MAIA 1: Topologie i przestrzenie metryczne

1 Podstawowa terminologia

1.1 Zbiory i rodziny

1. przestrzeń/zbiór – X
2. podzbiór – $A \subseteq X$
3. dopełnienie podzbioru – $A^c = \{x \in X : x \notin A\}$
4. zbiór pusty – $\emptyset = X^c$
5. zbiór potęgowy / wszystkich podzbiorów – $\mathcal{P}(X)$ lub 2^X (A^B to ogólnie wszystkie funkcje $f : B \to A$)
6. rodzina podzbiorów – $\mathcal{F}(X) \subseteq \mathcal{P}$

1.2 Złożenia zbiorów

1. dla $A_\alpha \subset X$ gdzie $\alpha \in I$ (dowolny zbiór indeksów)

$$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \{x \in X : \exists_{\alpha \in I}(x \in A_\alpha)\}$$

$$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \{x \in X : \forall_{\alpha \in\ I}(x \in A_\alpha)\}$$

2. dla $A_n \subset X$ gdzie $n \in \mathbb{N}$

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup_{k\geq n} A_k\right)$$

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\bigcap_{k\geq n} A_k\right)$$

fakt: $\liminf A_n \subseteq \limsup A_n$
fakt: $(\liminf A_n)^c = (\limsup A_n)^c$
fakt: $(\limsup A_n)^c = (\liminf A_n)^c$
def: $\liminf A_n = \limsup A_n \Rightarrow \lim A_n = \liminf A_n = \limsup A_n$

3. iloczyn Kartezjański – $A \times B = \{(x, y) : x \in A, y \in B\}$

2 Topologie i metryki

2.1 Funkcje ciągłe

1. funkcja mapująca pomiędzy dwoma przestrzeniami topologicznymi (X, τ_1) i (Y, τ_2)
2. funkcja odwrotna $f^{-1}[A] = \{x \in X : f(x) \in A\}$
3. funkcja f jest ciągła iff $\forall_{A \in \tau_2} f^{-1}[A] \in \tau_1$

2.2 Przestrzeń metryczna

funkcja d jest metryką na X jeśli $d : X \times X \to [0, \infty)$ i spełnia warunki

1. odległość punktu do siebie jest zerem, $\forall_{x,y \in X}\ d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. jest symetryczna, $\forall_{x,y \in X}\ d(x, y) = d(y, x)$
3. nierówność trójkąta, $\forall_{x,y,z \in X}\ d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

2.3 Kula

dla $x_0 \in X$ i $R > 0$ kulą jest zbiór

$$B(x_0, R) = \{x \in X : d(x_0, x) < R\}$$

2.4 Zbióry otwatre i zamknięte

1. $A \subset X$ jest otwarty w X jeśli mieści się w kulim czyli

$$\forall_{x \in A} \exists_{R>0} B(x, R) \subset A$$

2. przykład dla $X = \mathbb{R}^2$ może być

$$d_0\left((x_1, y_1), (x_2, y_2)\right) = \begin{cases} 0 & \text{if } (x_1, y_1) = (x_2, y_2) \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

   i potem d_1 (Manhattan distance) i d_2 (Euclidean)

3. dopełnieniem zbioru otwartego nazywamy zbiorem zamkniętym
   fakt: dopełnienie kuli to sfera (powierzchnia)

2.5 Przestrzeń topologiczna

Rodzina podzbiorów τ jest topologią na zbiorze X gdy dla wszystkich otwartych zbiorów $A \in \tau$,

1. dowolna unia jest zawarta: $A_\alpha \in \tau,\ \alpha \in I \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \in \tau$
2. dowolny przekrój jest zawarta: $A_\alpha \in \tau,\ \alpha \in I \Rightarrow \bigcap_{k=1}^{n} A_k \in \tau$
3. $\emptyset, X \in \tau$

3 Przestrzenie liniowe i unormowane

1. ciało $\mathbb{K}$ jest zbiorem na którym suma, różnica, iloczyn i anty-iloczyn są zdefiniowane
2. przestrzeń liniowa dodatkowo spełnia $\forall_{x,y\in X}\forall_{\alpha,\beta\in X}\alpha x+\beta y\in X$
3. przestrzeń unormowana dodatkowo definiuje normę $(X,\|\cdot\|)\to\|\cdot\|:X\to[0,\infty)$ gdzie
   (a) norma jest zerowa tylko dla zera, $\|x\|=0\Leftrightarrow x=0$
   (b) absolute homogeneity, $\forall_{x\in X}\forall_{\alpha\in\mathbb{K}}\|\alpha x\|=|\alpha|\cdot\|x\|$
   (c) nierówność trójkąta, $\forall_{x,y\in X}\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$

   fakt: odległość zdefiniowana jako $d(x,y)=\|x-y\|$ jest metryką na X (norm induced metric)
4. dla $X=\mathbb{R}^n$ i $\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_n)$ mamy standardowe normy bezwzględne i Euklidesowe i ich uogólnienie,

$$\|\mathbf{x}\|_1=\sum_{i=1}^{n}|x_i|$$

$$\|\mathbf{x}\|_2=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}$$

$$L_p=\|\mathbf{x}\|_p=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^p\right)^{1/p}\qquad(p\geq1)$$

5. w granicy L_p staje się normę maksymalną

$$L_\infty=\lim_{p\to\infty}L_p=\max\{|x_1|,|x_2|,...,|x_n|\}$$

6. dla nieskończonych wektorów (sekwencji) podobnie używając zbioru indeksującego I można zdefiniować normę zbieżną i jej normę maksymalną (to się nazywa przestrzenią Banacha),

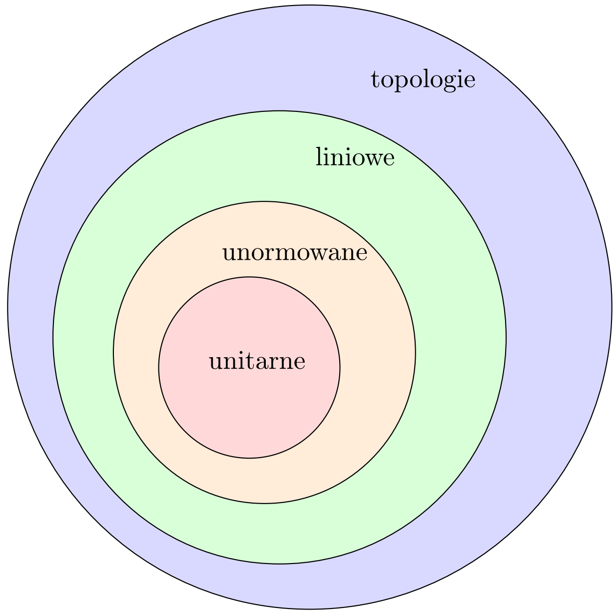
$$\ell_p(I)=\{x=(x_n)_{n\in I}\in\mathbb{K}:\sum_{n\in I}|x_n|^p<\infty\}$$

$$\ell_\infty=\lim_{p\to\infty}\ell_p=\sup_{n\in\mathbb{N}}|x_n|$$

3.1 Przestrzenie unitarne (inner product space)

1. przestrzeń liniowa $(X,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ na liczbach rzeczywistych lub zespolonych
2. iloczyn wewnętrzny $\langle\cdot,\cdot\rangle:X\times X\to\mathbb{K}$ spełnia warunki:
   (a) symetria sprzężona, $\forall_{x,y\in X}\langle x,y\rangle=\overline{\langle y,x\rangle}$
   (b) limiowość, $\forall_{y_1,y_2,\alpha,\beta,z}\langle\alpha x+\beta y_1,z\rangle=\alpha\langle x,z\rangle+\beta\langle y_1,z\rangle$
   (c) niezerowość, $\forall_{x\in X,x\neq0}\langle x,x\rangle>0$ (lub $\Rightarrow\langle x,x\rangle=0\Leftrightarrow x=0$)

fakt: $\|x\|=\sqrt{\langle x,x\rangle}$ is a norm
przykład: $X=\mathbb{R}^n,\langle x,y\rangle=\sum x_i\cdot y_i$



3.2 Dalsze przesztrzenia

1. ciąg Cauhy'ego na przestrzeni metrycznej, $\forall_{\varepsilon>0}\exists_N\forall m,n > N d(x_n, x_m) < \varepsilon$
2. przestrzeń zupełna (complete, Cauchy), każdy ciąg Cauchy'ego ma zawartą granicę
3. przestrzeń Banacha, zupełna unormowana przestrzeń wektorowa
4. przestrzeń Hilberta, Banacha plus iloczyn wewnętrzny

3.3 Własności metryki przestrzeni

1. nierówność Cauchy'ego-Schwarza,
$$\forall_{x,y\in X} |\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$
or
$$\forall_{x,y\in X} \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\| \cdot \|y\|} \in [-1, 1]$$
2. twierdzenie Pitagorasa, $x \perp y \iff \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$, i uogólnienie
$$\| \sum x_k\|^2 = \sum \|x_k\|^2$$
3. kąt pomiędzy wektorami, $\angle(x, y) = \arccos\left(\frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\cdot\|y\|}\right)$