$.

N_{11} Proportionnalité et pourcentages

1. Aux USA, les températures sont exprimées en degrés Fahrenheit ($°F$) : $77°F$ équivaut à $25°C$ et $86°F$ équivaut à $30°C$. Les mesures des températures en $°F$ et en $°C$ sont-elles proportionnelles ?
2. Dans un établissement scolaire de **560** élèves, il y a **224** garçons. Quel est le pourcentage de garçons dans cet établissement ?
3. Jean obtient une réduction de **45%** sur une vélo valant **158 €**. Quel est le montant de la réduction obtenue par Jean ?
4. Un robinet d'eau fuit de telle sorte qu'il s'écoule **5** litres d'eau en **35** minutes et **7** litres d'eau en **49** minutes. S'agit-il d'une situation de proportionnalité ?
5. Aux USA, les distances routières sont exprimées en miles (mi) : $250\ mi$ équivaut à $402,336\ km$ et $1250\ mi$ équivaut à $2011,68\ km$. Les distances en mi et en km sont-elles proportionnelles ?
6. Patrick a obtenu une réduction de **65, 25 €** sur une console de jeu qui valait **225 €**. Quel pourcentage de réduction a-t-il obtenu ? Justifier.
7. J'ai utilisé $50\ kg$ de semences pour un terrain de $1600\ m^2$. Quelle surface aurais-je pu ensemencer avec 90 kg de semences ?
8. Saïd a obtenu une baisse de **45 €** sur un appareil photo, soit une baisse de **15%** du prix initial. Quel était le prix initial de l'appareil photo ?
9. En roulant à une vitesse moyenne de $72\ km/h$, quelle est la distance parcourue en $25\ min$?
10. Un magasin réalise une **augmentation** de **25%** sur des pantalons coûtant initialement **110 €**. Quel est le nouveau prix des pantalons ?
11. Au théâtre pour **4** places achetées, on paye **48 €**. Pour **3** places, on paye **36 €** et pour **7** places on paye **80 €**. Est-ce proportionnel ?
12. Maurice a construit une maquette de la tour Eiffel au **1/600**. Sachant que la tour Eiffel a une hauteur de $324\ m$, quelle est la hauteur de la maquette en cm ?
13. Lors des soldes, un magasin propose une **réduction** de **30%** sur des blousons coûtant initialement **150 €**. Quel est le nouveau prix des blousons ?

N_{12} Racines carrées

D Définition et propriétés

On considère deux nombres entiers naturels a et b.

- $\sqrt{a^2} = a$
- $\sqrt{a}^2 = a$
- $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$
- $\sqrt{a^2 \times b} = a\sqrt{b}$
- $\sqrt{0} = 0$
- $\sqrt{1} = 1$
- $\sqrt{4} = 2$
- $\sqrt{9} = 3$
- $\sqrt{16} = 4$
- $\sqrt{25} = 5$
- $\sqrt{36} = 6$
- $\sqrt{49} = 7$
- $\sqrt{64} = 8$
- $\sqrt{81} = 9$
- $\sqrt{121} = 11$
- $\sqrt{144} = 12$

Simplifier les racines carrées suivantes :

1 $\sqrt{50} =$ 2 $\sqrt{20} =$ 3 $\sqrt{80} =$

4 $\sqrt{50} =$ 5 $\sqrt{20} =$ 6 $\sqrt{80} =$

7 $\sqrt{50} =$ 8 $\sqrt{20} =$ 9 $\sqrt{80} =$

N_{13} Puissances

D Définition et propriétés

Soient x un nombre réel et n un nombre entier relatif.

- $x^n = \underbrace{x \times x \times \cdots x}_{n \text{ facteurs}}$ pour $n > 0$
- $x^0 = 1$
- $x^{-n} = \dfrac{1}{\underbrace{x \times x \times \cdots x}_{n \text{ facteurs}}}$ pour $n > 0$

Soit a et b deux nombres entiers :

- $x^a \times x^b = x^{a+b}$
- $x^a \div x^b = x^{a-b}$
- $\dfrac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$
- $(x^a)^b = x^{a \times b}$

Simplifier les expressions suivantes :

1 $2^3 \times 2^{-4} \div 2^3 =$ 2 $\sqrt{20} =$

3 $\sqrt{80} =$ 4 $\sqrt{80} =$

5 $\sqrt{80} =$ 6 $\sqrt{80} =$

N_{14} Arrondir

Arrondir à l'unité les nombres suivants :

1 $\frac{-1}{3} =$ 2 $\frac{-1}{3} =$ 3 $\frac{-1}{3} =$ 4 $\frac{-1}{3} =$

Arrondir au dixième les nombres suivants :

5 $\frac{-1}{3} =$ 6 $\frac{-1}{3} =$ 7 $\frac{-1}{3} =$ 8 $\frac{-1}{3} =$

Arrondir au centième les nombres suivants :

9 $\frac{-1}{3} =$ 10 $\frac{-1}{3} =$ 11 $\frac{-1}{3} =$ 12 $\frac{-1}{3} =$

Arrondir au millième les nombres suivants :

13 $\frac{-1}{3} =$ 14 $\frac{-1}{3} =$ 15 $\frac{-1}{3} =$ 16 $\frac{-1}{3} =$

N_{15} Ensemble de nombres

D Définitions

- L'ensemble des **nombres entiers naturels** est $\{0; 1; 2; 3; \cdots; 1023; \cdots\}$. Il se note $\mathbb{N}$.
- L'ensemble des **nombres entiers relatifs** est $\{\cdots; -76; \cdots; -2; -1; 0; 1; 2; \cdots; 13; \cdots\}$. Il se note $\mathbb{Z}$.
- L'ensemble des **nombres entiers relatifs positifs** se note $\mathbb{Z}^+ = \mathbb{N}$.
- L'ensemble des **nombres entiers relatifs négatifs** est $\{\cdots; -15; \cdots; -2; -1; 0\}$. Il se note $\mathbb{Z}^-$.
- L'ensemble des **nombres décimaux** se note $\mathbb{D}$.
- L'ensemble des **nombres rationnels** se note $\mathbb{Q}$.
- L'ensemble des **nombres réels** se note $\mathbb{R}$.
- L'ensemble des **nombres réels positifs** se note $\mathbb{R}^+$.
- L'ensemble des **nombres réels négatifs** se note $\mathbb{R}^-$.

On a : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Donner le plus petit ensemble auquel les nombres suivants appartiennent :

1 -2 2 $\sqrt{16}$ 3 π 4 $\sqrt{5}^2$

5 $\frac{5}{3}$ 6 $\sqrt{2}$ 7 $\frac{-9}{10}$ 8 $-\frac{3\pi}{\pi}$

N_{16} Intervalle

D Définition

Un intervalle est un ensemble contigu de nombres c'est à dire qu'il n'y pas de "trou" dans un intervalle. Par exemple l'ensemble $\mathbb{N}$ n'est pas un intervalle car c'est un ensemble discret.

Un intervalle possède une borne inférieure et une borne suppérieur :

- L'ensemble des réels x tels que $a \leqslant x \leqslant b$ est représenté par l'intervalle $[a; b]$
- L'ensemble des réels x tels que $a < x \leqslant b$ est représenté par l'intervalle $]a; b]$
- L'ensemble des réels x tels que $a \leqslant x < b$ est représenté par l'intervalle $[a; b[$
- L'ensemble des réels x tels que $a < x < b$ est représenté par l'intervalle $]a; b[$
- L'ensemble des réels x tels que $x \geqslant b$ est représenté par l'intervalle $]-\infty; b]$
- L'ensemble des réels x tels que $x < b$ est représenté par l'intervalle $]-\infty; b[$
- L'ensemble des réels x tels que $a \leqslant x$ est représenté par l'intervalle $[a; +\infty[$
- L'ensemble des réels x tels que $a < x$ est représenté par l'intervalle $]a; +\infty[$

E Exemples

- L'ensemble des réels $\mathbb{R}$ est l'intervalle $]-\infty; +\infty[$
- L'ensemble des réels $\mathbb{R}^+$ est l'intervalle $[0; +\infty[$
- L'ensemble des réels $\mathbb{R}^-$ est l'intervalle $]-\infty; 0]$
- L'ensemble des réels $\mathbb{R}^{+*}$ est l'intervalle $]0; +\infty[$
- L'ensemble des réels $\mathbb{R}^{-*}$ est l'intervalle $]-\infty; 0[$

Des ensembles de nombres peuvent être représenté par des réunions d'intervalles disjoints (des "sommes" d'intervalles qui n'ont pas de nombre en commun) :

- L'ensemble $\mathbb{R}\backslash\{a\}$ correspond à $]-\infty; a[\cup]a; +\infty[$
- L'ensemble $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ correspond à $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$
- L'ensemble des réels $\mathbb{R}^+$ est l'intervalle $[0; +\infty[$
- L'ensemble des réels $\mathbb{R}^-$ est l'intervalle $]-\infty; 0]$

Donner sous forme d'intervalles l'ensemble des nombres réels x suivants :

1 $-2 \leqslant x \leqslant 4$ 2 $3 < x \leqslant 5$ 3 $x \geqslant 7$

4 $-8 \leqslant x \leqslant -6$ ou $0 < x < 3$ 5 $-2 < x \leqslant 2$ ou $x \in R^{+*}$ 6 $x \in R^{+*}\backslash\{3\}$

N_1 *Simplifier une expression littérale*

Règles

- $2\times x=2x$ • $x\times y=xy$ • $x\times x=x^2$
- $x=1\times x=1x$ • $(-3x)^2=(-3x)\times(-3x)=(-3)\times(-3)\times x\times x=9x^2$

Simplifier les expressions littérales suivantes :

1. $A=5x+4x^2-6x-7x^2-8$
2. $B=12x-6x^2-6-9+5x+x^2$
3. $C=-(5x)^2+6x-8+7x-6+3x^2$
4. $D=7x^2-9x+5^2x-(2x)^2$
5. $E=9-8x+3x^2+2x-5-4x^2$
6. $F=-6x-x^2+2^2x^2-6x^2-3$
7. $G=7x^2-7+3x-8(\frac{x}{2})^2$
8. $H=-9(\frac{x}{3})^2+x+4-5$

N_2 *Simple distributivité*

Règles

$$\mathbf{a}\times\left(b+c\right)=\mathbf{a}\times b+\mathbf{a}\times c \quad \text{et} \quad \mathbf{a}\times\left(b-c\right)=\mathbf{a}\times b-\mathbf{a}\times c$$

$$-\left(b+c-d\right)=-b-c+d \quad \text{et} \quad +\left(b+c-d\right)=b+c-d$$

Développer et réduire les expressions suivantes :

1. $x\times(12-2x)$
2. $2x(3x-5)$
3. $7x\times(5x-3)$
4. $(x-8)4x$
5. $-5x(2x-3)$
6. $-x(-x+2)$
7. $-(x-x^2+9)$
8. $2x-5-(8x+7x^2-10)$
9. $-(2-3x-x^2)+7x^2-2$
10. $-(3x-1)+3(-5x+2)$
11. $-3(4-4x)+(3-9x)$
12. $-(\frac{x}{3}-4)-6\times\frac{x}{5}$

N_3 *Double distributivité*

Règles

$$\left(a+b\right)\times\left(c+d\right)=a\times c+a\times d+b\times c+b\times d$$

Développer et réduire les expressions suivantes :

1. $(y-5)(6-y)$
2. $(-5x+2)(3-x)$
3. $(x-9)(-2x+6)$
4. $(-4x-5)(7-x)$
5. $(-\frac{1}{2}x-5)(\frac{1}{5}+x)$
6. $(3x-5)(8-2x)$
7. $(-\sqrt{2}x-5)(1-x)$
8. $(3-\frac{x}{2})(\frac{3}{3}-x)$
9. $(5x-\sqrt{3})(3x-\sqrt{6})$

N_4 *Développer avec l'identité remarquable $n°1$*

Règles

$$\left(a+b\right)^2=a^2+2\times a\times b+b^2=a^2+2ab+b^2$$

Développer et réduire les expressions suivantes :

1. $(y+5)^2$
2. $(-5x+2)^2$
3. $(3+2x)^2$
4. $(4x+5)^2$
5. $(\frac{1}{2}x+2)^2$
6. $(-3x+4)^2$
7. $(-8x+2)^2$
8. $(2+\frac{x}{6})^2$
9. $(8+2x)^2$
10. $(\sqrt{2}x+\sqrt{5})^2$
11. $(\frac{\sqrt{2}}{2}x+3)^2$
12. $(-\frac{x}{3}+\frac{1}{6})^2$

N_5 *Développer avec l'identité remarquable $n°2$*

Règles

$$\left(a-b\right)^2=a^2-2\times a\times b+b^2=a^2-2ab+b^2$$

Développer et réduire les expressions suivantes :

1. $(2y-5)^2$
2. $(-3x-2)^2$
3. $(2x-4)^2$
4. $(4x-1)^2$
5. $(\frac{1}{3}x-3)^2$
6. $(-2x-1)^2$
7. $(-3x-1)^2$
8. $(-2-7x)^2$
9. $(2-\frac{x}{3})^2$
10. $(8-2x)^2$
11. $(\sqrt{3}x-\sqrt{2})^2$
12. $(\frac{\sqrt{3}}{2}x-1)^2$
13. $(-\frac{x}{2}-\frac{1}{6})^2$
14. $(-\frac{x}{3}-\sqrt{2})^2$
15. $(\sqrt{3}x-\frac{1}{2})^2$

N_6 *Développer avec l'identité remarquable $n°3$*

Règles

$$\left(a+b\right)\left(a-b\right)=a^2-b^2$$

Développer et réduire les expressions suivantes :

1. $(2y+6)(2y-6)$
2. $(-3x+2)(-3x-2)$
3. $(3x-4)(3x+4)$
4. $(-2x-1)(-1+2x)$
5. $(5-7x)(7x+5)$
6. $(5x+8)(5x-8)$
7. $(\frac{1}{2}x-1)(\frac{1}{2}x+1)$
8. $(\sqrt{2}+x)(\sqrt{2}-x)$
9. $(\frac{1}{3}x+\sqrt{3})(\frac{1}{3}x-\sqrt{3})$

N_7 *Valeurs d'une expression littérale*

1. Soit $B=5x-7x^2+2$. Pour $x=-1$ on a $B=$ ______
2. Soit $C=2(x-1)(x-6)$. Pour $x=6$ on a $C=$ ______
3. Soit $D=2(x-1)^2-2$. Pour $x=-2$ on a $B=$ ______

N_8 *Factorisation simple*

Règles

$\mathbf{a}\times b+\mathbf{a}\times c=\mathbf{a}\times(b+c)$ $\mathbf{a}$ est le facteur commun.

Factoriser les expressions suivantes :

1. $4x^2-3x$
2. $12x-8x^2$
3. $-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x$
4. $7x^2-21x+49$
5. $144x^2-12x$
6. x^2+x

N_9 *Factoriser avec une identité remarquable*

Factoriser les expressions suivantes en utilisant une identité remarquable :

1. $9x^2+25+30x$
2. $-12x+9+4x^2$
3. $4x^2+4+8x$
4. $64-16x^2$
5. $25x^2+4-20x$
6. $12x+36+x^2$
7. $9x^2-25$
8. $16x^2+40x+25$
9. $3x^2-5$
10. $9x^2+1-6x$
11. $3+2x^2+\sqrt{24}x$
12. $8-7x^2$

N_{10} Calcul littéral et fractions

Simplifier au maximum les expressions suivantes :

1. $\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x+2}$
2. $\dfrac{1}{\sqrt{a}} - \dfrac{1}{\sqrt{b}}$
3. $\dfrac{2x}{x^2-1} - \dfrac{2}{x+1}$

N_{11} Equation du premier degré

R *Règles*

$$\begin{aligned}
3x-9 &= -2x+5\\
3x-9+2x &= -2x+5+2x\\
5x-9 &= 5\\
5x-9+9 &= 5+9\\
5x &= 14\\
\frac{5x}{5} &= \frac{14}{5}\\
x &= \frac{14}{5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3x-9 &= -2x+5\\
3x-9+2x &= -2x+5+2x\\
5x-9 &= 5\\
5x-9+9 &= 5+9\\
5x &= 14\\
\frac{5x}{5} &= \frac{14}{5}\\
x &= \frac{14}{5}
\end{aligned}$$

Résoudre les équations suivantes :

1. $6x+7=7x-2$
2. $4t-2+7t=-2t-3-t$
3. $17a=-19a+4$
4. $(2-4)x=7x+8$
5. $-3x+3=2+6x$
6. $-x+6+-x=-2x+2x-5x+6$
7. $7-4x=-9+x$
8. $-5\,\frac{y}{3}+1=-3\,\frac{y}{2}+\frac{1}{5}$
9. $7\alpha-4=-9\alpha-2$
10. $-\frac{\beta}{7}-\frac{1}{2}=-\frac{\beta}{5}-\frac{1}{3}$

N_{12} Inéquation du premier degré

R *Règles*

$$\begin{aligned}
3x-9 &\leqslant 10x+5\\
3x-9-10x &\leqslant 10x+5-10x\\
-7x-9 &\leqslant 5\\
-7x-9+9 &\leqslant 5+9\\
-7x &\leqslant 14\\
\frac{-7x}{-7} &\geqslant \frac{14}{-7}\\
x &\geqslant -\frac{14}{7}\\
x &\geqslant -2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3x-9 &\leqslant 10x+5\\
3x-9-10x &\leqslant 10x+5-10x\\
-7x-9 &\leqslant 5\\
-7x-9+9 &\leqslant 5+9\\
-7x &\leqslant 14\\
\frac{-7x}{-7} &\geqslant \frac{14}{-7}\\
x &\geqslant -\frac{14}{7}\\
x &\geqslant -2
\end{aligned}$$

Résoudre les inéquations suivantes :

1. $12t-7\leqslant 8-4t$
2. $12x-56<21x+8$
3. $17a=-19a+4$
4. $5x+2>2x-4$
5. $12x+1\geqslant 87x-7$
6. $3-9t\leqslant 9t-6$
7. $5a-8>-a+7$
8. $-\frac{y}{3}+1\leqslant-\frac{y}{2}+\frac{1}{3}$
9. $3x-7\leqslant-7x+2$
10. $-\frac{x}{1}+\frac{1}{3}\geqslant-\frac{x}{5}-\frac{1}{3}$

N_{13} Equation produit

M *Méthode*

L'objectif est de résoudre l'équation : $(12x-7)(7x+10)=0$
Ce qui donne soit $12x-7=0$ ou bien soit $7x+10=0$. Il faut donc maintenant résoudre 2 équations.

Résoudre les équations suivantes :

1. $(7x-3)^2-(7x-3)(3x+8)=0$
2. $16x^2-24x+9=0$
3. $(7x-3)^2-16=0$
4. $25x^2=16$
5. $(6x-2)^2=49$
6. $64=4x^2$

N_{14} Système de deux équations

M *Méthode*

L'objectif est de résoudre le système de deux équations : $\begin{cases} 9x+3y = 15\\ 2x+y = 1\end{cases}$

- On multiplie la 2^e équation par (-3) : $\begin{cases} 9x+3y = 15\\ -6x-3y = -3\end{cases}$
- On ajoute les deux équations pour en obtenir qu'une seule} : $9x-6x+3y-3y=15-3$
- on résoud l'équation obtenue : $3x=12$ ce qui donne $x=4$
- il suffit de remplacer la valeur de x obtenue dans une des deux équations de départ pour obtenir la valeur de y soit : $y=-7$

Résoudre les systèmes d'équations suivants :

1. $\begin{cases} x+y = 5\\ 2x+3y = 13\end{cases}$
2. $\begin{cases} 5x+2y = 27\\ 2x+10y = 30\end{cases}$
3. $\begin{cases} 2x+3y = 4\\ 8x+5y = 2\end{cases}$
4. $\begin{cases} -x+2y = 8\\ 4x+6y = 52\end{cases}$
5. $\begin{cases} 100x+7y = -207\\ 20x+21y = -61\end{cases}$
6. $\begin{cases} 7x+5y = -11\\ 3x+9y = 9\end{cases}$

N_{15} Tableau de signes

M *Méthode*

On considère la forme factorisée de l'expression $A=-2(3x-9)(-2x+2)$. Il suffit alors de déterminer le signe de chaque facteur et placer les signes dans un tableau :

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
-2		$-$		$-$		$-$	
$(3x-9)$		$-$	0	$-$		$+$	
$(-2x+2)$		$+$		$-$	0	$-$	
A		$+$	0	$-$	0	$+$	

Déterminer le signe des expressions factorisées suivantes :

1. $A=(x-2)(x-4)(x+1)$
2. $B=-5(2x-2)(4-5x)$
3. $C=-2x(4x-6)(2-7x)$
4. $D=\dfrac{x-6}{x+2}$
5. $E=\dfrac{4-5x}{2x+1}$
6. $F=\dfrac{(x-6)(7x-1)}{(x+5)(2x-3)}$

N_1 Définitions et vocabulaire

D *Fonction*

On considère un ensemble de nombre réel $\mathcal{D}$. Une fonction f sur $\mathcal{D}$ est un processus transformant un nombre réel $x \in \mathcal{D}$ en un réel et **un seul** que l'on appelle **image** du réel x.

$\mathcal{D}$ est l'ensemble de définition de la fonction f que l'on note parfois $\mathcal{D}_f$. L'ensemble de définition d'une fonction peut être tous les nombres réels noté $\mathbb{R}$ ou bien être constitué d'une ou plusieurs parties de $\mathbb{R}$.

Soit $a \in \mathcal{D}$ alors l'image **unique** du réel a par la fonction f se note $f(a)$ et se dit "f de a". On peut noter aussi $f : a \mapsto f(a)$.

Si le réel b est l'image du réel a par la fonction f alors $b = f(a)$. On dit que a est l'**antécédent** de b par la fonction f :

- $f(a) = b$ signifie que l'image (unique) de b par la fonction f est égale à a
- $f(a) = b$ signifie qu'un antécédent de a par la fonction f est égal à b

Un site internet propose l'achat de morceaux de musique. On peut donc exprimer le prix à payer sur internet <u>en fonction</u> du nombre de morceaux de musique achetés. On représente cet énoncé par la fonction f.

1 On sait que $f(10) = 9$.

a) Un antécédent de $\boxed{\quad}$ est égal à $\boxed{\quad}$ par la fonction f.

b) L'image de $\boxed{\quad}$ est égale à $\boxed{\quad}$ par la fonction f.

c) Si on achète $\boxed{\quad}$ morceaux de musique, on paiera $\boxed{\quad}$ €.

2 Si on achète 2 morceaux de musique, on paiera $2,6$ €.

a) Un antécédent de $\boxed{\quad}$ est égal à $\boxed{\quad}$ par la fonction f.

b) L'image de $\boxed{\quad}$ est égale à $\boxed{\quad}$ par la fonction f.

c) $f\left(\boxed{\quad}\right) = \boxed{\quad}$

3 L'image de 5 est égale à 6 par la fonction f.

a) Un antécédent de $\boxed{\quad}$ est égal à $\boxed{\quad}$ par la fonction f.

b) $f\left(\boxed{\quad}\right) = \boxed{\quad}$

c) Si on achète $\boxed{\quad}$ morceaux de musique, on paiera $\boxed{\quad}$ €.

4 Un antécédent de 17 est égal à 18 par la fonction f.

a) $f\left(\boxed{\quad}\right) = \boxed{\quad}$

b) L'image de $\boxed{\quad}$ est égale à $\boxed{\quad}$ par la fonction f.

c) Si on achète $\boxed{\quad}$ morceaux de musique, on paiera $\boxed{\quad}$ €.

N_2 Tableau de valeurs

D *Tableau de valeurs*

On considère une fonction f définie sur $\mathcal{D}_f$. Un **tableau de valeurs** de f est un tableau où la première ligne (ou colonne) réprésente des antécédents x et sur la deuxième ligne (ou colonne) les images correspondantes $f(x)$:

x	-1	4	$2,3$	$\sqrt{2}$	$\frac{1}{3}$	a
$f(x)$	$f(-1)$	$f(4)$	$f(2,3)$	$f(\sqrt{2})$	$f(\frac{1}{3})$	$f(a)$

On peut exprimer la taille ($f(x)$ en centimètres) d'un nourrisson <u>en fonction</u> de son âge (x en jour). On traduit cet énoncé par la fonction m. Voici les relevés effectués sur un nourrisson :

x	1	10	20	34	54	$\boxed{\quad}$
$m(x)$	$50,1$	51	$53,5$	58	60	$\boxed{\quad}$

1 Pour la **deuxième** colonne du tableau :

a. Un antécédent de $\boxed{\quad}$ est égal à $\boxed{\quad}$ par la fonction m.

b. Une image de $\boxed{\quad}$ est égale à $\boxed{\quad}$ par la fonction m.

c. on a $m\left(\boxed{\quad}\right) = \boxed{\quad}$

d. A $\boxed{\quad}$ jours, ce nourisson mesure $\boxed{\quad}$ cm.

2 Pour la **troisième** colonne du tableau :

a. Un antécédent de $\boxed{\quad}$ est égal à $\boxed{\quad}$ par la fonction m.

b. Une image de $\boxed{\quad}$ est égale à $\boxed{\quad}$ par la fonction m.

c. on a $m\left(\boxed{\quad}\right) = \boxed{\quad}$

d. A $\boxed{\quad}$ jours, ce nourisson mesure $\boxed{\quad}$ cm.

3 Pour la **quatrième** colonne du tableau :

a. Un antécédent de $\boxed{\quad}$ est égal à $\boxed{\quad}$ par la fonction m.

b. Une image de $\boxed{\quad}$ est égale à $\boxed{\quad}$ par la fonction m.

c. on a $m\left(\boxed{\quad}\right) = \boxed{\quad}$

d. A $\boxed{\quad}$ jours, ce nourisson mesure $\boxed{\quad}$ cm.

4 Pour la **dernière** colonne du tableau, on a $m(18) = 52$:

a. Un antécédent de $\boxed{\quad}$ est égal à $\boxed{\quad}$ par la fonction m.

b. Une image de $\boxed{\quad}$ est égale à $\boxed{\quad}$ par la fonction m.

c. Compléter le tableau.

d. A $\boxed{\quad}$ jours, ce nourisson mesure $\boxed{\quad}$ cm.

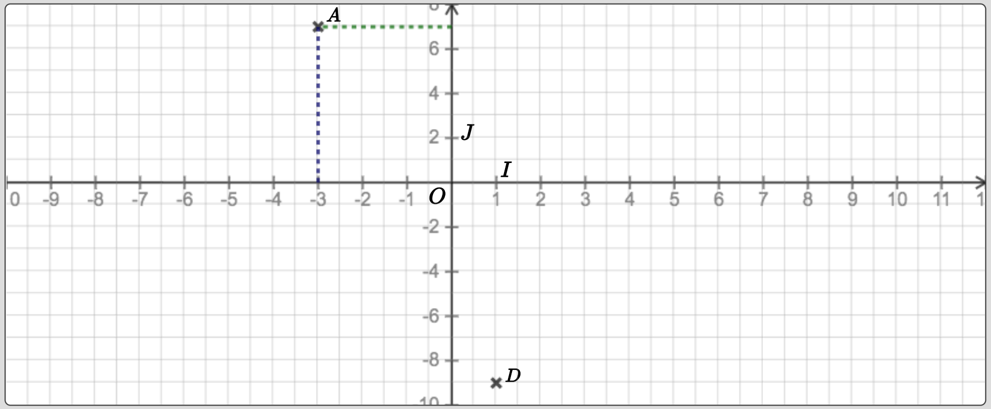
N_3 Courbe représentative d'une fonction

D Courbe représentative

On considère une fonction f définie sur $\mathcal{D}_f$. On se place dans un repère $(O;I;J)$, la **courbe représentative** de la fonction f, notée $\mathcal{C}_f$ est l'ensemble des points de coordonnées $(x;f(x))$. L'**équation de la courbe représentative** de la fonction f est alors $y = f(x)$ (y est alors l'ordonnée du point d'abscisse x).
Dans un repère $(O;I;J)$:
- (OI) (axe horizontal) est l'axe des abscisses et correspond aux antécédents.
- (OJ) (axe horizontal) est l'axe des ordonnées et correspond aux images.

On considère la fonction n définie par $n(x) = x^2 - 2x - 8$ dont voici un tableau de valeurs :

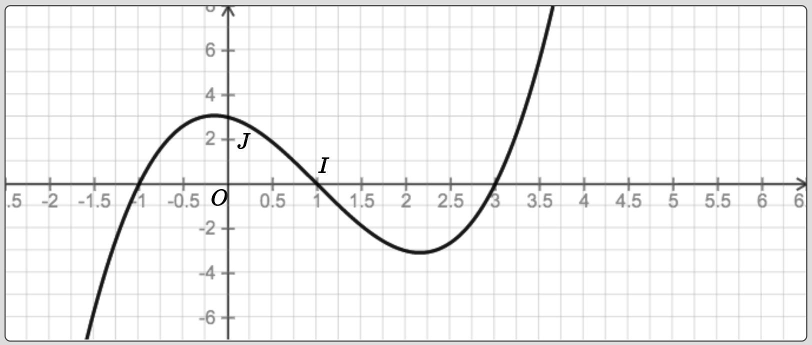
x	-3	-1	0		2	$2,5$	3	4	5
$n(x)$	7								
Point	A	B	C	D	E	F	G	H	K



1. Compléter le tableau ci-dessus puis placer les points manquant. Tracer la représentation graphique $\mathcal{C}_n$ de la fonction n.

On considère la fonction k dont voici un tableau de valeurs :

x	$-1,5$	-1	0	$0,5$	1	$1,5$		
$k(x)$							2	6



2. Compléter le tableau ci-dessus à partir de la représentation graphique $\mathcal{C}_k$ de la fonction k.

N_4 Expression d'une fonction

D Expression d'une fonction-

Soit f une fonction, $\mathcal{D}_f$ son ensemble de définition et $x \in \mathcal{D}_f$. L'expression algébrique d'une fonction donne directement $f(x)$ en fonction de la variable x.

On considère la fonction h suivante : $h(x) = (x-1)^2 + 2$

1. Quelle est l'image de -1 par la fonction h ?
2. Donner un antécédent de 2 par la fonction h
3. Recopier et compléter : $h(-2) = \dots\dots\dots$
4. Recopier et compléter : $h(\dots\dots) = 3$.
5. Recopier et compléter : $h(3) = \dots\dots$.
6. En utilisant les questions 1. ; 2. ; 3. ; 4. et 5., construire un tableau de valeurs de la fonction h.
7. Tracer la représentation graphique de la fonction h.

n°1 Fonction d

On considère la fonction d suivante : $d(x) = 3x + 4$

1. Quelle est l'image de -2 par la fonction d ?
2. Quel est l'antécédent de 13 par la fonction d ?
3. Recopier et compléter : $d(-1) = \dots\dots\dots$ et $d(\dots\dots\dots) = -26$
4. Recopier et compléter le tableau suivant :

x	0			-4
$d(x)$		$2,5$	5	

5. Tracer la représentation graphique de la fonction d.
6. En utilisant la représentation graphique de d déterminer l'image de 1 par la fonction d puis l'antécédent de 7 par la fonction d.

n°2 Programme de calcul

On considère le programme de calcul suivant :
- On choisit un nombre.
- On élève au carré ce nombre.
- On retranche 2 fois le nombre choisi.
- On ajoute 1.

On traduit par la fonction u ce programme de calcul.

1. Quel est le résultat obtenu si on choisit -1 comme nombre de départ ? si on choisit 2 ?
2. Recopier et compléter le tableau suivant :

Nombre choisi : x	0	-2	5
Résultat : $u(x)$			

3. Quel est l'antécédent de 1 par la fonction u ?
4. Quelle est l'image de 10 par la fonction u ?
5. Recopier et compléter : $u(2,3) = \dots\dots$ et $u(\dots\dots) = 9$
6. Tracer la représentation graphique de la fonction u. En utilisant cette représentation graphiquedéterminer l'image de $1,5$ par la fonction u puis les antécédents de 7.
7. Ecrire un algorithme permettant de donner le résultat de ce programme de calcul en fonction d'un nombre en entrée.

n°3 Tableau de valeurs

1. Construire un tableau de 10 valeurs de la fonction f_1 définie par $f_1(x) = -2x + 3$ à partir de $x = -1$ et de pas 1
2. Construire un tableau de 8 valeurs de la fonction f_2 définie par $f_2(x) = -x^2 + 2x - 3$ à partir de $x = -6$ et de pas 2
3. Construire un tableau de 10 valeurs de la fonction f_3 définie par $f_3(x) = \sqrt{-2x+4}$ à partir de $x = -2$ et de pas $0,5$
4. Construire un tableau de 5 valeurs de la fonction f_4 définie par $f_4(x) = \dfrac{6x-3}{2-x}$ à partir de $x = -1$ et de pas 3

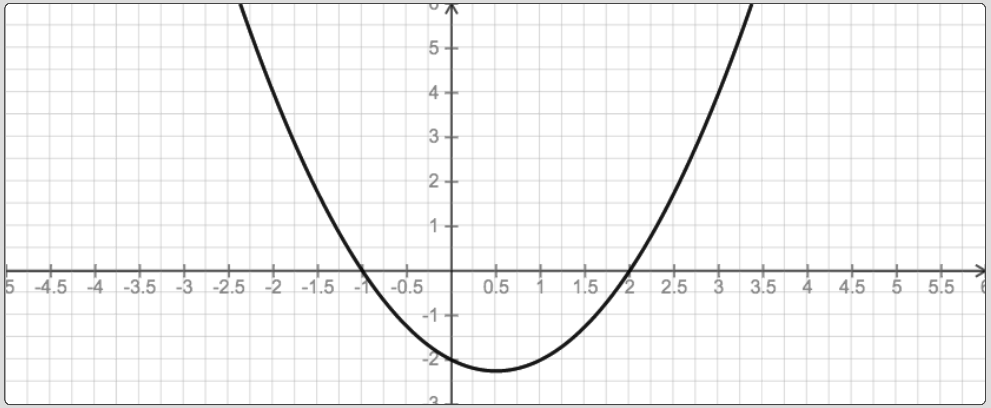
n°4 Parabole

Soit la fonction f définie par : $f(x) = x^2 - x - 2$.

1. Calculer l'image de -1 par f. Déterminer un antécédent de -2 par f.
2. Recopier et compléter le tableau suivant :

x	-2	$-1,5$	-1	0	1	2	3
$f(x)$							
Point	A	B	C	D	E	F	G

3. Dans le repère ci-dessous on a tracé la représentation graphique de f. Placer dans ce repère les points A , B , C , D , E ; F et G.



4. Graphiquement, déterminer l'image de $-1,75$ et de $2,5$ par f.
5. Graphiquement, déterminer les antécédents de 4.

n°5 Fonction r

On considère la fonction r suivante : $d(x) = 2x^2 + 5$

1. Calculer $r(1)$. Quelle est l'image de 2 par r ? Quelle est l'image de $\dfrac{1}{3}$ par r ? calculer : $r(-\dfrac{3}{5})$.
2. Recopier et compléter le tableau suivant :

x	-1	-2	-1	0	1	2	3
$r(x)$							

3. Tracer la représentation graphique de la fonction r.

N_1 Ensemble de définition

D *Ensemble de définition*

L'ensemble de définition d'une fonction f représente l'ensemble des réels x (antécédents) pour lesquels il existe une image (qui est unique) $f(x)$. On note souvent cet ensemble de définition $\mathcal{D}_f$.

En seconde il faut vérifier 2 points :
- On ne peut pas diviser par 0 : ce qui entraine généralement la résolution d'une équation
- Sous une racine carrée, il doit y avoir un nombre positif ou nul : ce qui entraine généralement la résolution d'une inéquation

1. Résoudre l'équation $(5x-2)(3-8x) = 0$. En déduire l'ensemble de définition de $f_1(x) = \frac{3x-2}{(5x-2)(3-8x)}$
2. Résoudre l'inéquation $4x - 7 \geqslant 0$. En déduire l'ensemble de définition de $f_2(x) = \sqrt{4x-7}$
3. Déterminer l'ensemble de définition de $f_3(x) = -2x^2 - 8x + 2$

N_2 Sens de variation

D *Fonction croissante*

Une fonction f définie sur un intervalle I est **croissante** lorsque pour tous les réels a et b dans I :
si $a \leqslant b$ alors $f(a) \leqslant f(b)$ (l'ordre est respecté)

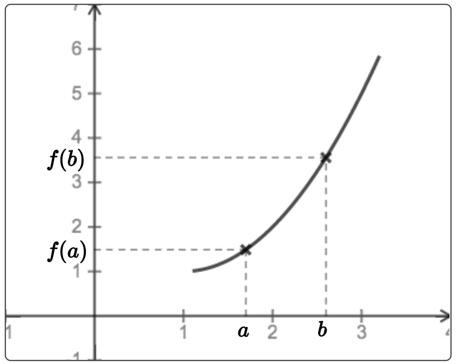
D *Fonction décroissante*

Une fonction f définie sur un intervalle I est **décroissante** lorsque pour tous les réels a et b dans I :
si $a \leqslant b$ alors $f(a) \geqslant f(b)$ (l'ordre n'est pas respecté)

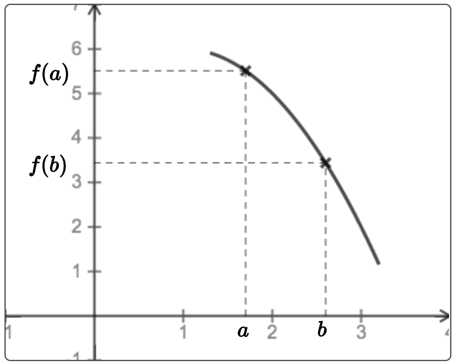
D *Fonction monotone*

Une fonction f est monotone sur un intervalle I si elle est soit croissante soit décroissante sur I (mais pas les deux).

f est croissante.
$a \leqslant b$ donc $f(a) \leqslant f(b)$ (même ordre)



f est décroissante.
$a \leqslant b$ donc $f(a) \geqslant f(b)$ (ordre différent)



1. Soit $f_1(x) = 3x - 9$. Donner son ensemble de définition. Démontrer que f_1 est croissante sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $f_2(x) = -2x + 1$. Donner son ensemble de définition. Démontrer que f_2 est décroissante sur $\mathbb{R}$.
3. Soit $f_3(x) = 2x^2$. Démontrer que f_3 est croissante sur $[0; +\infty[$ et décroissante sur $]-\infty; 0]$.
4. Soit $f_4(x) = -4x^2$. Démontrer que f_4 est décroissante sur $[0; +\infty[$ et croissante sur $]-\infty; 0]$.
5. Soit $f_5(x) = 2\sqrt{x}$. Démontrer que f_5 est croissante sur $[0; +\infty[$.
6. Soit $f_6(x) = \dfrac{-3}{x}$. Démontrer que f_6 est croissante sur $]0; +\infty[$.

N_3 Tableau variation

D Tableau variation

Au lieu de spécifier qu'une fonction est croissante sur un intervalle, on place une flèche montante dans un tableau. Au lieu de spécifier qu'une fonction est décroissante sur un intervalle, on place une flèche descendante dans un tableau :

Tableau de variation d'une fonction f_1 :
- décroissante sur $]-\infty; a]$
- croissante sur $[a; +\infty[$
- $f_1(a) = b$

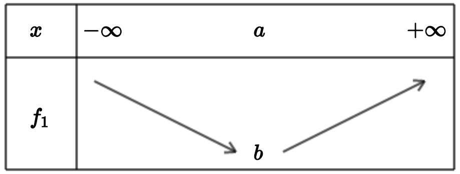


Tableau de variation d'une fonction f_2 :
- croissante sur $[a; b]$
- décroissante sur $[b; +\infty[$
- $f_2(a) = c$ et $f_2(b) = d$

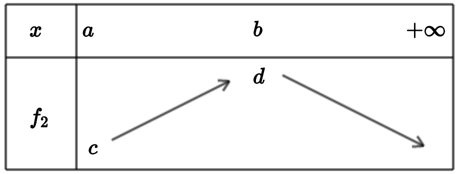


Tableau de variation d'une fonction f_3 :
- croissante sur $]-\infty; a[$
- croissante sur $]a; +\infty[$
- a est une valeur interdite

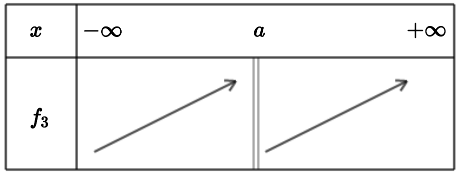


Tableau de variation d'une fonction f_4 :
- décroissante sur $[a; b[$
- croissante sur $]b; +\infty[$
- b est une valeur interdite

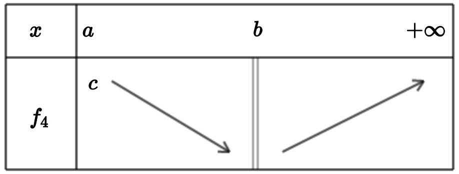


Tableau de variation d'une fonction f_5 :
- croissante sur $]-\infty; -\infty[$

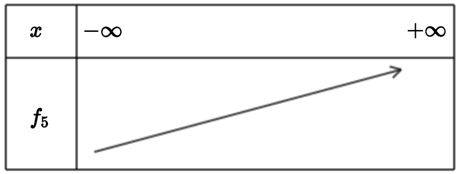
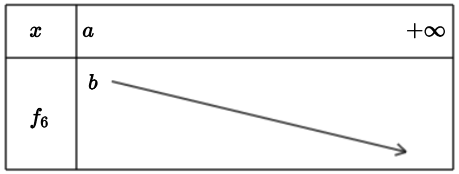


Tableau de variation d'une fonction f_6 :
- décroissante sur $[a; +\infty[$
- $f(a) = b$



1 Soit $f_1(x) = 2 - 3x$.

a) Donner l'ensemble de définition de f_1

b) Démontrer que f_1 est décroissante sur $\mathbb{R}$

c) Dresser le tableau de variation de f_1

2 Soit $f_2(x) = \dfrac{2}{2-4x}$.

a) Donner l'ensemble de définition de f_2

b) Démontrer que f_2 est croissante sur son ensemble de définition

c) Dresser le tableau de variation de f_2

N_4 Extremum

D Maximum et minimum d'une fonction

- Dire que f admet un **maximum** en a sur l'intervalle I signifie que : Il existe un réel M tel que pour tout x dans I : $f(x) \leqslant M$ et $M = f(a)$.
- Dire que f admet un **minimum** en a sur l'intervalle I signifie que : Il existe un réel m tel que pour tout x dans I : $f(x) \geqslant m$ et $m = f(a)$.
- Dire que f admet un **extremum** en a sur l'intervalle I si elle admet un maximum ou un minimum.

1 Soit la fonction f_1 définie par $f_1(x) = -2x^2 - 4x + 16$.

a) Démontrer que f_1 est croissante sur $]-\infty; -1]$

b) Démontrer que f_1 est décroissante sur $[-1; +\infty[$

c) Dresser le tableau de variation de f_1

d) Conjecturer l'extremum de f_1

e) Démontrer que f_1 admet un maximum en -1. Donner sa valeur.

2 Soit la fonction f_2 définie par $f_2(x) = -9 + 3x^2 - 6x$.

a) Démontrer que f_2 est décroissante sur $]-\infty; 1]$

b) Démontrer que f_2 est croissante sur $[1; +\infty[$

c) Dresser le tableau de variation de f_2

d) Conjecturer l'extremum de f_2

e) Démontrer que f_2 admet un minimum en 1. Donner sa valeur.

N_5 Résoudre graphiquement une équation et une inéquation

M Méthode pour résoudre une équation graphiquement

Pour résoudre graphiquement un équation du type $f(x) = g(x)$, il suffit de tracer les représentations graphiques $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ de f puis g puis de déterminer graphiquement le point ou les points d'intersection (s'il existe) de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

M Méthode pour résoudre une inéquation graphiquement

Pour résoudre graphiquement un inéquation du type $f(x) \leqslant g(x)$, il suffit de tracer les représentations graphiques $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ de f puis g :
- Quand $\mathcal{C}_f$ est **en dessous** de $\mathcal{C}_g$ alors $f(x) \leqslant g(x)$
- Quand $\mathcal{C}_f$ est **au dessus** de $\mathcal{C}_g$ alors $f(x) \geqslant g(x)$

On considère les fonctions f et g définies par $f(x) = -3 + 3x^2 - 6x$ et $g(x) = 4\sqrt{x}$

1 Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant (arrondir au dixième):

x	$-1,5$	-1	$-0,5$	0	$0,5$	1	$1,5$	2
$f(x)$								
$g(x)$								

2 Dans un même repère tracer les représentations graphiques $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ de f et g

3 Déterminer graphiquement le nombre x tel que $-3 + 3x^2 - 6x = 4\sqrt{x}$

4 Déterminer graphiquement les nombres x tel que $-3 + 3x^2 - 6x \leqslant 4\sqrt{x}$

5 Déterminer graphiquement les nombres x tel que $-3 + 3x^2 - 6x \geqslant 4\sqrt{x}$

N_6 Fonction $u+k$

Soit u une fonction définie sur D_u et k un nombre réel.

D Définition

La fonction $u+k$ est définie sur D_u et par : $\boxed{(u+k)(x)=u(x)+k}$

P Propriété : courbe représentative

Dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, si u a pour courbe représentative C_u alors la courbe représentative C_{u+k} de $u+k$ est l'image de C_u par la translation de vecteur $k\vec{j}$.

P Propriété : variations

Si u est monotone (croissante ou décroissante) sur un intervalle I alors $u+k$ a le même sens de variation que u sur I.

Dans des repères différents, tracer les courbes représentatives de :

1. $f_1(x)=x^2+2$
2. $f_2(x)=x^2-4$
3. $f_3(x)=\sqrt{x}-1$
4. $f_4(x)=\dfrac{1}{x}-5$

Construire le tableau de variations de :

5. $f_5(x)=x^2+9$ sur $]-\infty;0]$
6. $f_6(x)=\dfrac{4}{x}+2$ sur $]-\infty;0[$
7. $f_7(x)=\sqrt{x}-1$ sur $[0;+\infty[$

N_7 Fonction ku

Soit u une fonction définie sur D_u et k un nombre réel.

D Définition

La fonction ku est définie sur D_u et par : $\boxed{(ku)(x)=k\times u(x)}$

P Propriété : variations

Si $k>0$ alors u et ku ont la même monotonie (croissante ou décroissante) sur un intervalle I.
Si $k<0$ alors u et ku sont de monotonie contraire (croissante ou décroissante) sur un intervalle I.

Construire un tableau de variation des fonctions suivantes sur leur ensemble de définition :

1. $f_1(x)=3x^2$
2. $f_2(x)=-2x^2$
3. $f_3(x)=3\sqrt{x}$
4. $f_4(x)=\dfrac{2}{x}$

n°1 Ensemble de définition

1. Résoudre l'équation $7x-9=0$. En déduire l'ensemble de définition de $f_1(x)=\dfrac{x}{7x-9}$
2. Résoudre l'inéquation $(3x-8)(2-5x)\geqslant 0$. En déduire l'ensemble de définition de $f_2(x)=\sqrt{(3x-8)(2-5x)}$
3. Déterminer l'ensemble de définition de $f_3(x)=x^2+8x-7$
4. Déterminer l'ensemble de définition de $f_4(x)=\sqrt{x^2-4x+4}$
5. Résoudre l'équation $4x^2-12x+9=0$. En déduire l'ensemble de définition de $f_5(x)=\dfrac{7x}{4x^2-12x+9}$
6. Résoudre l'inéquation $8x(x-2)(x+4)\geqslant 0$. En déduire l'ensemble de définition de $f_6(x)=\sqrt{8x(x-2)(x+4)}$
7. Déterminer l'ensemble de définition de $f_7(x)=\dfrac{4x}{x^2+1}$

n°2 Tableau de variation

1. Soit $f_1(x)=2x-10$.
   a) Donner l'ensemble de définition de f_1
   b) Démontrer que f_1 est croissante sur $\mathbb{R}$
   c) Dresser le tableau de variation de f_1
2. Soit $f_2(x)=3\sqrt{3x+6}$.
   a) Donner l'ensemble de définition de f_2
   b) Démontrer que f_2 est croissante sur son ensemble de définition
   c) Dresser le tableau de variation de f_2

n°3 Extremum

1. Soit la fonction f_1 définie par $f_1(x)=-10x^2-100x+2000$.
   a) Démontrer que f_1 est croissante sur $]-\infty;-5]$
   b) Démontrer que f_1 est décroissante sur $[-5;+\infty[$
   c) Dresser le tableau de variation de f_1
   d) Conjecturer l'extremum de f_1
   e) Démontrer que f_1 admet un maximum en -5. Donner sa valeur.
2. Soit la fonction f_2 définie par $f_2(x)=5\sqrt{(x-2)}-10$.
   b) Démontrer que f_2 est croissante sur $[2;+\infty[$
   c) Dresser le tableau de variation de f_2
   d) Conjecturer l'extremum de f_2
   e) Démontrer que f_2 admet un minimum en 2. Donner sa valeur.
3. Soit la fonction f_3 définie par $f_3(x)=\dfrac{2}{x+2}$ et sur $\mathbb{R}^+$.
   a) Démontrer que f_3 est décroissante sur $\mathbb{R}^+$
   b) Dresser le tableau de variation de f_3 sur $\mathbb{R}^+$
   c) Conjecturer l'extremum de f_3 sur $\mathbb{R}^+$
   d) Démontrer que f_3 admet un maximum en 0 sur $\mathbb{R}^+$. Donner sa valeur.

n°4 Equation et inéquation

On considère les fonctions f et g définies par $f(x)=-2x^2+2$ et $g(x)=2(x+0,5)(x-3)$

1. Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant :

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$							
$g(x)$							

2. Dans un même repère tracer les représentations graphiques $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ de f et g
3. Déterminer graphiquement le nombre x tel que $-2x^2+2=2(x+0,5)(x-3)$
4. Déterminer graphiquement les nombres x tel que $-2x^2+2\leqslant 2(x+0,5)(x-3)$
5. Déterminer graphiquement les nombres x tel que $-2x^2+2\geqslant 2(x+0,5)(x-3)$

N_1 Définitions et propriétés

D *Fonction affine*

Une fonction **affine** f est définie par $f(x) = a \times x + b$ où a et b sont deux nombres réels.
a est le coefficient directeur de la fonction f et b est l'**ordonnée à l'origine**.
Quand $b = 0$ alors la fonction $f(x) = a \times x$ est appelée fonction **linéaire**.

P *Tableau de variation*

On considère une fonction affine $f(x) = ax + b$ avec $a \neq 0$. Si $a = 0$ cette fonction affine est **constante** et vaut $f(x) = b$. L'ensemble de définition de f est $\mathcal{D}_f =]-\infty; +\infty[= \mathbb{R}$.

si $a > 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
f	↗	

si $a < 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
f	↘	

Pour chaque fonction affine, donner le coefficient directeur, l'ordonnée à l'origine puis dresser le tableau de variation :

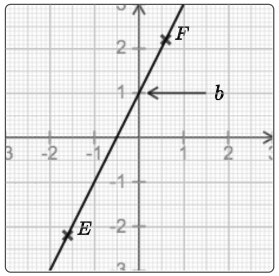
1. $f_1(x) = 4x - 6$
2. $f_2(x) = -3x + 9$
3. $f_3(x) = -3x$
4. $f_4(x) = -9$
5. $f_5(x) = 6 - 2x$
6. $f_6(x) = 2 + 8x$
7. $f_7(x) = 6x$
8. $f_8(x) = 2(5 - 2x)$
9. $f_9(x) = -3(2x + 1)$

N_2 Représentation graphique d'une fonction affine

P *Représentation graphique*

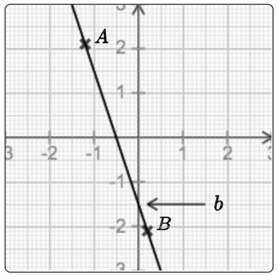
On considère une fonction affine $f(x) = ax + b$. La représentation graphique $\mathcal{C}_f$ de f est une droite non-verticale. Pour la tracer il suffit de placer 2 points. Cette droite a pour équation $y = f(x) = ax + b$.

si $a > 0$



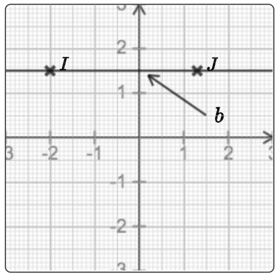
$\mathcal{C}_f$ est la droite (EF)

si $a < 0$



$\mathcal{C}_f$ est la droite (AB)

si $a = 0$



$\mathcal{C}_f$ est la droite (IJ)

Pour chaque fonction affine, tracer sa représentation graphique :

1. $f_1(x) = 2x - 1$
2. $f_2(x) = -2x + 8$
3. $f_3(x) = -2x$
4. $f_4(x) = 7$
5. $f_5(x) = 2 - x$
6. $f_6(x) = \frac{x}{3} - 1$

Tracer les courbes d'équation :

7. $y = 5x - 1$
8. $y = -2x$
9. $y = 1 - x$
10. $y = 2(1 - 2x)$
11. $y = \frac{1}{3}(2x - 5)$
12. $y = \sqrt{2}x + 1$

N_3 Signe d'une fonction affine

P *Signe d'une fonction affine*

On considère une fonction affine $f(x) = ax + b$. Si $a = 0$ alors $f(x)$ est du signe de b sinon :

si $a > 0$

x	$-\infty$		$\frac{-b}{a}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

si $a < 0$

x	$-\infty$		$\frac{-b}{a}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

Construire un tableau de signes des fonctions affines suivantes :

1. $f_1(x) = 7x - 8$
2. $f_2(x) = -2x + 1$
3. $f_3(x) = -4x$
4. $f_4(x) = 2$
5. $f_5(x) = 1 - x$
6. $f_6(x) = 2 + \frac{1}{3}x$
7. $f_7(x) = \frac{x}{5} + \frac{5}{3}$
8. $f_8(x) = \frac{1}{5}(5 - 2x)$
9. $f_9(x) = \frac{\sqrt{2}x}{2} - \frac{1}{3}$

Construire un tableau de signes des produits suivants de fonctions affines :

10. $(5x - 1)(2x - 8)$
11. $(x - 1)(x + 2)$
12. $(\frac{x}{3} - \frac{1}{5})(5 - 2x)$
13. $(\frac{1}{3} - \sqrt{2}x)(\frac{x}{5} - \frac{1}{2})$
14. $(-3 - 2x)(9 - x)(7x - 8)$
15. $(-1 - x)(2x - 3)(3x + 2)$

Construire un tableau de signes des quotients suivants de fonctions affines :

16. $\dfrac{2x - 7}{5 - 3x}$
17. $\dfrac{4 - 2x}{-2x - 8}$
18. $\dfrac{(x + 1)(6x - 1)}{2 - 3x}$
19. $\dfrac{(x - 2)(x + 1)}{(-2x - 3)(8 - 4x)}$

N_4 Intersection de deux droites affines

P *Intersection*

On considère deux fonctions affines $f_1(x) = a_1x + b_1$ et $f_2(x) = a_2x + b_2$ de représentation graphique $\mathcal{C}_{f_1}$ et $\mathcal{C}_{f_2}$ d'équation respective $y = a_1x + b_1$ et $y = a_2x + b_2$.

- Le point d'intersection (s'il existe) $M(x_m; y_m)$ des courbes (droites) $\mathcal{C}_{f_1}$ et $\mathcal{C}_{f_2}$ est tel que son abscisse x_m est la solution de l'équation : $a_1x + b_1 = a_2x + b_2$ et son ordonnée vaut : $y_m = a_1x_m + b_1 = a_2x_m + b_2$
- $\mathcal{C}_{f_1}$ est **au dessus** de $\mathcal{C}_{f_2}$ quand x est solution de l'inéquation $a_1x + b_1 \geqslant a_2x + b_2$
- $\mathcal{C}_{f_1}$ est **en dessous** de $\mathcal{C}_{f_2}$ quand x est solution de l'inéquation $a_1x + b_1 \leqslant a_2x + b_2$

Déterminer graphiquement et par le calcul, la solution (si elle existe) des équations suivantes :

1. $3x - 1 = 2x - 9$
2. $7x - 1 = 6x + 3$
3. $\frac{x}{3} + 1 = \frac{-2x}{3} + 2$
4. $\dfrac{2x - 1}{5x - 2} = 1$
5. $\dfrac{3 - 2x}{x + 3} = 2$
6. $\dfrac{2 - 2x}{3x - 1} = -3$

Déterminer graphiquement et par le calcul, les solutions (si elles existent) des inéquations suivantes :

7. $3x - 2 \leqslant 2x - 4$
8. $5x - 2 \geqslant 2x + 6$
9. $\frac{x}{5} + 1 \leqslant \frac{-2x}{5} + 2$
10. $\dfrac{3x - 1}{5x - 1} \leqslant 1$
11. $\dfrac{4 - x}{3x + 2} \geqslant 2$
12. $\dfrac{1 - 2x}{2x - 2} \leqslant -3$

$n°1$ Au théâtre

Un théâtre propose deux prix de places :
- Plein tarif : 20 €. (h_1)
- Tarif adhérent : réduction de 30% du plein tarif. (h_2)

Pour avoir le droit à la réduction de 30% pour chaque entrée, l'adhérent doit acheter en début de saison une carte d'abonnement de 50 €.

On désigne par x le nombre d'entrées et on note :
- h_1 la dépense totale d'un spectateur qui n'est pas adhérent.
- h_2 la dépense totale d'un adhérent.

1. Démontrer que le prix d'une entrée au tarif adhérent est de 14 €.
2. Recopier et compléter le tableau suivant :

Nombre d'entrées : x	0	1	10	15
Prix total h_1 en €				
Prix total h_2 en €				

3. Donner les expressions des fonctions h_1 et h_2.
4. Quelle est l'image de 5 par la fonction h_1 ? Quel est l'antécédent de 330 par la fonction h_2 ?
5. Quelle est l'image de 2 par la fonction h_2 ? Quel est l'antécédent de 300 par la fonction h_1 ?
6. Représenter graphiquement dans un même repère les fonctions h_1 et h_2.
7. Déterminer par le calcul et graphiquement le nombre d'entrées pour lequel les deux tarifs sont identiques.
8. Déterminer par le calcul et graphiquement le nombre d'entrées pour lequel l'abonnement est avantageux.

$n°2$ Parc d'attraction

Un parc d'attraction pratique les tarifs suivants :
- Tarif 1 : par jour de présence dans le parc, la prix à payer est de 12 € pour un enfant et de 18 € pour un adulte.
- Tarif 2 : quel que soit le nombre de jours de présence dans le parc et le nombre de membres de la famille, le prix pour la famille est constitué d'un forfait de 100 € auquel s'ajoute une participation de 10 € par jour.

Dans toute la suite du problème, on considère une famille constituée d'un adulte et d'un enfant.

On désigne par x le nombre de jours passés dans le parc et on note :
- p_1 le prix payé par la famille avec le tarif 1 pour x jours passés dans le parc.
- p_2 le prix payé par la famille avec le tarif 2 pour x jours passés dans le parc.

1. Recopier et compléter le tableau suivant :

Nombre de jours : x	1	4	6	10	14
Prix total p_1 en €					
Prix total p_2 en €					

2. Donner les expressions des fonctions p_1 et p_2.
3. Quelle est l'image de 3 par la fonction p_1 ? Quel est l'antécédent de 170 par la fonction p_2 ?
4. Quelle est l'image de 2 par la fonction p_2 ? Quel est l'antécédent de 150 par la fonction p_1 ?
5. Représenter graphiquement dans un même repère les fonctions p_1 et p_2.
6. Déterminer par le calcul et graphiquement le nombre de jours pour lequel les deux tarifs sont égaux.
7. Déterminer par le calcul et graphiquement le nombre de jours pour lequel la tarif 2 est avantageux.

N_1 Forme développée

D Définition : Fonction du second degré

Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est une **fonction polynôme du second degré** ou **fonction du second degré** si elle est de la forme $\boxed{f(x) = ax^2 + bx + c}$ où a, b et c sont des réels tels que $a \neq 0$.

D Définition : Parabole

La représentation graphique ou courbe représentative d'une fonction du second degré est une **parabole**.
L'équation de la parabole est : $\boxed{y = ax^2 + bx + c}$

V Vocabulaire

- L'expression algébrique $ax^2 + bx + c$ est appelée **trinôme du second degré**.
- L'écriture $f(x) = ax^2 + bx + c$ de la fonction f est la **forme développée de f**.

Déterminer si les fonctions suivantes sont des fonctions du second degré et donner le cas échéant les trois coefficients a, b et c :

1. $f_1(x) = 6 - 3x^2 + 2x$
2. $f_2(x) = 4 + 7x$
3. $f_3(x) = (6x - 7)^2$
4. $f_4(x) = (8 + 4x)^2$
5. $f_5(x) = (3x + 7)(3x - 7)$
6. $f_6(x) = 4(2x - 3)^2$

N_2 Forme canonique

T Théorème : Forme canonique

La **forme canonique** de la fonction du second degré f définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ est :
$\boxed{f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta}$ avec $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$. Cette **forme canonique** est **unique**.

Donner la forme canonique des fonctions du second degré suivantes :

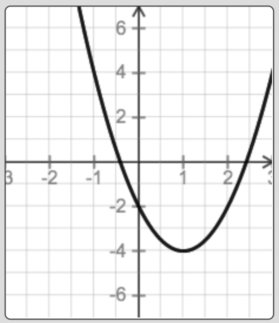
1. $f_1(x) = 4x^2 + 5x + 9$
2. $f_2(x) = -3x^2 - 7x + 9$
3. $f_3(x) = 7x - x^2 - 10$
4. $f_4(x) = 9x^2 + 16 - 24x$
5. $f_5(x) = 81 - 49x^2$
6. $f_6(x) = 7 + \sqrt{140}x + 5x^2$
7. $f_7(x) = 6x^2 - 9x + 1$
8. $f_8(x) = \frac{x^2}{3} - \frac{x}{6} + 1$
9. $f_9(x) = 4 - 12x + 9x^2$

N_3 Forme canonique : parabole

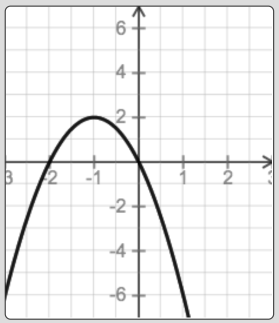
P Propriété

La parabole C_f, courbe représentative de la fonction du second degré f de forme canonique $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ a pour sommet $S(\alpha; \beta)$

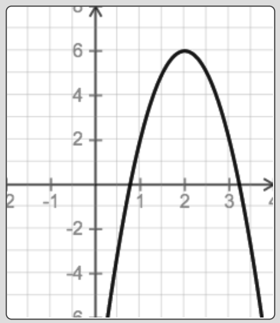
Donner la forme canonique des fonctions du second degré suivantes :



Parabole C_{f_1}



Parabole C_{f_2}



Parabole C_{f_3}

N_4 Symétrie de la parabole

Propriété : Symétrie de la parabole

La parabole C_f, courbe représentative de la fonction du second degré f de forme canonique $f(x) = a(x-\alpha)^2+\beta$ est symétrique par rapport à la droite verticale d'équation $x = \alpha$.

Tracer la courbe représentative des fonctions suivantes en traçant l'axe de symétrie :

1. $f_1(x) = (x-8)^2+2$
2. $f_2(x) = 2(x+1)^2+3$
3. $f_3(x) = -2(4+x)^2-3$
4. $f_4(x) = (3x-3)^2$
5. $f_5(x) = 6x^2-8x+3$
6. $f_6(x) = (2x+5)(2x-5)$

N_5 Sens de variation

Sens de variation

On considère la fonction du second degré f de forme canonique $f(x) = a(x-\alpha)^2+\beta$ alors :

si $a > 0$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
f	$\searrow$	β	$\nearrow$

si $a < 0$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
f	$\nearrow$	β	$\searrow$

Construire le tableau de variations des fonctions du second degré suivantes :

1. $f_1(x) = -2(x-3)^2+2$
2. $f_2(x) = 4(x+2)^2+6$
3. $f_3(x) = (5x-8)(2-6x)$
4. $f_4(x) = (5x-3)^2$
5. $f_5(x) = 9x^2-2x+5$
6. $f_6(x) = (7x+8)(7x-8)$

N_6 Extremum

Extremum

On considère la fonction du second degré f de forme canonique $f(x) = a(x-\alpha)^2+\beta$ alors :
f admet β comme extremum qui est atteint pour $x = \alpha$.
- C'est un maximum si a est négatif.
- C'est un minimum si a est positif.

Construire le tableau de variations des fonctions du second degré suivantes :

1. $f_1(x) = -2(x-3)^2+2$
2. $f_2(x) = 4(x+2)^2+6$
3. $f_3(x) = (5x-8)(2-6x)$
4. $f_4(x) = (5x-3)^2$
5. $f_5(x) = 9x^2-2x+5$
6. $f_6(x) = (7x+8)(7x-8)$

N_7 Inéquation du second degré et signe d'un trinôme : forme canonique

Définition et propriétés

Soient a, b et c des nombres réels tels que $a \neq 0$ et f la fonction du second degré définie par $f(x) = ax^2+bx+c$ de courbe représentative $\mathcal{C}_f$.

Une inéquation du second degré est du type :
- $ax^2+bx+c < 0 \to$ les abscisses x des points de $\mathcal{C}_f$ strictement en **dessous** de l'axe des abscisses.
- $ax^2+bx+c > 0 \to$ les abscisses x des points de $\mathcal{C}_f$ strictement au **dessus** de l'axe des abscisses.
- $ax^2+bx+c \leqslant 0 \to$ les abscisses x des points de $\mathcal{C}_f$ en **dessous** de l'axe des abscisses.
- $ax^2+bx+c \geqslant 0 \to$ les abscisses x des points de $\mathcal{C}_f$ au **dessus** de l'axe des abscisses.

Signe

On considère le trinôme ax^2+bx+c associé à la fonction $f(x) = ax^2+bx+c$ de forme canonique $f(x) = a(x-\alpha)^2+\beta$ alors:

si $a > 0$ et $\beta \geqslant 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	$+$	

si $a < 0$ et $\beta \geqslant 0$

x	$-\infty$		$\alpha-\sqrt{\frac{\beta}{-a}}$		$\alpha+\sqrt{\frac{\beta}{-a}}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

si $a < 0$ et $\beta \leqslant 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	$-$	

si $a > 0$ et $\beta \leqslant 0$

x	$-\infty$		$\alpha-\sqrt{\frac{-\beta}{a}}$		$\alpha+\sqrt{\frac{-\beta}{a}}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Construire le tableau de variations des fonctions du second degré suivantes :

1. $f_1(x) = -2(x-3)^2+2$
2. $f_2(x) = 4(x+2)^2+6$
3. $f_3(x) = (5x-8)(2-6x)$
4. $f_1(x) = -2(x-3)^2+2$
5. $f_2(x) = 4(x+2)^2+6$
6. $f_3(x) = (5x-8)(2-6x)$

N_8 Forme factorisée

Théorème

Soit la forme développée de la fonction $f(x) = ax^2+bx+c$ $(a \neq 0)$. Dans certains cas, il est possible d'écrire f sous forme **factorisée** : $\boxed{f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)}$

Construire le tableau de variations des fonctions du second degré suivantes :

1. $f_1(x) = -2(x-3)^2+2$
2. $f_2(x) = 4(x+2)^2+6$
3. $f_3(x) = (5x-8)(2-6x)$
4. $f_1(x) = -2(x-3)^2+2$
5. $f_2(x) = 4(x+2)^2+6$
6. $f_3(x) = (5x-8)(2-6x)$

N_9 Signe d'un trinôme: forme factorisée

Propriétés

On considère le trinôme ax^2+bx+c associé à la fonction $f(x)=ax^2+bx+c$ dont la forme factorisée existe : $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$ avec $x_1 \leqslant x_2$.

- Pour $a>0$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
a		$+$		$+$		$+$	
$(x-x_1)$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x-x_2)$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

- Pour $a<0$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
a		$-$		$-$		$-$	
$(x-x_1)$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x-x_2)$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Construire le tableau de variations des fonctions du second degré suivantes :

1. $f_1(x)=-2(x-3)^2+2$
2. $f_2(x)=4(x+2)^2+6$
3. $f_3(x)=(5x-8)(2-6x)$
4. $f_1(x)=-2(x-3)^2+2$
5. $f_2(x)=4(x+2)^2+6$
6. $f_3(x)=(5x-8)(2-6x)$

n°1 Inéquation $f(x) \geqslant g(x)$

Soient 2 fonctions f et g définies par $f(x)=x^2-6x+2$ et $g(x)=-2x^2-3x+8$ de courbes représentatives $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

1. Etudier le signe de $f(x)-g(x)$
2. Résoudre $f(x) \geqslant g(x)$
3. Etudier la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à $\mathcal{C}_g$.
4. Dans un même repère, tracer $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

n°2 Histoire de pont

Un pont est soutenu par un arc parabolique d'une portée de $200\ m$ et d'une hauteur de $80\ m$. Le pont et l'arc se coupent à $40\ m$ de la rive. Quelle est la hauteur du pont ?

n°3 Paramétrage

On considère l'équation $(E): x^2+2x+m=0$. L'objectif de l'exercice est de déterminer pour quelles valeurs de m l'équation (E) admet au moins une solution.

1. Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations : $x^2+2x=0$ et $x^2+2x+1=0$
2. Vérifier que pour tout réel x : $x^2+2x+m=(x+1)^2-1+m$
3. Justifier alors que résoudre l'équation (E) revient à résoudre l'équation $(x+1)^2=1-m$.
4. Conclure.

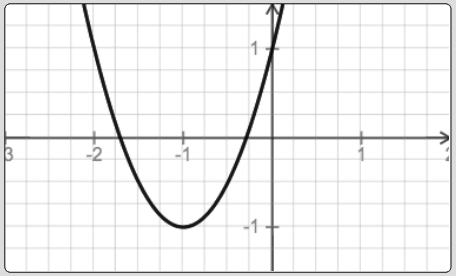
n°4 Algorithme : forme canonique

Soit une fonction du second degré $f(x)=ax^2+bx+c$ de forme canonique $f(x)=a(x-\alpha)^2+\beta$. Ecrire un **algorithme** qui détermine les réels α et β de la forme canonique d'une fonction du second degré.

n°5 A partir d'une parabole

Le graphique ci-contre donne la courbe représentative d'un trinôme défini sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax^2+bx+c$:

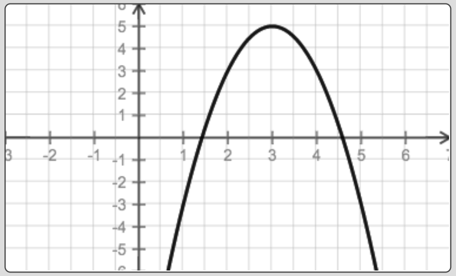
1. Donner par lecture graphique $f(0)$; $f(-1)$; $f(-2)$.
2. En déduire a, b et c puis l'expression de f.



n°6 A partir de la forme canonique

Ci-contre est donnée la représentation graphique $\mathcal{C}_f$ d'une fonction trinône f définie sur $\mathbb{R}$ par sa forme canonique $f(x)=a(x-\alpha)^2+\beta$.

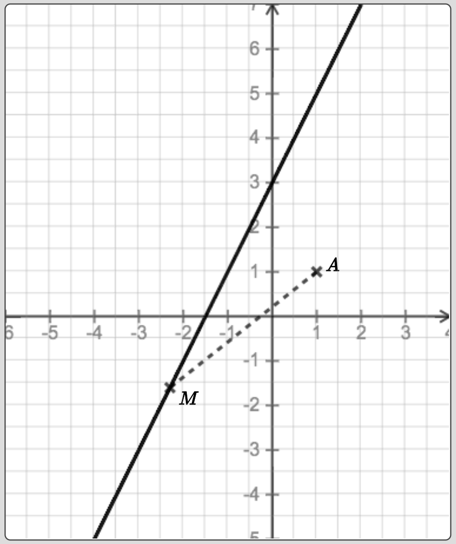
1. Lire graphiquement les coordonnées du sommet de la parabole représentant la fonction f.
2. Déterminer l'expression de f.



n°7

On considère la droite (d) d'équation $y=2x+3$ et A le point de coordonnées $(1;1)$. M est un point quelconque de la droite (d) et on note x l'abscisse de M. On considère le point B de coordonnées $(0;3)$.
On définit la fonction f par : $f(x)=AM^2$.

1. Justifier que l'ordonnée de M est $y_M=2x+3$. Vérifier que $f(x)=5x^2+6x+5$.
2. Vérifier que l'expression $5(x+0,6)^2+3,2$ est la forme canonique du trinôme f.
3. Étudier les variations de la fonction f. Pour quelle valeur x_0 la fonction atteint-elle son extremum ?
4. M_0 est le point de la droite (d) tel que la distance AM^2 soit minimale. Justifier que les coordonnées de M_0 sont $(-0,6;1,8)$.
5. Vérifier que B est un point de la droite (d).
6. Déterminer la nature du triangle ABM_0. Que peut-on dire des droites (AM_0) et (d) ?



$n°8$ Vases

Un artisan fabrique entre 0 et 60 vases par jour et estime que le coût de production de x vases est modélisé par la fonction C donnée par $C(x) = x^2 - 10x + 500$. On note $R(x)$ la recette, en euros, correspondant à la vente de x vases fabriqués.

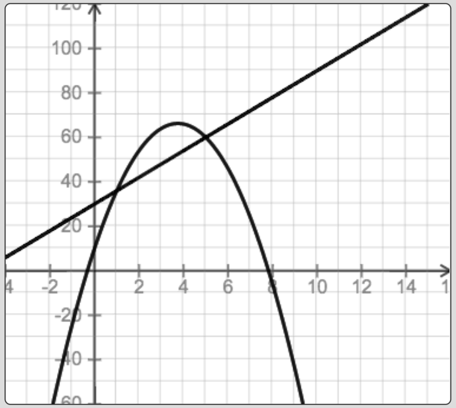
Un vase est vendu 50 €.

1. Exprimer $R(x)$ en fonction de x.
2. Calculer le coût, la recette et le bénéfice réalisés lorsque l'artisan vend 50 vases.
3. Vérifier que le bénéfice, en euros, réalisé par l'artisan est donné par la fonction B dont l'expression est : $B(x) = -x^2 + 60x - 500$.
4. Développe l'expression : $-(x - 30)^2 + 400$. En déduire le nombre de vases à vendre pour réaliser un bénéfice maximum.

$n°9$ Position relative

Voici la droite (d) d'équation $y = 6x + 30$ et la parabole $\mathcal{P}$ représentant la fonction f :
$f(x) = -4x^2 + 30x + 10$.

1. Démontrer, qu'étudier les positions relatives de la droite (d) et de la parabole $\mathcal{P}$ revient à résoudre l'inéquation $-4x^2 + 24x - 20 \geqslant 0$.
2. Vérifier que l'expression $5(x + 0,6)^2 + 3,2$ est la forme canonique du trinôme f.
3. Vérifier que, pour tout réel x :
$-4x^2 + 24x - 20 = -4(x - 3)^2 + 16$.
4. Résoudre alors l'inéquation
$-4x^2 + 24x - 20 \geqslant 0$.
5. Conclure.



$n°10$ Une parabole et 3 points

La parabole $\mathcal{P}$ coupe l'axe des ordonnées en $A(0;3)$ et passe par $B(1;-1)$ et $C(3;1)$. Déterminer son équation sous la forme $y = ax^2 + bx + c$ puis sous la forme canonique. Tracer cette parabole.

$n°11$ Dans un théâtre

Le directeur d'une salle de théâtre a remarqué qu'à 40 € la place, il peut compter jusqu'à 500 spectateurs et que chaque baisse de $2,50$ € lui amène 100 personnes de plus.

Soit x le nombre de baisses du prix de la place de $2,50$ €. On modélise cette situation par la fonction g.

1. Déterminer l'expression de la fonction g.
2. Dresser le tableau de variation de g puis tracer sa courbe représentative dans un repère.
3. Combien doit-il faire payer la place pour avoir une recette maximale ?

$n°12$ Une belle volée

Un tennisman frappe droit devant lui une volée à $1\ m$ du filet alors que la balle est à $0,9\ m$ de hauteur en A. La balle franchit le filet en B à une hauteur de $1,1\ m$ et atteint en C une hauteur maximale de $1,3\ m$. La longueur d'un terrain de tennis est $23,77\ m$. La balle sortira-t-elle du cours ?

N_1 Définitions et propriétés

D *Fonction inverse*

Une fonction **inverse** f est définie par $f(x) = \dfrac{1}{ax+b}$ où a et b sont deux nombres réels tels que $a \neq 0$.
(c'est l'inverse d'une fonction affine).

P *Ensemble de définition*

Soit f une fonction inverse telle que $f(x) = \dfrac{1}{ax+b}$ alors son ensemble de définition est :
$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{\frac{-b}{a}\} =]-\infty; \frac{-b}{a}[\cup]\frac{-b}{a}; +\infty[$
En effet comme on ne peut pas "diviser" par 0, il faut donc que $ax + b \neq 0$

P *Tableau de variation*

On considère une fonction inverse $f(x) = \dfrac{1}{ax+b}$ avec $a \neq 0$. Si $a = 0$ cette fonction inverse est **constante** et vaut $f(x) = \frac{1}{b}$.

si $a > 0$

x	$-\infty$	$\frac{-b}{a}$	$+\infty$
f	$\searrow$	‖	$\searrow$

si $a < 0$

x	$-\infty$	$\frac{-b}{a}$	$+\infty$
f	$\nearrow$	‖	$\nearrow$

Pour chaque fonction inverse suivante, dresser le tableau de variation :

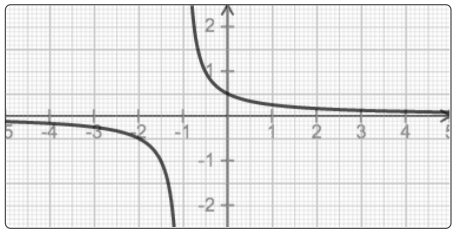
1. $f_1 = \dfrac{1}{2x-4}$
2. $f_2 = \dfrac{1}{12-6x}$
3. $f_3 = \dfrac{1}{-x-2}$
4. $f_4 = \dfrac{1}{x}$
5. $f_5 = \dfrac{1}{\frac{x}{3}+1}$
6. $f_6 = \dfrac{1}{2-\sqrt{2}x}$

N_2 Représentation graphique d'une fonction inverse

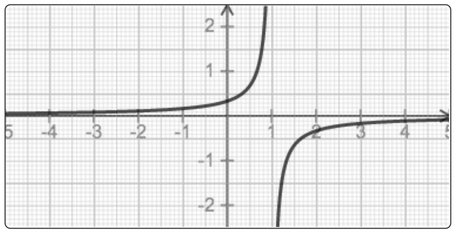
P *Représentation graphique*

On considère une fonction inverse $f(x) = \dfrac{1}{ax+b}$. La représentation graphique $\mathcal{C}_f$ de f est une **hyperbole**.

si $a > 0$



si $a < 0$



Pour chaque fonction inverse suivante, tracer la représentation graphique :

1. $f_1 = \dfrac{1}{3x-9}$
2. $f_2 = \dfrac{1}{2-4x}$
3. $f_3 = \dfrac{1}{-x-1}$
4. $f_4 = \dfrac{1}{x}$
5. $f_5 = \dfrac{1}{\frac{x}{2}-1}$
6. $f_6 = \dfrac{1}{1-\sqrt{2}x}$

N_3 Signe d'une fonction inverse

P *Signe d'une fonction inverse*

On considère une fonction affine $f(x) = \dfrac{1}{ax+b}$:

si $a > 0$

x	$-\infty$		$\frac{-b}{a}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	‖	$+$	

si $a < 0$

x	$-\infty$		$\frac{-b}{a}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	‖	$-$	

Déterminer le tableau de signe de chaque fonction suivante :

1. $f_1 = \dfrac{-7}{x-4}$
2. $f_2 = \dfrac{8}{6-3x}$
3. $f_3 = \dfrac{-9}{-2x-2}$
4. $f_4 = \dfrac{3}{x}$
5. $f_5 = \dfrac{-1}{\frac{x}{3}+1}$
6. $f_6 = \dfrac{3}{1-\sqrt{3}x}$

N_4 Fonction $\frac{1}{u}$

Soit u une fonction définie sur D_u telle pour tout $x \in D_u$; $u(x) \neq 0$.

D *Définition*

La fonction $\frac{1}{u}$ est définie sur D_u et par : $(\frac{1}{u})(x) = \frac{1}{u(x)}$

P *Propriété : variations*

Si u est monotone sur un intervalle I et si pour tout $x \in I$, $u(x) \neq 0$ alors la fonction $\dfrac{1}{u}$ a le sens de variation contraire à celui de u sur I.

Construire un tableau de variation des fonctions suivantes sur leur ensemble de définition :

1. $f_1 = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$
2. $f_2 = \dfrac{1}{x^2}$
3. $f_3 = \dfrac{1}{x^2+1}$

N_5 Fonction homographique

D *Fonction homographique*

Une fonction **homographique** f est définie par $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ où a, b, c et d sont quatre nombres réels tels que $c \neq 0$. (c'est le quotient de deux fonctions affines).

P *Ensemble de définition*

Soit f une fonction homographique telle que $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ alors son ensemble de définition est :

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{\frac{-d}{c}\} =]-\infty;\frac{-d}{c}[\cup]\frac{-d}{c};+\infty[$

En effet comme on ne peut pas "diviser" par 0, il faut donc que $cx+d \neq 0$

Pour chaque fonction homographique suivante, donner l'ensemble de définition :

1. $f_1 = \dfrac{1}{2x-4}$
2. $f_2 = \dfrac{1}{12-6x}$
3. $f_3 = \dfrac{1}{-x-2}$
4. $f_4 = \dfrac{1}{x}$
5. $f_5 = \dfrac{1}{\frac{x}{3}+1}$
6. $f_6 = \dfrac{1}{2-\sqrt{2}x}$

N_5 Signe d'une fonction homographique

P *Signe*

Soit f une fonction homographique telle que $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ avec $a \neq 0$ et $c \neq 0$:

Dans le cas où $\dfrac{-b}{a} \leqslant \dfrac{-d}{c}$

x	$-\infty$		$\frac{-b}{a}$		$\frac{-d}{c}$		$+\infty$
$(ax+b)$		$-$	0	$+$		$+$	
$(cx+d)$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	‖	$+$	

Dans le cas où $\dfrac{-b}{a} \geqslant \dfrac{-d}{c}$

x	$-\infty$		$\frac{-d}{c}$		$\frac{-b}{a}$		$+\infty$
$(ax+b)$		$-$	0	$-$		$+$	
$(cx+d)$		$-$		$+$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	‖	$-$	0	$+$	

Pour chaque fonction homographique suivante, dresser un tableau de signes :

1. $f_1 = \dfrac{1}{2x-4}$
2. $f_2 = \dfrac{1}{12-6x}$
3. $f_3 = \dfrac{1}{-x-2}$
4. $f_4 = \dfrac{1}{x}$
5. $f_5 = \dfrac{1}{\frac{x}{3}+1}$
6. $f_6 = \dfrac{1}{2-\sqrt{2}x}$

$n°1$ Fonction f

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$

1. Donner l'ensemble de définition de f
2. Dresser le tableau de signes de f
3. Recopier et compléter le tableau suivant :

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$									

4. Tracer la représentation graphique de f

N_1 *Définitions et propriétés*

D *Fonction inverse*

Une fonction **racine carrée** f est définie par $f(x) = \sqrt{ax+b}$ où a et b sont deux nombres réels tels que $a \neq 0$. (c'est la racine carrée d'une fonction affine).

P *Ensemble de définition*

Soit f une fonction inverse telle que $f(x) = \sqrt{ax+b}$ alors son ensemble de définition est :
$\mathcal{D}_f = [\frac{-b}{a}; +\infty[$ si $a > 0$ et $\mathcal{D}_f =]-\infty; \frac{-b}{a}]$ si $a < 0$
En effet comme on ne peut pas avoir de nombre négatif sous la racine carrée, il faut donc que $ax + b \geqslant 0$

P *Tableau de variation*

On considère une fonction racine carrée $f(x) = \sqrt{ax+b}$ avec $a \neq 0$. Si $a = 0$ cette fonction inverse est **constante** et vaut $f(x) = \sqrt{b}$ si $b \geqslant 0$.

si $a > 0$

x	$\frac{-b}{a}$ $\qquad$ $+\infty$
f	$\nearrow$

si $a < 0$

x	$-\infty$ $\qquad$ $\frac{-b}{a}$
f	$\searrow$

Pour chaque fonction affine suivante, donner le coefficient directeur, l'ordonnée à l'origine puis dresser le tableau de variation :

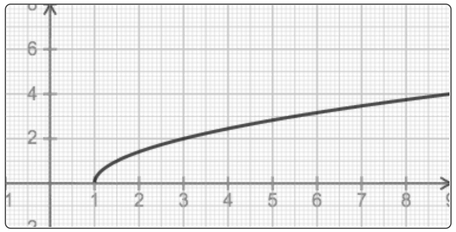
1 $f_1 = 4x - 6$
2 $f_2 = -3x + 9$
3 $f_3 = -3x$
4 $f_4 = -9$
5 $f_5 = 6 - 2x$
6 $f_6 = 2 + 8x$
7 $f_7 = 6x$
8 $f_8 = 2(5 - 2x)$
9 $f_9 = -3(2x + 1)$

N_2 *Représentation graphique d'une fonction racine carrée*

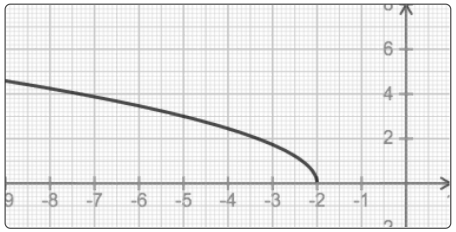
P *Représentation graphique*

On considère une fonction inverse $f(x) = \sqrt{ax+b}$. La représentation graphique $\mathcal{C}_f$ est :

si $a > 0$



si $a < 0$



Pour chaque fonction affine suivante, donner le coefficient directeur, l'ordonnée à l'origine puis tracer sa représentation graphique :

1 $f_1 = 4x - 6$
2 $f_2 = -3x + 9$
3 $f_3 = -3x$
4 $f_4 = -9$
5 $f_5 = 6 - 2x$
6 $f_6 = 2 + 8x$
7 $f_7 = 6x$
8 $f_8 = 2(5 - 2x)$
9 $f_9 = -3(2x + 1)$

N_3 *Signe d'une fonction racine carrée*

P *Signe d'une fonction racine carrée*

On considère une fonction affine $f(x) = \sqrt{ax+b}$:

si $a > 0$

x	$\frac{-b}{a}$ $\qquad$ $+\infty$
$f(x)$	$+$

si $a < 0$

x	$-\infty$ $\qquad$ $\frac{-b}{a}$
$f(x)$	$+$

Pour chaque fonction affine suivante, donner le coefficient directeur, l'ordonnée à l'origine puis tracer sa représentation graphique :

1 $f_1 = 4x - 6$
2 $f_2 = -3x + 9$
3 $f_3 = -3x$
4 $f_4 = -9$
5 $f_5 = 6 - 2x$
6 $f_6 = 2 + 8x$
7 $f_7 = 6x$
8 $f_8 = 2(5 - 2x)$
9 $f_9 = -3(2x + 1)$

N_4 *Fonction $\sqrt{u}$*

Soit u une fonction définie sur D_u telle pour tout $x \in D_u$; $u(x) \geqslant 0$.

D *Définition*

La fonction $\sqrt{u}$ est définie sur D_u et par : $(\sqrt{u})(x) = \sqrt{u(x)}$

P *Propriété : variations*

Si u est monotone sur un intervalle I et si pour tout $x \in I$, $u(x) \geqslant 0$ alors la fonction $\sqrt{u}$ a le même sens de variation que u sur I.

Construire un tableau de variation des fonctions suivantes sur leur ensemble de définition :

1 $f_1(x) = 3x^2$
2 $f_2(x) = |x| - 4$
3 $f_3(x) = \sqrt{x} - 1$
4 $f_4(x) = \frac{1}{x} - 5$

N_1 Repère et coordonnées

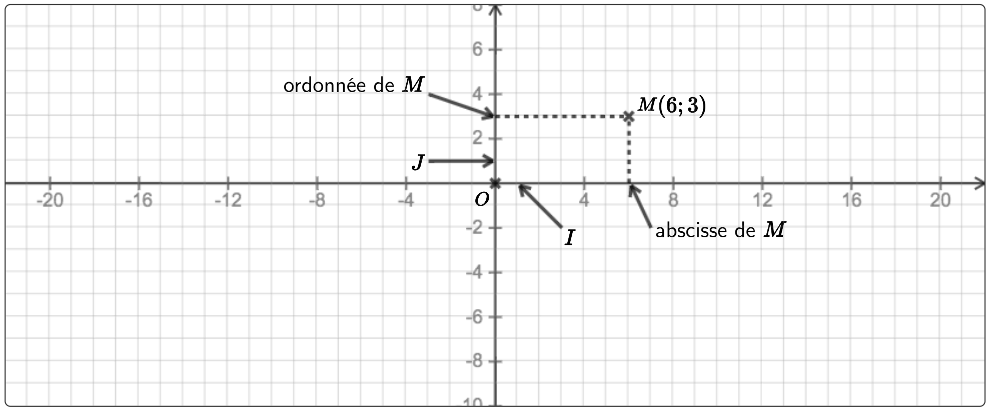
Définition : repère

Un répère c'est donner trois points O ; I et J non alignés. On note un repère $(O;I;J)$ avec :
• O est l'**origine** du repère.
• La droite (OI) est l'**axes des abscisses** (orienté de O vers I). L'axe des abscisses $(0I)$ est très fréquemment horizontal.
• La droite (OJ) est l'**axes des ordonnées** (orienté de O vers J). L'axe des abscisses $(0I)$ est très fréquemment vertical.
• La longueur OI est l'unité sur l'axe des abscisses qui correspond à la distance entre deux graduations sur cet axe.
• La longueur OJ est l'unité sur l'axe des ordonnées qui correspond à la distance entre deux graduations sur cet axe.

Dans la grande majorité des cas le répère est **orthogonal** c'est à dire que le triangle OIJ est rectangle en O (quand ce n'est pas spécifié, le repère est orthogonal).
Quand le triangle OIJ est isocèle-rectangle en O ($OI = OJ$) on dit que le répère $(O;I;J)$ est **orthonormé**.

Définition : coordonnées

On considère un repère $(O;I;J)$. Un point est repéré par un couple de deux réels. Le premier réel est le répérage sur l'axe des abscisses et correspond à l'abscisse du point. Le deuxième réel est le répérage sur l'axe des ordonnées et correspond à l'ordonnées du point. Le couple de ces deux réels est appelé **coordonnées** du point. Pour le point M on note ses coordonnées $M(x;y)$ où x est l'abscisse du point M et y son ordonnée.



Dans un repère $(0;I;J)$: $O(0;0)$; $I(1;0)$ et $J(0;1)$

1. Construire un repère orthonormé $(0;I;J)$ d'unité $2\ cm$
   a) Placer $A(2;-2)$; $B(5;4)$ et $C(9;3)$
   b) Placer le point D pour que $ABCD$ soit un parallèlogramme. Donner les coordonnées de D.
   c) Donner les coordonnées de D.
2. Construire un repère orthonormé $(0;I;J)$ d'unité $2\ cm$
   a) Placer $A(2;-2)$; $B(5;4)$ et $C(9;3)$
   b) Placer le point D pour que $ABCD$ soit un parallèlogramme. Donner les coordonnées de D.
   c) Donner les coordonnées de D.

N_2 Milieu d'un segment

Propriété

On considère un repère $(O;I;J)$ et deux points A et B tels que $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$. Le point I, milieu du segment $[AB]$ a pour coordonnées : $I\left(\dfrac{x_A+x_B}{2};\dfrac{y_A+y_B}{2}\right)$

Dans un repère $(O;I;J)$, on donne les points : $R(-1;4)$; $S(-2;1)$; $T(3;0)$ et $U(4;3)$

1. Construire $(O;I;J)$ puis placer les points R ; S ; T et U
2. Calculer les coordonnées du milieu de $[RT]$ et $[SU]$. Que conclure ?

N_3 Longueur d'un segment

Propriété

On considère un repère **orthonormé** $(O;I;J)$ et deux points A et B tels que $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$. La longueur du segment $[AB]$ vaut : $AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$

Dans un repère **orthonormé** $(O;I;J)$, on donne les points : $R(1;4-1$; $S(-2;0)$; $T(0;6)$ et $U(3;5)$

1. Construire $(O;I;J)$ puis placer les points R ; S ; T et U
2. Calculer RT et SU. Que conclure ?

n°1 Triangles équilatéraux

Dans un repère orthonormé $(O;I,J)$, on considère les points A et B de coordonnées $(2;0)$ et $(5;0)$.

1. On appelle C le point d'ordonnée positive tel que ABC soit un triangle équilatéral. Déterminer les coordonnées du point C.
2. Soit G le centre de gravité du triangle ABC. Déterminer les coordonnées du point G.
3. Les points I, J et K sont les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[AC]$ et $[BC]$.
   a) Calculer les coordonnées des points I, J et K.
   b) Démontrer que le triangle IJK est équilatéral.
   c) Démontrer que le point G est le centre de gravité de IJK.

n°2 Rectangle et triangle rectangle

On munit le plan d'un repère orthonormé $(O;I,J)$. On place les points suivants :
• $T(-2,2;1,2)$ • $A(-1,2;3,6)$ • $C(6;0,6)$

1. Calculer les valeurs exactes des longueurs des trois côtés du triangle TAC.
2. Démontrer que le triangle TAC est rectangle.
3. On appelle K le milieu de $[TC]$. Calculer les coordonnées de K.
4. Quelles sont les coordonnées du point E tel que $ECAT$ soit un rectangle ?

n°3 Carré et triangle isocèle

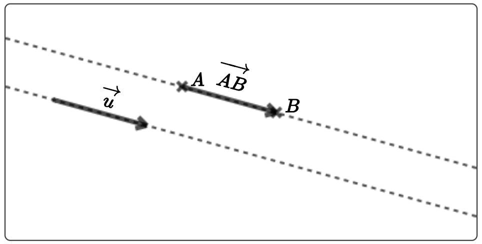
On munit le plan d'un repère orthonormé $(O;I,J)$. On place les points suivants :
• $S(-3,2;3,2)$ • $A(8;1,6)$ • $W(3,2;8)$ • $P(1,6;-3,2)$

1. Calculer les longueurs des trois côtés de SWA.
2. Montrer que le triangle SWA est isocèle rectangle.
3. Calculer les coordonnées des milieux des segments $[SA]$ et $[WP]$.
4. Montrer que $SWAP$ est un carré.

N_1 *Vecteur*

D *Définition : vecteur*

Un **vecteur** $\overrightarrow{u}$ est associé à une translation.
Le point B est le symétrique du point A par la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ quand $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$ c'est à dire :



• les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{u}$ ont même longueur. On parle de **norme** pour un vecteur et on note

$AB = ||\overrightarrow{AB}|| = ||\overrightarrow{u}||$

• les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{u}$ ont la même direction c'est à dire qu'ils sont portés par deux droites parallèles.

• les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{u}$ ont le même sens.

D *Définition : vecteur nul*

Le vecteur associé à la translation qui transforme un point en lui-même est le **vecteur nul** que l'on note $\overrightarrow{0}$.
$\overrightarrow{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{MM}$

D *Définition : opposé*

Le vecteur $\overrightarrow{BA}$ associé à la translation qui transforme B en A est le **vecteur opposé** à $\overrightarrow{AB}$.
$\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$ ou $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$

P *Propriété : parallélogramme*

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si $ABCD$ est un parallélogramme.

P *Propriété : milieu*

$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ si et seulement si I est le milieu du segment $[AB]$.

1 Soit 2 parallélogrammes $ABCD$ et $DCEF$.
- **a)** Faire une figure.
- **b)** Démonter que $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{EF}$

2 Soient 6 points G , H, I, J, K , L tel que $\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{JI}$ et $\overrightarrow{IJ} = -\overrightarrow{KL}$.
- **a)** Faire une figure.
- **b)** Donner tous les parallélogrammes présents. Justifier.

3 Soit O milieu de $[AB]$ et le point D est le symétrique du point C par rapport à O.
- **a)** Faire une figure.
- **b)** Démontrer que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DB}$ ou que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB}$

4 Soit le point A tel que $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AC}$. Faire une figure puis indiquer la position du point A. Justifier.

5 Soit le point M tel que $\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \overrightarrow{0}$. Faire une figure puis indiquer la position du point M. Justifier.

N_2 *Addition de deux vecteurs*

P *Propriétés*

Addition

Soient $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ 2 vecteurs :
- $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AB}$
- $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{AB}$

Relation de Chasles

Soient A, B et C trois points alors : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

Propriété du parallélogramme

Soient A, B, C et D quatre points.
$ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

Démontrer la propriété du parallélogramme.

N_3 *Coordonnées d'un vecteur*

D *Définition*

Dans un repère d'origine O, le point M a pour coordonnées $(a; b)$ alors le vecteur $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OM}$ a les mêmes coordonnées que le point M et on note : $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

P *Propriété : unicité*

Deux vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}$ sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes coordonnées c'est à dire $a_1 = a_2$ et $b_1 = b_2$.

P *Propriété*

Dans un repère, $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ alors : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$

1 Dans un repère orthonormé, on a $A(1; 2)$, $B(5, 6)$, $C(8; 9)$ et $D(10; 67)$:
- **a)** Placer ces 4 points.
- **b)** Démontrer que $ABCD$ est un parallélogramme.
- **c)** Donner les coordonnées de $\overrightarrow{AD}$ puis $\overrightarrow{BC}$.

2 Dans un repère orthonormé, on a $A(1; 2)$, $B(5, 6)$, $C(8; 9)$:
- **a)** Placer ces 3 points.
- **b)** Placer un point D pour que $ABCD$ est un parallélogramme.
- **c)** Donner les coordonnées de $\overrightarrow{CD}$.
- **d)** Donner les coordonnées de $\overrightarrow{AD}$ puis de $\overrightarrow{BC}$.

N_4 *Norme d'un vecteur*

D *Définition*

Si $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans un repère orthonormé alors $||\overrightarrow{u}|| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Calculer la norme des vecteurs :

1 $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

2 $\overrightarrow{AB}$ avec $A(-1; 8)$ et $B(6; 12)$.

3 $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$

N_5 Propriétés

P Addition de deux vecteurs

Soient deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ alors $\vec{w}\begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 \end{pmatrix}$

P Multiplication par un réel

Soit un vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$ et λ un réel et $\vec{w} = \lambda\vec{u}$ alors $\vec{w}\begin{pmatrix} \lambda \times a_1 \\ \lambda \times b_1 \end{pmatrix}$

P Propriétés

Soit deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ et λ un réel tels que $\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{CD}$ alors :

- Si $\lambda > 0$ alors $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont le même sens et $AB = \lambda CD$
- Si $\lambda < 0$ alors $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont de sens contraire et $AB = -\lambda CD$

1. Soient $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$. Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{BC}$.
2. Soient $E(-1;2)$; $F(2;-3)$ et $G(-3;4)$. Déterminer les coordonnées de $2\overrightarrow{EF} - 3\overrightarrow{FG}$.

N_6 Colinéarité de deux vecteurs

D Définition

Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** quand il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$

P Propriété

Soient deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si leurs coordonnées sont **proportionnelles** c'est à dire $xy' = x'y$ ou $xy' - x'y = 0$. C'est les produits en croix des coordonnés de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Déterminer si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires. Si oui, déterminer le réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$ (a et b sont deux réels) :

1. $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -11 \\ 5 \end{pmatrix}$
2. $\vec{u}\begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} \frac{15}{4} \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix}$
3. $\vec{u}\begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -2 \\ -3\sqrt{2} \end{pmatrix}$

N_7 Droites parallèles

P Propriété

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires si et seulement si les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

Tracer les droites (AB) et (CD) puis déterminer si elles sont parallèles :

1. $A(3;-2)$, $B(-1;-1)$, $C(-3;2)$ et $D(1;3)$
2. $A(-9;-2)$, $B(1;-3)$, $C(3;-2)$ et $D(1;-3)$
3. $A(-1;2)$, $B(-1;3)$, $C(3;2)$ et $D(4;2)$
4. $A(-1;2)$, $B(-1;3)$, $C(3;2)$ et $D(4;2)$

N_8 Points alignés

P Propriété

Les points A , B et C sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Déterminer si les points sont alignés:

1. $F\left(\frac{2}{3};1\right)$, $G\left(-2;\frac{1}{3}\right)$,et $H(5;2)$
2. $B(0;0)$, $C(\sqrt{2};\sqrt{6})$ et $D(4;4\sqrt{3})$
3. $E(1;2)$, $F(-3;8)$ et $G(3;-1)$
4. $A(-9;4)$, $B(1;-1)$ et $C(4;-2)$
5. $A(-4;4)$, $T(-4;-6)$ et $P(-3;2)$
6. $C(\pi;\pi)$, $D(1;2-\pi)$ et $H(\pi-4;\pi-2)$

N_9 Vecteurs directeurs

D Définition

Un vecteur $\vec{u}$ est un vecteur **directeur** de la droite (AB) quand les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

P Propriété

Deux droites sont parallèles si et seulement si un vecteur directeur de l'une est colinéaire à un vecteur directeur de l'autre.

1. Soient $A(3;2)$ et $B(6;3)$. Tracer (AB).
2. Donner 3 vecteurs directeurs de la droite (AB).
3. Placer $C(1,0)$
4. Placer un point D pour que (AB) et (CD) soient parallèles.
5. Donner 3 vecteurs directeurs de la droite (CD).

N_{10} équation de droite

P Propriétés

- Soit a et b deux réels. Le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite d'équation $y = ax + b$ avec a qui est le **coefficient directeur** de cette droite.
- Soit k un réel. Le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite verticale d'équation $x = k$

1. Déterminer l'équation d'une droite de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ et passant par $A(3;5)$.
2. Déterminer l'équation d'une droite de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}$ et passant par $B(1;-2)$.

N_{11} équation réduite de droite

Propriétés

- Soit $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ deux points tels que $x_A \neq x_B$. Le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\ \dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (AB) d'équation réduite :

$y=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}x+\dfrac{x_By_A-y_Bx_A}{x_B-x_A}$ avec $\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$ qui est **le coefficient directeur** de la droite (AB).

- Soit $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ deux points tels que $x_A = x_B$. Le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}0\\x_A\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite verticale d'équation $x=x_A$

Corrolaire

Deux droites non-verticales sont parallèles si et seulement si elles ont le même coefficient directeur.

1. Déterminer l'équation d'une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$ et passant par $A(3;5)$.
2. Déterminer l'équation d'une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}2\\8\end{pmatrix}$ et passant par $B(1;-2)$.
3. On considère les points $A(2;3)$; $B(4;7)$ et $C(4;7)$. Tracer (AB) puis déterminer son équation réduite. Déterminer une équation réduite de la droite parallèle à (AB) et passant par C, la tracer.
4. Dans un repère orthonormé, on a $E(-2;3)$ et $F(-2;-1)$. Tracer (EF) puis déterminer son équation réduite.

N_{12} équation cartésienne de droite

Définition

Une équation d'une droite (d) de la forme $ax+by+c=0$ est appelée une **équation cartésienne** de (d).

Propriétés

- Soit A un point et $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul et (d) la droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ et passant par A. Un point M appartient à (d) si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires.
- La droite d'équation $ax+by+c=0$ a pour vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ et passe par le point de coordonnées $\left(1;\dfrac{a-c}{b}\right)$.
- Réciproquement une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ a pour équation $ax+by+c=0$

1. Déterminer l'équation cartésienne d'une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$ et passant par $A(2;5)$.
2. Déterminer l'équation cartésienne d'une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\\sqrt{5}\end{pmatrix}$ et passant par $C(0;2)$.
3. On considère les points $A(2;3)$; $B(4;7)$ et $C(4;7)$. Tracer (AB) puis déterminer son équation cartésienne. Déterminer une équation cartésienne de la droite parallèle à (AB) et passant par C, la tracer.
4. Dans un repère orthonormé, on a $E(-2;3)$ et $F(-2;-1)$. Tracer (EF) puis déterminer son équation cartésienne.

N_{13} Intersection de deux droites

Par le calcul

On considère deux droites (d_1) et (d_2) d'équation cartésienne $a_1x+b_1y+c_1=0$ (ou réduite $y=a_1x+b_1$) et $a_2x+b_2y+c_2=0$ (ou réduite $y=a_2x+b_2$). Le point d'intersection (s'il existe) a pour coordonnées la solution du système :

$$\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1 &= 0\\ a_2x+b_2y+c_2 &= 0\end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases}y &= a_1x+b_1\\ y &= a_2x+b_2\end{cases}$$

Graphiquement

On considère deux droites (d_1) et (d_2). Il suffit de tracer ces deux droites et de lire les coordonnées du point d'intersections. Attention, les coordonnées sont toujours des valeurs approchées.

1. On considère les points $A(2;3)$; $B(4;7)$; $C(4;7)$ et $D(4;7)$. Tracer (AB) et (CD) puis déterminer les coordonnées du point d'intersection de (AB) et (CD) (en utilisant les équations cartésiennes). Vérifier graphiquement.
2. On considère les points $A(2;3)$; $B(4;7)$; $C(4;7)$ et $D(4;7)$. Tracer (AB) et (CD) puis déterminer les coordonnées du point d'intersection de (AB) et (CD) (en utilisant les équations réduites). Vérifier graphiquement.

$n°1$ Triangle EFG

1. On considère un triangle EFG et H tel que : $\overrightarrow{EH}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{EG}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{EF}$. Faire une figure.
2. En écrivant $\overrightarrow{FH}=\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{EH}$, démontrer que $\overrightarrow{FH}$ et $\overrightarrow{FG}$ sont colinéaires.
3. Que peut-on en déduire concernant le point H ?

$n°2$ Une génération de droites

On considère le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$ où m est un nombre réel et le point $A(-2;0)$. Soit (d_m) la droite passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$.

1. Déterminer une équation cartésienne de (d_m).
2. Peut-on trouver m tel que le point $B(3;2)$ appartienne à (d_m) ?
3. Peut-on trouver m tel que (d_m) soit parallèle à la droite (D) d'équation $-5x+2y-7=0$?
4. Peut-on trouver m tel que (d_m) soit parallèle à la droite (D') d'équation $-4x+12=0$?
5. Quels sont les points du plan qui n'appartiennent à aucune droite (d_m) ?

$n°3$ Vecteurs directeurs de norme 1

Déterminer tous les vecteurs directeurs de norme 1 de la droite :

1. (d_1) d'équation $x-8=2$
2. (d_2) d'équation $2x+3y+5=0$
3. (d_3) d'équation $y=5x+3$
4. (d_3) d'équation $y=5x+3$
5. (d_3) d'équation $y=5x+3$
6. (d_3) d'équation $y=5x+3$
7. (d_3) d'équation $y=5x+3$
8. (d_3) d'équation $y=5x+3$

$n°4$ Droites parallèles

Dans chacun des cas suivants, déterminer une équation de la droite (d') parallèle à (d) passant par A.

1. $A(2;1)$ et (d) d'équation $-3x+y=0$
2. $A(-1;3)$ et (d) d'équation $-x-2y+1=0$
3. $A(1;1)$ et (d) d'équation $-\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{6}+4=0$
4. $A\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{3}\right)$ et (d) d'équation $-x+y-2=0$

$n°5$ Alignement

On considère un parallélogramme $ABCD$ et les points E et F définis par : • $\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{AD}$ • $\overrightarrow{AF}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

1. Faire une figure.
2. Que peut-on conjecturer sur les points B, F et E ?
3. Calculer $\overrightarrow{BE}$ en fonction de $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AC}$
4. Calculer $\overrightarrow{BF}$ en fonction de $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AC}$
5. En déduire que $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{BF}$ sont colinéaires.
6. Conclure.

$n°6$ Parallélisme et calcul vectoriel

On considère trois points non alignés A, B et C. Le point E est défini par $\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.

1. Faire une figure.
2. Établir une conjecture sur les droites (CE) et (AB).
3. Démontrer que $\overrightarrow{CE}=2\overrightarrow{AB}$.
4. Conclure.

$n°7$ Milieu et calcul vectoriel

On considère trois points non alignés A, B et C.

Les points P et Q sont définis par : $\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AQ}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

1. Faire une figure.
2. Que peut-on conjecturer sur le point Q ? Et sur B ?
3. Démontrer que $\overrightarrow{PC}=-2\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$. En déduire la position du point B.
4. Exprimer $\overrightarrow{BQ}$ en fonction de $\overrightarrow{BC}$. En déduire la position du point C.

$n°8$ Droites parallèles

On considère le point $A(-7;1)$ et la droite (D) d'équation réduite $y=-5x+1$. Déterminer x, abscisse du point B de coordonnées $(x;8)$ tel que les droites (AB) et (D) soient parallèles.

$n°9$ Points alignés

On considère les points A et B de coordonnées respectives $(1;-5)$ et $(-1;3)$. Déterminer y, ordonnée du point C de coordonnées $(2;y)$ tel que A, B et C soient alignés.

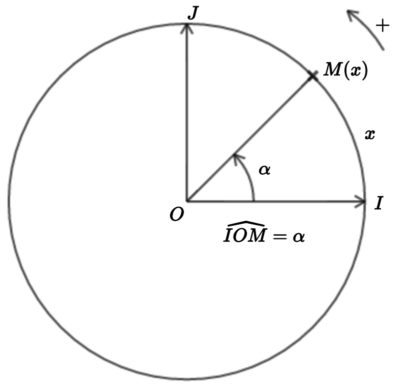
N_1 Cercle trigonométrique

Définition

Dans un repère orthonormé $(O;I;J)$, le **cercle trigonométrique** $(\mathcal{C})$ est le cercle de centre O et de rayon 1. Ce cercle est muni d'un sens de parcours appelé **sens direct** (sens inverse des aiguilles d'une montre).

La mesure en **radian** d'un angle correspond à la longueur de l'arc du cercle trigonométrique qu'il intercepte. La mesure en radian est **proportionnelle** à la mesure en degré.

Pour repérer un point M du cercle trigonométrique, on enroule autour du cercle un axe orienté, gradué, d'origine le point I. On peut alors associer, au point M, un réel x, abscisse d'un point de l'axe qui vient se superposer au point M.



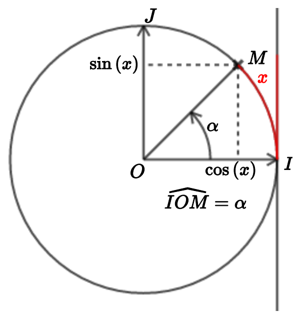
1. Convertir $\dfrac{\pi}{5}$, $\dfrac{5\pi}{2}$ et $\dfrac{-\pi}{4}$ en degré puis les placer sur le cercle trigonométrique.
2. Placer sur le cercle trigonométrique $-\dfrac{\pi}{3}$, $-\dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{11\pi}{8}$, $-\dfrac{5\pi}{8}$ et $\dfrac{17\pi}{6}$.
3. Soit un point A tel que $(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OA})=-\dfrac{\pi}{2}$. Donner 4 mesures différentes de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OA})$.

N_2 Coordonnées et cercle trigonométrique

Définition

On se place dans un repère orthonormé $(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ})$. Soit M un point sur le cercle trigonométrique tel que $(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OM})=x$ (x est donc la mesure principale de l'angle vecteur $(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OM})$) alors :
$M\Big(\cos(x);\sin(x)\Big)$ ou $M\Big(\cos x;\sin x\Big)$.

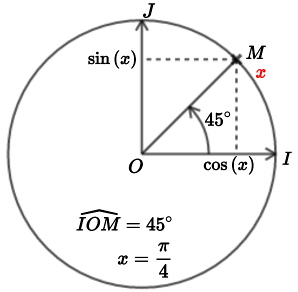
Pour $x\in\mathbb{R}$ et $k\in\mathbb{Z}$: \
\1 $(\cos x)^2+(\sin x)^2=1$ \
\2 $-1\leqslant\cos x\leqslant 1$ et $-1\leqslant\sin x\leqslant 1$ \
\3 $\cos(x+k\times 2\pi)=\cos x$ et $\sin(x+k\times 2\pi)=\sin x$



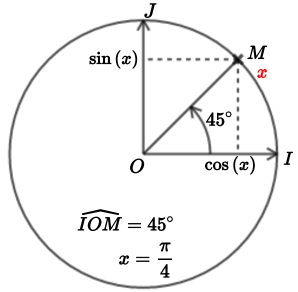
1. Convertir $\dfrac{\pi}{5}$, $\dfrac{5\pi}{2}$ et $\dfrac{-\pi}{4}$ en degré puis les placer sur le cercle trigonométrique.
2. Placer sur le cercle trigonométrique $-\dfrac{\pi}{3}$, $-\dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{11\pi}{8}$, $-\dfrac{5\pi}{8}$ et $\dfrac{17\pi}{6}$.
3. Soit un point A tel que $(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OA})=-\dfrac{\pi}{2}$. Donner 4 mesures différentes de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OA})$.

N_3 Valeurs usuelles

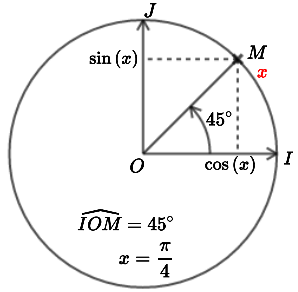
Propriétés



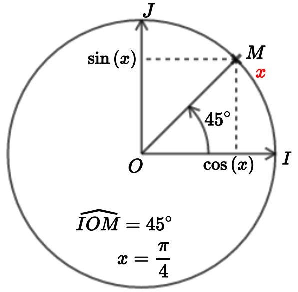
$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$



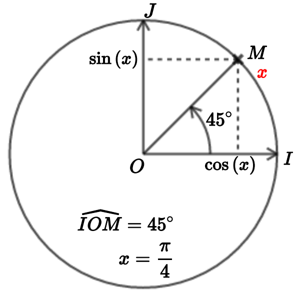
$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$



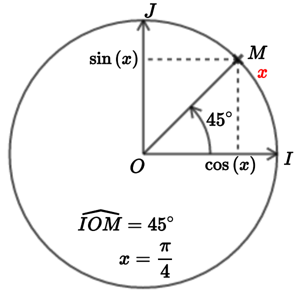
$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$



$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$



$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

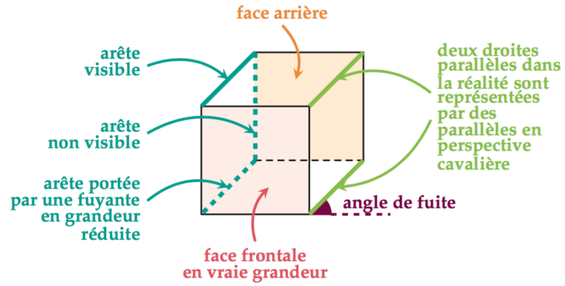


$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

N_1 Solides usuels

Définitions

- Un **solide** est un objet en relief. On ne peut pas le tracer en vraie grandeur sur une feuille de papier plane.
- Un **patron** permet de fabriquer le solide par pliage.
- La **perspective cavalière** permet de représenter le solide sur une feuille papier en donnant l'impression de la 3D.



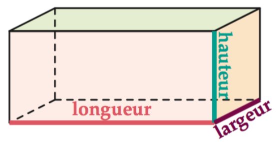
Solides usuels

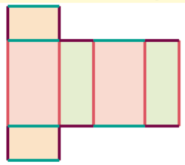
Parallélépipède rectangle

$\mathcal{V}$ = largeur × hauteur × profondeur

Le patron est composé de rectangles.

L'aire d'un rectangle est : $\mathcal{A}$ = Longueur × largeur





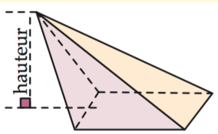
Les segments de la même couleur ont même mesure

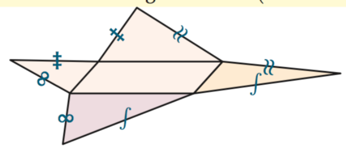
Pyramides

$\mathcal{V}$ = (Aire de la base × hauteur) ÷ 3

Le patron est composé d'un polygone et de triangles.

L'aire d'un triangle est : $\mathcal{A}$ = (base × hauteur) ÷ 2

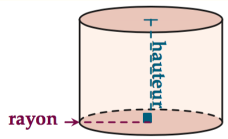


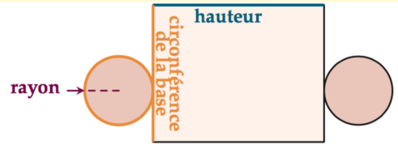


Cylindre de révolution

$\mathcal{V}$ = Aire de la base × hauteur

Le patron est composé d'un rectangle et de deux disques. L'aire d'un disque est : $\mathcal{A} = \pi \times \text{rayon}^2$





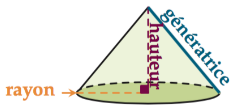
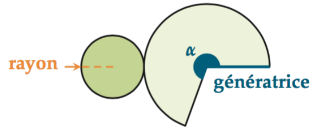
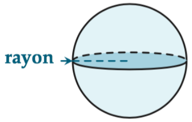
1 Convertir $\frac{\pi}{5}$, $\frac{5\pi}{2}$ et $\frac{-\pi}{4}$ en degré puis les placer sur le cercle trigonométrique.

2 Placer sur le cercle trigonométrique $-\frac{\pi}{3}$, $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{11\pi}{8}$, $-\frac{5\pi}{8}$ et $\frac{17\pi}{6}$.

3 Soit un point A tel que $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA}) = -\frac{\pi}{2}$. Donner 4 mesures différentes de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA})$.

N_2 Autres solides usuels

D Autres solides usuels

Cône de révolution	Le patron est composé d'un disque et d'une portion de
$\mathcal{V}$ = Aire de la base × hauteur ÷ 3	disque avec α = rayon ÷ génératrice × 360°
	
Sphère et boule	$\mathcal{V} = \frac{4}{3}\pi \times \text{rayon}^3$ $\mathcal{A} = 4 \times \pi \times \text{rayon}^2$
	La sphère n'a pas de patron.

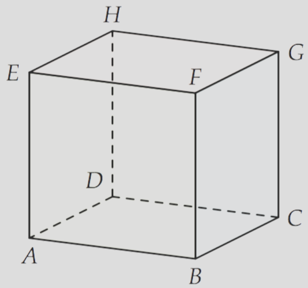
1 Convertir $\frac{\pi}{5}$, $\frac{5\pi}{2}$ et $\frac{-\pi}{4}$ en degré puis les placer sur le cercle trigonométrique.

2 Placer sur le cercle trigonométrique $-\frac{\pi}{3}$, $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{11\pi}{8}$, $-\frac{5\pi}{8}$ et $\frac{17\pi}{6}$.

3 Soit un point A tel que $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA}) = -\frac{\pi}{2}$. Donner 4 mesures différentes de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA})$.

$n°1$ Intersections de plans

On considère un parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$ et I un point de $[AB]$.



1 Reproduire la figure ci-contre et y placer le point I.

2 Construire sur cette figure :
- les intersections des plans (EHI) et (AFB);
- les intersections des plans (EHI) et (HDG);
- les intersections des plans (EHI) et (BDF);
- les intersections des plans (EHI) et (FBC).

N_1 Série statistique

D Définitions

Lors d'un relevé de mesures effectué sur un **caractère quantitatif** des individus d'une population, l'ensemble des données collectées constitue une série statistique : c'est une liste de nombres que l'on appelle généralement en statistique des **valeurs**.

- Une série statistique à caractère quantitatif est dite ordonnée après que les valeurs collectées ont été rangées dans l'ordre croissant (ou décroissant).
- L'**étendue** désigne l'écart entre la plus grande et la plus petite des valeurs prises par le caractère.
- L'**effectif total** désigne le nombre de valeurs présents dans la série statistique.

D Modalités

Les différentes valeurs possibles pour un caractère s'appellent les **modalités** du caractère.

- Si le nombre p de modalités, notées $x_1, x_2, \cdots, x_p$ rangées dans l'ordre croissant, est petit, on repésente une série statistique par un **tableau d'effectifs** :

Modalités du caractère	x_1	x_2	$\cdots$	x_p
Nombre de valeurs par modalité (**effectif**)	n_1	n_2	$\cdots$	n_p

L'étendue de cette série statistique vaut : $x_p - x_1$. Cette série statistique possède n_1 valeurs toutes égales à x_1 et n_p valeurs toutes égales à x_p. L'effectif total vaut : $n_1 + n_2 + \cdots + n_p$

- Si le nombre p de modalités est grand, on remplace la première ligne par des intervalles de modalités appelés **classe de valeurs**. On choisit généralement le centre de la classe pour représenter celle-ci :

Classe de modalités du caractère	$[a_1; a_2[$	$[a_2; a_3[$	$\cdots$	$[a_p; a_{p+1}]$
Centre de classe	$c_1 = \frac{a_1 + a_2}{2}$	$c_2 = \frac{a_2 + a_3}{2}$	$\cdots$	$c_p = \frac{a_p + a_{p+1}}{2}$
Nombre de valeurs par classe (**effectif**)	n_1	n_2	$\cdots$	n_p

L'étendue de cette série statistique vaut : $a_p - a_1$. Cette série statistique possède n_1 valeurs comprises entre a_1 et a_2 et n_p valeurs comprises entre a_p et a_{p+1}. L'effectif total vaut : $n_1 + n_2 + \cdots + n_p$

1 On a demandé aux élèves d'une classe de seconde de donner leur taille en cm. Voici leur réponse : 156 , 158 , 156 , 156 , 156 , 156 , 156 ,156 ,156 , 156

a) Dresser un tableau d'effectifs de cette série statistique.

d) Déterminer l'étendue et l'effectif total de cette série statistique.

2 On a demandé aux élèves d'une classe de seconde de donner le nombre d'enfant dans leur fatrie. Voici leur réponse : 1 , 1 , 1 , 2 , 2 , 2 , 2 ,3 ,2 , 4 , 2 , 3 , 2 , 2 , 2 , 1 , 1 , 1 , 4 , 2 , 1 , 1 , 2 , 3 , 3 , 3 , 2 , 2 , 4 , 2 , 3 , 2 , 1 , 4 , 1 , 2

a) Dresser un tableau d'effectifs de cette série statistique.

d) Déterminer l'étendue et l'effectif total de cette série statistique.

3 On lance un dé à six faces plusieurs fois. Voici le numéro des faces obtenues : 1, 1, 3, 3, 4 ,4 , 2, 3, 2, 4 , 5, 2, 6, 3, 2, 6, 6, 6, 5 , 1 , 2 , 4, 5, 4

a) Dresser un tableau d'effectifs de cette série statistique.

d) Déterminer l'étendue et l'effectif total de cette série statistique.

4 Voici des températures relevées à six heures du matin au mois de janvier : $-1,2$; 2; $-2,1$; $1,9$; $0,3$; $-0,3$; $-2,7$; $-2,1$; $-0,6$; $-1,7$; $-2,1$; $0,2$; $0,4$; $-2,8$; $-0,1$; $-0,8$

a) Dresser un tableau d'effectifs de cette série statistique.

d) Déterminer l'étendue et l'effectif total de cette série statistique.

N_2 *Fréquence d'apparition*

Définition

On considère une série statistique comportant p modalités (ou p classes) d'effectifs $n_1, \cdots, n_p$ et d'effectif total $N = n_1 + n_2 + \cdots + n_p$. La **fréquence d'apparition** de la modalité (ou de la classe) correspond à la proportion d'individus dont le caractère est égal à cette modalité (ou appartenant à cette classe). Ainsi, pour tout entier i compris entre 1 et p : $f_i = \dfrac{n_i}{N}$ et $f_1 + f_2 + \cdots + f_p = 1$

Le tableau ci-contre indique la répartition du nombre d'enfasnts de moins de 25 ans dans les familles des Bouches-du-Rhône en 1999 et 2009.

1. Construire un tableau avec les fréquence d'apparition en pourcentages (arrondir au dixième)
2. Construire un diagramme en barres comparatif de 1999 et 2009.

Nombre de famille avec	2009	1999
Aucun enfant	$244\,918$	$220\,109$
1 enfant	$131\,271$	$124\,597$
2 enfants	$109\,776$	$102\,135$
3 enfants	$35\,907$	$35\,708$
4 enfants et plus	$13\,311$	$14\,564$
Total	$535\,183$	$497\,113$

N_3 *Médiane*

Définition

Dans une série statistique ordonnée : une **médiane** partage les valeurs prises par le caractère en deux groupes de même effectif (soit 50% de l'effectif total).
La médiane correspond donc à la plus petite valeur prise par le caractère telle qu'<u>au moins</u> 50% des valeurs lui soient inférieures ou égales.

On a demandé à un groupe d'élèves de donner leur âge. Les réponses sont rassemblées ci-contre.

$16; 15; 15; 16; 17; 16; 18; 18; 16; 17; 17; 15; 16; 17; 16; 17; 18; 16; 15; 18; 17$

1. Déterminer la médiane (**<u>effectif total impair</u>**) en ordonnant la série statistique.

On a demandé à un groupe d'élèves de donner leur âge. Les réponses sont rassemblées ci-contre.

$16; 15; 15; 16; 17; 16; 18; 18; 16; 17; 17; 15; 16; 17; 16; 17; 18; 16; 15; 18; 17$

2. Déterminer la médiane (**<u>effectif total pair</u>**) en ordonnant la série statistique.

Les résultats d'un contrôle de vitesse dans une agglomération (vitesse limitée à $50\ km/h$) sont consignés dans le tableau ci-contre.

3. Déterminer la médiane en construisant un tableau avec les fréquences d'apparition en pourcentages et les **fréquences cumulées croissantes** d'apparition en pourcentages.

Vitesse en km/h	Effectif
$[20; 50[$	104
$[50; 70[$	54
$[70; 80[$	13
$[80; 90[$	7
$[90; 100[$	5
$[100; 130[$	2

Le tableau ci-contre indique la pointure d'un groupe d'élèves

4. Déterminer la médiane en construisant le polygone des **fréquences cumulées croissantes** d'apparition en pourcentages.

Pointure	Effectif
35	78
36	82
37	43
38	21
39	17
40	5

N_4 *Quartiles*

Définition

Le **premier quartile** d'une série statistique numérique est la plus petite valeur prise par le caractère telle qu'<u>au moins</u> 25% des valeurs lui soient inférieures ou égales. Le **troisième quartile** d'une série statistique numérique est la plus petite valeur prise par le caractère telle qu'<u>au moins</u> 75% des valeurs lui soient inférieures ou égales.
La médiane correspondrait au deuxième quartile soit a plus petite valeur prise par le caractère telle qu'<u>au moins</u> 50% des valeurs lui soient inférieures ou égales.

Le tableau ci-contre indique la répartition du nombre d'enfants de moins de 25 ans dans les familles des Bouches-du-Rhône en 1999 et 2009.

1. Déterminer la médiane, le premier et troisième quartiles en construisant un tableau avec les fréquences d'apparition en pourcentages et les **fréquences cumulées croissantes** d'apparition en pourcentages.

Nombre de famille avec	2009	1999
Aucun enfant	$244\,918$	$220\,109$
1 enfant	$131\,271$	$124\,597$
2 enfants	$109\,776$	$102\,135$
3 enfants	$35\,907$	$35\,708$
4 enfants et plus	$13\,311$	$14\,564$
Total	$535\,183$	$497\,113$

Le tableau ci-contre indique la répartition du nombre d'enfants de moins de 25 ans dans les familles des Bouches-du-Rhône en 1999 et 2009.

2. Déterminer la médiane, le premier et troisième quartiles en construisant le polygone des **fréquences cumulées croissantes** d'apparition en pourcentages.

Nombre de famille avec	2009	1999
Aucun enfant	$244\,918$	$220\,109$
1 enfant	$131\,271$	$124\,597$
2 enfants	$109\,776$	$102\,135$
3 enfants	$35\,907$	$35\,708$
4 enfants et plus	$13\,311$	$14\,564$
Total	$535\,183$	$497\,113$

Le tableau ci-contre indique la répartition du nombre d'enfants de moins de 25 ans dans les familles des Bouches-du-Rhône en 1999 et 2009.

3. Déterminer la médiane, le premier et troisième quartiles en construisant un tableau avec les fréquences d'apparition en pourcentages et les **fréquences cumulées croissantes** d'apparition en pourcentages.

Nombre de famille avec	2009	1999
Aucun enfant	$244\,918$	$220\,109$
1 enfant	$131\,271$	$124\,597$
2 enfants	$109\,776$	$102\,135$
3 enfants	$35\,907$	$35\,708$
4 enfants et plus	$13\,311$	$14\,564$
Total	$535\,183$	$497\,113$

Le tableau ci-contre indique la répartition du nombre d'enfants de moins de 25 ans dans les familles des Bouches-du-Rhône en 1999 et 2009.

4. Déterminer la médiane, le premier et troisième quartiles en construisant le polygone des **fréquences cumulées croissantes** d'apparition en pourcentages.

Nombre de famille avec	2009	1999
Aucun enfant	$244\,918$	$220\,109$
1 enfant	$131\,271$	$124\,597$
2 enfants	$109\,776$	$102\,135$
3 enfants	$35\,907$	$35\,708$
4 enfants et plus	$13\,311$	$14\,564$
Total	$535\,183$	$497\,113$

N_5 Moyenne

Définition

La **moyenne** d'une série statistique se note $\overline{x}$ et vaut :

• $\overline{x} = \dfrac{n_1 \times x_1 + n_2 \times x_2 + \cdots + n_p \times x_p}{n_1 + n_2 + \cdots + n_p}$
où $x_1, x_2, \cdots, x_p$ désignent les p modalités et $n_1, n_2, \cdots, n_p$ désignent les effectifs correspondants.

• $\overline{x} = \dfrac{n_1 \times c_1 + n_2 \times c_2 + \cdots + n_p \times c_p}{n_1 + n_2 + \cdots + n_p}$
où $c_1, c_2, \cdots, c_p$ désignent les centres des p classes de modalités et $n_1, n_2, \cdots, n_p$ désignent les effectifs correspondants.

Fréquences

La **moyenne** d'une série statistique se note $\overline{x}$ et vaut :

• $\overline{x} = f_1 \times x_1 + f_2 \times x_2 + \cdots + f_p \times x_p$
où $x_1, x_2, \cdots, x_p$ désignent les p modalités et $f_1, f_2, \cdots, f_p$ désignent les fréquences d'apparition correspondantes.

• $\overline{x} = f_1 \times c_1 + f_2 \times c_2 + \cdots + f_p \times c_p$
où $c_1, c_2, \cdots, c_p$ désignent les centres des p classes de modalités et $f_1, f_2, \cdots, f_p$ désignent les fréquences d'apparition correspondantes.

N_1 Expérience aléatoire

Expérience aléatoire

Une **expérience aléatoire** est une expérience renouvelable dont les résultats possibles, généralement appelés issues, sont connus sans qu'on puisse déterminer lequel sera réalisé.

Univers fini

L'**univers** d'une expérience aléatoire est l'ensemble des issues possibles appelées également résultats ou éventualités. On le note Ω.

Cardinal de l'univers

Le **cardinal** de l'univers d'une expérience aléatoire est le nombre d'issues de cet univers. On le note $\text{card}(\Omega)$

Donner les univers Ω des expériences aléatoires suivantes ainsi que leur cardinal :

1. E_1 : Lancer un dé à six faces.
2. E_2 : Lancer une pièce de monnaie.
3. E_3 : Choisir un nombre entier dans $[0; 10]$
4. E_4 : Le sexe d'un nourrisson.

N_2 Evènements

Evènement

Une **évènement** d'une expérience aléatoire est un sous-ensemble de l'univers c'est à dire un sous-ensemble comprenant des issues.

Union

Soient deux évènements A et B d'une même expérience aléatoire.
L'**union** des évènements A et B, notée $A \cup B$, est l'ensemble des issues qui réalise A **ou** B. On dit "A union B".

Intersection

Soient deux évènements A et B d'une même expérience aléatoire.
L'**intersection** des évènements A et B, notée $A \cap B$, est l'ensemble des issues qui réalise A **et** B. On dit " A inter B".

On considère l'expérience aléatoire : "lancer un dé à six faces". Décrire les évènements suivants :

1. A : "Faire un nombre pair"
2. B : "Faire un nombre multiple de 3"
3. $A \cup B$
4. $A \cap B$

N_3 Observation des fréquences

Modèle : Loi faible des grands nombres

Lorsqu'on répète n fois, de façon indépendante, une expérience aléatoire, la fréquence d'une issue va avoir tendance à se stabiliser lorsque n augmente. La probabilité de l'issue est très proche de la valeur stabilisée observée. Il faut s'assurer que la somme des probabilités fasse 1

On considère l'expérience aléatoire E_1 : "lancer un dé à six faces" que l'on réalise un certain nombre de fois. Voici les résultats ci-contre.

1. Pour $n = 100$, $n = 500$ et $n = 1\ 000$, estimer les probabilités de choisir les faces $n°1$, $n°2$, $n°3$, $n°4$, $n°5$ et $n°6$ du dé.

Nbr d'expériences E_1 : n	100	$1\ 000$	500
Face $n°1$	18	165	78
Face $n°2$	16	189	82
Face $n°3$	17	187	85
Face $n°4$	15	169	79
Face $n°5$	15	174	87
Face $n°6$	19	116	89

N_4 Equiprobabilité

Modèle : équiprobabilité

Dans un modèle **équiréparti**, chaque issue a la même probabilité qui vaut :

$$\frac{1}{\text{Nombre d'issues possibles}} = \frac{1}{\text{card}(\Omega)}$$

On dit aussi que c'est une situation d'**équiprobabilité**.

On considère l'expérience aléatoire E_1 : "lancer un dé à six faces". On suppose qu'il s'agisse d'une situation d'équiprobabilité.

1. Pourquoi est-il raisonnable de choisir l'équiprobabilité comme modèle.
2. Quelle est la probabilité d'obtenir la face $n°1$
3. Quelle est la probabilité d'obtenir la face $n°3$
4. Quelle est la probabilité d'obtenir la face $n°6$

N_5 Loi de probabilité

D *Loi de probabilité*

Une **loi de probabilité** sur un univers Ω associe à chaque issue qui le réalise un nombre compris entre 0 et 1 appelé **probabilité**. La somme des probabilités des issues est 1.

P *Propriétés*

- Une probabilité valant 1 indique que l'issue se réalise à chaque expérience.
- Une probabilité valant 0 indique que l'issue ne se réalise jamais et ce quelque soit expérience.

D *Probabilité d'un évènement*

La **probabilité d'un événement** est la somme des probabilités des issues qui le réalisent. Pour un évènement A, on note sa probabilité $P(A)$.

N *Notations*

- Un événement **impossible** est un événement qui ne se réalise jamais. Sa probabilité vaut 0.
- Un événement **certain** est un événement qui est sûr de se réaliser. Sa probabilité vaut 1.

D *Evènement contraire*

Soit A un événement. L'événement **contraire** à A est constitué des issues de Ω ne se réalisant pas dans A et se note $\overline{A}$. Sa probabilité vaut : $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

P *Propriété*

Si A et B sont deux événements alors : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

On lance un dé équilibré à 20 faces et on note le numéro de la face du dessus. On note A l'évènement : "obtenir un nombre pair" et l'évènement B : "obtenir un nombre multiple de 3".

1. Est-ce une situation d'équiprobabilité ?
2. Déterminer $P(A)$
3. Décrire l'évènement $\overline{A}$.
4. Déterminer $P(\overline{A})$
5. Décrire l'évènement $\overline{B}$.
6. Déterminer $P(\overline{B})$
7. Déterminer $P(A \cup B)$ et $P(A \cap B)$. Vérifier la propriété.
8. Décrire les évènements $\overline{A} \cup B$, $A \cup \overline{B}$ et $\overline{A} \cup \overline{B}$. Déterminer les probabilités correspondantes.

$n°1$ Menus

Au restaurant scolaire, les élèves ont le choix :
- entre 2 entrées :Artichaut ou Betterave;
- entre 3 plats : Cheval, Daube ou Escalope;
- entre 2 desserts : Fromage ou Gâteau.

Un menu se compose : • d'une entrée ; • d'un plat ; • d'un dessert.

1. En utilisant un arbre, représenter tous les menus.
2. Combien de menus différents sont possibles ?
3. On choisit un menu au hasard. Quelle est la probabilité :
   a) qu'il comporte une escalope ?
   b) qu'il comporte de l'artichaut et du fromage ?
   c) qu'il ne comporte pas de cheval ?

$n°2$ Rangement de CD

Trois CD notés a, b et c ont respectivement des boîtes nommées A, B et C. On range les 3 CD au hasard dans les boîtes sans voir leur étiquette.

1. Combien de rangements sont possibles ?
2. Quelle est la probabilité :
   a) que les 3 CD soient bien rangés ?
   b) qu'exactement 1 CD soit bien rangé ?
   c) qu'exactement 2 CD soient bien rangés ?
3. En déduire la probabilité qu'aucun CD ne soit bien rangé.

$n°3$ Ordinateurs

Une entreprise fabrique des ordinateurs portables. Ils peuvent présenter deux défauts : • un défaut de clavier ou • un défaut d'écran.

Sur un grand nombre d'ordinateurs, une étude statistique montre que : • 2% présentent un défaut d'écran; • $2,4\%$ présentent un défaut de clavier; • $1,5\%$ présentent les deux défauts.

1. On choisit au hasard un ordinateur et on considère les événements suivants.
   - E : « L'ordinateur présente un défaut d'écran »;
   - C : « L'ordinateur présente un défaut de clavier ». Déterminer $P(E)$, $P(C)$ et $P(E \cap C)$.
2. On considère les événements suivants.
   - « L'ordinateur présente au moins un défaut »;
   - « L'ordinateur ne présente que le défaut d'écran ». Traduire ces 2 événements à l'aide de E et C. Calculer leur probabilité.

$n°4$ Jetons dans une urne

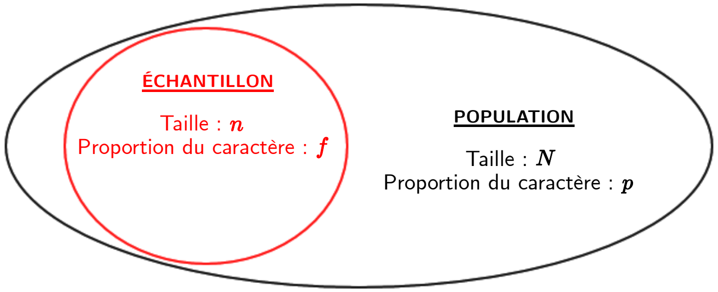
Une urne contient 4 jetons :• deux jaunes ; • un rose ; • un violet.
On tire au hasard un jeton de l'urne puis un second sans remettre le premier.
On suppose que tous les tirages sont équiprobables.

1. Représenter cette situation par un arbre. Combien y-a-t-il de tirages possibles ?
2. On considère les événements suivants : • R : « Le premier jeton tiré est rose » et • J : « Le deuxième jeton tiré est jaune »
   a) Déterminer $P(R)$ et $P(J)$.
   b) Traduire par une phrase $R \cap J$ puis calculer $P(R \cap J)$. Calculer $P(R \cup J)$.
3. On considère l'événement : • N : « Aucun jeton tiré n'est jaune »
   a) Calculer $P(N)$. Exprimer par une phrase $\overline{N}$ puis calculer $P(\overline{N})$.

N_1 Intervalle de fluctuation

D Echantillon

Soit une **population** (ce n'est pas forcément des êtres humains) de $N \in \mathbb{N}$ individus. On choisit avec remise n individus, on obtient un **échantillon** de taille n. On note p la proportion du caractère étudié dans la population et on note f cette proportion dans l'échantillon.



P Intervalle de fluctuation

Quand on choisit un échantillon de taille n (tel que $n \geqslant 25$) dans une population qui contient une proportion p (telle que $p \in [0,2;0,8]$) du caractère étudié alors la proportion f du caractère dans l'échantillon est telle que :

$$f \in \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}} ; p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$$

avec une probabilité de 95%.

Cet intervalle est appelé **intervalle de fluctuation asymptotique à 95%** qui a pour amplitude $\frac{2}{\sqrt{n}}$.

1 On prélève un échantillon de taille 100 dans une population qui contient 23% d'éléments du type A. Donner l'intervalle de fluctuation asymptotique à 95% de la proportion f d'éléments du type A dans l'échantillon.

2 Dans l'article du site Wikipédia consacré au sex-ratio (c'est à dire au rapport du nombre d'hommes sur le nombre de femmes), on trouve l'affirmation suivante : "en France, il y a environ 105 garçons pour 100 filles à la naissance". Dans une clinique il y a environ $1\,500$ naissances par an.

a) Quel est l'intervalle de fluctuation asymptotique à 95% de la proportion f de garçons dans cette clinique ?

b) Quel est l'intervalle de fluctuation asymptotique à 95% de la proportion f de filles dans cette clinique ?

3 Lors du deuxième tour de l'élection présidentielle, il ne reste plus que deux candidats, nommés A et B. Un sondage est effectué la veille du second tour. Le candidat A est crédité de 48% des intentions de vote.

a) Si on choisit un échantillon de taille $n = 1\,000$ au hasard dans la population française, quel est l'intervalle de fluctuation asymptotique à 95% de la proportion f de personnes favorables au candidat A ?

b) Si $f = 48\%$ et si on veut que la limite supérieure de l'intervalle de fluctuation à 95% soit 50%, quelle valeur de la taille de l'échantillon n doit-on choisir ?

N_2 Prise de décision

M Méthode

On prélève un échantillon de taille n tel que $n \geqslant 25$. La proportion p (telle que $p \in [0,2;0,8]$) dans la population est connue et la proportion f dans cet échantillon est connue.

L'échantillon provient-il de la population ? **On fait l'hypothèse que oui.**

$$\text{Si : } f \notin \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}} ; p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$$

Il y a 95% de chance que l'hypothèse précédente soit fausse : on rejette l'hypothèse au seuil de 95% ou avec un risque de 5% (sinon on ne la rejette pas).

Une chaîne de production de tablettes numériques est contrôlée régulièrement. Ces contrôles ont fait apparaître que 20% des tablettes présentent un léger défaut au niveau de la finition de l'écran qui nécessite un travail supplémentaire.

On décide de changer les méthodes de travail des équipes de cette chaîne de production. Quelques temps après cette modification, on prélève un échantillon de 300 tablettes, et on compte 50 tablettes ayant un défaut de finition de l'écran. Peut-on conclure que la réorganisation du travail a été efficace ?

N_3 Intervalle de confiance

P Intervalle de confiance

Quand un échantillon de taille n (tel que $n \geqslant 25$) contient une proportion f (telle que $f \in [0,2;0,8]$) du caractère étudié alors la proportion p du caractère dans la population est telle que :

$$p \in \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$$

avec une probabilité de 95%.

Cet intervalle est appelé **intervalle de confiance à 95%** qui a pour amplitude $\frac{2}{\sqrt{n}}$.

En Italie, un sondage est effectué sur la politique budgétaire du pays. La question posée est : "pensez-vous que la rigueur actuelle soit suffisante pour régler le problème du déficit de l'Etat ".

Sur les $1\,000$ personnes interrogées, 30% ont répondu non. Donner l'intervalle de confiance à 95% du pourcentage d'Italiens qui répondraient non.

n°1 Dé pipé

Un dé semble sortir un nombre anormalement élevé de "6". Il est lancé 150 fois, on relève que la face portant le "6" est sortie 40 fois. Tester l'hypothèse suivante : ce dé n'est pas pipé.

n°2 Urne

Une urne contient 40% de boules noires et le reste de boules rouges. Elle contient un très grand nombre de boules. On présente trois échantillons de boules noires et rouges mais on ignore si ces échantillons proviennent effectivement de l'urne.

- L'échantillon A contient 30 boules dont 12 noires.
- L'échantillon B contient 81 boules dont 40 noires.
- L'échantillon C contient 260 boules dont 80 noires.

Pour chacun des échantillons, examiner l'hypothèse suivante : cet échantillon a été prélevé dans l'urne.

N_4 Comparaison de 2 échantillons

Méthode

Soient deux échantillons de proportions respectives f_1 et f_2 d'un caractère. On détermine les deux intervalles de confiance de ces deux échantillons. On fait l'hypothèse qu'ils proviennent d'une <u>même</u> population.

Si les deux intervalles à 95% sont disjoints (aucun nombre en commun) alors on rejette l'hypothèse, sinon on ne la rejette pas.

Le premier janvier 2012 a été décidé une augmentation sur les prix du tabac. Pour étudier l'impact de cette augmentation sur la consommation de cigarettes, un institut de sondage a demandé à deux cents personnes choisies au hasard dans la population française s'ils ont fumés des cigarettes durant la dernière semaine.

Pour la semaine qui a précédé l'augmentation du prix du tabac, le pourcentage de personnes ayant répondu favorablement est de 35%.

Pour la semaine qui a suivi l'augmentation du prix du tabac, le pourcentage de personnes ayant répondu favorablement est de 32%.

Peut-on conclure qu'il y a une baisse significative de la consommation de cigarettes ?

$n°3$ Mouches drosophiles

On élève des mouches drosophiles dans un aquarium. Dans cette grande population de drosophiles de plusieurs milliers d'insectes, il y a 25% de mouches qui ont les yeux rouges. On prélève un échantillon d'une centaine de mouches et on appelle f la proportion de mouches qui ont les yeux rouges. Donner l'intervalle de fluctuation à 95% de la proportion f.

$n°4$ Précaution

Lors du second tour de l'élection présidentielle, on considère que l'on peut annoncer la victoire d'un candidat si l'intervalle de confiance à 95% ne "mord" pas la barre des 50%.

1. Dans un échantillon de 100 personnes, un candidat est crédité de 53% des voix. Peut-on annoncer sa victoire ?
2. Dans un échantillon de $2\,000$ personnes, un candidat est crédité de 53% des voix. Peut-on annoncer sa victoire ?

$n°5$ Lecteur MP3

Une unité de production réalisant des lectures MP3 a modifié récemment ses méthodes. Avant la modification, sur u échantillon de 130 lecteurs MP3, on a constaté que 42 lecteurs MP3 avaient un défaut. Après la modification, sur un échantillon de 90 lecteurs MP3, on constate que 25 lecteurs MP3 ont un défaut.

Peut-on dire que la modification des méthodes de production a eu un impact significatif sur la qualité de la production ?

$n°6$ Surpoids

Une nouvelle pilule est testée qui serait censée aider les personnes qui souffrent de surpoids à maigrir. Cette pilule est administrée à une centaine de personnes en surpoids et, après un traitement d'un mois, on constate que 30% des personnes ont effectivement perdu du poids (on considère que la perte de poids est significative à partir de 2 kilos). Par ailleurs, un placebo est administré à une centaine de personnes en surpoids et on constate que, dans cet échantillon, 28% des personnes ont perdu du poids.

Peut-on conclure que cette pilule est efficace au vu des résultats obtenus sur ces deux échantillons ?

$n°7$ Epidémie

Le département de la Réunion a fait face à une épidémie. Pour évaluer le budget nécessaire qui permettra d'affronter efficacement cette maladie, il faut connaître le nombre de patients qui seront atteints par cette maladie. L'épidémie est partie du Sud de la Réunion et on estime qu'elle est dans cette partie en phase de disparition. Dans un village de $1\,800$ habitants, on a comptabilisé 430 cas maintenant que l'épidémie est finie.

1. Donner par intervalle de confiance à 95% la proportion de réunionnais qui seront atteints.
2. Sachant que sur l'île de la Réunion on compte environ $800\,000$ personnes, donner par intervalle de confiance à 95% le nombre de réunionnais qui seront atteints par cette maladie.
3. Si le coût par personne de cette maladie est de 120 €, quel est par l'intervalle de confiance à 95%, le budget qu'il faut prévoir pour affronter cette maladie ?

$n°8$ Répression des fraudes

La répression des fraudes a enquêté au casino « Le Lion Vert ». Elle a estimé que la roulette française n'était pas équilibrée et que le casino avait fraudé avec une probabilité d'environ 95%. Ils ont, pour cela, effectué une analyse informatique des tirages de l'année précédente et remarqué que la couleur rouge était sortie avec une fréquence de 49% sur un certain nombre de lancers au jeu de la mise sur chance simple Noir-Rouge.

Quelle est la taille minimale de l'échantillon pour que la répression des fraudes puisse arriver à cet conclusion ? La veille, un client notant le déséquilibre en a profité pour l'utiliser. Quelle stratégie le client a-t-il utilisé ?

$n°9$ Sur internet

En décembre 2012, un sondage a été réalisé auprès de 1 003 personnes résidant en France, âgées de 18 ans et plus. L'échantillon a été constitué d'après la méthode des quotas (sexe, âge, catégorie socioprofessionnelle du répondant) par région et taille d'agglomération. 772 personnes interrogées ont déclaré avoir déjà été confrontées à une arnaque ou une tentative d'arnaque sur Internet. Dans le même temps, 211 personnes interrogées déclarent avoir déjà été piégées sur Internet par un mail ou un site Internet leur demandant leurs coordonnées personnelles.

Estimer le pourcentage de personnes en France confrontées à une arnaque sur Internet puis le pourcentage de personnes en France ayant déjà été piégées sur internet.

$n°10$ Acteur préféré

Un institut de sondage interroge un groupe de filles sur leur acteur préféré.

1. Sur un premier échantillon de 800 filles, 38 % ont répondu : Léonard Ducapre. Déterminer l'intervalle de confiance de ce premier échantillon.
2. Sur un deuxième échantillon de 650 filles, 42% ont, elles, répondu Brad Flip. Déterminer l'intervalle de confiance de ce deuxième échantillon.
3. Ces deux intervalles sont-ils disjoints ? Peut-on en déduire que chez les filles Brad Flip a plus de succès que Léonard Ducapre ?

$n°11$ Photographe

Un photographe vend des appareils photographiques. Il veut estimer par un intervalle de confiance le pourcentage p d'acheteurs d'appareils autofocus avec zoom dans sa clientèle

1. Dans un échantillon de 100 clients, 60 achètent un tel appareil. Donner une estimation de p.
2. On considère l'affirmation suivante : « la fréquence p est obligatoirement dans l'intervalle de confiance obtenu à la question précédente ». Est-elle vraie ?
3. Déterminer la taille n, $n \geqslant 30$, d'un échantillon de clients pour qu'un intervalle de confiance de p, au seuil de 95% soit $[0,557; 0,643]$.