

N₁ Vecteur

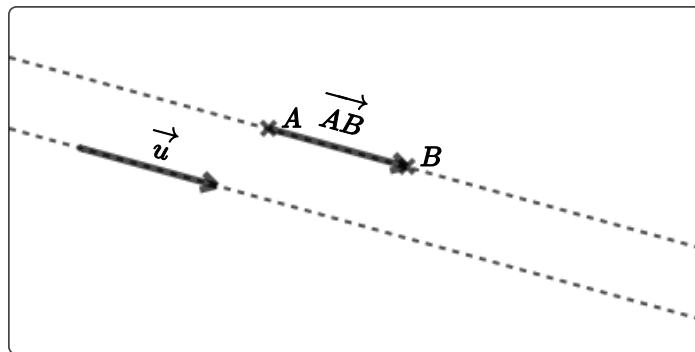
D Définition : vecteur

Un **vecteur** \vec{u} est associé à une translation.
Le point B est le symétrique du point A par la translation de vecteur \vec{u} quand $\vec{AB} = \vec{u}$ c'est à dire :

- les vecteurs \vec{AB} et \vec{u} ont même longueur. On parle de **norme** pour un vecteur et on note

$$AB = ||\vec{AB}|| = ||\vec{u}||$$

- les vecteurs \vec{AB} et \vec{u} ont la même direction c'est à dire qu'ils sont portés par deux droites parallèles.
- les vecteurs \vec{AB} et \vec{u} ont le même sens.



D Définition : vecteur nul

Le vecteur associé à la translation qui transforme un point en lui-même est le **vecteur nul** que l'on note $\vec{0}$.
 $\vec{0} = \vec{AA} = \vec{MM}$

D Définition : opposé

Le vecteur \vec{BA} associé à la translation qui transforme B en A est le **vecteur opposé** à \vec{AB} .
 $\vec{BA} = -\vec{AB}$ ou $\vec{BA} + \vec{AB} = \vec{0}$

P Propriété : parallélogramme

$\vec{AB} = \vec{CD}$ si et seulement si $ABCD$ est un parallélogramme.

P Propriété : milieu

$\vec{AI} = \vec{IB}$ si et seulement si I est le milieu du segment $[AB]$.

1 Soit 2 parallélogrammes $ABCD$ et $DCEF$.

a) Faire une figure.

b) Démontrer que $\vec{AB} = -\vec{EF}$

2 Soient 6 points G, H, I, J, K, L tel que $\vec{GH} = \vec{JI}$ et $\vec{IJ} = -\vec{KL}$.

a) Faire une figure.

b) Donner tous les parallélogrammes présents. Justifier.

3 Soit O milieu de $[AB]$ et le point D est le symétrique du point C par rapport à O .

a) Faire une figure.

b) Démontrer que $\vec{AC} = \vec{DB}$ ou que $\vec{AD} = \vec{CB}$

4 Soit le point A tel que $\vec{AB} = -\vec{AC}$. Faire une figure puis indiquer la position du point A . Justifier.

5 Soit le point M tel que $\vec{ME} + \vec{MF} = \vec{0}$. Faire une figure puis indiquer la position du point M . Justifier.

N₂ Addition de deux vecteurs

P Propriétés

Addition

Soient \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{CD} 2 vecteurs :

- $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AB}$
- $\overrightarrow{AB} + \vec{0} = \overrightarrow{AB}$

Relation de Chasles

Soient A , B et C trois points

alors : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

Propriété du parallélogramme

Soient A , B , C et D quatre points.

$ABCD$ est un parallélogramme si

et seulement si $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

Démontrer la propriété du parallélogramme.

N₃ Coordonnées d'un vecteur

D Définition

Dans un repère d'origine O , le point M a pour coordonnées $(a; b)$ alors le vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ a les mêmes coordonnées que le point M et on note : $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

P Propriété : unicité

Deux vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}$ sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes coordonnées c'est à dire $a_1 = a_2$ et $b_1 = b_2$.

P Propriété

Dans un repère, $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ alors : $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$

1 Dans un repère orthonormé, on a $A(1; 2)$, $B(5; 6)$, $C(8; 9)$ et $D(10; 67)$:

a) Placer ces 4 points.

b) Démontrer que $ABCD$ est un parallélogramme.

c) Donner les coordonnées de \overrightarrow{AD} puis \overrightarrow{BC} .

2 Dans un repère orthonormé, on a $A(1; 2)$, $B(5; 6)$, $C(8; 9)$:

a) Placer ces 3 points.

b) Placer un point D pour que $ABCD$ est un parallélogramme.

c) Donner les coordonnées de \overrightarrow{CD} .

d) Donner les coordonnées de \overrightarrow{AD} puis de \overrightarrow{BC} .

N₄ Norme d'un vecteur

D Définition

Si $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans un repère orthonormé alors $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Calculer la norme des vecteurs :

1 $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

2 \overrightarrow{AB} avec $A(-1; 8)$ et $B(6; 12)$.

3 $\vec{w} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$

N₅ Propriétés

P Addition de deux vecteurs

Soient deux vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ alors $\vec{w} \begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 \end{pmatrix}$

P Multiplication par un réel

Soit un vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$ et λ un réel et $\vec{w} = \lambda \vec{u}$ alors $\vec{w} \begin{pmatrix} \lambda \times a_1 \\ \lambda \times b_1 \end{pmatrix}$

P Propriétés

Soit deux vecteurs \vec{AB} et \vec{CD} et λ un réel tels que $\vec{AB} = \lambda \vec{CD}$ alors :

- Si $\lambda > 0$ alors \vec{AB} et \vec{CD} ont le même sens et $AB = \lambda CD$
- Si $\lambda < 0$ alors \vec{AB} et \vec{CD} sont de sens contraire et $AB = -\lambda CD$

1 Soient $\vec{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{BC} \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$. Déterminer les coordonnées de $\vec{AB} - 2\vec{BC}$.

2 Soient $E(-1; 2)$; $F(2; -3)$ et $G(-3; 4)$. Déterminer les coordonnées de $2\vec{EF} - 3\vec{FG}$.

N₆ Colinéarité de deux vecteurs

D Définition

Deux vecteurs non nuls \vec{u} et \vec{v} sont **colinéaires** quand il existe un réel k tel que $\vec{u} = k \vec{v}$

P Propriété

Soient deux vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

\vec{u} et \vec{v} sont colinéaires si et seulement si leurs coordonnées sont **proportionnelles** c'est à dire $xy' = x'y$ ou $xy' - x'y = 0$. C'est les produits en croix des coordonnées de \vec{u} et \vec{v} .

Déterminer si les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires. Si oui, déterminer le réel k tel que $\vec{u} = k \vec{v}$ (a et b sont deux réels) :

1 $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -11 \\ 5 \end{pmatrix}$

2 $\vec{u} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 15 \\ 4 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix}$

3 $\vec{u} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -2 \\ -3\sqrt{2} \end{pmatrix}$

N₇ Droites parallèles

P Propriété

Les vecteurs \vec{AB} et \vec{CD} sont colinéaires si et seulement si les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

Tracer les droites (AB) et (CD) puis déterminer si elles sont parallèles :

1 $A(3; -2)$, $B(-1; -1)$, $C(-3; 2)$ et $D(1; 3)$

2 $A(-9; -2)$, $B(1; -3)$, $C(3; -2)$ et $D(1; -3)$

3 $A(-1; 2)$, $B(-1; 3)$, $C(3; 2)$ et $D(4; 2)$

4 $A(-1; 2)$, $B(-1; 3)$, $C(3; 2)$ et $D(4; 2)$

N₈ Points alignés

P Propriété

Les points A , B et C sont alignés si et seulement si \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} sont colinéaires.

Déterminer si les points sont alignés:

- | | |
|---|--|
| 1 $F\left(\frac{2}{3}; 1\right)$, $G\left(-2; \frac{1}{3}\right)$, et $H(5; 2)$ | 2 $B(0; 0)$, $C(\sqrt{2}; \sqrt{6})$ et $D(4; 4\sqrt{3})$ |
| 3 $E(1; 2)$, $F(-3; 8)$ et $G(3; -1)$ | 4 $A(-9; 4)$, $B(1; -1)$ et $C(4; -2)$ |
| 5 $A(-4; 4)$, $T(-4; -6)$ et $P(-3; 2)$ | 6 $C(\pi; \pi)$, $D(1; 2 - \pi)$ et $H(\pi - 4; \pi - 2)$ |

N₉ Vecteurs directeurs

D Définition

Un vecteur \vec{u} est un vecteur **directeur** de la droite (AB) quand les vecteurs \vec{u} et \overrightarrow{AB} sont colinéaires.

P Propriété

Deux droites sont parallèles si et seulement si un vecteur directeur de l'une est colinéaire à un vecteur directeur de l'autre.

- | | |
|--|--|
| 1 Soient $A(3; 2)$ et $B(6; 3)$. Tracer (AB) . | 2 Donner 3 vecteurs directeurs de la droite (AB) . |
| 3 Placer $C(1, 0)$ | 4 Placer un point D pour que (AB) et (CD) soient parallèles. |
| 5 Donner 3 vecteurs directeurs de la droite (CD) . | |

N₁₀ équation de droite

P Propriétés

- Soit a et b deux réels. Le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite d'équation $y = ax + b$ avec a qui est le **coefficient directeur** de cette droite.
- Soit k un réel. Le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite verticale d'équation $x = k$

- | |
|--|
| 1 Déterminer l'équation d'une droite de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ et passant par $A(3; 5)$. |
| 2 Déterminer l'équation d'une droite de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}$ et passant par $B(1; -2)$. |

N₁₁ équation réduite de droite

P Propriétés

• Soit $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points tels que $x_A \neq x_B$. Le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (AB) d'équation réduite :

$$y = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}x + \frac{x_B y_A - y_B x_A}{x_B - x_A} \text{ avec } \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \text{ qui est le coefficient directeur de la droite } (AB).$$

• Soit $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points tels que $x_A = x_B$. Le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} 0 \\ x_A \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite verticale d'équation $x = x_A$

P Corrolaire

Deux droites non-verticales sont parallèles si et seulement si elles ont le même coefficient directeur.

- 1 Déterminer l'équation d'une droite de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ et passant par $A(3; 5)$.
- 2 Déterminer l'équation d'une droite de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}$ et passant par $B(1; -2)$.
- 3 On considère les points $A(2; 3)$; $B(4; 7)$ et $C(4; 7)$. Tracer (AB) puis déterminer son équation réduite. Déterminer une équation réduite de la droite parallèle à (AB) et passant par C , la tracer.
- 4 Dans un repère orthonormé, on a $E(-2; 3)$ et $F(-2; -1)$. Tracer (EF) puis déterminer son équation réduite.

N₁₂ équation cartésienne de droite

D Définition

Une équation d'une droite (d) de la forme $ax + by + c = 0$ est appelée une **équation cartésienne** de (d) .

P Propriétés

- Soit A un point et \vec{u} un vecteur non nul et (d) la droite de vecteur directeur \vec{u} et passant par A . Un point M appartient à (d) si et seulement si les vecteurs \overrightarrow{AM} et \vec{u} sont colinéaires.
- La droite d'équation $ax + by + c = 0$ a pour vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ et passe par le point de coordonnées $\left(1; \frac{a - c}{b}\right)$.
- Réciproquement une droite de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ a pour équation $ax + by + c = 0$

- 1 Déterminer l'équation cartésienne d'une droite de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et passant par $A(2; 5)$.
- 2 Déterminer l'équation cartésienne d'une droite de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{5} \end{pmatrix}$ et passant par $C(0; 2)$.
- 3 On considère les points $A(2; 3)$; $B(4; 7)$ et $C(4; 7)$. Tracer (AB) puis déterminer son équation cartésienne. Déterminer une équation cartésienne de la droite parallèle à (AB) et passant par C , la tracer.
- 4 Dans un repère orthonormé, on a $E(-2; 3)$ et $F(-2; -1)$. Tracer (EF) puis déterminer son équation cartésienne.

N₁₃ Intersection de deux droites

P Par le calcul

On considère deux droites (d_1) et (d_2) d'équation cartésienne $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ (ou réduite $y = a_1x + b_1$) et $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ (ou réduite $y = a_2x + b_2$). Le point d'intersection (s'il existe) a pour coordonnées la solution du système :

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} y = a_1x + b_1 \\ y = a_2x + b_2 \end{cases}$$

P Graphiquement

On considère deux droites (d_1) et (d_2) . Il suffit de tracer ces deux droites et de lire les coordonnées du point d'intersection. Attention, les coordonnées sont toujours des valeurs approchées.

- 1 On considère les points $A(2;3)$; $B(4;7)$; $C(4;7)$ et $D(4;7)$. Tracer (AB) et (CD) puis déterminer les coordonnées du point d'intersection de (AB) et (CD) (en utilisant les équations cartésiennes). Vérifier graphiquement.
- 2 On considère les points $A(2;3)$; $B(4;7)$; $C(4;7)$ et $D(4;7)$. Tracer (AB) et (CD) puis déterminer les coordonnées du point d'intersection de (AB) et (CD) (en utilisant les équations réduites). Vérifier graphiquement.

n°1 Triangle EFG

- 1 On considère un triangle EFG et H tel que : $\overrightarrow{EH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{EG} + \frac{1}{3}\overrightarrow{EF}$. Faire une figure.
- 2 En écrivant $\overrightarrow{FH} = \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EH}$, démontrer que \overrightarrow{FH} et \overrightarrow{FG} sont colinéaires.
- 3 Que peut-on en déduire concernant le point H ?

n°2 Une génération de droites

On considère le vecteur $\overrightarrow{u} \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ où m est un nombre réel et le point $A(-2;0)$. Soit (d_m) la droite passant par A et de vecteur directeur \overrightarrow{u} .

- 1 Déterminer une équation cartésienne de (d_m) .
- 2 Peut-on trouver m tel que le point $B(3;2)$ appartienne à (d_m) ?
- 3 Peut-on trouver m tel que (d_m) soit parallèle à la droite (D) d'équation $-5x + 2y - 7 = 0$?
- 4 Peut-on trouver m tel que (d_m) soit parallèle à la droite (D') d'équation $-4x + 12 = 0$?
- 5 Quels sont les points du plan qui n'appartiennent à aucune droite (d_m) ?

n°3 Vecteurs directeurs de norme 1

Déterminer tous les vecteurs directeurs de norme 1 de la droite :

- | | |
|-----------------------------------|--|
| 1 (d_1) d'équation $x - 8 = 2$ | 2 (d_2) d'équation $2x + 3y + 5 = 0$ |
| 3 (d_3) d'équation $y = 5x + 3$ | 4 (d_3) d'équation $y = 5x + 3$ |
| 5 (d_3) d'équation $y = 5x + 3$ | 6 (d_3) d'équation $y = 5x + 3$ |
| 7 (d_3) d'équation $y = 5x + 3$ | 8 (d_3) d'équation $y = 5x + 3$ |

n°4 Droites parallèles

Dans chacun des cas suivants, déterminer une équation de la droite (d') parallèle à (d) passant par A .

1 $A(2;1)$ et (d) d'équation $-3x + y = 0$

2 $A(-1;3)$ et (d) d'équation $-x - 2y + 1 = 0$

3 $A(1;1)$ et (d) d'équation $-\frac{x}{3} + \frac{y}{6} + 4 = 0$

4 $A\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right)$ et (d) d'équation $-x + y - 2 = 0$

n°5 Alignement

On considère un parallélogramme $ABCD$ et les points E et F définis par : • $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AD}$ • $\overrightarrow{AF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

1 Faire une figure.

2 Que peut-on conjecturer sur les points B , F et E ?3 Calculer \overrightarrow{BE} en fonction de \overrightarrow{CD} et \overrightarrow{AC} 4 Calculer \overrightarrow{BF} en fonction de \overrightarrow{CD} et \overrightarrow{AC} 5 En déduire que \overrightarrow{BE} et \overrightarrow{BF} sont colinéaires.

6 Conclure.

n°6 Parallélisme et calcul vectoriel

On considère trois points non alignés A , B et C . Le point E est défini par $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

1 Faire une figure.

2 Établir une conjecture sur les droites (CE) et (AB).3 Démontrer que $\overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{AB}$.

4 Conclure.

n°7 Milieu et calcul vectoriel

On considère trois points non alignés A , B et C .

Les points P et Q sont définis par : $\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

1 Faire une figure.

2 Que peut-on conjecturer sur le point Q ? Et sur B ?3 Démontrer que $\overrightarrow{PC} = -2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$. En déduire la position du point B .4 Exprimer \overrightarrow{BQ} en fonction de \overrightarrow{BC} . En déduire la position du point C .

n°8 Droites parallèles

On considère le point $A(-7;1)$ et la droite (D) d'équation réduite $y = -5x + 1$. Déterminer x , abscisse du point B de coordonnées $(x;8)$ tel que les droites (AB) et (D) soient parallèles.

n°9 Points alignés

On considère les points A et B de coordonnées respectives $(1;-5)$ et $(-1;3)$. Déterminer y , ordonnée du point C de coordonnées $(2;y)$ tel que A , B et C soient alignés.