N_1 Fonction exponentielle

D Fonction exponentielle

La fonction **exponentielle** noté $\exp$ est la fonction définie, dérivable et continue sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\boxed{[\exp(x)]' = \exp'(x) = \exp(x) \text{ et } \exp(0) = 1}$$

R Remarques

- $\exp(x)$ est très souvent notée e^x
- Pour $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) \times \exp(-x) = 1$
- La dérivée de $\exp(x)$ est e^x
- $\exp(1) = e$ et $\exp(0) = e^0 = 1$
- Pour $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) > 0$ ou $e^x > 0$
- Une primitive de $\exp(x)$ est e^x

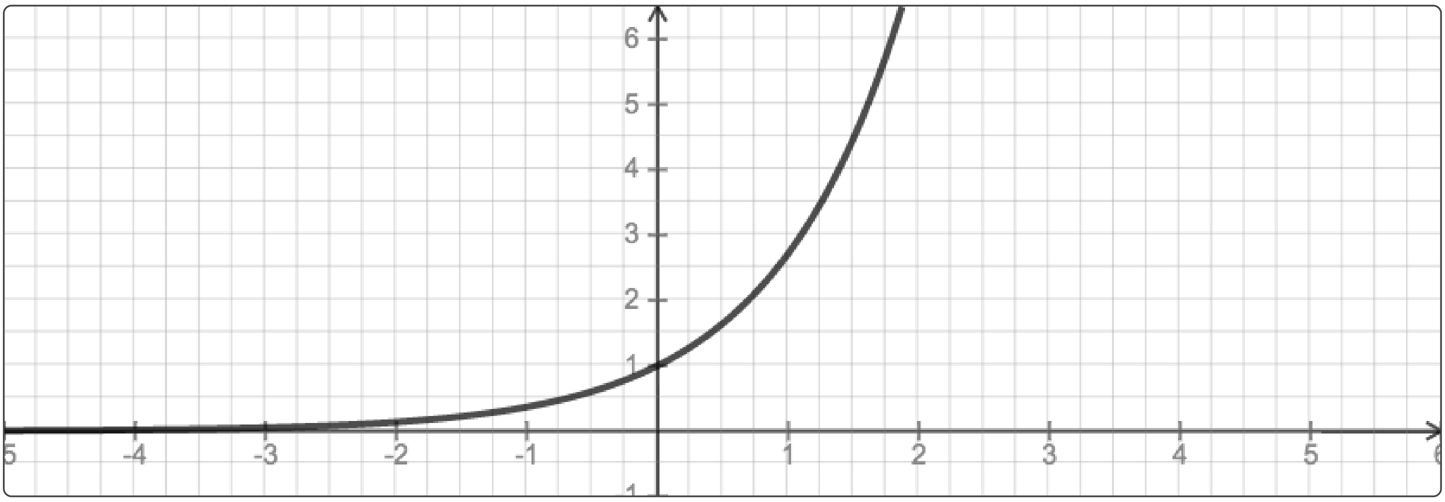
P Tableau de variation

La fonction $\exp(x)$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. La fonction e^x est **croissante** sur $\mathbb{R}$. On a de plus, $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \exp(x) = +\infty$:

x	$-\infty$		$+\infty$
$\exp$	0	$\nearrow$	$+\infty$

P Représentation graphique

Dans un repère, la courbe représentative de la fonction $\exp(x) = e^x$ a pour asymptote horizontale l'axe des abscisses lorsque $x \to -\infty$:



1 En utilisant la calculatrice donner e ; e^2 ; $\exp(3)$; e^{-1} ; $\exp(-2)$. Arrondir au millième.

2 Soit la fonction $g(x) = \exp(x-1) + 2$.

a) Donner l'ensemble de dérivabilté de g puis construire un tableau de variation de g.

b) Dans un repère, tracer la courbe représentative de g.

c) Déterminer graphiquement x tel que $g(x) = 1$.

3 Soit la fonction $h(x)$ telle que $h'(x) = 2h(x)$ et telle que $h(0) = 1$.

a) Déterminer l'expression de h.

b) Construire un tableau de variation de h.

4 Soit la fonction $f(x)$ telle que $f'(x) = -3f(x) + 2$ et telle que $f(0) = 3$.

a) Déterminer l'expression de f.

b) Construire un tableau de variation de f.

N_2 Relation fonctionnelle

Relation fonctionnelle

Pour a et b deux réels : $\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a \times \mathrm{e}^b$

Calculer les expressions suivantes :

1. e^{2+3}
2. $\mathrm{e}^{\frac{1}{3}+\frac{3}{4}}$
3. $\mathrm{e}^{\frac{2}{5}+x}$
4. e^{y+x}
5. $\mathrm{e}^{2{,}7x+9}$
6. e^{3x^2+2x+1}
7. e^{7x+y}
8. $\mathrm{e}^{9+3{,}3y+6x+2x^2}$

N_3 Exponentielle d'une différence

Exponentielle d'une différence

Pour a et b deux réels : $\mathrm{e}^{a-b} = \mathrm{e}^a \div \mathrm{e}^b = \dfrac{\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^b}$

Calculer les expressions suivantes :

1. $\mathrm{e}^{2-9{,}7}$
2. $\mathrm{e}^{\frac{2}{5}-\frac{3}{4}}$
3. $\mathrm{e}^{\frac{1}{3}+x}$
4. e^{y-x}
5. $\mathrm{e}^{4x-0{,}7}$
6. e^{3x^2-2x-1}
7. e^{x-y+3}
8. $\mathrm{e}^{9-2y-6x+2x^2}$

N_4 Exponentielle d'un produit

Exponentielle d'un produit

Pour a et b deux réels et $n \in \mathbb{Z}$: $\mathrm{e}^{ab} = \left(\mathrm{e}^a\right)^b = \left(\mathrm{e}^b\right)^a$ et $\mathrm{e}^{na} = \left(\mathrm{e}^a\right)^n$

Calculer les expressions suivantes :

1. $\mathrm{e}^{2\times 4}$
2. e^{7x}
3. e^{2yx}
4. $\mathrm{e}^{0{,}5x}$
5. e^{-4x}
6. e^{8y}
7. e^{xyz}
8. e^{3x+7y}

N_5 Dérivée de $\mathrm{e}^{u(x)}$

Dérivée de $\mathrm{e}^{u(x)}$

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit f une fonction définie sur I et par : $f(x) = e^{u(x)}$. f est dérivable sur I et : $f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$

Donner les dérivées de :

1. e^{4x+1}
2. e^{2x+3}
3. $3x - 4x^2 + \mathrm{e}^{2x^2}$
4. $\mathrm{e}^{\frac{1}{x}-7x^6}$
5. $\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}+\sqrt{3x-1}}$
6. $\mathrm{e}^{\frac{4x+8}{\cos x}}$
7. $\mathrm{e}^{2\sin(7x-8)}$
8. $(x-1)\mathrm{e}^{-x^2+3\sin^2 x}$

N_6 Primitive $u'(x)\mathrm{e}^{u(x)}$

Primitive $u'(x)\mathrm{e}^{u(x)}$

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit f une fonction définie sur I et par : $f(x) = u'(x)e^{u(x)}$. Une primitive sur I de f est F : $F(x) = e^{u(x)}$

Donner une primitive de :

1. $3e^x + x^2$
2. $2\mathrm{e}^{3x+1}$
3. $\dfrac{3\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}$
4. $2\mathrm{e}^x + \cos x$
5. $\dfrac{1}{\mathrm{e}^{3x}}$
6. $2 - x\mathrm{e}^{-x^2}$
7. $\mathrm{e}^{2x} - 5\mathrm{e}^x + 8$
8. $\dfrac{2\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2}$

N_7 Limites de $\mathrm{e}^{u(x)}$ et autres limites

P *Limites de $e^{u(x)}$*

Soient u une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$:

- si $\lim\limits_{x\to a} u(x) = b$ alors $\lim\limits_{x\to a} e^{u(x)} = e^b$
- si $\lim\limits_{x\to +\infty} u(x) = b$ alors $\lim\limits_{x\to +\infty} e^{u(x)} = e^b$
- si $\lim\limits_{x\to -\infty} u(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to +\infty} e^{u(x)} = +\infty$
- si $\lim\limits_{x\to -\infty} u(x) = b$ alors $\lim_{x\to -\infty} e^{u(x)} = e^b$
- si $\lim\limits_{x\to -\infty} u(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x\to -\infty} e^{u(x)} = 0$
- si $\lim\limits_{x\to a} u(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to a} e^{u(x)} = +\infty$
- si $\lim\limits_{x\to +\infty} u(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to +\infty} e^{u(x)} = +\infty$
- si $\lim\limits_{x\to a} u(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x\to a} e^{u(x)} = 0$
- si $\lim\limits_{x\to +\infty} u(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x\to +\infty} e^{u(x)} = 0$

P *Autres limites*

- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to -\infty} x\mathrm{e}^x = 0$

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to +\infty} e^{\frac{1}{x}}$
2. $\lim\limits_{x\to -\infty} e^{3x+9}$
3. $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x^2}}$
4. $\lim\limits_{x\to 3^-} e^{\frac{1}{x-3}}$
5. $\lim\limits_{x\to +\infty} e^{\frac{1}{x}}$
6. $\lim\limits_{x\to -\infty} e^{3x+9}$
7. $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x^2}}$
8. $\lim\limits_{x\to 3^-} e^{\frac{1}{x-3}}$
9. $\lim\limits_{x\to +\infty} e^{\frac{1}{x}}$
10. $\lim\limits_{x\to -\infty} e^{3x+9}$
11. $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x^2}}$
12. $\lim\limits_{x\to 3^-} e^{\frac{1}{x-3}}$
13. $\lim\limits_{x\to +\infty} e^{\frac{1}{x}}$
14. $\lim\limits_{x\to -\infty} e^{3x+9}$
15. $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x^2}}$
16. $\lim\limits_{x\to 3^-} e^{\frac{1}{x-3}}$

$n°1$ Lubrifiant d'un moteur

La température f en $°C$ du lubrifiant d'un moteur varie en fonction du temps t exprimé en heures. La fonction f est définie sur $[0;+\infty[$ par $f(t) = 30 - 10\mathrm{e}^{-0,1t}$

1. Déterminer la température du lubrifiant à l'arrêt at au bout de $24\ h$.
2. Déterminer $\lim\limits_{t\to +\infty} f(t)$. Donner une interprétation graphique de ce résultat puis donner une signification concrète pour ce lubrifiant.
3. Calculer $f'(t)$, la dérivée de f sur $[0;+\infty[$. En déduire le sens de variations de la fonction f sur $[0;+\infty[$.
4. Tracer la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f dans un repère adapté.
5. A quel instant la température du lubrifiant est-elle de $28°C$? Donner une valeur approchée à l'heure près.

$n°2$ Fonction g

Soit g une fonction définie par $g(x) = 2\mathrm{e}^x + 2x + 3$ sur $\mathbb{R}$.

1. Etudier le fonction g et la représenter la courbe représentative $\mathcal{C}_g$ dans le repère $(0; \vec{i}, \vec{j})$.
2. En déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α.
3. Donner l'arrondi au dixième de α.
4. En déduire le signe de $g(x)$.

$n°3$ Fonction f

Soit f une fonction définie par $f(x) = 2\mathrm{e}^x + x^2 + 3x$ sur $\mathbb{R}$.

1. Déterminer les limites de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$ et $-\infty$.
2. Soit $\mathcal{P}$ la parabole d'équation $y = x^2 + 3x$. Déterminer la limite de $f(x) - (x^2 + 3x)$ quand x tend vers $-\infty$. Que peut on en déduire graphiquement ?
3. Etudier la positon de $\mathcal{P}$ et de la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f. Etablir le tabeau de variation de f.
4. Donner une valeur approchée de $f(\alpha)$ à 10^{-1} près.
5. Déterminer une équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.

$n°4$ Une autre fonction f

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x - x^2)\mathrm{e}^{-x+2} + 1$

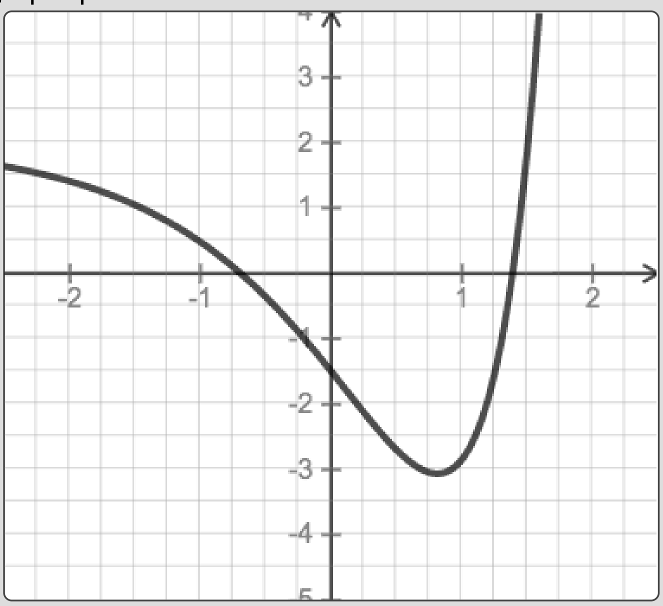
1. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
2. Montrer que pour $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = \mathrm{e}^2(xe^{-x} - x^2\mathrm{e}^{-x}) + 1$
3. En déduire la limite de f en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
4. Montrer que pour $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = (x^2 - 3x + 1)\mathrm{e}^{-x+2}$
5. Déterminer le signe de f' sur $\mathbb{R}$ et en déduire le sens de variation de f.
6. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f et de la droite (Δ) d'équation $y = 1$.
7. Etudier les positions relatives de la courbe $\mathcal{C}_f$ et de la droite (Δ).
8. Montrer que sur l'intervalle $[-1; 0]$, la courbe $\mathcal{C}_f$ coupe l'axe des abscisses en un unique point. On notera α l'abscisse de ce point.
9. A l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

$n°5$ Encore une fonction f

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{2x} - \frac{9}{2}\mathrm{e}^x + 2$$

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$ dans un repère orthonormé d'unité graphique $2\ cm$:



1. Déterminer la limite de f en $-\infty$. Interpréter le résultat graphiquement.
2. Démontrer que pour $x \in \mathbb{R}$:
   $$f(x) = (\mathrm{e}^x - 4)\left(\mathrm{e}^x - \frac{1}{2}\right)$$
3. En déduire la limite de f en $+\infty$.
4. Démontrer que pour $x \in \mathbb{R}$:
   $$f'(x) = 2\mathrm{e}^x\left(\mathrm{e}^x - \frac{9}{4}\right)$$
5. Etudier le signe de f' puis établir le tableau complet des variations de la fonction f : on calculera en particulier la valeur exacte de l'extremum.
6. Graphiquement :
   - **a)** Quelle est l'équation de la tangente $(\mathcal{D})$ en 0 à la courbe $\mathcal{C}_f$.
   - **b)** Résoudre l'équation $f(x) = 0$
   - **c)** Résoudre l'inéquation $f(x) \leqslant 2$
7. En utilisant la factorisation de la fonction f, résoudre par le calcul l'équation $f(x) = 0$.