N_1 Fonction logarithme népérien

D *Fonction logarithme népérien*

La fonction **logarithme népérien** noté $\ln$ est la fonction définie, dérivable et continue sur $]0;+\infty[$ comme la primitive de la fonction $\dfrac{1}{x}$ qui s'annule en 1, c'est à dire :

$$\boxed{[\ln(x)]' = \ln'(x) = \frac{1}{x} \text{ et } \ln(1) = 0}$$

D *Autre définition de la fonction logarithme népérien*

La fonction **logarithme népérien** noté $\ln$ est la fonction définie, dérivable et continue sur $]0;+\infty[$ telle que

$$\boxed{y = \ln(x) \Leftrightarrow x = \mathrm{e}^y}$$

R *Remarques*

- $\ln(1) = 0$ et $\ln(\mathrm{e}) = 1$
- La dérivée de $\ln(x)$ est $\frac{1}{x}$

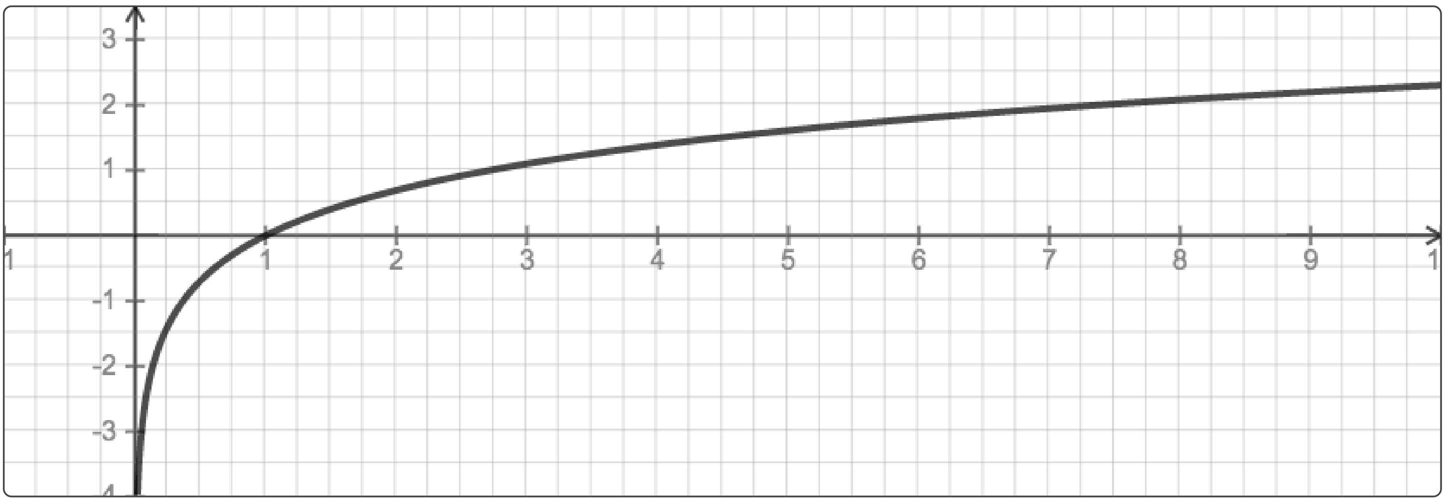
P *Tableau de variation*

La fonction $\ln(x)$ est définie et dérivable sur $]0;+\infty[$. La fonction $\ln(x)$ est **croissante** sur $]0;+\infty[$. On a de plus, $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln(x) = +\infty$:

x	0	$+\infty$
$\ln$	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$ $+\infty$

P *Représentation graphique*

Dans un repère orthogonal, la courbe représentative de la fonction $\ln(x)$ a pour asymptote verticale l'axe des ordonnées lorsque $x \to 0^+$



1 En utilisant la calculatrice donner $\ln(2)$; $\ln(3)$; $\ln(4)$; $\ln(2,6)$; $\ln(2,7)$ et $\ln(2,8)$. Arrondir au millième.

2 Déterminer une approximation au millième du nombre e.

3 Soit la fonction $g(x) = \ln(x-1) + 2$

a) Donner l'ensemble de définition et de dérivabilté de g.

b) Construire un tableau de variation de g.

c) Dans un repère, tracer la courbe représentative de g.

d) Déterminer graphiquement x tel que $g(x) = 4$.

N_2 Relation fonctionnelle

P *Relation fonctionnelle*

Pour a et b deux réels tels que $a>0$ et $b>0$: $\ln(ab)=\ln(a)+\ln(b)$

Calculer les expressions suivantes :

1. $\ln(8\times 6)$
2. $\ln(7x)$
3. $\ln(10\times 10)$
4. $\ln(2^7)$
5. $\ln(2xy)$
6. $\ln(x\times x)$

N_3 Logarithme d'un quotient et de l'inverse

P *Logarithme d'un quotient*

Pour a et b deux réels tels que $a>0$ et $b>0$: $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right)=\ln(a)-\ln(b)$

P *Logarithme de l'inverse*

Pour b un réel tel que $b>0$: $\ln\left(\dfrac{1}{b}\right)=-\ln(b)$

Calculer les expressions suivantes :

1. $\ln\left(\dfrac{34}{2}\right)$
2. $\ln\left(\dfrac{1}{5x}\right)$
3. $\ln\left(\dfrac{7}{x}\right)$
4. $\ln\left(10^{-9}\right)$
5. $\ln\left(\dfrac{2}{6x}\right)$
6. $\ln\left(\dfrac{1}{2xy}\right)$
7. $\ln\left(\dfrac{2x}{7}\right)$
8. $\ln\left(3^{-2}\right)$
9. $\ln\left(\dfrac{8x}{3}\right)$
10. $\ln\left(\dfrac{9x}{y}\right)$
11. $\ln\left(\dfrac{2y}{2x}\right)$
12. $\ln\left(\dfrac{xy}{z}\right)$

N_4 Logarithme d'une puissance

P *Logarithme d'une puissance*

Pour a un réel tel que $a>0$ et $n\in\mathbb{Z}$: $\ln(a^n)=n\ln(a)$

Calculer les expressions suivantes :

1. $\ln(x^8)$
2. $\ln(3^{-15})$
3. $\ln((xy)^8)$
4. $\ln(z^{-2})$

N_5 Dérivée $\ln(u(x))$

P *Dérivée* $\ln(u(x))$

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x\in I$, $u(x)>0$. Soit f une fonction définie sur I et par : $f(x)=\ln\Big(u(x)\Big)$. f est dérivable sur I et : $f'(x)=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$

Donner les dérivées de :

1. $f_1(x)=\ln(3x+2)$
2. $f_2(x)=\ln(1-x)$
3. $f_3(x)=\ln(x^2+1)$
4. $f_4(x)=x\ln(x^2+3)$
5. $f_5(x)=\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$
6. $f_6(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x}$
7. $f_7(x)=\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$
8. $f_8(x)=\ln\left(\dfrac{x^2+2}{x}\right)$
9. $f_9(x)=(2x+1)\ln(2x+1)$
10. $f_{10}(x)=\ln(x^3+x^2)$
11. $f_{11}(x)=\ln(x)$
12. $f_{12}(x)=\ln(7x^2-9x^3+\dfrac{1}{x})$

N_6 *Primitive* $\ln(u(x))$

P *Primitive* $\ln(u(x))$

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in I$, $u(x) > 0$. Soit f une fonction définie sur I et par : $f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$. Une primitive sur I de f est F : $F(x) = \ln\Big(u(x)\Big)$

Donner une primitive de :

1. $f_1(x) = \dfrac{3}{2x-4}$
2. $f_2(x) = x + \dfrac{3}{4x-5}$
3. $f_3(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$
4. $f_4(x) = x^2 + 3x + \dfrac{1}{1-3x}$
5. $f_5(x) = 2 + \dfrac{1}{2x-1} + \dfrac{1}{(2x-1)^2}$
6. $f_6(x) = \dfrac{x+1}{x^2+2x+2}$
7. $f_7(x) = \dfrac{2}{x-4} + \dfrac{1}{2x+7}$
8. $f_8(x) = \dfrac{1}{x\ln x}$
9. $f_9(x) = \dfrac{-8x^2}{8x^2-9}$

N_7 *Limites de* $\ln(u(x))$ *et autres limites*

P *Limites de* $\ln(u(x))$

Soient u une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$:

- si $\lim\limits_{x\to a} u(x) = b$ alors $\lim\limits_{x\to a} \ln(u(x)) = \ln(b)$
- si $\lim\limits_{x\to +\infty} u(x) = b$ alors $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln(u(x)) = \ln(b)$
- si $\lim\limits_{x\to -\infty} u(x) = b$ alors $\lim\limits_{x\to -\infty} \ln(u(x)) = \ln(b)$
- si $\lim\limits_{x\to a} u(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to a} \ln(u(x)) = +\infty$
- si $\lim\limits_{x\to +\infty} u(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln(u(x)) = +\infty$
- si $\lim\limits_{x\to -\infty} u(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to -\infty} \ln(u(x)) = +\infty$

P *Autres limites*

- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$
- $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = 0$

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 1^-} \ln(1-x^2)$
2. $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln(x^2+1)$
3. $\lim\limits_{x\to 3} \ln\left(\dfrac{x-3}{x}\right)$
4. $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln\left(\dfrac{x+9}{x}\right)$
5. $\lim\limits_{x\to +\infty} e^{\frac{1}{x}}$
6. $\lim\limits_{x\to -\infty} e^{3x+9}$

N_8 *Logarithme décimal*

D *Logarithme décimal*

La fonction **logarithme décimal**, notée log, est la fonction définie sur l'intervalle $I =]0;+\infty[$ par :

$$\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$$

P *Propriétés du logarithme décimal*

Soient a et b deux réels tels que $a > 0$ et $b > 0$ et $n \in \mathbb{Z}$:

- $\log(1) = 0$ et $\log(10) = 1$
- $\log\left(\dfrac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$
- $\log(a^n) = n\log(a)$
- $\log(ab) = \log(a) + \log(b)$
- $\log\left(\dfrac{1}{b}\right) = -\log(b)$
- $\log(10^n) = n$

Calculer :

1. $\log(10^3)$
2. $\log(10\,000)$
3. $\log(10^{-2})$
4. $\log(0,001)$

N_9 Nombre a^b

D *Nombre* a^b

Pour tout réel $a > 0$ et pour tout réel b, le nombre a^b est défini par : $a^b = \mathrm{e}^{b\ln(a)}$

Ecrire les nombres suivants sous la forme $\mathrm{e}^{b\ln(a)}$:

1. $1,6^8$
2. $0,5^x$
3. $x^{-\frac{3}{4}}$
4. $x^{9,6}$

N_{10} Exponentielle de base a

D *Exponentielle de base* a

Pour tout réel $a > 0$, on appelle **fonction exponentielle de base** a la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et par :
$f(x) = a^x = e^{x\ln(a)}$

P *Dérivée de* a^x

Pour tout réel $a > 0$, la fonction définie par $f(x) = a^x = e^{x\ln(a)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :
$f'(x) = \ln(a)a^x = \ln(a)e^{x\ln(a)}$

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{2}^x$:

1. Donner l'ensemble de définition et de dérivabilité de f.
2. Donner les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
3. Construire le tableau de variation de f.
4. Dans un repère orthonormé, tracer la courbe représentative de f.

N_{11} Equation $e^{ax} = b$

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $e^{2x} = 10$
2. $5e^{10x} - 100 = 0$
3. $e^{-2x+4} = \frac{1}{4}$
4. $e^{2x-7} = e^{0,5x}$
5. $e^{x^2} = e^{2x-1}$
6. $5e^{0,5x+1} - 1 = 0$
7. $e^{2x+9} = 1$
8. $2e^{x-3} - 5 = 0$
9. $0,5e^{3x-3} = \frac{1}{6}$
10. $e^{x+2} = e^{1-x}$
11. $e^{x^2+6} = e^{3x}$
12. $e^{x+1} = e^{2x}$

N_{12} Inéquation $\mathrm{e}^{ax} < b$

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $e^x < 9$
2. $30e^x > 10$
3. $e^{2x-4} \leqslant 5$
4. $e^{7x} \geqslant 5$
5. $20e^{3x} - \sqrt{2} < 0$
6. $e^{2x+9} > 1$
7. $e^{5x+1} \leqslant e^{-x}$
8. $4e^x - 5 \geqslant 0$

N_{13} Equation $\log(ax) = k$

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\log(x) = 10$
2. $\log(5x) = \frac{2}{3}$
3. $\log(7x) = \frac{7}{8}$
4. $\log(3x) = -\frac{10}{23}$

N_{14} Equation $x^\alpha = k$

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $x^{10} = 4$
2. $x^{1,5} = 2$
3. $x^{\frac{1}{3}} = 3$
4. $x^6 = 5$
5. $x^2 = 100$
6. $x^{13} = 0,47$
7. $x^{6,9} = 10$
8. $x^{0,5} = \sqrt{2}$

N_{15} Inéquation $\ln(u(x)) > b$

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $\ln(x) > -2$
2. $\ln(1,5x-1) \leqslant 6$
3. $4\ln(2x-6)+3 > 0$
4. $\ln(2-x) < -1$
5. $2\ln(3x-3) \leqslant 5$
6. $4\ln(7-8x) \geqslant 3$
7. $2\ln(3x-3)+5 < 0$
8. $\ln(4x-5) \geqslant 3$

N_{16} Inéquation $q^n \leqslant a$ ou $q^n \geqslant a$}

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $10^n \leqslant 0,5$
2. $5^n \geqslant 50$
3. $0,65^n \leqslant 0,005$
4. $0,1^n \geqslant 10^{-10}$

$n°1$ $\ln(ax^2+bx+c)$

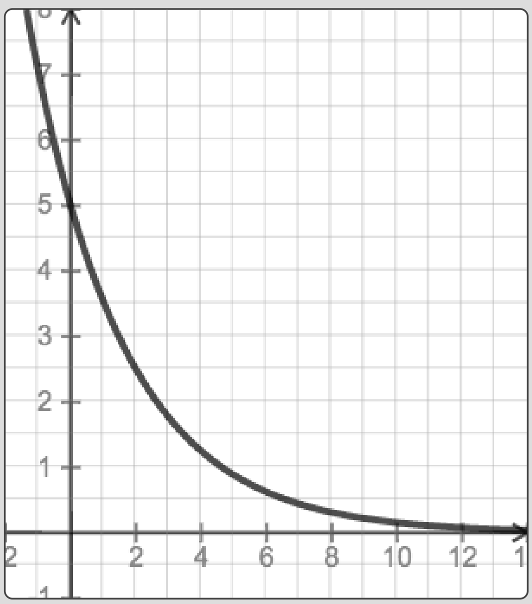
Soient a , b et c trois réels et f une fonction définie par : $f(x) = \ln(ax^2+bx+c)$. On suppose qu'il existe un intervalle I de $\mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in I$, $ax^2+bx+c > 0$.

1. Calculer la dérivée f' de f.
2. On suppose que f est dérivable en 0 et 1. Sachant que $f(0) = f(1) = 0$ et $f'(1) = 1$, déterminer a,b et c.
3. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \ln(x^2-x+1)$. Justifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2-x+1 > 0$
4. Calculer g', dérivée de g, puis étudier le signe de g'.
5. Déterminer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$ puis donner le tableau de variations de g en y faisant figurer les limites.
6. Soit h le fonction définie sur $\left]-\dfrac{1}{3};+\infty\right[$ par : $h(x) = \ln\left(\dfrac{3x-1}{x+1}\right)$
7. Développer $(x-1)^2(x+2)$. En déduire les solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$ de $x^3-3x+2=0$
8. Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on note $\mathcal{C}_g$ la courbe représentative de g et $\mathcal{C}_h$ la courbe représentative de h . Montrer que $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{C}_h$ ont un unique point en commun, et qu'en ce point, $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{C}_h$ ont la même tangente.

$n°2$ Fonction f

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(t) = 5e^{\left(-\frac{1}{2}\ln 2\right)t}$. Sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$ est représentée ci-contre.

1. Déterminer la limite de $f(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$. En donner une interprétation graphique.
2. Calculer $f'(t)$ pour $t \in [0;+\infty[$. Déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0. La tracer dans le repère.
3. Vérifier que pour tout $t \in [0;+\infty[$: $f(t+2) = \dfrac{1}{2}f(t)$. Le nombre de cellules, exprimé en millions, d'une culture cellulaire soumise à une expérimentation est modélisé, en fonction du temps, par la fonction f.
4. Comment interpréter l'égalité de la question **3.** ?
5. Déterminer l'instant t (en heures et minutes) où le nombre de cellules n'est plus que de $750\,000$.
6. Retrouver graphiquement le résultat en faisant apparaître les tracés utiles.



$n°3$ Intensité sonore

L'intensité sonore I d'un son caractérise le volume de ce son. L'unité de mesure de l'intensité sonore est le watt par mètre carré (Wm^{-2}). Le niveau sonore N de ce son est donné par la relation : $N = 10\log\left(\frac{I}{I_0}\right)$ où I_0 est une intensité sonore de référence valant $I_0 = 10^{-12}\ Wm^{-2}$. Le niveau sonore ainsi calculé est exprimé en décimal (dB)

1. Déterminer le niveau sonore en dB quand l'intensité sonore vaut $10^{-12}\ Wm^{-2}$. On parle de seuil d'audibilité.
2. On considère deux sons d'intensité sonore I_1 et I_2 et de niveau sonore N_1 et N_2. Quand on double l'intensité sonore : $I_2 = 2I_1$, quelle est la différence $N_2 - N_1$ des niveaux sonores ?
3. Quand la différence de deux niveaux sonores vaut $20\ dB$, quel est le rapport entre les deux intensités sonores.

$n°4$ Encadrement de $\ln(x+1) - \ln(x)$

Soient f et g deux fonctions définies sur $]0; +\infty[$ par :

- $f(x) = \ln(x+1) - \ln x - \dfrac{1}{x+1}$ et
- $g(x) = \ln(x+1) - \ln x - \dfrac{1}{x}$

1. Calculer la limite de f en 0.
2. Déterminer la limite de $x \mapsto \dfrac{x+1}{x}$ quand x tend vers $+\infty$. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$
3. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
4. Déterminer la dérivée f' de f.
5. Etudier le signe de f'.
6. Etablir le tableau de variations de f en y faisant figurer les limites.
7. Démontrer que pour $x > 0$: $\dfrac{1}{x+1} \leqslant \ln(x+1) - \ln(x)$
8. Déterminer la dérivée g' de g.
9. Etudier le signe de g'.
10. Etablir le tableau de variations de g.
11. Démontrer que pour $x > 0$: $\ln(x+1) - \ln(x) \leqslant \dfrac{1}{x}$
12. Donner un encadrement de $\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$

$n°5$ pH

On note $[H_3O^+]$ et $[OH^-]$ les concentrations molaires (en $molL^{-1}$) en hydronium et hydroxydes dans une solution. Pour toute solution aqueuse à une température de $25\ °C$, $[H_3O^+] \times [OH^-] = 10^{-14}$. Le potentiel hydrogène d'une solution, noté pH, est donné par $pH = -\log\left([H_3O^+]\right)$ ($pH \in [0; 14]$)

1. Une solution aqueuse est neutre quand $[H_3O^+] = [OH^-]$. Déterminer le pH d'une solution neutre (eau pure).
2. Une solution est acide lorsque lorsque sa concentration $[H_3O^+]$ est supérieure à celle de l'eau pure. sinon elle est dite basique. Comparer le pH d'une solution acide au pH de l'eau pure.
3. La solution S_1 a une concentration $[H_3O^+]$ $1\,000$ fois supérieure à celle de la solution S_2 dont le pH vaut 6. Quelle est le pH de la solution S_1 ?
4. Résoudre $\log(x) = -8,5$. Une solution dont le pH vaut $8,5$ est-elle acide ou basique ?