N_1 *Nombre complexe*

D *Nombre complexe z*

Le nombre i est un nombre **imaginaire** qui vérifie : $i^2 = -1$

Un **nombre complexe** z est un nombre pouvant s'écrire : $z = a + i \times b = a + ib$. où a et b sont deux réels. Il s'agit de **l'écriture algébrique de** z.

D *Partie réelle et partie imaginaire de z*

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe.

- Le réel a est appelé la **partie réelle** de z et on note $Re(z) = a$
- Le réel b est appelé la **partie imaginaire** de z et on note $Im(z) = a$

D *Conjugué d'un nombre complexe*

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe. Le nombre complexe **conjugué** de z, noté $\bar{z}$, est :
$\bar{z} = a - i \times b = a - ib$

Donner les parties réelle et imaginaire des nombres complexes suivants :

1. $z_1 = 7i$
2. $z_2 = -9$
3. $z_3 = 8 - 7i$
4. $z_4 = 3i + 8$

Donner le conjugué des nombres complexes suivants :

5. $z_5 = -6i$
6. $z_6 = 8$
7. $z_7 = 10 - 2i$
8. $z_8 = 6i - 2$

N_2 *Module d'un nombre complexe*

D *Module d'un nombre complexe*

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe. Le **module** de z est le réel, noté $||z||$:
$||z|| = \sqrt{z \times \bar{z}} = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$

Donner le module des nombres complexes suivants :

1. $z_1 = 3 + 9i$
2. $z_2 = -7i$
3. $z_3 = i + 5$
4. $z_4 = 3$
5. $z_5 = -1 + 4i$
6. $z_6 = 9 - i$
7. $z_7 = \frac{1}{3} - i\,\frac{1}{4}$
8. $z_8 = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$

N_3 *Opérations sur les nombres complexes*

P *Propriétés*

Soient deux nombres complexes $z_1 = a_1 + ib_1$ et $z_2 = a_2 + ib_2$ non nul et α et β deux réels :

- $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$
- $\alpha z_1 + \beta z_2 = (\alpha a_1 + \beta a_2) + i(\alpha b_1 + \beta b_2)$
- $z_1 \times z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$
- $z_1 = z_2$ si et seulement si $a_1 = a_2$ et $b_1 = b_2$
- $\alpha z_1 = (\alpha a_1) + i(\alpha b_1)$
- $||\overrightarrow{\alpha z_1}|| = |\alpha| \times ||\overrightarrow{z_1}||$
- $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{(a_1 a_2 + b_1 b_2)}{a_2^2 + b_2^2} + i\,\dfrac{(a_1 b_2 - b_2 a_1)}{a_2^2 + b_2^2}$

1. Soient $z_1 = 3 - 2i$ et $z_2 = 6i - 3$. Calculer $z_1 + z_2$, $z_1 z_2$ et $\dfrac{z_1}{z_2}$
2. Soient $z_1 = -\dfrac{1}{3} - i$ et $z_2 = \dfrac{i}{5} - 1$. Calculer $z_1 + z_2$, $z_1 z_2$ et $\dfrac{z_1}{z_2}$
3. Soient $z_1 = 5 - 2i$ et $z_2 = \dfrac{i}{2} + 1$. Calculer $2z_1 - 4z_2$ et $||-5(z_1 + z_2)||$
4. Soient $z_1 = 2 + i$, $z_2 = i - 3$ et $z_3 = x + iy$. Calculer x et y pour que $z_3 = -4z_1 + 2z_2$.
5. Soient $z_1 = \dfrac{1}{2} + 3i$, $z_2 = \dfrac{1}{3}i - 2$ et $z_3 = x + iy$. Calculer x et y pour que $z_3 = 2z_1 - z_2$.

N_4 Affixe d'un point

D *Affixe d'un point*

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe. Dans un repère orthonormé $(O; I; J)$, on peut placer un point $M(a; b)$. On dit que z est l'**affixe** du point M et on note $M(z)$.

On se place dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Soient $z_A = i + 1$ et $z_B = -3i + 2$. Placer $A(z_A)$ et $B(z_B)$. Placer les points C et D pour que $ABCD$ soit un carré. Donner les affixes de C et D.
2. Soient $z_E = -2i$ et $z_F = 3$. Placer $E(z_E)$ et $F(z_F)$. Placer les points G et H pour que $EFGH$ soit un losange de centre O. Donner les affixes de G et H.
3. Soient $z_A = -2i + 1$, $z_B = 2 + 3i$ et $z_C = 3i$. Placer $A(z_A)$, $B(z_B$ et $C(z_C)$. Placer le point D pour que $ABCD$ soit un parallélogramme. Donner l'affixe de D.

N_5 Affixe d'un vecteur

D *Affixe d'un vecteur*

• Soit $z = a + ib$ un nombre complexe. Dans un repère orthonormé $(O; I; J)$, on peut placer un vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. On dit que z est l'**affixe** du vecteur $\vec{u}$ et on note $\vec{u}(z)$.

• Soit M_1 et M_2 deux points du plan muni du repère orthonormé $(O; I; J)$ tels que $M_1(z_1 = a_1 + ib_1)$ et $M_2(z_2 = a_2 + ib_2)$. Le vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$ a pour affixe le nombre complexe z_3 tel que $z_3 = z_2 - z_1$ et : $z_3 = (a_2 - a_1) + i(b_2 - b_1)$

P *Norme d'un vecteur*

Soient $z = a + ib$ un nombre complexe et $\vec{u}\,z$ dans un repère orthonormé $(O; I; J)$. On a : $||\vec{u}|| = ||z|| = \sqrt{z\bar{z}}$

On se place dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Soient $z_A = i + 2$ et $z_B = -2i + 2$. Donner l'affixe de $\overrightarrow{AB}$ puis calculer $||\overrightarrow{AB}||$
2. Soient $z_E = 5 - 3$ et $z_F = -3 + 2i$. Donner l'affixe de $\overrightarrow{EF}$ puis calculer $||\overrightarrow{EF}||$
3. Soient $z_A = \dfrac{1}{3} - 2i$ et $z_B = -\dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{5}i$. Donner l'affixe de $\overrightarrow{AB}$ puis calculer $||\overrightarrow{AB}||$

N_6 Cercle trigonométrique

P *Propriétés*

On se place dans un repère orthonormé $(0; I; J)$ du plan orienté. Soit un point M appartenant au cercle trigonométrique tel que $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}) = \theta + k \times 2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$. Soit z l'affixe du point M alors : $z = \cos\theta + i\sin\theta$ et $||z|| = 1$

On note le nombre complexe $z = \cos\theta + i\sin\theta$: $z = \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$

Placer sur le cercle trigonométrique, les points d'affixe :

1. $z_A = e^{i\pi}$	2. $z_B = e^{i\frac{\pi}{4}}$	3. $z_C = e^{i\frac{\pi}{3}}$	4. $z_D = e^{-i\frac{\pi}{3}}$
5. $z_E = e^{-i\frac{\pi}{4}}$	6. $z_F = e^{i\frac{3\pi}{4}}$	7. $z_G = e^{i\frac{5\pi}{4}}$	8. $z_H = e^{-i\frac{\pi}{2}}$

N_7 *Ecriture exponentielle*

P *Ecriture exponentielle*

On se place dans un repère orthonormé $(0;I;J)$ du plan orienté. Soient $z = a + ib$ un nombre complexe. z peut s'écrire : $z = ||z||e^{i\theta} = re^{i\theta}$

où r est le **module** de z et θ son **argument** (à 2π près)

1. Donner l'écriture algébrique des nombres suivants : $z_A = 3e^{i\frac{\pi}{3}}$; $z_B = 4e^{i\frac{-\pi}{4}}$; $z_C = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$ et $z_D = 5e^{i\pi}$
2. Donner l'écriture algébrique des nombres suivants : $z_A = 5e^{i\frac{4\pi}{3}}$; $z_B = 7e^{i\frac{3\pi}{4}}$ et $z_C = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}$
3. Donner l'écriture exponentielle des nombres suivants : $z_A = 2i$; $z_B = 5$; $z_C = -4$ et $z_D = -10i$
4. Donner l'écriture exponentielle des nombres suivants : $z_A = 3\,\frac{\sqrt{2}}{2} + 3\,\frac{\sqrt{2}}{2}\,i$ et $z_B = 5\,\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{5}{2}\,i$
5. Donner l'écriture exponentielle des nombres suivants : $z_A = 1 + i$ et $z_B = -5 + 10\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,i$
6. Donner l'écriture exponentielle des nombres suivants : $z_A = -2 - 2i$; $z_B = 2\sqrt{3} + 2i$ et $z_C = -i - 1$

N_8 *Propriétés de l'écriture exponentielle*

P *Propriétés*

Soient $z = re^{i\theta}$ et $z' = r'e^{i\theta'}$ deux nombres complexes de module respectif r et r' et d'argument respectif θ et θ'.

- $re^{i\theta} \times r'e^{i\theta'} = rr'e^{i(\theta+\theta')}$
- $\dfrac{re^{i\theta}}{r'e^{i\theta'}} = \dfrac{r}{r'}\,e^{i(\theta-\theta')}$
- $\dfrac{1}{re^{i\theta}} = \dfrac{1}{r}\,e^{-i\theta}$
- $\overline{re^{i\theta}} = re^{-i\theta}$

Calculer :

1. $5e^{i\frac{\pi}{6}} \times 2e^{i\frac{\pi}{3}}$
2. $\dfrac{2e^{-i\frac{\pi}{2}}}{2e^{i\frac{\pi}{6}}}$
3. $\dfrac{8e^{-i\frac{4\pi}{3}} \times 0,5e^{-i\frac{\pi}{3}}}{2e^{i\frac{\pi}{3}}}$
4. $\dfrac{2e^{-i\frac{\pi}{6}}}{6e^{i\frac{\pi}{3}} \times 5e^{-i\frac{\pi}{2}}}$
5. $\dfrac{8e^{i\frac{4\pi}{3}}}{2e^{i\frac{\pi}{3}}}$
6. $2e^{-i\frac{\pi}{2}} \times 2e^{i\pi}$
7. $\dfrac{(2e^{-i\frac{\pi}{2}})^2}{(2e^{i\pi})^2}$
8. $2e^{-i\frac{\pi}{4}} + 5e^{-i\frac{\pi}{4}}$

N_9 Racines d'une équation du 2^{nd} degré

Propriétés

On considère l'équation $ax^2+bx+c=0$ dont le discriminant vaut $\Delta=b^2-4ac$:

- si $\Delta>0$ L'équation $ax^2+bx+c=0$ possède 2 racines z_1 et z_2 réelles avec $z_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
- si $\Delta=0$ L'équation $ax^2+bx+c=0$ possède 1 seule racine z_0 réelle avec $z_0=\dfrac{-b}{2a}$
- si $\Delta<0$ L'équation $ax^2+bx+c=0$ possède 2 **racines** z_1 et z_2 complexes avec $z_1=\dfrac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2=\dfrac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

Résoudre les équations suivantes :

1. $4x^2-5x+1=0$
2. $8+2x-3x^2=0$
3. $9x^2-24x+16=0$
4. $(7x+3)(7x-3)=0$
5. $7x^2-7x+1=0$
6. $\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{2}{3}x-1=0$
7. $-\dfrac{2}{3}x^2-\dfrac{1}{6}x=\dfrac{1}{5}$
8. $2x^2-\sqrt{5}x+6=0$
9. $x^2-2\sqrt{7}x=-1$
10. $x^2+6=-3\sqrt{2}x$
11. $\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{4}=-\sqrt{10}x$
12. $x^2-x=-9$
13. $2x^2+2x+1=0$
14. $7+3x-7x^2=0$
15. $x^2-10x+2=0$
16. $(8x+3)(8x-3)=0$
17. $x^2-9x+3=0$
18. $x^2-2x=-1$
19. $\dfrac{1}{4}x^2+\dfrac{1}{3}x-8=0$
20. $-\dfrac{2}{5}x^2-\dfrac{1}{8}x=\dfrac{1}{2}$
21. $x^2-\sqrt{3}x+2=0$
22. $x^2-2\sqrt{5}x=-2$
23. $2x^2+5=-8\sqrt{2}x$
24. $\dfrac{1}{7}x^2+\dfrac{1}{14}=-2\sqrt{10}x$

$n°1$ Propriété sur les racines

On considère l'équation du second degré suivante : $ax^2+bx+c=0$ où a, b et c sont des réels tels que : $ac>\left(\frac{b}{2}\right)^2$

1. Déterminer les racines z_1 et z_2 de cette équation.
2. Calculer $\overline{z_1}$ et $\overline{z_2}$
3. Calculer z_1z_2
4. Calculer $||z_1||$ et $||z_2||$
5. Calculer z_1+z_2

$n°2$ Quelques calculs sur les racines

On considère l'équation du second degré suivante : $x^2+x+1=0$

1. Déterminer les racines z_1 et z_2 de cette équation.
2. Calculer z_1z_2
3. Calculer $||z_1||$ et $||z_2||$
4. Calculer z_1+z_2