N_1 **Limite finie en a**

D *Limite*

Soient f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $a \in I$. La fonction f admet une **limite finie** $l \in \mathbb{R}$ en a quand la distance $|l - f(x)|$ peut être rendue aussi petite que l'on veut si x est suffisamment proche de a. On écrit alors : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$

D *Continuité*

La fonction f est **continue en a** quand : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

La fonction f est **continue** sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ quand f est continue pour tout réel $a \in I$. Sa courbe représentative ne possède pas de "trou" sur I : on peut la tracer sans lever le crayon.

T *Dérivabilité et continuité*

Une foncton **dérivable** sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est **continue** sur I.

A *Algorithme*

L'algorithme suivant permet d'afficher la limite d'une fonction :

```
function f(x) {return 3*x + 3;}

var distance = 0.001;
var step = 0.001;
var x = 0;
var a = 10;
var l = 0;

while (Math.abs(f(x) - f(a)) > distance)
{
    l = f(x);
    x = x+step;
}
algo.output('La limite de la fonction f en '+a+' vaut '+l);
algo.output('f('+a+') =  '+f(a));
```

Algorithme
Commentaires
Créer nombre
Demander nombre
Créer chaîne
Créer une liste
Formater Nombre
Affecter

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to 0} f_1(x)$ avec $f_1(x) = 5x + 9$
2. $\lim\limits_{x \to -6} f_2(x)$ avec $f_2(x) = 8x^2$
3. $\lim\limits_{x \to 2} f_3(x)$ avec $f_3(x) = \sqrt{x^2 + 1}$
4. $\lim\limits_{x \to 3} f_4(x)$ avec $f_4(x) = \dfrac{1}{x + 2}$

N_2 **Limite infinie ($+\infty$) en a**

D *Limite*

• La fonction f admet une **limite infinie** ($+\infty$) en a par **valeurs supérieures** quand $f(x)$ peut être rendu aussi grand que l'on veut si $x > a$ est suffisamment proche de a. On écrit alors : $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$

• La fonction f admet une **limite infinie** ($+\infty$) en a par **valeurs inférieures** quand $f(x)$ peut être rendu aussi grand que l'on veut si $x < a$ est suffisamment proche de a. On écrit alors : $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to 0^+} f_1(x)$ avec $f_1(x) = \dfrac{1}{x}$
2. $\lim\limits_{x \to 2^-} f_2(x)$ avec $f_2(x) = \dfrac{7}{2 - x}$
3. $\lim\limits_{x \to 4^+} f_3(x)$ avec $f_3(x) = \dfrac{x}{2x^2 - 32}$
4. $\lim\limits_{x \to 3^-} f_4(x)$ avec $f_4(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{6 - 2x}$

N_3 *Limite infinie ($-\infty$) en a*

Limite

• La fonction f admet une **limite infinie** ($-\infty$) en a par **valeurs supérieures** quand $f(x)$ peut être rendu aussi petit que l'on veut si $x > a$ est suffisamment proche de a. On écrit alors : $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty$

• La fonction f admet une **limite infinie** ($-\infty$) en a par **valeurs inférieures** quand $f(x)$ peut être rendu aussi grand que l'on veut si $x < a$ est suffisamment proche de a. On écrit alors : $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = -\infty$

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 0^+} f_1(x)$ avec $f_1(x) = \dfrac{1}{x}$
2. $\lim\limits_{x\to 2^-} f_2(x)$ avec $f_2(x) = \dfrac{7}{2-x}$
3. $\lim\limits_{x\to 4^+} f_3(x)$ avec $f_3(x) = \dfrac{x}{2x^2-32}$
4. $\lim\limits_{x\to 3^-} f_4(x)$ avec $f_4(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{6-2x}$

N_4 *Asymptote verticale*

Asymptote verticale

La courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f admet une **asymptote verticale** (parallèle à l'axe des ordonnées) d'équation $x = a$ quand $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ ou $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ sont infinies ($+\infty$ ou $-\infty$).

C'est à dire que $\mathcal{C}_f$ se "rapproche" de plus de plus de la droite verticale d'équation $x = a$.

Montrer que les représentations graphiques des fonctions f suivantes admettent une asymptote verticale d'équation $x = a$ ($a \in \mathbb{R}$) :

1. $f : x \mapsto \dfrac{-1}{x^2}$ et $a = 0$
2. $f : x \mapsto 12 + \dfrac{1}{x-9}$ et $a = 9$
3. $f : x \mapsto x^2 + \dfrac{1}{9-x^2}$ et $a = 3$
4. $f : x \mapsto 2x - 8 + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ et $a = 0$

N_5 *Limite finie en l'infini*

Limite en $+\infty$ et $-\infty$

• La fonction f admet une **limite finie** $l \in \mathbb{R}$ en $+\infty$ quand la distance $|l - f(x)|$ peut être rendue aussi petite que l'on veut (proche de 0) si x est suffisamment grand (proche de $+\infty$). On écrit alors : $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = l$

• La fonction f admet une **limite finie** $l \in \mathbb{R}$ en $-\infty$ quand la distance $|l - f(x)|$ peut être rendue aussi petite que l'on veut (proche de 0) si x est suffisamment petit (proche de $-\infty$). On écrit alors : $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = l$

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ avec $f(x) = \dfrac{-1}{x}$
2. $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ avec $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$
3. $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ avec $f(x) = \dfrac{2}{x^2-16}$
4. $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ avec $f(x) = \sqrt{5} - \dfrac{1}{1+x^2}$

N_6 Asymptote horizontale

D *Asymptote horizontale*

La courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f admet une **asymptote horizontale** (parallèle à l'axe des abscisses) d'équation $y = l$ quand $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$ ou $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l$. C'est à dire que $\mathcal{C}_f$ se "rapproche" de plus de plus de la droite horizontale d'équation $y = l$.

Montrer que les représentations graphiques des fonctions f suivantes admettent une asymptote horizontale d'équation $y = a$ ($a \in \mathbb{R}$) :

1. $f : x \mapsto 3 - \dfrac{1}{x^2}$ et $a = 3$
2. $f : x \mapsto 12 + \dfrac{1}{x-9}$ et $a = 12$
3. $f : x \mapsto -4 - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{9-x^2}$ et $a = -4$
4. $f : x \mapsto \dfrac{2x^2-8}{4x^2}$ et $a = 0,5$

N_7 Limite infinie en l'infini

D *Limite infinie en $+\infty$ et $-\infty$*

• La fonction f admet une **limite infinie** ($+\infty$) en $+\infty$ quand $f(x)$ peut être rendu aussi grand que l'on veut (proche de $+\infty$) si x est suffisamment grand (proche de $+\infty$). On écrit alors : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

• La fonction f admet une **limite infinie** ($+\infty$) en $-\infty$ quand $f(x)$ peut être rendu aussi grand que l'on veut (proche de $+\infty$) si x est suffisamment petit (proche de $-\infty$). On écrit alors : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

• La fonction f admet une **limite infinie** ($-\infty$) en $+\infty$ quand $f(x)$ peut être rendu aussi petit que l'on veut (proche de $-\infty$) si x est suffisamment grand (proche de $+\infty$). On écrit alors : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

• La fonction f admet une **limite infinie** ($-\infty$) en $-\infty$ quand $f(x)$ peut être rendu aussi petit que l'on veut (proche de $-\infty$) si x est suffisamment petit (proche de $-\infty$). On écrit alors : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ avec $f(x) = \dfrac{-1}{x} + x^2$
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ avec $f(x) = \sqrt{x}$
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ avec $f(x) = x\sqrt{x}$
4. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ avec $f(x) = -2x^6$
5. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ avec $f(x) = \dfrac{7x^2+9x-9}{6x-8}$
6. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ avec $f(x) = \dfrac{4-x^2}{2-6x}$
7. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ avec $f(x) = 3x - 9$
8. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ avec $f(x) = -4x + 1$

N_8 Limite de fonction affine et fonction carrée

P *Fonction affine et fonction carrée*

Soit a ; b et α trois réels :

$x \to$	α	$-\infty$	$+\infty$
$\lim(ax+b)$ avec $a > 0$	$a\alpha + b$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim(ax+b)$ avec $a < 0$	$a\alpha + b$	$+\infty$	$-\infty$

La fonction **affine** $x \mapsto ax + b$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Soit α un réel :

$x \to$	α	$-\infty$	$+\infty$
$\lim(x^2)$	α^2	$+\infty$	$+\infty$

La fonction **carrée** $x \mapsto x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$.

1. Ecrire un </> **algorithme** permettant de déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2$
2. Ecrire un </> **algorithme** permettant de déterminer que la fonction $f(x) = -2x + 5$ est continue en 2.

N_9 Autres fonctions de référence

P *Autres fonctions de référence*

Soit α un réel non nul :

$x \to$	α	$-\infty$	0^-	0^+	$+\infty$
$\lim\left(\frac{1}{x}\right)$	$\frac{1}{\alpha}$	0^-	$-\infty$	$+\infty$	0^+

La fonction **inverse** $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$.

Soit α un réel positif :

$x \to$	α	0	$+\infty$
$\lim\left(\sqrt{x}\right)$	$\sqrt{\alpha}$	0	$+\infty$

La fonction **racine carrée** $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0;+\infty[$.

Soit α un réel :

$x \to$	α	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\left(\lvert x\rvert\right)$	$\lvert\alpha\rvert$	$+\infty$	$+\infty$

La fonction **valeur absolue** $x \mapsto \lvert x\rvert$ est continue sur $]-\infty;+\infty[$.

Soit α un réel et n un entier naturel non nul :

$x \to$	α	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\left(x^n\right)$ si n est pair	α^n	$+\infty$	$+\infty$
$\lim\left(x^n\right)$ si n est impair	α^n	$-\infty$	$+\infty$

La fonction **puissance** $x \mapsto x^n$ est continue sur $]-\infty;+\infty[$.

1 Ecrire un </> algorithme permettant de déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2$

2 Ecrire un </> algorithme permettant de déterminer que la fonction $f(x) = -2x+5$ est continue en 2.

N_{10} Limites d'une somme

P *Limites d'une somme de deux fonctions*

Soient deux fonctions f et g. Le tableau ci-dessous présente la limite de la somme $f+g$ en fonction des limites de f et g. Dans certains cas il n'est pas possible de déterminer la limite de la somme, on parle alors de **Forme Indéterminée** (FI).

		$\lim f$		
	$+$	l_f	$+\infty$	$-\infty$
$\lim g$	l_g	$l_f + l_g$	$+\infty$	$-\infty$
	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	**FI**
	$-\infty$	$-\infty$	**FI**	$-\infty$

l_f et l_g sont deux réels.

Déterminer les limites suivantes :

1 $\lim\limits_{x\to0} f(x)$ avec $f(x) = x^6 + \dfrac{1}{x}$

2 $\lim\limits_{x\to9} f(x)$ avec $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{9-x}$

3 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ avec $f(x) = 9 - 4x + 6x^2$

4 $\lim\limits_{x\to0} f(x)$ avec $f(x) = \sqrt{x} - 8x^2 + \dfrac{-1}{x^5}$

N_{11} *Limites d'une somme*

P *Limites d'un produit de deux fonctions*

Soient deux fonctions f et g. Le tableau ci-dessous présente la limite du produit $f \times g$ en fonction des limites de f et g. Dans certains cas il n'est pas possible de déterminer la limite de la somme, on parle alors de **Forme Indéterminée** (FI).

		$\lim f$				
	$\times$	$l_f > 0$	$l_f < 0$	$l_f = 0$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim g$	$l_g > 0$	$l_f l_g$	$l_f l_g$	0	$+\infty$	$-\infty$
	$l_g < 0$	$l_f l_g$	$l_f l_g$	0	$-\infty$	$+\infty$
	$l_g = 0$	0	0	0	**FI**	**FI**
	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**FI**	$+\infty$	$-\infty$
	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	**FI**	$-\infty$	$+\infty$

l_f et l_g sont deux réels.

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ avec $f(x) = x^6 + \dfrac{1}{x}$
2. $\lim\limits_{x \to 9} f(x)$ avec $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{9 - x}$
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ avec $f(x) = 9 - 4x + 6x^2$
4. $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ avec $f(x) = \sqrt{x} - 8x^2 + \dfrac{-1}{x^5}$

N_{12} *Limites d'une fonction composée*

P *Limites de l'inverse d'une fonction*

Soit f une fonction. Le tableau ci-dessous présente la limite de l'inverse $\dfrac{1}{f}$ en fonction de la limite de f.

$\lim f$	a	$-\infty$	$+\infty$	0^+	0^-
$\lim \dfrac{1}{f}$	$\dfrac{1}{a}$	0^-	0^+	$+\infty$	$-\infty$

a est un réel non nul.

P *Limites d'une composée d'une fonction*

Soient u et f deux fonctions telles que pour tout x dans l'ensemble de définition de u, $u(x)$ appartient à l'ensemble de définition de f. a, b et c désignent trois réels ou $-\infty$ ou $+\infty$:

$$\text{si } \lim_{x \to a} u(x) = b \text{ et } \lim_{x \to b} f(x) = c \text{ alors } \lim_{x \to a} f(u(x)) = c$$

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ avec $f(x) = x^6 + \dfrac{1}{x}$
2. $\lim\limits_{x \to 9} f(x)$ avec $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{9 - x}$
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ avec $f(x) = 9 - 4x + 6x^2$
4. $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ avec $f(x) = \sqrt{x} - 8x^2 + \dfrac{-1}{x^5}$

N_{13} Limites et comparaison

Théorème de minoration et majoration

Soient f et g deux fonctions définies que un intervalle de la forme $[a;+\infty[$ telles que pour tout $x > a$ $f(x) \leqslant g(x)$

- si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ et si $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$
- si $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ et si $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

Théorème d'encadrement

Soient f, g et h trois fonctions définies que un intervalle de la forme $[a;+\infty[$ telles que pour tout $x > a$ $hg(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$

- Pour un réel l, si $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = l$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = l$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$
- Pour un réel l, si $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = l$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = l$ alors $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l$

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ avec $f(x) = x^6 + \dfrac{1}{x}$
2. $\lim\limits_{x\to 9} f(x)$ avec $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{9-x}$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ avec $f(x) = 9 - 4x + 6x^2$
4. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ avec $f(x) = \sqrt{x} - 8x^2 + \dfrac{-1}{x^5}$

N_{14} Théorème des valeurs intermédaires

Théorème des valeurs intermédaires

Soit une fonction f **continue** sur un intervalle $[a;b]$.

- f atteint son minimum en m et son maximum en M
- pour tout $k \in [m;M]$, il existe au moins un réel $c \in [a;b]$ tel que $f(c) = k$

Si la fonction f est strictement **monotone** sur $[a;b]$ alors le réel c est **unique**.

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ avec $f(x) = x^6 + \dfrac{1}{x}$
2. $\lim\limits_{x\to 9} f(x)$ avec $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{9-x}$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ avec $f(x) = 9 - 4x + 6x^2$
4. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ avec $f(x) = \sqrt{x} - 8x^2 + \dfrac{-1}{x^5}$