N_1 *Fonction continue et positive*

D *Fonction continue*

Une fonction f est **continue** sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ quand sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$ est en un seul morceau sur I c'est à dire que sa représentation graphique ne possède pas de "cassure" sur I ou encore on peut la tracer sans lever le crayon.

D *Fonction positive*

Une fonction f est **positive** sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ quand pour tout réel $x \in I$, $f(x) \geqslant 0$.

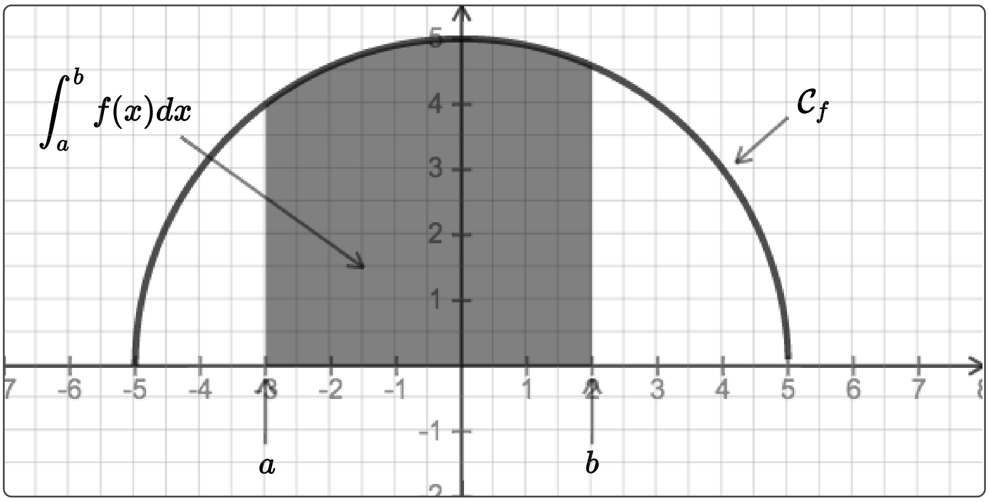
Donner cinq fonctions continues et positives sur un intervalle I de $\mathbb{R}$

N_2 *Intégrale*

D *Intégrale*

Soient a et b deux réels tels que $a \leqslant b$ et f une fonction **continue et positive** sur l'intervalle $I = [a; b]$ de représentation graphique $\mathcal{C}_f$. L'**intégrale de f sur** $[a; b]$ est l'aire de la partie du plan délimitée par $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses ($y = 0$) et les droites verticales d'équation $x = a$ et $x = b$.

On note cette aire : $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$



P *Intégrale et primitive*

Soit F une primitive de f sur $[a; b]$ alors : $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

On se place dans un repère orthonormé d'unité $1\ cm$.

1 Soit une fonction f_1 définie sur $\mathbb{R}$ par $f_1(x) = 2x + 1$.

a) Tracer la courbe représentative $\mathcal{C}_{f_1}$ de f_1.

b) Hachurer le domaine $\mathcal{D}_1$ du plan délimité par $\mathcal{C}_{f_1}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 2$ et $x = 5$. Calculer l'aire $\mathcal{A}_1$ du domaine $\mathcal{D}_1$ géométriquement puis algébriquement.

2 Soit une fonction f_2 définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f_2(x) = \dfrac{1}{x}$.

a) Tracer la courbe représentative $\mathcal{C}_{f_2}$ de f_2.

b) Hachurer le domaine $\mathcal{D}_2$ du plan délimité par $\mathcal{C}_{f_2}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 3$. Calculer l'aire $\mathcal{A}_2$ du domaine $\mathcal{D}_2$ algébriquement.

3 Soit une fonction f_3 définie sur $\mathbb{R}$ par $f_3(x) = x^2$.

a) Tracer la courbe représentative $\mathcal{C}_{f_3}$ de f_3.

b) Hachurer le domaine $\mathcal{D}_3$ du plan délimité par $\mathcal{C}_{f_3}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = -2$ et $x = 3$. Calculer l'aire $\mathcal{A}_3$ du domaine $\mathcal{D}_3$ algébriquement.

N_3 Aire entre deux courbes

P *Aire entre deux courbes*

Soient f et g deux fonctions continues et positive sur l'intervalle $I=[a;b]$ $(a \leqslant b)$ telles que pour tout $x \in I$, $f(x) \leqslant g(x)$ alors l'aire du domaine $\mathcal{D}$ délimité par les deux courbes représentatives $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ et les deux droites verticales d'équation $x=a$ et $x=b$ vaut :

$$\boxed{\int_a^b \Big(g(x)-f(x)\Big)dx = \int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx}$$

On se place dans un repère orthonormé d'unité $1\ cm$. Soient deux fonctions f_1 et f_2 définies sur $\mathbb{R}$ par $f_1(x)=2x+4$ et $f_2(x)=e^x$.

1. Dans un même repère, tracer les courbes représentatives $\mathcal{C}_{f_1}$ de f_1 et $\mathcal{C}_{f_2}$ de f_2
2. Démontrer que pour $x \in [0;2]$, $f_1(x) > f_2(x)$.
3. Hachurer le domaine $\mathcal{D}$ du plan délimité par $\mathcal{C}_{f_1}$, $\mathcal{C}_{f_2}$ et les droites d'équation $x=0$ et $x=2$.
4. Calculer l'aire $\mathcal{A}$ du domaine $\mathcal{D}$. Arrondir à $0,1$ près.

N_4 Intégrale d'une fonction continue

P *Intégrale d'une fonction continue*

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et a et b deux réels tels que $a \in I$ et $b \in I$. Soient f une fonction continue sur I et dont une primitive sur I est la fonction F. L'**intégrale** de la fonction continue f entre a et b vaut :

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a) = \Big[F(x)\Big]_a^b}$$

Calculer $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$:

1. avec $f(x)=3x^2-3x+1$, $a=3$ et $b=5$
2. avec $f(x)=e^x+\dfrac{1}{x}$, $a=\dfrac{1}{2}$ et $b=1$
3. avec $f(x)=\sin x$, $a=0$ et $\dfrac{\pi}{2}$.
4. avec $f(x)=-5x+10$, $a=-3$ et $\dfrac{3}{2}$

N_5 Linéarité

P *Linéarité*

Soient f et g deux fonctions continues sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$ et a, et b deux réels appartenant à I et α et β deux réels alors :

$$\boxed{\int_a^b \Big(\alpha f(x)+\beta g(x)\Big)dx = \alpha\int_a^b f(x)dx + \beta\int_a^b g(x)dx}$$

Calculer $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ en utilisant la propriété précédente (arrondir à $0,01$ près le cas échéant) :

1. avec $f(x)=7x+6x^2$, $a=0$ et $b=2$
2. avec $f(x)=-2e^x+3x$, $a=\dfrac{1}{2}$ et $b=1$
3. avec $f(x)=9\sin x-3\cos x$, $a=0$ et $\dfrac{\pi}{2}$
4. avec $f(x)=\dfrac{3}{x}+7x^4$, $a=-3$ et $\dfrac{3}{2}$

N_6 Positivité

P *Positivité*

Soient a et b deux réels tels que $a \leqslant b$ et f une fonction continue et positive sur l'intervalle $[a;b]$ alors :

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \geqslant 0}$$

Démontrer que $\int_{-1}^{5}(2x^2+3)dx$ et que $\int_{-3}^{-1} 8\mathrm{e}^{-2x-5}dx$ sont positives.

N_7 Relation de Chasles

P *Relation de Chasles*

Soient f une fonction continue sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$ et a, b et c trois réels appartenant à I alors :

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx}$$

On a représenté la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f sur l'intervalle $[0;10]$:

1. Par le calcul, déterminer $\int_0^{10} f(x)dx$
2. En utilisant l'aire de trapèzes rectangles, déterminer l'aire du domaine du plan délimité par $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=0$ et $x=10$

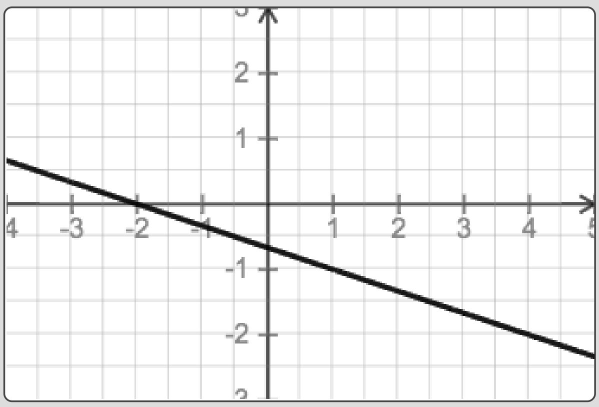
N_8 Opposé

P *Opposé*

Soient f une fonction continue sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$ et a, et b deux réels appartenant à I alors /

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx}$$

On a représenté la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f sur l'intervalle $[-3,5;4,5]$:



Par le calcul, déterminer l'aire du domaine du plan délimité par l'axe des abscisses, $\mathcal{C}_f$ et les droites d'équation $x=0,5$ et $x=3,5$

N_9 Valeur moyenne

P *Valeur moyenne*

Soient a, et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction continue sur l'intervalle $[a;b]$. On appelle **valeur moyenne** de la fonction f sur $[a;b]$ le réel : $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)dx$

P *Valeur moyenne d'une fonction périodique*

Soit f une fonction continue et périodique de période $T > 0$ (2π pour les fonctions trigonométriques comme $\cos$; $\sin$) alors la valeur moyenne de f vaut (pour tout réel a) : $\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_a^{a+T} f(x)dx$

1. Calculer la valeur moyenne de la fonction $f(x) = 3 - 6x$ sur $[2;4]$
2. Calculer la valeur moyenne de la fonction $f(x) = \dfrac{3}{x}$ sur $[1;e]$
3. Calculer la valeur moyenne de la fonction $f(x) = 5e^{4x-5}$ sur $[-1;2]$
4. Calculer la valeur moyenne de la fonction $f(x) = 2\cos(3x)$
5. Calculer la valeur moyenne de la fonction $f(x) = -\sin(5x)$

$n°1$ Fonction f

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = xe^x$. On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f. On pose :
$I = \displaystyle\int_0^1 f(x)dx$

1. Etudier le signe de f sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer les réels a et b tels que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = (ax+b)e^x$ soit une primitive de f.
3. Vérifier que $I = 1$. Interpréter graphiquement l'intégrale I.
4. Soit k un réel tel que $k \leqslant 0$. On note $\mathcal{D}(k)$ l'ensemble des points M du plan compris entre l'axe des abscisses et $\mathcal{C}_f$ et dont l'abscisse x appartient à $[0;k]$. Exprimer l'aire $\mathcal{A}(k)$ du domaine $\mathcal{D}(k)$, en unités d'aire du repère.
5. Exprimer $\mathcal{A}(k)$ en fonction de k.
6. Calculer la limite de $\mathcal{A}(k)$ quand k tend vers $+\infty$.

$n°2$ Fonction ϕ

Soit ϕ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\phi(t) = t\sin(\pi t)$. On note $\mathcal{C}_\phi$ la courbe représentative de ϕ.

1. Etudier le signe de ϕ sur $[0;3]$.
2. Déterminer le réel λ tel que la fonction Φ définie sur $\mathbb{R}$ par : $\Phi(t) = \lambda(\sin(\pi t) - \pi t\cos(\pi t))$ soit une primitive de ϕ sur $\mathbb{R}$.
3. Calculer l'aire du domaine du plan délimité par $\mathcal{C}_\phi$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 3$.

$n°3$ Fonction h

Soit h la fonction définie sur $[0;11]$ par : $\begin{cases} h(x) = x^2+1 & \textit{pour} \quad x \in [0;2] \\ h(x) = 6 - 0,5x & \textit{pour} \quad x \in [2;8] \\ h(x) = 2 & \textit{pour} \quad x \in [8;11] \end{cases}$

On note $\mathcal{C}_h$ la courbe représentative de h dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Calculer l'aire du domaine du plan délimité par $\mathcal{C}_h$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 11$.

$n°4$ *Intégrale et probabilité*

On considère la fonction f définie sur $[1;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{\alpha}{x^{\alpha+1}}$ où α est un réel tel que $\alpha>0$.

La variable aléatoire X suit la loi de Pareto de paramètre α lorsque pour a et b deux réels tels que $1\leqslant a\leqslant b$, la probabilité de l'événement "X appartient à $[a;b]$" vaut : $P(a\leqslant X\leqslant b)=P(X\in[a;b])=\displaystyle\int_a^b f(x)dx$

On définit par l'espérance mathématique, notée $E(X)$, par : $E(X)=\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\int_1^t xf(x)dx$

La fonction de répartition de la variable aléatoire X, notée F, et définie sur $[1;+\infty[$ et par :

$F(x)=P(1\leqslant X\leqslant x)=\displaystyle\int_1^x f(t)dt$

1. Démontrer que $g(x)=-\dfrac{1}{x^{\alpha}}$ est une primitive de f sur $[1;+\infty[$
2. Soit t un réel tel que $t\geqslant 1$. Calculer $\displaystyle\int_1^t f(x)dx$.
3. Calculer $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\int_1^t f(x)dx$. En déduire que la fonction f est bien une densité de probabilité.
4. Calculer $P(a\leqslant X\leqslant b)$ et $P(X=a)$.
5. On suppose que $P(1\leqslant X\leqslant 5)=0,5$, calculer alors α puis donner l'arrondi au centième.
6. On suppose que $\alpha=0,5$:
   a) Donner l'expression de la fonction de répartition $F(x)$ en fonction de x.
   b) Calculer $P(1\leqslant X\leqslant 3)$. En déduire $P(X>3)$ à 10^{-3} près. Calculer $E(X)$.
7. On suppose que $\alpha=1,5$:
   a) Donner l'expression de la fonction de répartition $F(x)$ en fonction de x.
   b) Calculer $P(X>4)$ à 10^{-3} près. Calculer $E(X)$.

$n°5$ *Fonctions f_1 et f_2*

Soient f_1 et f_2 deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $f_1(x)=-x^2+4$ et $f_2(x)=x+2$ On note $\mathcal{C}_{f_1}$ et $\mathcal{C}_{f_2}$ les courbes représentatives de f_1 et f_2 dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. Déterminer les points d'intersections d'abscisses α_1 et α_2 de $\mathcal{C}_{f_1}$ et $\mathcal{C}_{f_2}$ $(\alpha_1<\alpha_2)$
2. Calculer l'aire du domaine du plan délimité par $\mathcal{C}_{f_1}$, $\mathcal{C}_{f_2}$ et les droites d'équations $x=\alpha_1$ et $x=\alpha_2$.

$n°6$ *Fonction g*

Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x)=\ln x$.

On note $\mathcal{C}_g$ la courbe représentative de g dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. Etudier le signe de g sur $]0;+\infty[$.
2. Déterminer le réel k tel que la fonction G définie sur $]0;+\infty[$ par : $G(x)=x(k+\ln x)$ soit une primitive de g sur $]0;+\infty[$.
3. Calculer l'aire du domaine du plan délimité par $\mathcal{C}_g$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=4$.

$n°7$ *Valeurs moyennes*

1. Déterminer la valeur moyenne de $f(x)=5\mathrm{e}^{4-8x}+3x^3$ sur $[-2;3]$
2. Déterminer la valeur moyenne de $g(x)=\dfrac{-2}{x}+\dfrac{4}{x^2}$ sur $[2e;3e]$