

COPIRELEM

Commission Permanente des IREM pour l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire.



Concours de recrutement des Professeurs des Écoles Mathématiques

Annales 2019

Sujets, corrigés et éléments de formation

+

***Exercices complémentaires avec corrigés
issus des concours blancs et examens des ESPE***

Ces annales ont été rédigées par :

Agnès BATTON (ESPE de l'Académie de Versailles)
Anne BILGOT (ESPE de l'Académie de Paris)
Christophe BILLY (ESPE de l'Académie de Toulouse)
Richard CABASSUT (ESPE de l'Académie de Strasbourg)
Bruno COURCELLE (ESPE de Clermont-Auvergne)
Pierre DANOS (ESPE de l'Académie de Toulouse)
Nicolas DE KOCKER (ESPE de Lorraine)
Gwenaëlle GRIETENS (ESPE de l'Académie de Nantes)
Pascal GRISONI (ESPE de Bourgogne)
Michel JAFFROT (retraité de l'ESPE de l'Académie de Nantes)
Laurence MAGENDIE (retraitée de L'ESPE d'Aquitaine)
Christine MANGIANTE (ESPE de l'Académie de Lille)
Pascale MASSELLOT (ESPE de l'Académie de Versailles)
Edith PETITFOUR (ESPE de Université Rouen Normandie)
Arnaud SIMARD (ESPE de Franche-Comté)
Frédéric TEMPIER (ESPE de l'Académie de Versailles)
Claire WINDER (ESPE de l'Académie d'Aix-Marseille)
Hélène ZUCCHETTA (ESPE de l'Académie de Lyon)

Chaque sujet a été pris en charge par plusieurs correcteurs.

La relecture finale du document a été effectuée par :

Pierre EYSERIC (ESPE de l'Académie d'Aix-Marseille)
Michel JAFFROT (retraité de l'ESPE de l'Académie de Nantes)

Coordination de l'ensemble :

Pierre EYSERIC (ESPE de l'Académie d'Aix-Marseille)

REMERCIEMENTS

Ces annales ont pu être menées à bien grâce aux contributions de personnes, associations et institutions :

- **Nos collègues formateurs en mathématiques** qui nous ont transmis des sujets de concours blancs et d'examens proposés dans leurs ESPE.
- **L'ARPÈME** (Association pour l'élaboration et la diffusion de Ressources Pédagogiques sur l'Enseignement des Mathématiques à l'École).
Cette association a pour but de favoriser le développement de la réflexion sur l'enseignement des mathématiques à l'école et sur la formation des professeurs à l'enseignement des mathématiques :
 - en aidant à la communication d'expériences, à la diffusion de documents de formation et de recherche sur l'enseignement des mathématiques ;
 - en apportant un soutien à l'organisation de colloques et séminaires de réflexion rassemblant les formateurs intervenant à divers titres dans la formation en mathématiques des professeurs ;
 - en prenant en charge l'élaboration, l'impression et la diffusion de tous documents utiles pour les formateurs en mathématiques des professeurs des écoles : documents pédagogiques écrits et audiovisuels, actes des colloques, comptes-rendus de séminaires.
- **La COPIRELEM** (Commission permanente des **IREM** pour l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire) et **l'IREM** (Institut de recherche pour l'enseignement des mathématiques) de l'Université de Paris VII Denis Diderot.

SOMMAIRE

Informations

L'ÉPREUVE DU CRPE	7
AVERTISSEMENT	10
CONSEILS AUX CANDIDATS	10
TABLEAUX RÉCAPITULATIFS (contenus des sujets complets)	11
MISE AU POINT À PROPOS DE LA PROPORTIONNALITÉ	63
MISE AU POINT SUR LE CHOIX DES EXPRESSIONS UTILISÉES À PROPOS DE L'ÉCRITURE DES NOMBRES	66
MISE AU POINT SUR LA RÉDACTION DES SOLUTIONS DES PROBLÈMES PORTANT SUR LES CALCULS DE GRANDEURS	68

Les sujets et leurs corrigés

	Sujet	Corrigé
SUJET N° 1	Groupement académique n° 1 – Avril 2019 Amiens, Caen, Lille, Nancy-Metz, Reims, Rennes, La Réunion, Rouen, Strasbourg, Paris, Créteil, Versailles	15 70
SUJET N° 2	Groupement académique n° 2 – Avril 2019 Aix-Marseille, Besançon, Bordeaux, Clermont-Ferrand, Corse, Dijon, Grenoble, Limoges, Lyon, Montpellier, Nantes, Nice, Orléans-Tours, Poitiers, Toulouse	26 96
SUJET N° 3	Groupement académique n° 3 – Avril 2019 Guadeloupe, Guyane, Martinique	33 112
SUJET N° 4	Groupement académique n° 4 – Avril 2019 Polynésie française	43 132
SUJET N° 5	Groupement académique n° 5 – Avril 2019 Concours exceptionnel Créteil-Versailles	51 155
EXERCICES ÉLABORÉS À PARTIR DES CONCOURS BLANCS ET EXAMENS PROPOSÉS DANS LES ESPE (détails page 6)		175 213

**EXERCICES ÉLABORÉS À PARTIR DES CONCOURS BLANCS ET
EXAMENS PROPOSÉS DANS LES ESPE**

	Sujet	Corrigé
1. Exercices d'après divers sujets : aires, grandeur inconnue, arithmétique, solides et tableur	177	215
2. Problème de géométrie avec tableur et scratch	181	225
3. Problème d'écluses (géométrie, grandeur-mesure, tableur)	184	229
4. Problème de dénombrement et mesure de grandeurs	188	232
5. Problème de géométrie, équations et arithmétique	191	236
6. Analyse de productions d'élèves sur la gestion de données	194	240
7. Analyse de productions d'élèves sur la multiplication	196	241
8. Analyse d'une évaluation sur le nombre en maternelle	198	243
9. Analyse d'une situation et d'une production d'élève sur les masses	202	245
10. Analyse d'une situation sur les décimaux	205	247
11. Analyse d'une situation sur les polygones en cycle 3	206	249
12. Analyse d'une situation sur les fractions en CM1	209	251
13. Analyse d'une situation sur la structuration de l'espace en maternelle	210	253
14. Analyse d'une situation de partage équitable en CE1	212	254

L'ÉPREUVE DU CRPE EN AVRIL 2019

Nous reproduisons ici les principaux textes en vigueur relatifs à l'épreuve de mathématiques des concours de recrutement de professeurs des écoles, tels que vous pouvez les retrouver sur le site ministériel à partir de la page <http://www.education.gouv.fr/pid97/siac1.html>.

CONCOURS CONCERNÉS

- Concours externe de recrutement de professeurs des écoles.
- Concours externe spécial de recrutement de professeurs des écoles.
- Troisième concours de recrutement de professeurs des écoles.
- Second concours interne de recrutement de professeurs des écoles.
- Second concours interne spécial de recrutement de professeurs des écoles.

DÉFINITION DE L'ÉPREUVE

Référence :

<http://www.devenirenseignant.gouv.fr/cid98653/les-epreuves-crpe-externe-troisieme-crpe-second-crpe-interne.html>

« L'ensemble des épreuves du concours vise à évaluer les capacités des candidats au regard des dimensions disciplinaires, scientifiques et professionnelles de l'acte d'enseigner et des situations d'enseignement. »

Épreuves d'admissibilité

« Le cadre de référence des épreuves est celui des programmes pour l'école primaire. Les connaissances attendues des candidats sont celles que nécessite un enseignement maîtrisé de ces programmes. Le niveau attendu correspond à celui exigé par la maîtrise des programmes de collège. Les épreuves d'admissibilité portent sur le français et les mathématiques. Certaines questions portent sur le programme et le contexte de l'école primaire et nécessitent une connaissance approfondie des cycles d'enseignement de l'école primaire, des éléments du socle commun de connaissances, de compétences et de culture et des contextes de l'école maternelle et de l'école élémentaire. »

Deuxième épreuve d'admissibilité : une épreuve écrite de mathématiques

« L'épreuve vise à évaluer la maîtrise des savoirs disciplinaires nécessaires à l'enseignement des mathématiques à l'école primaire et la capacité à prendre du recul par rapport aux différentes notions. Dans le traitement de chacune des questions, le candidat est amené à s'engager dans un raisonnement, à le conduire et à l'exposer de manière claire et rigoureuse.

L'épreuve comporte trois parties :

1. Une première partie constituée d'un problème portant sur un ou plusieurs domaines des programmes de l'école ou du collège, ou sur des éléments du socle commun de connaissances, de compétences et de culture, permettant d'apprécier particulièrement la capacité du candidat à rechercher, extraire et organiser l'information utile.
2. Une deuxième partie composée d'exercices indépendants, complémentaires à la première partie, permettant de vérifier les connaissances et compétences du candidat dans différents domaines des programmes de l'école ou du collège. Ces exercices pourront être proposés sous forme de questions à choix multiples, de questions à réponse construite ou bien d'analyses d'erreurs-types dans des productions d'élèves, en formulant des hypothèses sur leurs origines.
3. Une analyse d'un dossier composé d'un ou plusieurs supports d'enseignement des mathématiques, choisis dans le cadre des programmes de l'école primaire qu'ils soient destinés aux élèves ou aux enseignants (manuels scolaires, documents à caractère pédagogique), et productions d'élèves de tous types, permettant d'apprécier la capacité du candidat à maîtriser les notions présentes dans les situations d'enseignement.

L'épreuve est notée sur 40 points : 13 pour la première partie, 13 pour la deuxième et 14 pour la troisième.

5 points au maximum peuvent être retirés pour tenir compte de la correction syntaxique et de la qualité écrite de la production du candidat.

Une note globale égale ou inférieure à 10 est éliminatoire.

Durée de l'épreuve : quatre heures. »

MATÉRIEL AUTORISÉ LORS DE L' ÉPREUVE

Références concernant le matériel autorisé :

« Le matériel autorisé pour passer l'épreuve, en dehors du matériel normal d'écriture, est indiqué dans le document qui vous est fourni en même temps que la convocation. »

<http://www.siec.education.fr/votre-concours/crpe-enseignants-du-1er-degre/se-preparer#triple-mission>

Références concernant l'utilisation des calculatrices électroniques à compter de la session 2018 lors des examens et concours.

http://www.education.gouv.fr/pid285/bulletin_officiel.html?cid_bo=87354

« I - Pour les examens et concours de l'enseignement scolaire, la présente note de service annule et remplace les dispositions énoncées par la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999 relative à l'utilisation des calculatrices électroniques à compter de la session 2000. **Elle est applicable à compter du 1er janvier 2018.** »

« ...l'usage de la calculatrice est autorisé si le sujet de l'épreuve le prévoit expressément. La page de garde des sujets ... doit impérativement indiquer si l'usage de la calculatrice est autorisé ou interdit. »

« II - **Est considéré comme « calculatrice » tout dispositif électronique autonome, dépourvu de toute fonction de communication par voie hertzienne, ayant pour fonction essentielle d'effectuer des calculs mathématiques ou financiers, de réaliser des représentations graphiques, des études statistiques ou tous traitements de données mathématiques par le biais de tableaux ou diagrammes.** »

« Les matériels autorisés sont les suivants :

- les calculatrices non programmables sans mémoire alphanumérique ;
- les calculatrices avec mémoire alphanumérique et/ou avec écran graphique qui disposent d'une fonctionnalité « mode examen » répondant aux spécificités suivantes :
 - la neutralisation temporaire de l'accès à la mémoire de la calculatrice ou l'effacement définitif de cette mémoire ;
 - le blocage de toute transmission de données, que ce soit par wifi, Bluetooth ou par tout autre dispositif de communication à distance ;
 - la présence d'un signal lumineux clignotant sur la tranche haute de la calculatrice, attestant du passage au « mode examen » ;
 - la non réversibilité du « mode examen » durant toute la durée de l'épreuve. La sortie du «mode examen» nécessite une connexion physique, par câble, avec un ordinateur ou une calculatrice. »

« III - Le déroulement des épreuves

Le « mode examen » ne doit être activé par le candidat, pour toute la durée de l'épreuve, que sur instruction du surveillant de salle lorsque le sujet de l'épreuve autorise l'usage de la calculatrice.

Le candidat n'utilise qu'une seule machine sur la table. Toutefois, si celle-ci vient à connaître une défaillance, il peut la remplacer par une autre.

Afin de prévenir les risques de fraude, sont interdits les échanges de machines entre les candidats, la consultation des notices fournies par les constructeurs ainsi que les échanges d'informations par l'intermédiaire des fonctions de transmission des calculatrices. L'utilisation d'une calculatrice non conforme aux caractéristiques techniques mentionnées au point II de la présente note donne lieu à la mise en œuvre d'une procédure disciplinaire.

Est interdite l'utilisation de tout module ou extension enfichable ainsi que de tout câble, quelles qu'en soient la longueur et la connectique.

Les chefs de centres d'examen veilleront à ce que les candidats soient convenablement informés des consignes relatives à l'utilisation des calculatrices, qui doivent être strictement respectées.

Les recteurs d'académie et les vice-recteurs veilleront à ce que tous les personnels appelés à participer aux tâches de surveillance des épreuves soient informés de ces dispositions. »

AVERTISSEMENT

Dans le corrigé des **exercices de mathématiques**, nous proposons souvent plusieurs méthodes de résolution pour une question. Certaines solutions sont plus longues que d'autres. Nous les donnons cependant pour que chacun puisse éventuellement reconnaître et valider la méthode qu'il a utilisée ou dans laquelle il s'est engagé sans peut-être savoir terminer.

Une méthode même longue donnera tous les points attribués à la question, du moment qu'elle a abouti au résultat demandé. Elle pénalise cependant le candidat car le temps passé à la rédiger n'est plus disponible pour traiter d'autres questions. Mais il est possible que le lecteur de ces annales la comprenne mieux qu'une méthode courte, même « élégante ». Le lecteur jugera donc par lui-même quelle(s) méthode(s) il lui convient de s'approprier.

En ce qui concerne les **analyses de productions d'élèves** et la partie 3 (**analyse de situations d'enseignement**), nous avons eu le souci de donner des réponses détaillées sur le plan didactique et donc, quelquefois, plus approfondies que ce que l'on peut attendre d'un candidat au CRPE. Certaines remarques des correcteurs sont alors ajoutées en italique.

CONSEILS AUX CANDIDATS

La lisibilité, la correction et la rigueur des réponses sur les plans mathématique et didactique sont, bien entendu, les critères principaux d'évaluation. Par ailleurs, une écriture difficilement lisible, la présence de « fautes » d'orthographe par trop grossières et fréquentes, les coquilles fâcheuses, le verbiage pompeux et vide, l'abus d'expressions hors de propos, finissent par avoir une incidence sur l'évaluation, et cela, quelle que soit la précision du barème de notation appliqué. Nous conseillons donc de relire la copie en tenant compte de tout cela.

PROBLÈME

		Géométrie plane	Géométrie espace	Trigonométrie	Numération Opérations	Arithmétique	Programmes de calcul	Équations Mise en équation	Probabilités Statistiques	Algorithmique	Grandeurs et mesures	Vitesses-Échelles Pourcentages Proportionnalité	Fonctions Graphiques	Tableur	
Sujet 1 2019	X			X			X				X	X	X	X	
Sujet 2 2019	X		X				X				X	X	X		
Sujet 3 2019		X						X			X	X	X	X	X
Sujet 4 2019	X	X									X	X	X		
Sujet 5 2019		X									X	X	X		

EXERCICES

		Géométrie plane	Géométrie espace	Trigonométrie	Numération Opérations	Arithmétique	Programmes de calcul	Équations Mise en équation	Probabilités Statistiques	Algorithmique	Grandeurs et mesures	Vitesses-Échelles Pourcentages Proportionnalité	Fonctions Graphiques	Tableur
Sujet 1 2019	X	X		X			X	X		X	X	X	X	
Sujet 2 2019	X							X		X	X	X	X	
Sujet 3 2019	X				X	X				X				
Sujet 4 2019	X					X	X	X		X				
Sujet 5 2019		X			X			X	X			X		X

ANALYSE DE PRODUCTIONS D'ÉLÈVES

	Addition Soustraction	Proportionnalité	Division	Nombres	Fractions et décimaux	Multiplication	Résolution de problèmes	Grandeurs et mesures	Algorithmique	Cycle
Sujet 1 2019	X	X		X	X					C1 C3
Sujet 2 2019	X C3	X C3	X C3		X C3	X C3				C3
Sujet 3 2019		X C3			X C3		X C2			C2 C3
Sujet 4 2019		X C3		X C1			X C1			C1 C3
Sujet 5 2019			X C2				X C2	X C3		C2 C3

ANALYSE DE SITUATIONS D'ENSEIGNEMENT

	Addition Soustraction	Proportionnalité	Division	Nombres	Fractions et décimaux	Multiplication	Résolution de problèmes	Grandeurs et mesures	Algorithmique	Cycle
Sujet 1 2019		X C3		X C1						C1 C3
Sujet 2 2019										
Sujet 3 2019		X C3			X C3		X C2			C2 C3
Sujet 4 2019	X C3						X C3			C3
Sujet 5 2019		X C3					X C3	X C3		C3

Remarque

Dans les sujets de cette session du concours, un grand nombre d'exercices de la troisième partie, bien qu'annoncés comme des analyses de situations d'enseignement, sont majoritairement des analyses de productions d'élèves, parfois associées à une analyse d'un énoncé de problème ou à celle d'une progression.

**LES SUJETS
DU
CONCOURS
2019**

GROUPEMENT 1 – avril 2019

PREMIERE PARTIE : PROBLÈME (13 points)

Dans cette partie, les figures qui sont représentées dans l'énoncé ne sont pas dessinées à l'échelle.

PARTIE A : situation des trois carrés

La figure ci-dessous représente trois carrés dont les mesures des côtés, en centimètre, sont respectivement 3 cm, 4 cm et 5 cm. Les deux plus petits carrés sont gris, le troisième est blanc.



- 1) Vérifier que la somme des aires des deux carrés gris est égale à l'aire du carré blanc.
- 2) Claude affirme : « Si on dispose les trois carrés obtenus à la question précédente comme sur la figure 1 ci-dessous alors le triangle ABC est un triangle rectangle. »

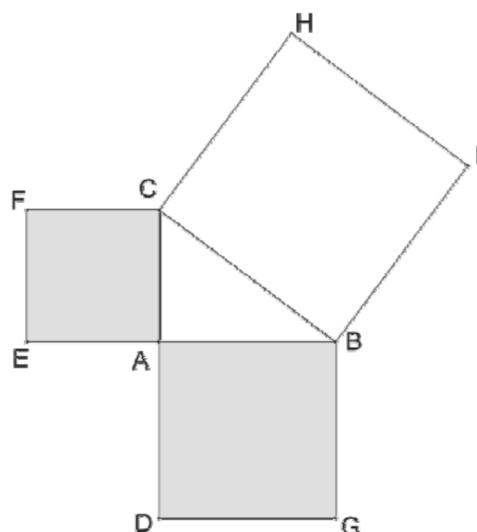


Figure 1

L'affirmation de Claude est-elle vraie ou fausse ? Justifier la réponse.

- 3) Avec les mêmes carrés, Dominique affirme : « Sur la figure 2 ci-dessous, les longueurs exactes, en centimètre, des segments [MN] et [IJ] sont des nombres décimaux ».

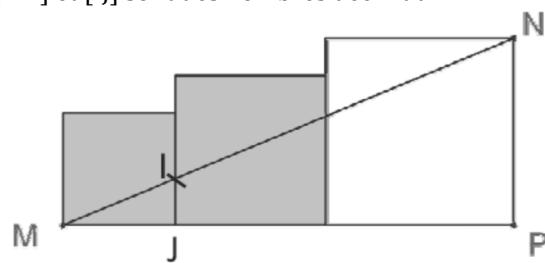


Figure 1

L'affirmation de Dominique est-elle vraie ou fausse ? Justifier la réponse.

- 4) Avec les mêmes carrés, Camille affirme : « Sur la figure 3 ci-dessous, les points R, S et T sont alignés. »
L'affirmation de Camille est-elle vraie ou fausse ? Justifier la réponse.

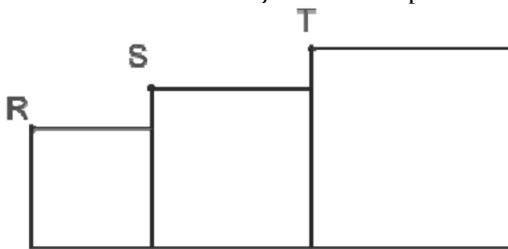
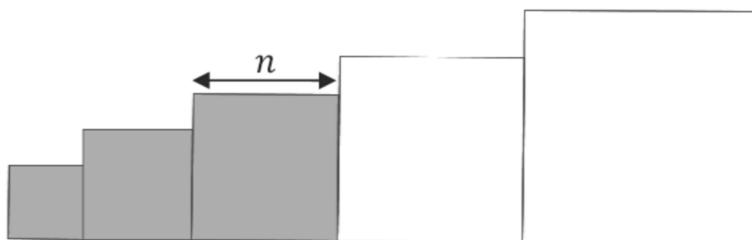


Figure 3

PARTIE B : situation des cinq carrés

La figure ci-dessous qui n'est pas à l'échelle représente cinq carrés dont les mesures des côtés, en centimètre, sont des nombres entiers consécutifs. Les trois plus petits carrés sont gris, les deux autres sont blancs.



On désigne par n la mesure, exprimée en centimètre, du côté du carré gris le plus grand (carré du milieu). L'objectif de cette partie est de chercher les valeurs de n pour lesquelles la somme des aires des trois carrés gris est égale à la somme des aires des deux carrés blancs.

- 1) Montrer que résoudre ce problème revient à résoudre l'équation $n^2 - 12n = 0$.
- 2) Quelles sont les solutions de l'équation $n^2 - 12n = 0$? Justifier la réponse.
- 3) Ces solutions peuvent-elles être retenues pour le problème de la « situation des cinq carrés » ? Justifier votre réponse.
- 4) Réaliser une figure à l'échelle $\frac{1}{5}$ d'une solution du problème de la « situation des cinq carrés » en détaillant les calculs effectués pour construire la figure.

PARTIE C : situation des sept carrés

On s'intéresse maintenant à une figure comportant sept carrés. Les mesures, en centimètre, des côtés des sept carrés sont des entiers consécutifs. Les quatre plus petits carrés sont gris et les trois autres sont blancs. On cherche s'il est possible de trouver des longueurs pour les côtés des carrés telles que la somme des aires des quatre carrés gris soit égale à celle des trois carrés blancs.

On envisage une résolution graphique. On choisit comme variable x la longueur en cm du côté du plus grand carré blanc. On admet que l'expression algébrique de la somme des aires des carrés gris est alors :

$$4x^2 - 36x + 86$$

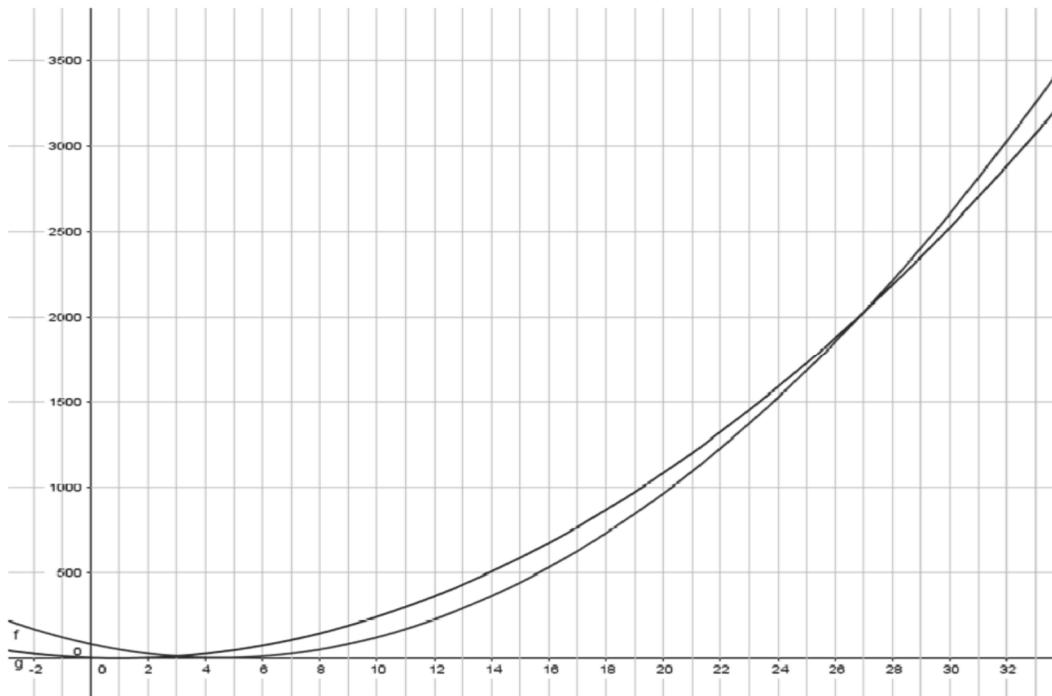
et que l'expression algébrique de la somme des aires des carrés blancs est :

$$3x^2 - 6x + 5.$$

On nomme :

- f la fonction qui à tout nombre x fait correspondre $f(x) = 4x^2 - 36x + 86$;
- g la fonction qui à tout nombre x fait correspondre $g(x) = 3x^2 - 6x + 5$.

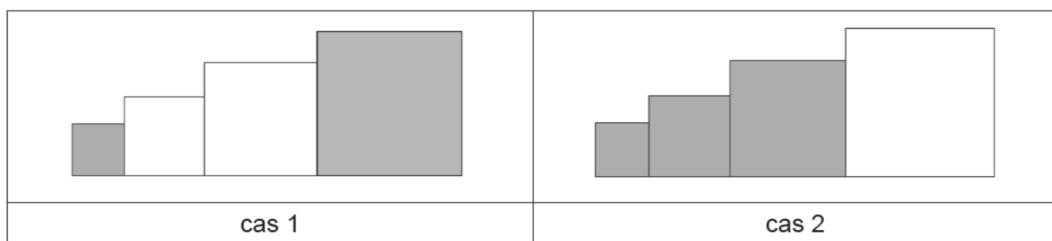
La copie d'écran ci-dessous fait apparaître une partie des représentations graphiques de ces deux fonctions, obtenues à l'aide d'un logiciel.



- 1) Déterminer graphiquement, si la situation des sept carrés semble avoir des solutions.
- 2) Vérifier si la ou les solutions trouvées conviennent.

PARTIE D : situation des quatre carrés

Avec quatre carrés ayant des côtés de mesures entières et consécutives, on peut envisager au moins deux cas :



On cherche à savoir si, dans chacun de ces cas, il est possible que l'aire de la surface grise soit égale à l'aire de la surface blanche.

On utilise pour cela un tableur. On donne ci-après les copies d'écran des feuilles de calcul obtenues lors de cette recherche.

- 1) Quelle feuille correspond à chacun des deux cas ? Justifier la réponse.
- 2) Pour la feuille de calcul A :
 - a) Quelle formule étirable vers le bas a-t-on pu saisir dans la cellule E2 pour calculer l'aire du quatrième carré à partir de la valeur saisie dans la cellule A2 ?
 - b) Quelle formule étirable vers le bas a-t-on pu saisir dans la cellule F2 pour calculer l'aire de la partie grise ?
- 3) Pour chaque cas, quelle conjecture, sur les solutions du problème, la copie d'écran de la feuille de calcul permet-elle d'émettre ? Justifier la réponse.
- 4) Démontrer que dans les deux cas, la « situation des quatre carrés » n'admet pas de solution.

Copies d'écran :

	A	B	C	D	E	F	G
1	coté du plus petit carré	aire du premier carré	aire du 2ème carré	aire du 3ème carré	aire du 4ème carré	aire de la partie grise	aire de partie blanche
2	1	1	4	9	16	17	13
3	50	2500	2601	2704	2809	5309	5305
4	100	10000	10201	10404	10609	20609	20605
5	700	490000	491401	492804	494209	984209	984205
6	1000	1000000	1002001	1004004	1006009	2006009	2006005
7	2000	4000000	4004001	4008004	4012009	8012009	8012005
8	50000	2500000000	2500100001	2500200004	2500300009	5000300009	5000300005
9	100000	10000000000	10000200001	10000400004	10000600009	20000600009	20000600005
10							

Feuille de calcul A

	A	B	C	D	E	F	G
1	coté du plus petit carré	aire du premier carré	aire du 2ème carré	aire du 3ème carré	aire du 4ème carré	aire de la partie grise	aire de partie blanche
2	1	1	4	9	16	14	16
3	2	4	9	16	25	29	25
4	3	9	16	25	36	50	36
5	4	16	25	36	49	77	49
6	5	25	36	49	64	110	64
7	6	36	49	64	81	149	81
8	7	49	64	81	100	194	100
9	8	64	81	100	121	245	121
10							

Feuille de calcul B

DEUXIEME PARTIE (13 points)

Cette partie est composée de trois exercices indépendants.

Exercice 1

Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses en justifiant la réponse. Une réponse exacte mais non justifiée ne rapporte aucun point. Une réponse fausse n'enlève pas de points.

- 1) Les tableaux ci-dessous résument les productions par deux sociétés de deux types de tablettes : la tablette Electrix et la tablette Tronix.

Société 1			Société 2		
	Nombre de tablettes fabriquées par jour	Pourcentage moyen de tablettes défectueuses		Nombre de tablettes fabriquées par jour	Pourcentage moyen de tablettes défectueuses
Electrix	2000	5 %	Electrix	6000	3 %
Tronix	7000	2 %	Tronix	1000	2 %

Affirmation 1 : Pour l'ensemble des tablettes produites, la société 1 a le pourcentage d'appareils défectueux le plus faible.

- 2) On sait que l'aire d'un cube est égale à la somme des aires des faces qui le constituent.

Affirmation 2 : Le volume d'un cube est proportionnel à son aire.

- 3) Un récupérateur d'eau de pluie contient $0,3 \text{ m}^3$ d'eau. Pour arroser un potager il faut 15 L d'eau par m^2 .

Affirmation 3 : Avec l'eau du récupérateur, on peut arroser quatre fois un potager de 5 m^2 .

4) $A = 7 + \frac{2}{10}$

Affirmation 4 : La partie décimale de A^2 est $\frac{4}{100}$.

Exercice 2

- 1) Inès a lancé 200 fois un dé équilibré à 6 faces et a collecté ses résultats dans un tableau :

Nombre affiché sur la face	1	2	3	4	5	6
Nombre d'apparitions	30	41	32	28	31	

- a) Combien de fois a-t-elle obtenu 6 ?
- b) Quelle est, en pourcentage, la fréquence d'apparition du « 1 » ?
- 2) Inès lance cette fois deux dés équilibrés à 6 faces.
- a) Quelle est la probabilité d'obtenir deux nombres dont le produit est égal à 9 ?
- b) Quelle est la probabilité d'obtenir deux nombres dont le produit est égal à 12 ?

Exercice 3

Un polygone régulier est un polygone convexe dont tous les côtés ont la même longueur et tous les angles ont la même mesure.

Au cours de cet exercice, on pourra utiliser le résultat admis suivant : « La somme des mesures en degré des angles d'un polygone régulier à n côtés vaut $180n - 360$. »

Déterminer, sans justifier, la nature des deux figures tracées lorsqu'on exécute le programme A et le programme B.

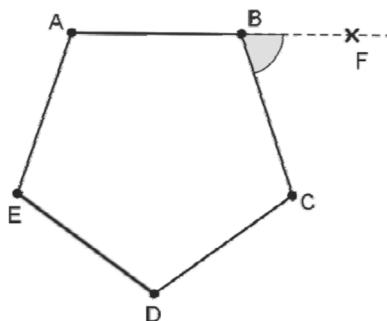


Programme A



Programme B

- 2) On considère le pentagone régulier ABCDE ci-dessous. F est un point de la droite (AB) n'appartenant pas à la demi-droite [BA].



- Démontrer que $\widehat{FBC} = 72^\circ$.
- En déduire les modifications à apporter au programme A pour que la figure tracée soit un pentagone régulier.

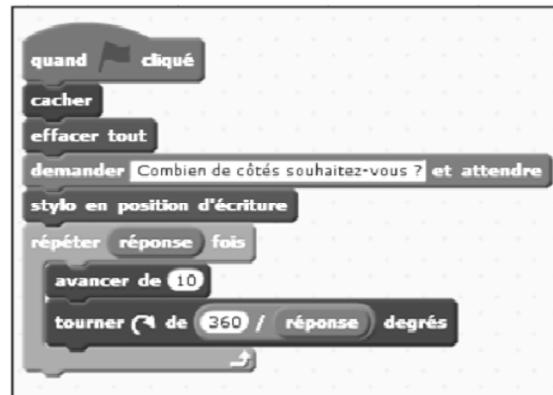
Pour la suite de l'exercice, on admet que, pour tout polygone régulier, l'angle \widehat{FBC} est égal à 360° divisé par le nombre de côtés de ce polygone.

- 3) On souhaite maintenant réaliser un programme qui, lorsqu'on l'exécute, permet d'obtenir le tracé d'un polygone régulier dont le nombre de côtés est choisi par l'utilisateur. Voici les programmes élaborés par quatre élèves.

Lequel de ces quatre programmes permet de réaliser le tracé souhaité ? Préciser pourquoi les autres ne conviennent pas.



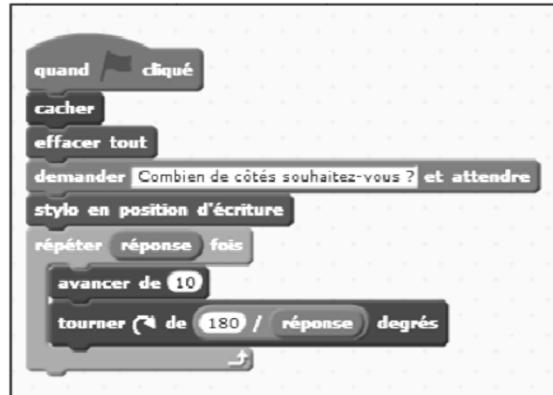
Programme 1



Programme 2



Programme 3



Programme 4

Rappel : une fois que l'utilisateur a répondu à la question « Combien de côtés souhaitez-vous ? », la valeur indiquée est stockée dans la variable **réponse**.

- 4) Le programme Scratch ne permet pas de tracer facilement un cercle. Comment peut-on utiliser le travail mené dans cet exercice pour construire, avec Scratch, une figure ayant l'apparence d'un cercle à l'écran ?

TROISIEME PARTIE (14 points)

Cette partie est constituée de trois situations indépendantes.

SITUATION 1

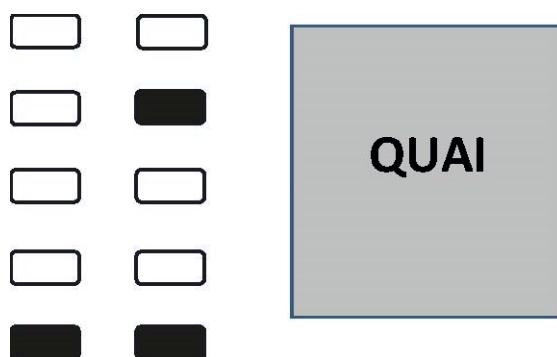
Dans une classe de maternelle, une enseignante donne à un groupe d'élèves la consigne suivante :

« Vous devez aller chercher des voyageurs pour remplir le petit train, pas un de plus, pas un de moins. Vous poserez les voyageurs sur le quai. »

Matériel :

- des jetons représentant les voyageurs (ils sont placés dans une boîte éloignée dans un coin de la classe) ;
- un support pour chaque élève représentant des places libres ou occupées ;
- une partie libre (le quai) sur lequel seront posés les voyageurs rapportés avant validation.

Le premier support proposé compte 7 places vides (blanches) et 3 places occupées (noires). Les places vides peuvent être organisées de différentes façons. Les élèves devront déposer les voyageurs sur le quai (zone grisée) avant de les faire monter à bord.



L'élève A a effectué deux voyages. Au premier voyage, il ramène une dizaine de jetons et au second il rapporte les jetons en trop.

L'élève B a effectué un voyage, il revient très rapidement avec 7 jetons.

L'élève C a effectué sept voyages, rapportant un seul jeton à la fois.

L'élève D a effectué un voyage. Il revient avec 4 jetons dans une main et 3 jetons dans l'autre main.

- 1) Quel usage du nombre est mobilisé dans cette situation ?
- 2) Quel est l'intérêt du quai ?
- 3) Au regard des acquis liés à la notion du nombre, analyser les procédures mises en œuvre par chacun des élèves.
- 4) Proposer deux modifications de la tâche, que l'enseignant peut proposer pour amener les élèves A ou C à progresser dans leur utilisation du nombre ?

SITUATION 2

Un enseignant propose deux calculs à effectuer en ligne à des élèves de cycle 3 et relève quatre productions.

Calcul 1

L'enseignant écrit au tableau : $12,42 - 6,8$
et dit aux élèves : « Calculer la différence, entre 12 unités et 42 centièmes et 6 unités et 8 dixièmes ».

Élève 1

$$12,42 - 6,8 = 6,42 - 0,8 = 6 - 0,38 = 5,62$$

Élève 2

$$\begin{aligned} & \text{12 unités et 42 centièmes moins 6 unités} \\ & \text{et 8 dixièmes} \\ & = 1242 \text{ centièmes moins } 68 \text{ dixièmes} \\ & = 1242 \text{ centièmes moins } 680 \text{ centièmes} \\ & 1242 - 680 = 1262 - 700 = 562 \\ & \text{Résultat : 562 centièmes} \end{aligned}$$

Calcul 2

Calculer le produit de 15 par 0,24.

Élève 3

$$15 \times 0,24 = 2,4 + 1,2 = 3,6$$

Élève 4

$$\begin{aligned} & 15 \times 24 \text{ centièmes} \\ & = 300 \text{ centièmes} + 60 \text{ centièmes} \\ & = 360 \text{ centièmes} \end{aligned}$$

1) Pour chaque calcul, analyser les productions des élèves au regard des connaissances mobilisées sur les nombres et sur les propriétés des opérations.

2) Pour chaque calcul, préciser ce qui distingue les productions des deux élèves.

SITUATION 3

Un professeur d'une classe de cycle 3 propose les trois exercices suivants, dans cet ordre, à ses élèves.

Exercice 1

Un livre de cuisine indique que, pour faire de la crème brûlée, il faut 6 œufs si la recette est prévue pour 9 personnes et 10 œufs si la recette est prévue pour 15 personnes.

Combien dois-je prévoir d'œufs si je veux faire cette crème brûlée pour 24 personnes ?
J'ai chez moi tous les ingrédients dont j'ai besoin.

Pour 24 personnes il faut ~~10~~ œufs.
16
~~Il faut faire une division Il faut faire des additions~~
 $9 + 15 = 24$ $10 \times 6 = 60$

Élève A

$$\begin{array}{l} \text{9 personnes } \left\{ \begin{array}{l} \text{9 personnes} \\ \text{9 personnes} \end{array} \right. \Rightarrow 9 \text{ personnes} = 6 \text{ œufs} \\ \text{15 personnes } \left\{ \begin{array}{l} \text{15 personnes} \\ \text{15 personnes} \end{array} \right. \Rightarrow 15 \text{ personnes} = 10 \text{ œufs} \\ \text{24 personnes } \left\{ \begin{array}{l} \text{9 personnes} \\ \text{15 personnes} \end{array} \right. \Rightarrow 24 \text{ personnes} = 16 \text{ œufs} \\ \\ \begin{array}{r} 15 \\ + 9 \\ \hline 24 \end{array} \end{array}$$

Il faut 16 œufs pour 24 personnes

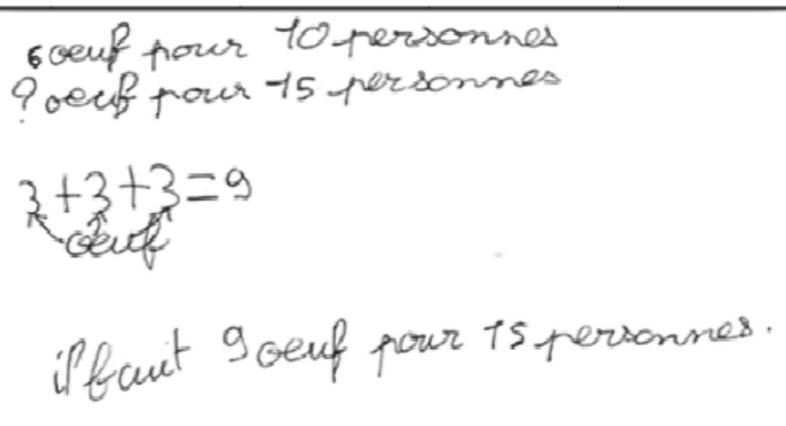
Élève B

Exercice 2

Il faut 6 œufs pour faire une crème au caramel pour 10 personnes.

Combien dois-je prévoir d'œufs si je veux faire cette crème au caramel pour 15 personnes ?

J'ai chez moi tous les ingrédients dont j'ai besoin.



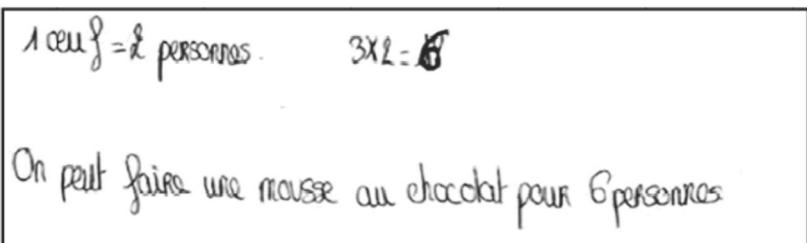
Élève C

Exercice 3

Il faut 5 œufs pour faire une mousse au chocolat pour 10 personnes.

J'ai 3 œufs. Pour combien de personnes puis-je faire une mousse au chocolat ?

J'ai chez moi tout le chocolat dont j'ai besoin.



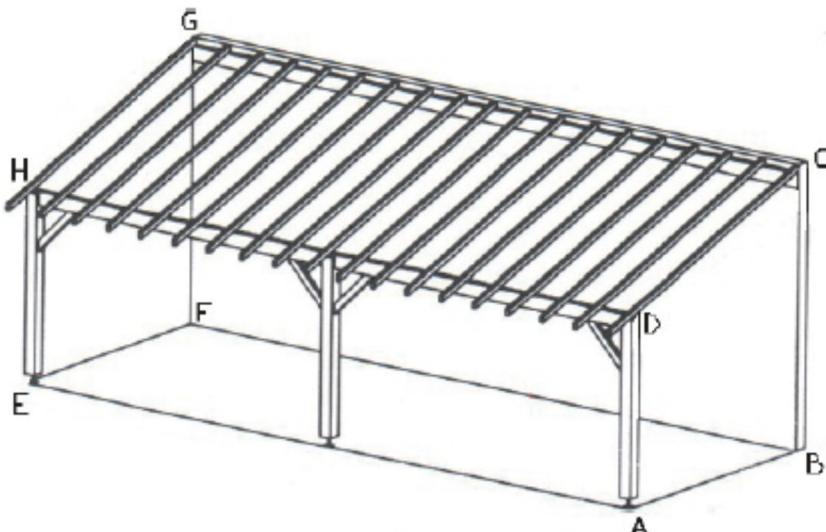
Élève D

- 1) Quelle est la notion du programme que ces exercices permettent principalement de travailler ?
- 2) Analyser les productions des élèves A, B, C et D en indiquant le type de procédures utilisées.
- 3) Montrer en quoi les différences entre les trois énoncés permettent une progressivité dans l'apprentissage de la notion.
- 4) Proposer un exercice qui permettrait, en deuxième moitié de cycle 3, de poursuivre l'apprentissage de la notion travaillée.

GROUPEMENT 2 – avril 2019

PREMIERE PARTIE : PROBLÈME (13 points)

Le propriétaire d'une maison décide de créer un appentis pour stocker du bois de chauffage.
Un schéma de ce qu'il souhaite réaliser est donné ci-dessous :



Le rectangle ABFE représente une dalle de béton.

Le quadrilatère ABCD est un trapèze rectangle.

Les contraintes de sa maison et de son terrain lui imposent les dimensions suivantes :
 $AE = 4,8 \text{ m}$, $AB = 1,5 \text{ m}$, $AD = 2,4 \text{ m}$ et $BC = 3,2 \text{ m}$.

Le volume utile de cet appentis est la partie dans laquelle il pourra stocker son bois sachant que, pour rester au sec, il devra se trouver sur la dalle de béton et sous le toit.

Le volume utile représente donc un prisme droit dont la base est le trapèze rectangle ABCD.

PARTIE A : surface de l'appentis et étude du volume utile

- 1) Dans le cadre de sa déclaration préalable de travaux le propriétaire doit déterminer la surface au sol de l'appentis. Calculer l'aire du rectangle ABFE.
- 2) a) On appelle I le point du segment [BC] tel que ABID est un rectangle. Calculer la longueur CD.
 - b) En déduire la surface du toit CDHG.
 - c) Calculer l'angle \widehat{CDI} , correspondant à la pente du toit. Arrondir la réponse au degré.
- 3) a) Construire $A'B'C'D'$ une représentation du quadrilatère ABCD à l'échelle 1/50 en précisant les calculs qui ont permis cette construction.
 - b) Calculer l'aire du trapèze ABCD.
 - c) Pour être sûr de passer l'hiver au chaud, le propriétaire doit disposer de 15 stères de bois. Le stère est une unité de mesure, utilisée pour le bois de chauffage, valant 1 m^3 . Aura-t-il assez de place pour stocker ces 15 stères de bois ?

PARTIE B : réalisation de la dalle

Pour réaliser la dalle en béton, on creuse la terre au niveau du rectangle ABFE sur une profondeur de 25 cm.

- 1) Lorsqu'on extrait de la terre du sol, son volume augmente de 30 % du fait qu'elle n'est plus tassée.

Pour évacuer cette terre, le propriétaire utilise sa propre remorque qui contient au maximum $0,7 \text{ m}^3$. Combien de voyages sont-ils nécessaires pour évacuer complètement la terre ?

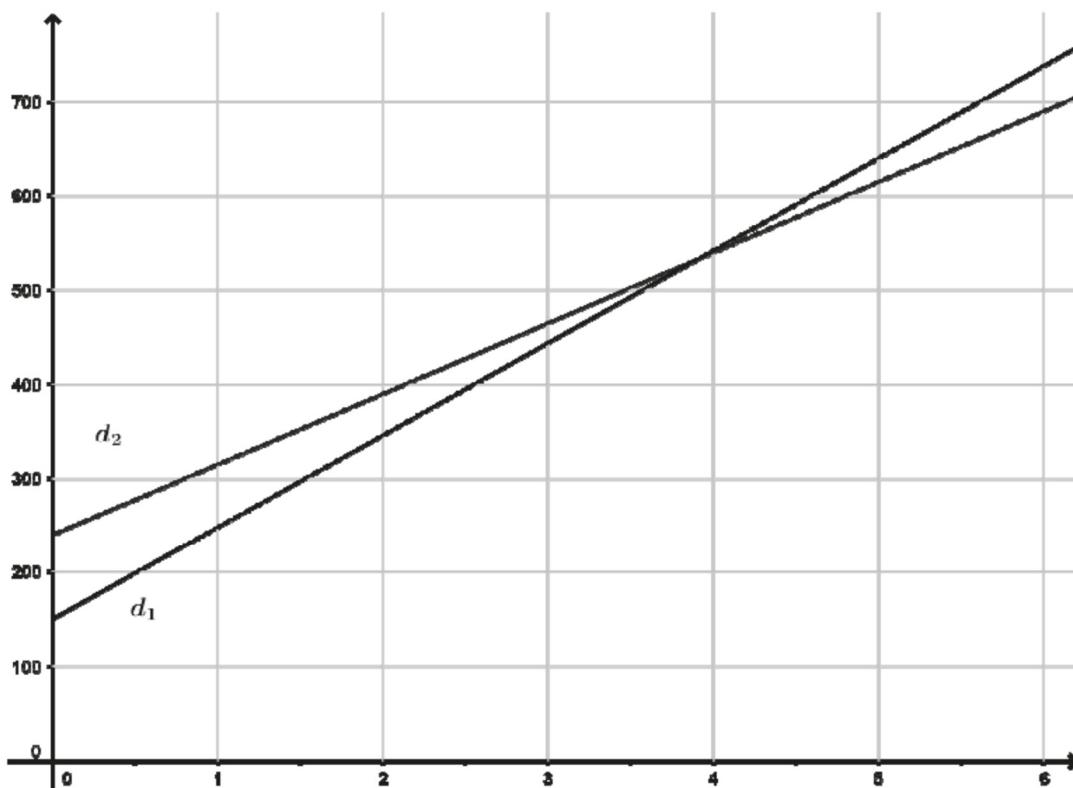
- 2) Le propriétaire souhaite faire réaliser la dalle par un entrepreneur. Le trou creusé sera entièrement rempli de béton jusqu'au niveau du sol.

Le prix de la réalisation comporte la livraison par camion toupie et le prix du béton. Le propriétaire consulte deux entrepreneurs :

- l'entrepreneur A propose un tarif de 98 euros le mètre cube avec une livraison coutant 150 euros par camion toupie, un camion toupie pouvant contenir 7 m^3 ;
- l'entrepreneur B propose un tarif de 75 euros le mètre cube avec une livraison coutant 240 euros par camion toupie, un camion toupie pouvant contenir 10 m^3 .

- Calculer le prix facturé pour l'achat de 8 m^3 de béton livrés par chacun des entrepreneurs.
- On appelle f la fonction qui, au volume de béton x , exprimée en m^3 , associe $f(x)$ le coût en euro proposé par l'entrepreneur A et g la fonction qui, au volume de béton x , exprimé en m^3 , associe $g(x)$ le coût proposé par l'entrepreneur B.

Le graphique ci-dessous donne les représentations graphiques des deux fonctions f et g pour x compris entre 0 et 5,5.



Préciser, en justifiant la réponse, de quelle fonction f ou g , les droites d_1 et d_2 sont des représentations graphiques.

- Par lecture graphique, déterminer une valeur approchée du volume maximum de béton que l'on peut commander avec une somme de 600 euros.
- Déterminer graphiquement l'entrepreneur que le propriétaire doit choisir pour obtenir un prix de commande minimum pour réaliser la dalle de l'appentis. Calculer ensuite le prix qu'il devra alors payer.
- Déterminer, par le calcul, une valeur approchée, au dixième près de mètre cube, du volume de béton à partir duquel il est préférable de changer d'entrepreneur pour une commande comprise entre 0 et 7 m^3 .

DEUXIEME PARTIE (13 points)

Cette partie est composée de quatre exercices indépendants.

Exercice 1

Le programme ci-dessous a été écrit avec le logiciel Scratch pour tracer une figure. Il utilise une variable appelée « longueur ». L'unité de longueur est le pixel.

Ligne	Code Scratch
1	quand drapeau cliqué
2	effacer tout
3	mettre longueur à 20
4	stylo en position d'écriture
5	répéter (8) fois
6	ajouter à longueur 10
7	avancer de longueur
8	tourner ⚡ de 90 degrés

On suppose que le premier tracé se fait horizontalement vers la droite.

- 1) Construire sur la copie la figure obtenue en lançant le programme, en prenant 1 cm pour 10 pixels.
- 2) Quelle figure obtient-on si on supprime la ligne 6 du programme ?
- 3) Que doit-on modifier dans le programme précédent pour construire un octogone régulier ayant des côtés de longueur 40 pixels ?

On rappelle qu'un polygone régulier est un polygone convexe dont tous les côtés ont la même longueur et tous les angles ont la même mesure.

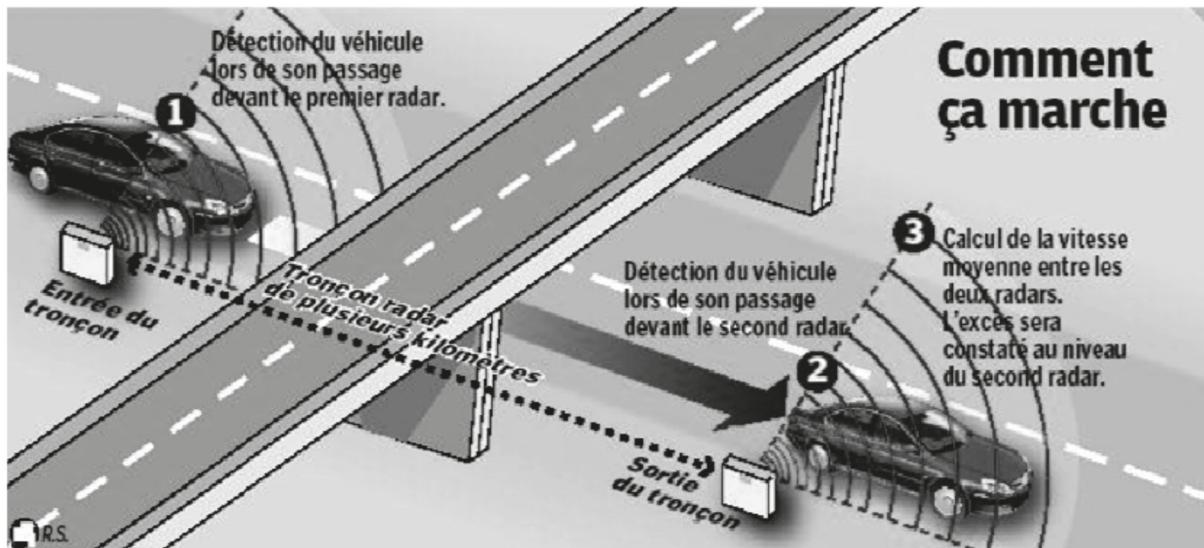
Exercice 2

Répondre aux quatre questions suivantes en utilisant les trois documents ci-après.

- 1) Un véhicule a parcouru le tronçon du tunnel de Noailles et la vitesse moyenne calculée est de 123 km/h. Quelle sera la vitesse retenue ?
- 2) Un autre véhicule a parcouru la distance entre les deux points d'enregistrements en 4 minutes. Quelle sera la vitesse retenue ?
- 3) Sur une contravention reçue suite à un excès de vitesse sur ce tronçon, la vitesse retenue est 114 km/h. Quelle était la vitesse moyenne calculée par l'ordinateur pour ce véhicule ?
- 4) La plaque d'immatriculation d'un véhicule est enregistrée à 9 h 17 min 56 s devant le premier radar, puis à 9 h 22 min 07 s devant le second radar.
Le conducteur de ce véhicule sera-t-il sanctionné par une contravention ?

Document 1 : le radar-tronçon du tunnel de Noailles

La portion de l'autoroute A20 entre Toulouse et Paris est équipée d'un radar-tronçon sur une distance de 5,1 km à proximité du tunnel de Noailles. La vitesse est limitée à 70 km/h lors de travaux de réfection du tunnel.

Document 2 : principe de fonctionnement d'un radar-tronçonSource : www.leparisien.fr**Document 3 : calcul de la vitesse retenue pour la contravention**

Un ordinateur calcule la vitesse moyenne sur le tronçon puis détermine la vitesse retenue afin de prendre en compte les erreurs de précision du radar.

Si la vitesse retenue est au-dessus de la vitesse limite, l'automobiliste reçoit une contravention.

Vitesse moyenne calculée par l'ordinateur	Inférieure ou égale à 100 km/h	Supérieure à 100 km/h
Vitesse retenue	On enlève 5 km/h à la vitesse moyenne calculée.	On diminue la vitesse moyenne calculée de 5 %.

Exercice 3

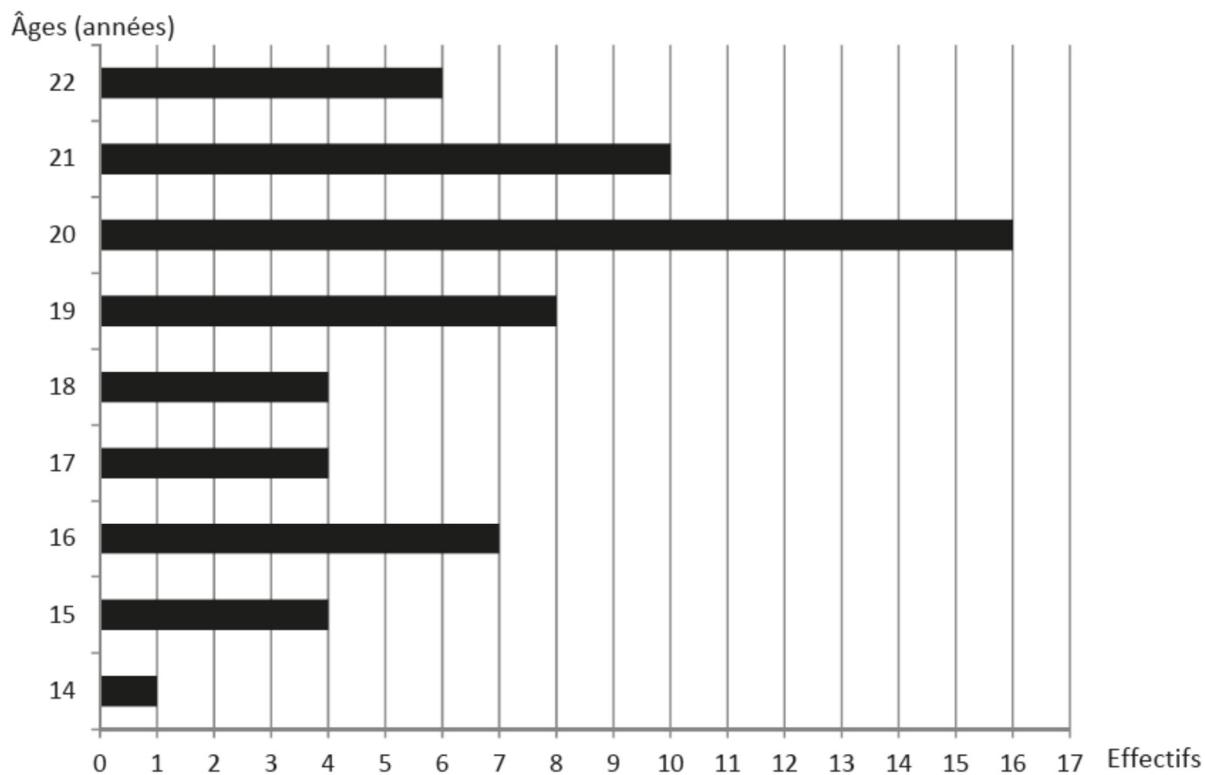
On dispose de plusieurs cubes pleins (non creux) de 5 cm d'arête. Certains sont en fer, les autres sont en nickel. La masse volumique du fer est de 7860 kg/m^3 , celle du nickel est de 8900 kg/m^3 .

On choisit un cube, on le pèse et on trouve que sa masse est 1110 g.

Ce cube est-il en fer ou en nickel ?

Exercice 4

La répartition de l'âge des membres d'un club d'aviron est donnée par le graphique ci-dessous :



- 1) Déterminer l'âge médian des membres du club. Justifier la réponse.
- 2) Quel est le pourcentage, arrondi à l'unité, de membres du club qui ont moins de 18 ans ?
- 3) Une tombola est organisée pour tous les membres du club. Chaque membre a reçu un billet au hasard. Le tirage au sort pour cette tombola désigne un seul gagnant.
Les probabilités trouvées seront arrondies au centième.
 - a) Quelle est la probabilité pour que le gagnant ait 22 ans ?
 - b) Quelle est la probabilité pour que le gagnant ait au moins 18 ans ?

TROISIEME PARTIE (14 points)*Cette partie est composée de trois situations indépendantes.***SITUATION 1**

Dans une classe de CM2, un enseignant commence une séquence d'apprentissage par le problème suivant :

*Il faut 6 oranges pour obtenir 300 mL de jus d'orange.
On admet que toutes les oranges fournissent la même quantité de jus.
Quelle quantité de jus peut-on obtenir avec 9 oranges ?*

- 1) De quelle notion mathématique relève ce problème ? Justifier la réponse.
- 2) Citer trois procédures que l'on peut attendre d'élèves de CM2 pour résoudre ce problème.
- 3) Modifier les données numériques de l'énoncé du problème afin d'amener les élèves à utiliser la procédure dite de passage à l'unité.

SITUATION 2

Dans le cadre d'une séquence ayant pour objectif de calculer avec des multiples de 25, l'enseignant d'une classe de CE2 donne l'exercice ci-dessous :

Le compte est bon : il s'agit de trouver le nombre en gras, ou à défaut un nombre le plus proche possible, en utilisant les nombres situés en dessous. Chacun d'entre eux ne peut être utilisé qu'une fois. Il est possible d'utiliser les quatre opérations.

98

25 - 10 - 4 - 75 - 50 - 8

- 1) Ci-dessous, sont présentées les productions de quatre élèves. Analyser chaque production A, B, C et D en termes de réussites et d'éventuelles erreurs.

Production A	Production B
Production C	Production D
$75 + 25 = 100$ $10 - 8 = 2$ $100 - 2 = 98$	$25 \times 4 = 100$ $10 - 8 = 2$ $100 - 2 = 98$

- 2) Quels sont les faits numériques, liés à l'objectif de l'enseignant, connus des élèves C et D ?
- 3) Proposer un nouvel exercice de « Le compte est bon » ayant pour objectif de réinvestir la connaissance des multiples de 9 et deux solutions attendues des élèves.
- 4) Citer deux avantages de l'activité « Le compte est bon » dans l'apprentissage du calcul mental et deux points de vigilance que doit avoir un enseignant qui propose une activité « Le compte est bon ».
- 5) De quelle notion mathématique relève ce problème ? Justifier la réponse.

SITUATION 3

Lors d'une séance de calcul en ligne, une enseignante de CM2 propose le calcul suivant :

$$12,47 + 2,7$$

Voici les productions de quatre élèves :

Amina	Tony
$ \begin{array}{r} 12,47 + 2,7 \\ \hline 12 \quad 6 \\ \hline 14 \end{array} $	$12,47 + 2,7 = 14,47 + 0,7 = 15,12$
Zoé	Ugo
$12,47 + 2,7 = 14,117$	$12,47 + 2,7 = 14,54$

- 1) En quoi le calcul en ligne est un mode de calcul complémentaire au calcul mental ?
- 2) Pour chacun des élèves, expliciter les procédures utilisées et analyser les erreurs éventuelles.
- 3) Quel étayage l'enseignante pourrait-elle proposer à Zoé pour l'aider à corriger l'erreur qu'elle a faite ?

GROUPEMENT 3 – avril 2019

PREMIERE PARTIE : PROBLÈME (13 points)

L'Indice de Masse Corporelle (IMC) est une grandeur qui permet d'estimer la corpulence d'une personne en fonction de sa taille et de sa masse corporelle afin d'évaluer les risques liés aux surpoids.

Voici la formule permettant de calculer l'Indice de Masse Corporelle :

$$\text{IMC} = \frac{P}{T^2}$$

dans laquelle :

- IMC désigne l'Indice de Masse Corporelle exprimée en kilogramme par mètre carré (kg/m^2) ;
- P désigne la masse exprimée en kilogramme (kg) ;
- T désigne la taille exprimée en mètre (m).

PARTIE A : utilisation et interprétation de l'IMC chez l'adulte

Pour prévenir les risques liés aux problèmes de poids, l'Organisation Mondiale de la Santé a défini les intervalles standards suivants :

IMC (kg/m^2)	Interprétation
moins de 16,5	anorexie
de 16,5 à moins de 18,5	maigreur
de 18,5 à moins de 25	corpulence normale
de 25 à moins de 30	surpoids
de 30 à moins de 35	obésité modérée
de 35 à moins de 40	obésité sévère
plus de 40	obésité morbide

(Source : <http://inpes.santepubliquefrance.fr/50000/pdf/docIMCAd.pdf>)

1) Claire mesure 160 cm et pèse 53 kg. Calculer son IMC. Quelle interprétation peut-on en faire ?

2) On interroge huit hommes sur leur masse et leur taille afin de calculer leur IMC.

On obtient le tableau suivant :

A	B	C	D
1 Homme	Masse P (en kg)	Taille T (en m)	Calcul de l'IMC
2 n°1	72	1,92	19,5
3 n°2	66	1,72	22,3
4 n°3	104	1,75	34,0
5 n°4	73	1,78	23,0
6 n°5	80	1,86	23,1
7 n°6	98	1,85	28,6
8 n°7	78	1,82	23,5
9 n°8	80	1,7	27,7
..			

a) Quelle formule a pu être écrite en D2 puis étirée jusqu'en D9 pour calculer l'IMC ?

b) Parmi ceux qui ont été interrogés, quel est le pourcentage d'hommes « obèses » ou « en surpoids » ?

3) Une personne a un IMC de 28 et pèse 70 kg. Combien de kilogrammes doit-elle perdre pour avoir un IMC de 25 ?

4) Quelle masse minimale et quelle masse maximale peut avoir une personne mesurant 1,72 m pour avoir une « corpulence normale » ?

PARTIE B : l'obésité et le surpoids en France

En 2012 une enquête nationale sur l'obésité et le surpoids a été réalisée en France sur un échantillon de 25 714 personnes de 18 ans et plus. Le tableau ci-dessous indique les résultats obtenus.

		Femmes	Hommes
Pas de surpoids	$IMC < 25$	7 830	5 728
Surpoids	$25 \leq IMC < 30$	3 551	4 739
Obésité	$30 \leq IMC$	2 119	1 747
Total		13 500	12 214

(Source : http://www.roche.fr/content/dam/roche_france/fr_FR/doc/obepi_2012.pdf)

Une société proposant des solutions pour mincir décide d'entreprendre un démarchage téléphonique pour se constituer une clientèle.

Elle appelle au hasard une personne de plus de 18 ans.

On considérera que la répartition de la population pouvant être appelée est dans la même proportion que celle de cet échantillon.

On donnera les réponses en pourcentage arrondi à l'unité.

- 1) Quelle est la probabilité que cette personne soit en surpoids ou obèse ?
- 2) La personne appelée est un homme. Quelle est la probabilité que cet homme soit en surpoids ou obèse ?
- 3) La personne appelée est obèse. Quelle est la probabilité que cette personne soit un homme ?
- 4) Une personne prétend que plus de $\frac{1}{6}$ de l'échantillon est obèse. A-t-elle raison ? Justifier.

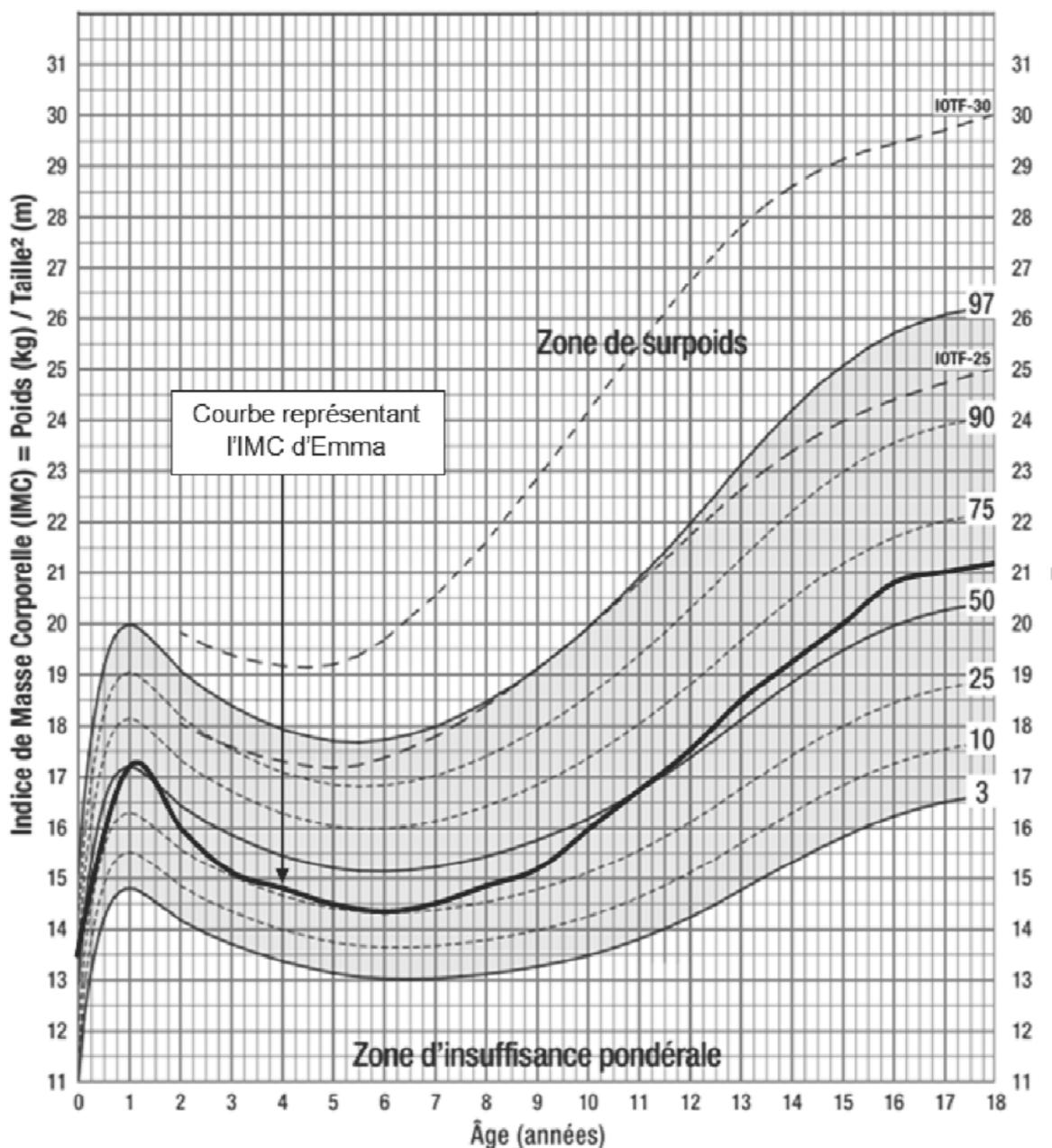
PARTIE C : utilisation et interprétation de l'IMC chez l'enfant

Au départ, l'IMC a été conçu pour les adultes de 18 ans et plus, mais il est important de dépister précocement un simple excès de poids, qui peut, par la suite, conduire à l'obésité. L'IMC est donc aussi calculé chez les enfants. Cette valeur est reportée ensuite sur un graphique présent dans son carnet de santé et qui est spécifique au sexe de l'enfant.

(Source : http://inpes.santepubliquefrance.fr/CFESBases/catalogue/pdf/IMC/courbes_enfants.pdf)

Voici, en page suivante, le graphique représentant l'évolution de l'IMC d'Emma, aujourd'hui âgée de 19 ans. La zone grisée représente la zone de « corpulence normale » dans laquelle la plupart des enfants se situent. En dessous, l'enfant est considéré en insuffisance pondérale et au-dessus en surpoids.

- 1) D'après ce graphique, l'IMC chez l'enfant est-il proportionnel à l'âge ? Justifier.
- 2) a) À 12 ans, quel est l'IMC maximum qu'une fille doit avoir pour ne pas être considérée en surpoids ?
b) À 7 ans, entre quelles valeurs se situe l'IMC d'une fille pour qu'elle soit de corpulence normale ?
c) À partir de quel âge une fille est-elle considérée en insuffisance pondérale avec un IMC de 15 kg/m^2 ?
- 3) Quelles sont les tranches d'âges sur lesquelles Emma avait un IMC inférieur ou égal à 16 kg/m^2 ?



PARTIE D : alimentation

Les problèmes de poids peuvent être liés à l'alimentation. Il est donc intéressant de savoir lire les étiquettes des produits industriels.

Le goûter de Frédéric, 8 ans, est composé d'une portion de 30 g de gâteau et d'un verre de 200 mL de soda.

Sur ce paquet de gâteaux on peut lire les informations suivantes :

Valeurs nutritionnelles moyennes	Pour 100 g
Matières grasses (lipides)	16 g
dont acides gras saturés	6,2 g
Glucides	54 g
dont sucres	42 g
Protéines	5,5 g

Sur la bouteille de soda, il est indiqué que 100 mL contiennent 14,7 g de glucides dont 14,7 g de sucres et qu'il n'y a aucune matière grasse ni aucune protéine.

1) Recopier et compléter le tableau suivant.

Valeurs nutritionnelles moyennes pour le goûter de Frédéric	1 portion de 30 g de gâteau	200 mL de soda	Total
Matières grasses (lipides)
dont acides gras saturés
Glucides
dont sucres
Protéines

2) Pour un morceau de sucre d'environ 6 g, l'apport énergétique est en moyenne de 24 Kcal (Kilocalories).

- a) Quel est l'apport énergétique du sucre contenu dans le goûter de Frédéric ?
- b) Pour un garçon de 8 ans, l'apport énergétique quotidien conseillé, pour un niveau d'activité moyen, est de 1 985 Kcal. Afin de diminuer le risque de surpoids, d'obésité et de caries dentaires, il est souhaitable, pour les adultes comme pour les enfants, que leur consommation de sucre représente au maximum 10 % de l'apport énergétique quotidien.

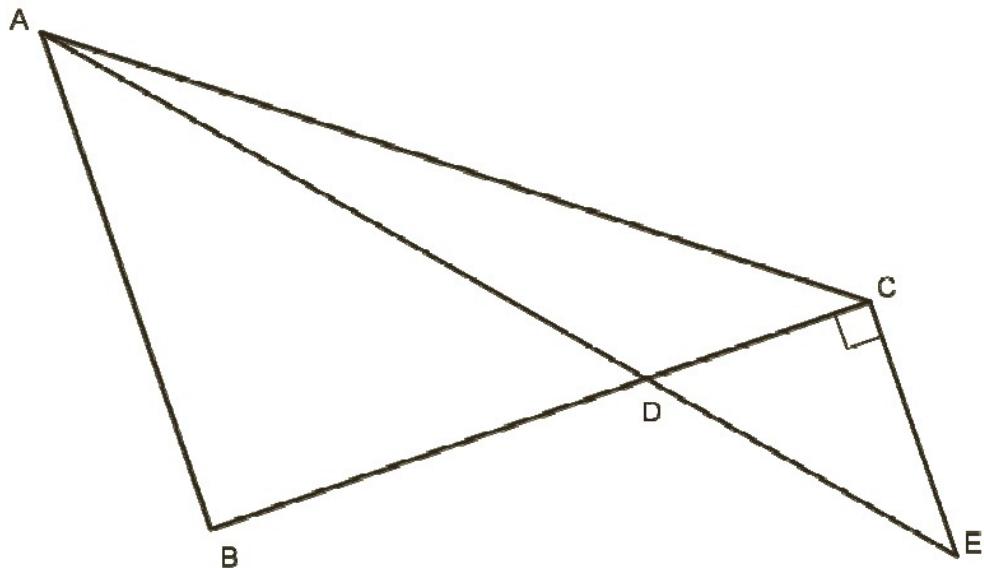
(Source : <http://www.who.int/mediacentre/news/releases/2015/sugar-guideline/fr/>)

À combien de morceaux de sucre correspond la masse de sucre que Frédéric ne devrait pas dépasser quotidiennement ?

- c) Calculer le pourcentage des apports quotidiens recommandés que représente la quantité de sucre consommé par Frédéric durant son goûter.

DEUXIEME PARTIE (13 points)*Cette partie est composée de trois exercices indépendants.***Exercice 1**

On considère la figure ci-dessous qui n'est pas représentée à l'échelle.



On sait que :

- $BC = 8 \text{ cm}$;
- $AB = 6 \text{ cm}$;
- $AC = 10 \text{ cm}$;
- $AD = 8 \text{ cm}$;
- D appartient aux segments [AE] et [BC]
- Les droites (BC) et (CE) sont perpendiculaires.

Le but de l'exercice est de déterminer l'aire du triangle ACE.

- 1) Montrer que les droites (AB) et (BC) sont perpendiculaires.
- 2) En déduire la longueur BD.
- 3) Déterminer la longueur CE.
- 4) Déterminer l'aire du triangle ACE.

Exercice 2

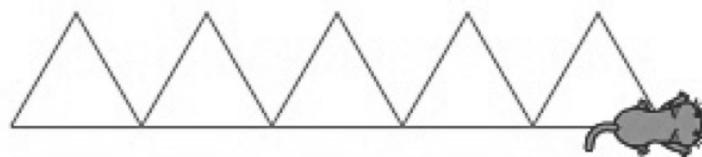
- 1) Pour tout nombre entier n , montrer que $30n + 25$ est divisible par 5.
- 2) Voici un programme de calcul :

- Choisir un nombre entier.
- Multiplier par 3.
- Ajouter 5.
- Élever au carré.
- Soustraire 9 fois le carré du nombre de départ.

- a) Montrer que ce programme a pour résultat 265 si le nombre entier choisi est 8. Les calculs seront détaillés.
- b) Quel résultat obtient-on si le nombre entier choisi est $(- 56)$?
- c) Montrer que le résultat de ce programme de calculs, quel que soit le nombre de départ, est divisible par 5.

Exercice 3

La figure ci-dessous a été réalisée à l'aide du logiciel de programmation Scratch.



- 1) Parmi les programmes proposés ci-dessous, quel est celui qui permet de réaliser ce dessin ? Aucune justification n'est demandée.
- 2) Dans ces programmes, l'angle de rotation est de 120°. Expliquer pourquoi.

Programme A	Programme B
<pre> demander [Valeur de L? et attendre] mettre [L] à [réponse] stylo en position d'écriture répéter (4) répéter (3) tourner (120) de 120 degrés avancer de [L] répéter (3) tourner (120) de 120 degrés avancer de [L] répéter (4) tourner (120) de 120 degrés avancer de [L] </pre>	<pre> demander [Valeur de L? et attendre] mettre [L] à [réponse] stylo en position d'écriture répéter (4) fois répéter (3) fois tourner (120) de 120 degrés avancer de [L] répéter (3) fois tourner (120) de 120 degrés avancer de [L] répéter (1) fois tourner (120) de 120 degrés avancer de [L] </pre>
Programme C	Programme D
<pre> demander [Valeur de L? et attendre] mettre [L] à [réponse] stylo en position d'écriture répéter (4) répéter (3) tourner (120) de 120 degrés avancer de [L] répéter (3) tourner (120) de 120 degrés avancer de [L] répéter (3) tourner (120) de 120 degrés avancer de [L] </pre>	<pre> demander [Valeur de L? et attendre] mettre [L] à [réponse] stylo en position d'écriture répéter (5) fois répéter (3) fois tourner (120) de 120 degrés avancer de [L] répéter (3) fois tourner (120) de 120 degrés avancer de [L] avancer de [L] </pre>

- 3) Tracer à main levée les figures obtenues avec chacun des programmes non retenus à la question 1.

TROISIÈME PARTIE (14 points)*Cette partie est constituée de trois situations indépendantes.***SITUATION 1**

L'exercice ci-dessous est proposé dans une classe de CE1. Les élèves doivent écouter l'énoncé du problème lu par l'enseignant puis rechercher une réponse numérique à la question du problème pour l'entourer parmi 6 propositions. Ils doivent produire des traces de leur recherche.

<p>Léo a 24 € dans son porte-monnaie. Il a 8 € de plus que Lilou.</p> <p>Combien d'euros Lilou a-t-elle ?</p>	
<input type="checkbox"/> 8 <input checked="" type="checkbox"/> 32 <input type="checkbox"/> 15 <input type="checkbox"/> 14 <input type="checkbox"/> 24 <input type="checkbox"/> 16	

- 1) En quoi les compétences modéliser et calculer sont-elles mobilisées pour résoudre ce problème ?
- 2) Donner deux difficultés que les élèves pourraient rencontrer pour résoudre ce problème.
- 3) Voici les productions de quatre élèves.

<p>Kiara</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 10px; text-align: center;"> $24 + 8 = 32$ </div> <div style="text-align: center; margin-top: 10px;"> <input type="checkbox"/> 8 <input checked="" type="checkbox"/> 32 <input type="checkbox"/> 15 <input type="checkbox"/> 14 <input type="checkbox"/> 24 <input type="checkbox"/> 16 </div>	<p>Lucas</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 10px; text-align: center;"> </div> <div style="text-align: center; margin-top: 10px;"> <input type="checkbox"/> 8 <input checked="" type="checkbox"/> 32 <input type="checkbox"/> 15 <input type="checkbox"/> 14 <input type="checkbox"/> 24 <input type="checkbox"/> 16 </div>
<p>Maya</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 10px; text-align: center;"> </div> <div style="text-align: center; margin-top: 10px;"> <input type="checkbox"/> 8 <input checked="" type="checkbox"/> 32 <input type="checkbox"/> 15 <input type="checkbox"/> 14 <input type="checkbox"/> 24 <input checked="" type="checkbox"/> 16 </div>	<p>Arif</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 10px; text-align: center;"> $24 - 8 = 16$ </div> <div style="text-align: center; margin-top: 10px;"> <input type="checkbox"/> 8 <input type="checkbox"/> 32 <input type="checkbox"/> 15 <input type="checkbox"/> 14 <input checked="" type="checkbox"/> 24 <input checked="" type="checkbox"/> 16 </div>

Pour chacun de ces travaux :

- a) Analyser la trace écrite (procédures suivies, compétences mises en œuvre, erreurs éventuelles).
- b) Proposer une remédiation ou un accompagnement que l'enseignant pourrait mettre en place pour aider Lucas et Kiara à résoudre le problème.
- 4) Au cours du CE1, l'enseignant propose à nouveau l'exercice avec d'autres nombres afin de faire évoluer les représentations schématiques utilisées par les élèves.

Léo a 322 € dans son porte-monnaie. Il a 46 € de plus que Lilou.

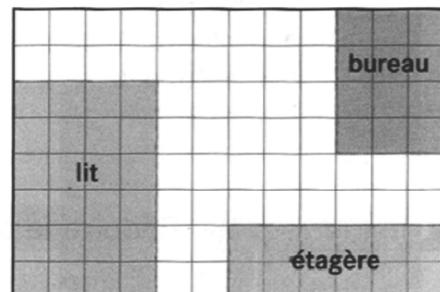
Combien d'euros Lilou a-t-elle ?

Proposer une représentation schématique que l'enseignant peut présenter aux élèves pour les aider à modéliser la situation.

SITUATION 2

Un enseignant propose à ses élèves un exercice inspiré d'une activité extraite du manuel « Cap Maths CM2 », (Hatier, 2010).

Figurine a fait un plan de sa chambre sur un papier quadrillé pour y disposer son lit, un bureau et une étagère.
 La chambre est représentée par le grand rectangle de 8 carreaux sur 12 carreaux.
 Elle veut réaliser un agrandissement de ce plan.
 Elle décide que le grand côté de la chambre devra mesurer 18 carreaux sur le plan agrandi.



Détermine les dimensions du plan agrandi et des meubles de la chambre sur ce plan agrandi.

- 1) Voici un extrait de réponse d'un élève.

On a ajouté 6 carreaux au grand côté, il faut donc ajouter 6 carreaux à tous les côtés.

[...]

Pour le lit :

$$\text{grand côté} = 6 + 6 = 12 \text{ carreaux}$$

$$\text{petit côté} = 4 + 6 = 10 \text{ carreaux}$$

[...]

Comment, sans s'appuyer sur la bonne réponse, peut-on convaincre cet élève que sa réponse est fausse ?

- 2) Proposer trois procédures correctes qu'un élève de CM2 peut mettre en œuvre pour donner les dimensions correctes de l'étagère. Expliciter la propriété mathématique utilisée pour chaque procédure.

SITUATION 3

Un enseignant de CM2 propose les exercices suivants à ses élèves.

Exercice 1

Range ces nombres par ordre croissant :

5,29 – 5,07 – 6,04 – 5,121 – 5,8 – 5,25

Réponse :

..... < < < < <

Exercice 2

Intercale un nombre.

- a) 8,3 < < 8,5 b) 4,7 < < 4,8
 c) 7 < < 7,1

On trouvera ci-dessous quatre productions d'élèves.

Exercice 1

Range ces nombres par ordre croissant :

5,29 – 5,07 – 6,04 – 5,121 – 5,8 – 5,25

Réponse :

5,8... < 5,07.. < 5,25.. < 5,29.. < 6,04.. < 5,121

Célestine

4,7,5

Exercice 2

Intercale un nombre.

- a) 8,3 < 8,4.. < 8,5 b) 4,7 < 4,75.. < 4,8
 c) 7 < < 7,1

Exercice 1

Range ces nombres par ordre croissant :

5,29 – 5,07 – 6,04 – 5,121 – 5,8 – 5,25

Réponse :

6,01 < 5,8.. < 5,29.. < 5,121.. < 5,07.. < 5,25

Toufik

5,29

5,25

Intercale un nombre.

- a) 8,3 < 8,4.. < 8,5 b) 4,7 < < 4,8
 c) 7 < < 7,1

Exercice 1

Range ces nombres par ordre croissant :
 $5,29 - 5,07 - 6,04 - 5,121 - 5,8 - 5,25$

Paola*Réponse :*

$5,07 < 5,121 < 5,25 < 5,29 < 5,8 < 6,04$

Exercice 2*Intercale un nombre.*

- a) $8,3 < \underline{\quad} < 8,5$ b) $4,7 < \underline{\quad} < 4,8$
 c) $7 < \underline{\quad} < 7,1$

Exercice 1

Range ces nombres par ordre croissant :
 $5,29 - 5,07 - 6,04 - 5,121 - 5,8 - 5,25$

Miroslav*Réponse :*

$5,8 \dots < 5,07 < 5,25 < 5,29 < 5,121 < 6,04 \dots$

Exercice 2*Intercale un nombre.*

- a) $8,3 < \underline{8,4} < 8,5$ b) $4,7 < \underline{4,8} < 4,8$
 c) $7 < \underline{\dots} < 7,1$

- 1) Dans cette question, on s'intéresse uniquement à l'exercice 1.
- Pour chacun des élèves, décrire les réussites et les erreurs éventuelles.
 - Quelle tâche, impliquant des fractions décimales, l'enseignant pourrait proposer à Miroslav, pour l'aider à corriger ses erreurs et renforcer sa compréhension de l'écriture décimale ?
- 2) Dans certains anciens manuels scolaires, on trouve des exercices du type :

Range ces nombres par ordre croissant :

$7,32 - 7,35 - 12,42 - 7,57 - 12,05 - 7,01$

En s'appuyant sur la production de Miroslav ou de Célestine, expliquer en quoi cet exercice ne permet pas d'évaluer de façon fiable la compétence « Savoir comparer deux nombres décimaux ». Puis, proposer des modifications à l'exercice afin de le rendre plus pertinent.

- 3) Analyser les réussites et les erreurs de Célestine à l'exercice 2.

GROUPEMENT 4 – avril 2019

PREMIERE PARTIE : PROBLÈME (13 points)

PARTIE A

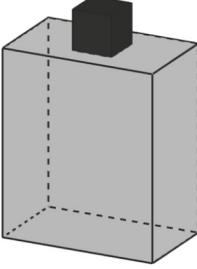
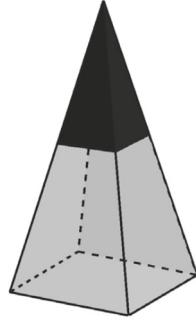
Une entreprise souhaite faire fabriquer des flacons pour commercialiser un nouveau parfum.

Elle hésite entre trois formes de flacons :

- un flacon de forme parallélépipédique ;
- un flacon de forme cylindrique ;
- un flacon de forme pyramidale.

1) Étude des volumes des différents flacons

L'entreprise qui fabrique les flacons propose les modèles ci-dessous. On ne s'intéresse ici qu'au volume utile du flacon, c'est-à-dire sans tenir compte du goulot et du bouchon qui ne contiennent pas de parfum.

 Longueur utile : 5 cm Largeur utile : 3 cm Hauteur utile : 6 cm	 Diamètre utile : 5 cm Hauteur utile : 6 cm	 Le flacon avec son bouchon est une pyramide régulière à base carrée de 5 cm de côté et de hauteur 11 cm. Le bouchon est une pyramide réduction du flacon, c'est une pyramide régulière à base carrée de côté de longueur 2 cm.
---	---	---

On rappelle les formules suivantes :

$$\text{Volume d'un parallélépipède rectangle} = \text{aire de la base} \times \text{hauteur}$$

$$\text{Volume d'un cylindre} = \text{aire de la base} \times \text{hauteur}$$

$$\text{Volume d'une pyramide} = \frac{\text{aire de la base} \times \text{hauteur}}{3}$$

- Calculer le volume, en centimètre cube, du flacon de forme parallélépipédique.
- Calculer le volume du flacon de forme cylindrique. Donner la valeur exacte, en centimètre cube, du volume de ce flacon puis la valeur arrondie à l'unité près de centimètre cube.
- Vérifier que le volume utile du flacon de forme pyramidale est $85,8 \text{ cm}^3$.

2) Enquête auprès de clients

L'entreprise réalise un sondage auprès de clients afin de savoir quelle forme de flacon est préférée. Un seul choix est possible parmi les trois formes proposées. Toutes les personnes interrogées ont donné une réponse parmi les trois formes proposées.

Les résultats du sondage sont donnés dans le tableau suivant :

Forme du flacon	parallélépipédique	cylindrique	pyramidale
Nombre de personnes l'ayant choisi	82	109	47

- a) Déterminer la proportion de personnes préférant le flacon cylindrique. Exprimer le résultat sous forme d'un pourcentage arrondi à l'unité.
- b) L'entreprise souhaite représenter les données du tableau à l'aide d'un diagramme circulaire pour une présentation à ses partenaires.
Déterminer la mesure de l'angle, arrondie au degré près, du secteur représentant le nombre de personnes ayant choisi le flacon de forme cylindrique.

PARTIE B

L'entreprise de parfum choisit les flacons cylindriques.

1) Conditionnement du parfum

Le parfum est fabriqué dans des cuves contenant 50 litres de parfum puis conditionné dans les flacons. On considère que le volume d'un flacon cylindrique est de 118 cm^3 .

Combien de flacons pleins peut-on obtenir avec une cuve ?

2) Étude du coût des flacons

Deux entreprises sont mises en concurrence pour la fabrication des flacons.

Entreprise 1 : chaque flacon est facturé 2,40 €, les frais de livraison sont gratuits.

Entreprise 2 : chaque flacon est facturé 1,80 €, les frais de transport s'élèvent à 2 000 € pour toute commande de 1 à 10 000 flacons.

- a) Quel sera le prix de 2 500 flacons commandés à l'entreprise 1 ? Quel sera le prix de 2 500 flacons commandés à l'entreprise 2 ?
- b) On appelle f la fonction affine telle que si x est le nombre de flacons commandés, x un nombre entier compris entre 1 et 10 000, alors $f(x)$ est le montant de la commande en euro, selon le tarif de l'entreprise 1. Donner l'expression de $f(x)$ en fonction de x .
- c) On appelle g la fonction affine telle que si x est le nombre de flacons commandés, x un nombre entier compris entre 1 et 10 000, alors $g(x)$ est le montant de la commande en euro, selon le tarif de l'entreprise 2. Donner l'expression de $g(x)$ en fonction de x .
- d) Tracer sur la copie les représentations graphiques des fonctions f et g dans un repère orthogonal.
Unités : 1 cm pour 500 unités sur l'axe des abscisses,
1 cm pour 2 000 unités sur l'axe des ordonnées.
- e) Déterminer graphiquement à partir de combien de flacons commandés l'entreprise 2 devient la plus avantageuse.
- f) Retrouver par le calcul à partir de combien de flacons commandés l'entreprise 2 devient la plus avantageuse.
- g) Calculer le montant d'une commande de 7 500 flacons dans l'entreprise la plus avantageuse.

PARTIE C

L'entreprise envisage d'emballer chaque flacon dans une boîte en aluminium, cylindrique de hauteur 7,6 cm et de diamètre 5,6 cm.

1) Patron de la boîte sans couvercle

Construire un patron de la boîte avec un fond mais sans couvercle. Justifier la construction, en précisant les calculs effectués.

2) Masse de la boîte sans couvercle

On appelle masse surfacique d'une feuille le quotient de sa masse par son aire.

Le patron de la boîte avec un fond mais sans couvercle sera découpé dans une feuille d'aluminium dont la masse surfacique est 810 g/m^2 .

- a) Calculer l'aire, en cm^2 , du patron de la boîte avec un fond mais sans couvercle.
Donner la valeur exacte de l'aire de ce patron puis sa valeur arrondie à l'unité près.
- b) Calculer la masse de la boîte avec un fond mais sans couvercle arrondie au gramme près.

DEUXIEME PARTIE (13 points)

Cette partie est composée de quatre exercices indépendants.

Exercice 1

Des paysagistes veulent réaliser un parterre triangulaire avec des tulipes blanches et rouges.

Ils placent trois piquets A, B et C tels que :

- A et B sont distants de 8 m ;
- A et C sont distants de 6 m ;
- B et C sont distants de 10,5 m ;

puis ils tirent des cordes d'un piquet à l'autre.

Ils décident de séparer ce parterre en deux parties. Le long de la corde reliant les piquets A et B, ils placent un piquet D distant de A de 4,8 m. Le long de la corde reliant les piquets A et C, ils placent un piquet E distant de A de 3,6 m. Puis ils tirent une corde entre D et E.

- 1) Construire une figure qui représente la situation en prenant pour échelle 1 cm pour 1 m.

La corde qui relie les piquets D et E délimite la zone dans laquelle seront plantées des tulipes rouges de celle dans laquelle seront plantées des tulipes blanches.

- 2) Pour des questions esthétiques, les paysagistes souhaitent que la corde qui relie les piquets D et E soit parallèle à la corde qui relie les piquets B et C.

Cette situation est-elle vérifiée ? Justifier votre réponse.

- 3) Calculer la distance entre les piquets D et E.

- 4) Déterminer si l'aire de la zone dans laquelle seront plantées des tulipes rouges est égale à celle de la zone dans laquelle seront plantées des tulipes blanches.

Exercice 2

Dans tout l'exercice, les dés sont équilibrés.

Un dé cubique possède six faces numérotées de 1 à 6. Lorsqu'on le lance, le nombre comptant pour le score est celui affiché par la face du dessus.

Un dé tétraédrique possède quatre faces numérotées de 1 à 4. Lorsqu'on le lance, le nombre comptant pour le score est celui affiché par la face cachée.

- 1) Karim et Brigitte s'amusent à lancer simultanément deux dés cubiques. Le score est obtenu en ajoutant les nombres donnés par les deux dés.

- a) Karim dit : « Les scores possibles sont 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12. On a donc plus de chances d'obtenir un score pair ! ». Karim a-t-il raison ? Justifier.

- b) Brigitte dit : « On a une chance sur trois d'obtenir un score multiple de 3. ». Brigitte a-t-elle raison ? Justifier.

- 2) Karim et Brigitte s'amusent maintenant à lancer simultanément un dé cubique et un dé tétraédrique. Le score est obtenu en multipliant les nombres donnés par les deux dés.

- a) Avec cette nouvelle règle, a-t-on autant de chances d'obtenir un score pair qu'un score impair ?
- b) Quelle est la probabilité d'obtenir un score multiple de 3 ?

Exercice 3

On dispose des deux programmes de calcul ci-dessous :

Programme A	Programme B
<pre> when green flag clicked ask [Entrer un nombre] and wait say (answer * 4 + 7) end </pre>	<pre> when green flag clicked ask [Entrer un nombre] and wait say (answer * 9 - 3) end </pre>

- 1) Différents nombres sont entrés dans le programme A.
 - a) Montrer que quand on entre le nombre 5, la réponse obtenue est le nombre 27.
 - b) Quel est le nombre obtenu quand on entre le nombre $\frac{7}{10}$? Justifier la réponse.
- 2) Quel nombre faut-il entrer dans le programme B pour que le résultat affiché soit égal à 0,69 ?
- 3) Prouver que quand on entre un nombre impair dans le programme B, le nombre obtenu est toujours un multiple de 6.
- 4) Existe-t-il des nombres qui permettent d'avoir le même résultat affiché avec les deux programmes ? Si oui, déterminer tous ces nombres.

TROISIEME PARTIE (14 points)

Cette partie est composée de trois situations indépendantes.

SITUATION 1

Dans une classe de Moyenne Section, par groupes de trois, des élèves jouent avec l'enseignant à un jeu où, à chaque tour, ils prennent le nombre de jetons indiqué par la constellation d'un dé de 1 à 6.



L'enseignant observe les procédures des élèves :

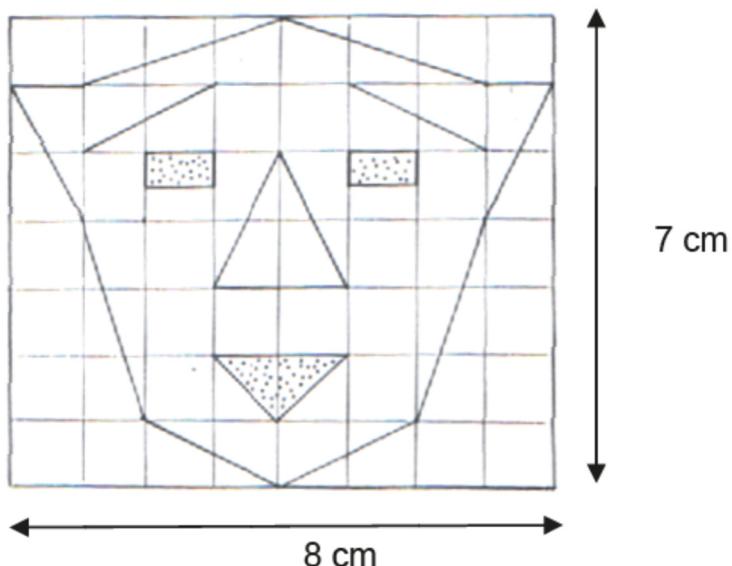
- **Anissa** prend directement le nombre de jetons correspondant à la constellation du dé ;
- **Elvina** prend une poignée de jetons, les organise à l'identique de la constellation du dé, puis repose l'excédent sans procédure numérique apparente ;
- quand il obtient 1, 2 ou 3, **Martin** prend le nombre de jetons correspondant ; pour les constellations de 4, 5 ou 6, il compte en posant son doigt sur chaque point de la constellation du dé et prend un jeton.

- 1) Quelle notion mathématique ce jeu permet-il de travailler ?
- 2) Conjecturer les stratégies utilisées par chacun des élèves.
- 3) Proposer deux modifications du jeu que peut proposer l'enseignant afin de rendre la tâche plus complexe pour Anissa.
- 4) Proposer une modification du jeu que peut proposer l'enseignant pour qu'Elvina mobilise d'autres stratégies.
- 5) L'enseignant fait évoluer le jeu en proposant deux dés dont les faces sont marquées avec des chiffres de 1 à 3. Les élèves doivent prendre le nombre de jetons correspondants à la somme des deux dés.
Que permettrait de faire travailler aux élèves cette nouvelle situation que ne faisait pas travailler la situation avec un dé unique ?

SITUATION 2

Un enseignant de cycle 3 propose la situation suivante à ses élèves pour travailler la compétence associée suivante : « Proportionnalité : reproduire une figure en respectant une échelle. »

Il distribue un masque reproduit sur un quadrillage.

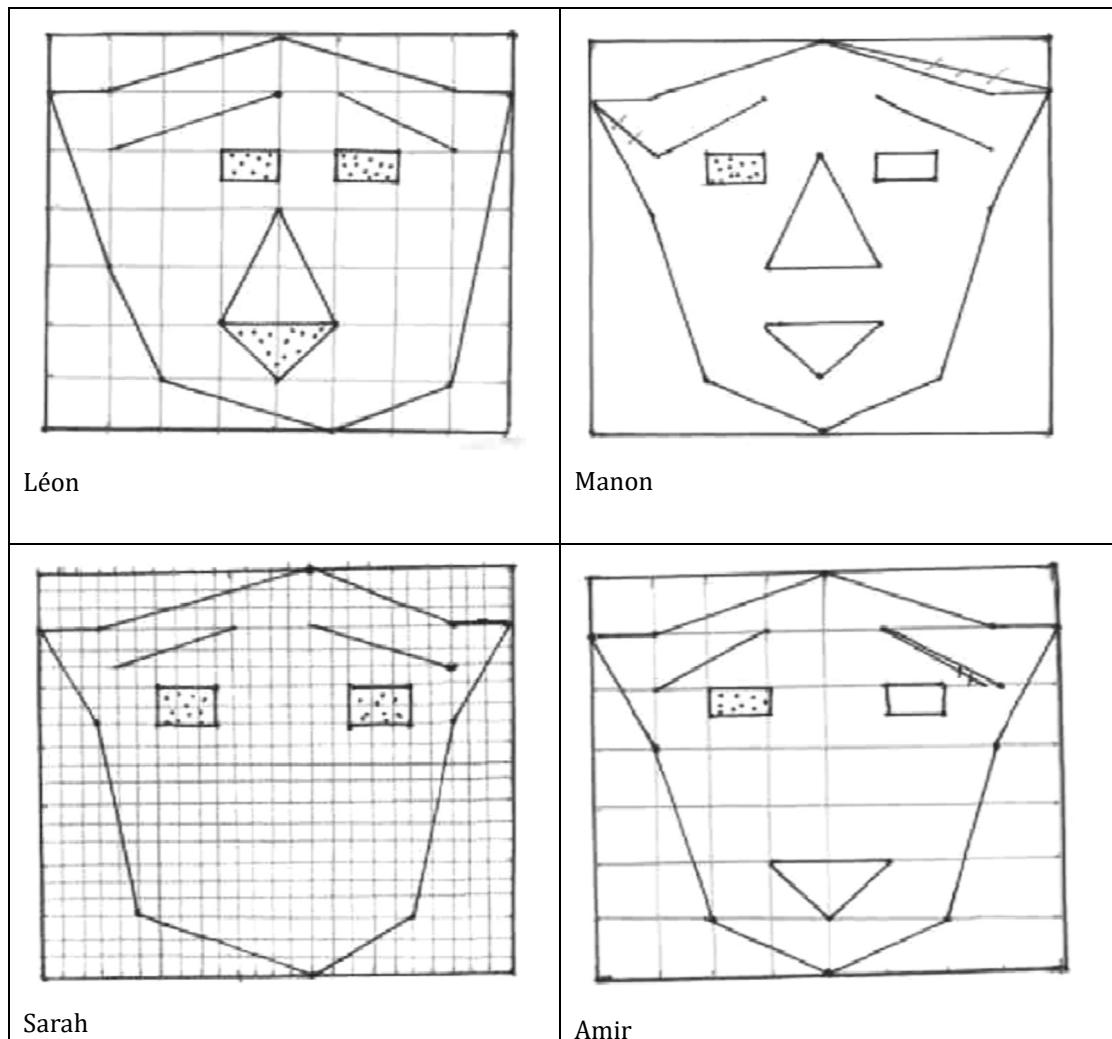


Cette figure n'est pas en vraie grandeur.

Les dimensions du quadrillage d'origine sont indiquées sur la figure ci-dessus : 8 cm sur 7 cm. L'enseignant distribue une feuille de 24 cm sur 21 cm sur papier uni et donne la consigne suivante :

« Observe bien ce masque. Tu dois agrandir ce masque sur une feuille qui mesure 24 cm sur 21 cm. Le masque doit être le plus grand possible sur cette feuille. »

- 1) L'enseignant choisit de faire reproduire la figure sur papier uni. Quelle est l'influence possible de ce choix sur les procédures des élèves ?
- 2) Quatre productions d'élèves sont présentées ci-dessous.



- a) Décrire la procédure utilisée pour chacun des élèves Manon, Sarah et Amir pour résoudre ce problème.
- b) Analyser les réussites et les erreurs que vous pouvez repérer dans chacune des productions de Léon et Sarah.

SITUATION 3

Le problème ci-dessous est proposé à des élèves de CM1.

Une paire de bâtons et une paire de skis coûtent 128 euros. Sachant que les skis coûtent 75 euros de plus que les bâtons, retrouve le prix des bâtons.

D'après un exercice proposé au concours math'isère

Voici les réponses de trois élèves : Leïna, Mathis et Mickaël.

Production de Leïna

$$\begin{array}{r} 128 \\ - 75 \\ \hline 53 \end{array}$$

Les bâtons de ski coûtent 53 €.

Production de Mathis

$$203 \text{ € J'ai fait } 128 + 75$$

Le prix des bâtons est de 203 €.

Production de Mickaël

$$\begin{array}{r} 26,50 + 75 = 101,50 \\ \quad + 26,50 \\ \hline 128 \end{array}$$

- 1) Indiquer en quoi les compétences "modéliser" et "calculer"¹ vont être mobilisées dans ce problème.
- 2) Analyser chacune des trois productions ci-dessus en repérant les réussites et les erreurs éventuelles.
- 3) Indiquer une autre démarche que des élèves de cycle 3 auraient pu entreprendre pour arriver à la solution.
- 4) Proposer un schéma que l'enseignant pourrait proposer aux élèves lors de la mise en commun pour aider les élèves à mobiliser la situation.

¹ Note des rédacteurs :

Pour une meilleure lisibilité du sujet, nous avons fait figurer entre guillemets les mots modéliser et calculer qui désignent deux des six grandes compétences mathématiques organisant les programmes du cycle 2 au cycle 4, mais ces guillemets étaient absents dans le sujet distribué aux candidat.e.s.

GROUPEMENT 5 – avril 2019

PREMIERE PARTIE : PROBLÈME (13 points)

Rappels des formules de volumes de solides usuels

- Volume du parallélépipède rectangle : $V = \text{longueur} \times \text{largeur} \times \text{hauteur}$
- Volume du prisme droit et du cylindre : $V = \text{aire de la base} \times \text{hauteur}$
- Volume de la pyramide et du cône : $V = \frac{1}{3} \times \text{aire de la base} \times \text{hauteur}$
- Volume de la boule : $V = \frac{4}{3} \times \pi \times \text{rayon}^3$

Dans tout ce problème, on s'intéresse à une boisson réalisée à partir d'un sirop et d'eau.

Pour réaliser cette boisson à partir de ce sirop, le fabricant préconise de mélanger :
 « 1 volume de sirop pour 7 volumes d'eau ».

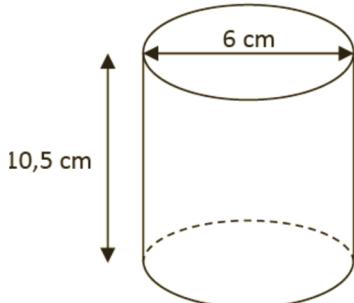
PARTIE A : boisson à base de sirop

- 1) En suivant la préconisation ci-dessus pour réaliser la boisson :
 - a) Quel volume de boisson (sirop + eau) obtient-on avec 5 cL de sirop ?
 - b) Quel volume de sirop faut-il pour obtenir 24 cL de boisson ?
- 2) Avec cette préconisation, quel pourcentage du volume de la boisson le volume de sirop représente-t-il ?

Dans les parties **B**, **C** et **D**, les verres sont modélisés par des cylindres et des cônes.

PARTIE B : des verres cylindriques

Vincent a des verres cylindriques dont les dimensions sont 6 cm pour le diamètre et 10,5 cm pour la hauteur.



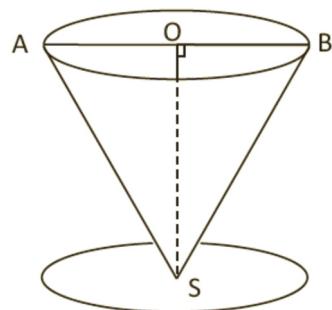
- 1) Montrer que la contenance du verre est environ 29,7 cL.
- 2) Vincent veut faire des marques sur ses verres afin d'aider ses enfants à réaliser une boisson composée de 3 cL de sirop.
 - a) À quelle hauteur, au millimètre près, doit-il positionner la marque correspondant au volume de sirop ?
 - b) S'il respecte la préconisation d'un volume de sirop pour sept volumes d'eau, à quelle hauteur, au millimètre près, doit-il positionner la marque correspondant au volume total de la boisson ?

PARTIE C : des verres coniques

Pour l'anniversaire de ses enfants, Vincent n'a pas assez de verres cylindriques, il sort donc ses anciens verres coniques.

Un exemplaire est représenté ci-contre.

- [AB] représente le diamètre de la base du cône, sa longueur est 12 cm ;
- O est le milieu de [AB] ;
- La longueur du segment [SB] est 10 cm.



- 1) Calculer la hauteur SO d'un verre.
- 2) Quel volume maximal de boisson, exprimé en centilitre et arrondi au dixième près, un verre peut-il contenir ?
- 3) Comme précédemment, Vincent veut marquer ses verres coniques de manière à réaliser des boissons à partir d'un volume donné de sirop. On a représenté sur le schéma ci-contre le petit cône occupé par ce volume donné de sirop dans le fond du verre.

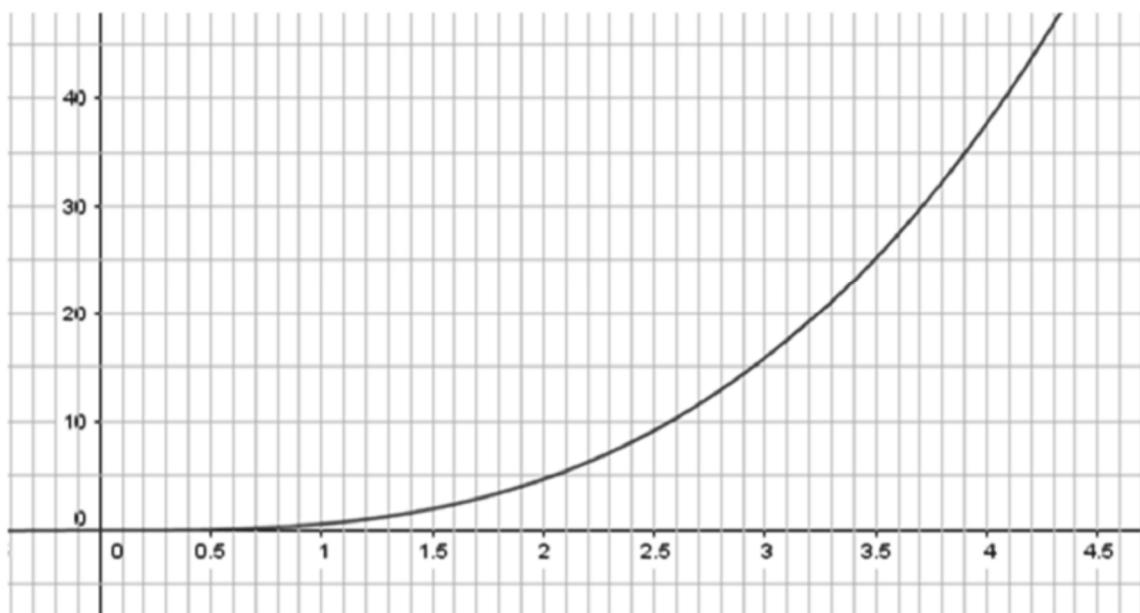
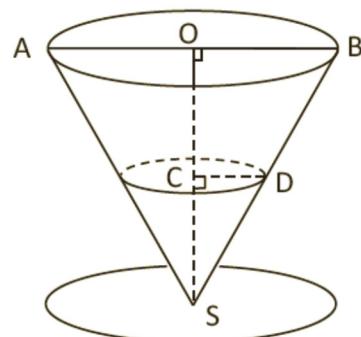
On note v le volume de ce petit cône, h la longueur SC et r la longueur CD

- a) Exprimer r en fonction de h .

- b) Montrer que $v = \frac{3\pi}{16} h^3$.

- c) On donne ci-dessous, la représentation graphique de la fonction qui à x associe $\frac{3\pi}{16} x^3$.

Expliquer comment ce graphique permet d'obtenir une valeur approchée de la hauteur h en centimètres correspondant à un volume de 3 cL, et donner cette valeur.

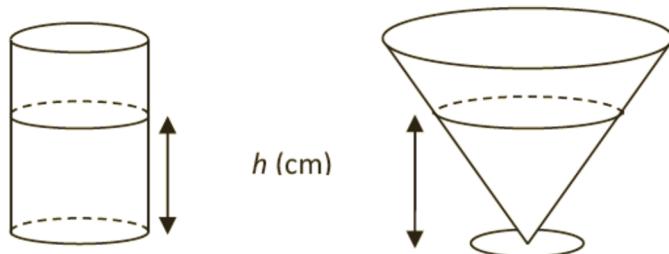


- d) En déduire que la longueur DS qui permet de marquer le niveau du sirop sur le verre pour un volume de sirop de 3 cL, est environ 4,6 cm.
- e) Vincent affirme que pour respecter les préconisations d'un volume de sirop pour sept volumes d'eau dans un verre de ce type, il suffit que le niveau de la boisson soit deux fois plus haut que celui du sirop seul. Que penser de cette affirmation ?
- f) Où faut-il positionner sur le segment [SB] la marque repérant le volume total de boisson ? Justifier la réponse.

PARTIE D : comparaison des deux verres

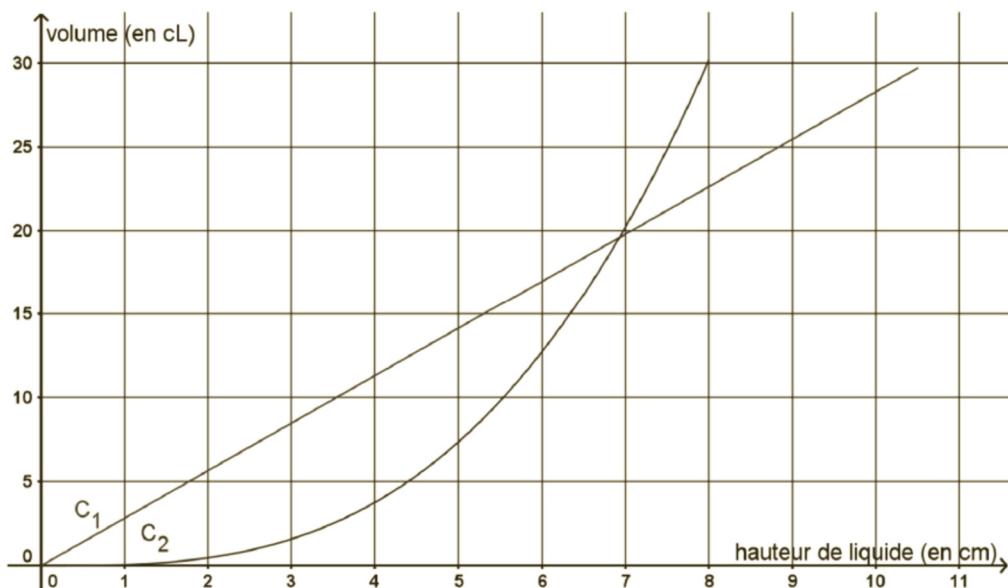
Dans cette partie, on s'intéresse au lien entre la hauteur de liquide versé et le volume contenu dans les verres précédemment étudiés.

On note h la hauteur de liquide versé.



Les dessins des verres ne sont pas l'échelle.

On donne ci-dessous les représentations graphiques C_1 et C_2 , des volumes de liquide, en centilitre, contenu dans chaque type de verre en fonction de la hauteur h de liquide, en centimètre.



- 1) Identifier à quel type de verre chaque courbe correspond. Justifier la réponse.
- 2) Les deux courbes se coupent en un point différent de l'origine du repère.
Lire sur le graphique une valeur approchée des coordonnées de ce point puis interpréter ces coordonnées dans le contexte de l'exercice.

DEUXIEME PARTIE (13 points)

Cette partie est composée de quatre exercices indépendants.

Exercice 1

Pour chacune des affirmations suivantes indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse. Une réponse exacte mais non justifiée ne rapporte aucun point. Une réponse erronée n'enlève pas de point.

- a) Un train circule à la vitesse de 175 km/h.

Affirmation 1 :

« Ce train est plus rapide qu'une balle de tennis qui traverse un terrain de tennis (23 m) en 0,46 seconde. »

- b) Les 27 élèves d'une classe ont fait germer une graine chacun. Les hauteurs des pousses obtenues, arrondies au centimètre près, sont regroupées dans le tableau suivant.

Hauteur en cm	1	3	7	10	11	13	15	19	20
Effectif	1	3	6	2	3	3	5	2	2

Les élèves ont déterminé la moyenne et la médiane de cette série. Un nouvel élève arrive avec sa pousse. On intègre la hauteur de sa pousse, arrondie au centimètre, dans la série.

Affirmation 2 :

« Quelle que soit la hauteur de sa pousse, arrondie au centimètre près, la médiane de la nouvelle série est la même que précédemment. »

Affirmation 3 :

« L'information "L'ajout de la hauteur de la nouvelle pousse, arrondie au centimètre, dans la série fait augmenter la moyenne de 0,25 cm" permet de retrouver la hauteur, arrondie au centimètre près, de la pousse ajoutée. »

- c) La division euclidienne d'un nombre entier A par 9 a pour reste 7. La division euclidienne d'un nombre entier B par 6 a pour reste 5. A est supérieur à B.

Affirmation 4 :

« Le reste dans la division euclidienne de $(A - B)$ par 3 est donc 2. »

Exercice 2

Une urne contient deux boules blanches et une boule noire indiscernables au toucher.

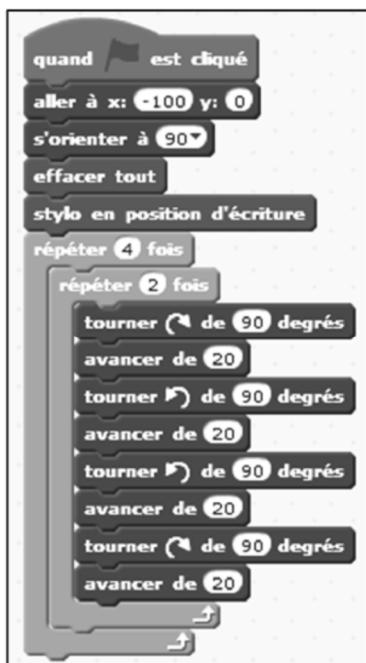
- Rob tire une boule au hasard, note sa couleur, **la remet dans l'urne**, tire une seconde boule au hasard et note sa couleur.
- Sam tire une boule au hasard, note sa couleur, et **sans la remettre dans l'urne** en tire une seconde au hasard, puis note sa couleur.

- 1) En notant B1 et B2 les deux boules blanches, et N la boule noire, établir pour chacune des deux situations la liste de tous les couples de tirages possibles.
- 2) Dorine affirme que la probabilité est la même pour les deux garçons d'obtenir une boule blanche lors de leur second tirage.
A-t-elle raison ? Justifier la réponse.

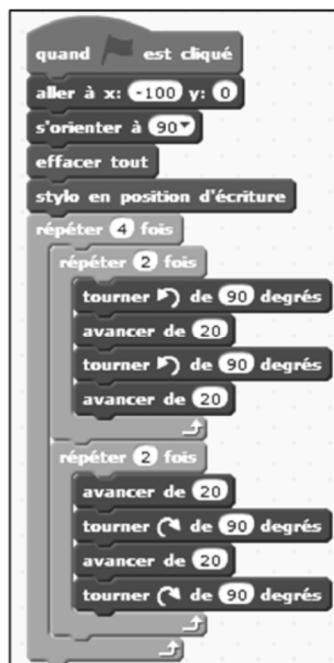
Exercice 3

On considère les programmes et les tracés ci-dessous.
Les longueurs sont données en pixels.

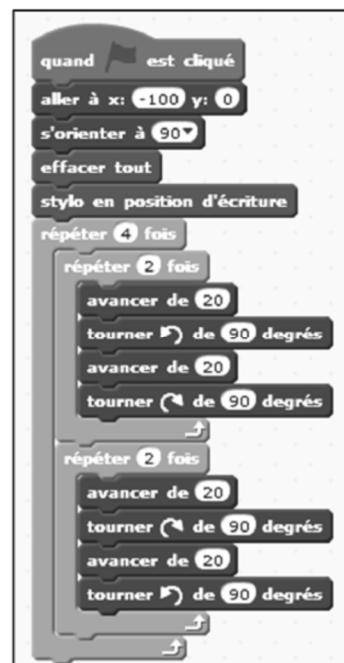
On rappelle que l'instruction signifie que le lutin s'oriente vers la droite.



Programme 1



Programme 2



Programme 3



Tracé 1

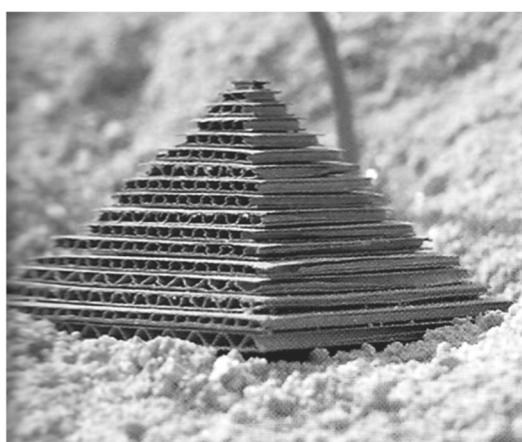


Tracé 2

- 1) Sans justifier, associer à chacun de ces tracés le programme correspondant.
- 2) On considère maintenant celui des trois programmes qui ne correspond à aucun des deux tracés précédents.
Sans justifier, représenter le tracé obtenu lorsqu'on lance ce programme.
On prendra pour unité graphique le millimètre (1 millimètre par pixel).

Exercice 4

Un objet pyramidal est construit par superposition de plaques de carton de 5 mm d'épaisseur, comme le montre l'exemple ci-dessous.



On modélise chaque plaque par un parallélépipède rectangle.

- Les dimensions de la première plaque sont : 12 cm, 12 cm et 5 mm.
- Les dimensions de la plaque suivante sont : 11,5 cm, 11,5 cm et 5 mm
- Pour chacune des autres plaques, les grandes arêtes mesurent 5 mm de moins que celles de la plaque sur laquelle elle est posée.
- La dernière plaque est alors un cube de 5 mm d'arête.

1) Quelle est la hauteur totale de l'objet ? Justifier votre réponse.

2) Pour calculer le volume de cet objet, on a construit la feuille de calcul ci-dessous.

	A	B	C	D
1			Volume de la plaque (en cm ³)	
2	1	12	72	72
3	2	11,5	66,125	138,125
4	3	11	60,5	198,625
5	4	10,5	55,125	253,75
6	5	10	50	303,75
7	6	9,5	45,125	348,875
8	7	9	40,5	389,375
9	8	8,5	36,125	425,5
10	9	8	32	457,5
11	10	7,5	28,125	485,625
12	11	7	24,5	510,125
13	12	6,5	21,125	531,25
14	13	6	18	549,25
15	14	5,5	15,125	564,375
16	15	5	12,5	576,875
17	16	4,5	10,125	587
18	17	4	8	595
19	18	3,5	6,125	601,125
20	19	3	4,5	605,625
21	20	2,5	3,125	608,75
22	21	2	2	610,75
23	22	1,5	1,125	611,875
24	23	1	0,5	612,375
25	24	0,5	0,125	612,5
26				

- a) Proposer un intitulé pour chacune des colonnes A, B et D qui apparaîtrait respectivement dans les cellules A1, B1 et D1.
- b) Proposer une formule qui a pu être saisie dans la cellule C2 et étirée vers le bas jusqu'à la cellule C25.
- c) Sans justifier, donner la proposition ci-dessous qui a pu être saisie dans la cellule D3 et étirée jusqu'en D25.

Proposition 1	= C2 + C3
Proposition 2	= \$C\$2 + C3
Proposition 3	= D2 + C3
Proposition 4	= 72 + C3

- d) À quoi correspond la valeur 612,5 située dans la cellule D25 ?
- 3) Une plaque d'un mètre carré de ce carton pèse 850 g.
Déterminer la masse volumique de ce carton en kg/m³. En déduire la masse, en gramme, de l'objet pyramidal.

TROISIEME PARTIE (14 points)*Cette partie est composée de quatre situations indépendantes.***SITUATION 1**

Voici un problème proposé à des élèves de CE1 :

*À la fin de l'année, toute l'école prend le bus pour aller visiter le zoo de la Barben.
Il y a 100 élèves dans cette école.
Chaque bus peut emmener 23 élèves.
Combien faut-il de bus pour emmener tous les enfants de l'école ?*

Productions d'élèves :

<p>jeanne</p> $ \begin{array}{r} 100 \\ - 23 \\ \hline 081 \\ - 23 \\ \hline 54 \\ - 23 \\ \hline 41 \\ - 23 \\ \hline 22 \end{array} $ <p>il faudra 4 bus</p>	<p>Math</p> $ \begin{array}{r} 100 \\ - 23 \\ \hline 77 \\ - 23 \\ \hline 54 \\ - 23 \\ \hline 31 \\ - 23 \\ \hline 8 \end{array} $ <p>Il restera 77 élèves après le 1^{er} bus Il restera 54 élèves après le 2^{ème} bus Il restera 31 élèves après le 3^{ème} bus Il restera 8 élèves après le 4^{ème} bus Il faudra 5 bus</p>
<p>Victoria</p> $ 23 + 23 = 46 + 23 = 69 + 23 = 92 + 8 = 100 \quad \textcircled{1} \quad \textcircled{2} \quad \textcircled{3} \quad \textcircled{4} $ <p>Il faut 4 bus.</p>	<p>Benick</p> <p>Il faudra 4 bus.</p>

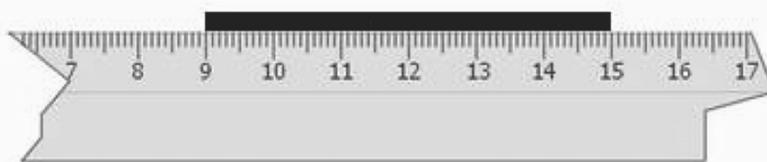
- Pour chacune de ces productions, expliciter les procédures mises en œuvre ainsi que les réussites et les erreurs éventuelles.
- Citer deux autres procédures que pourraient utiliser des élèves de cycle 3 auxquels on proposerait ce problème.

SITUATION 2

L'exercice ci-dessous a été donné dans le cadre d'une évaluation pour des élèves de CE2.

Consigne :

La bande noire a été mesurée à l'aide d'un double-décimètre cassé.



Complète la phrase :

La bande noire mesure

L'élève A a répondu que la bande mesure 15 cm.

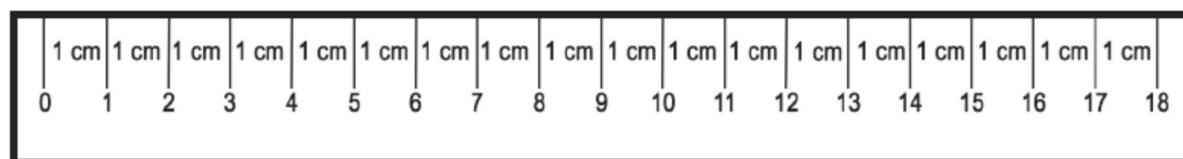
L'élève B a répondu que la bande mesure 7 cm.

- 1) Formuler des hypothèses permettant d'expliquer les erreurs des élèves A et B.
- 2) a) Au cycle 2, des élèves ont utilisé les instruments ci-dessous pour mesurer des bandes de papier. Expliciter leur intérêt dans les premiers apprentissages sur les mesures de longueurs.

Instrument A



Instrument B



- b) Donner une difficulté que peuvent rencontrer les élèves en passant du maniement de l'instrument A au maniement de l'instrument B.

SITUATION 3

Le problème suivant a été proposé par un professeur à ses élèves de CM2.

« Un professeur a acheté 15 cahiers pour 30,60 €. Son collègue qui dispose d'un budget de 40 € veut en acheter 20. Aura-t-il assez pour payer ? »

Les productions de trois élèves sont présentées ci-après.

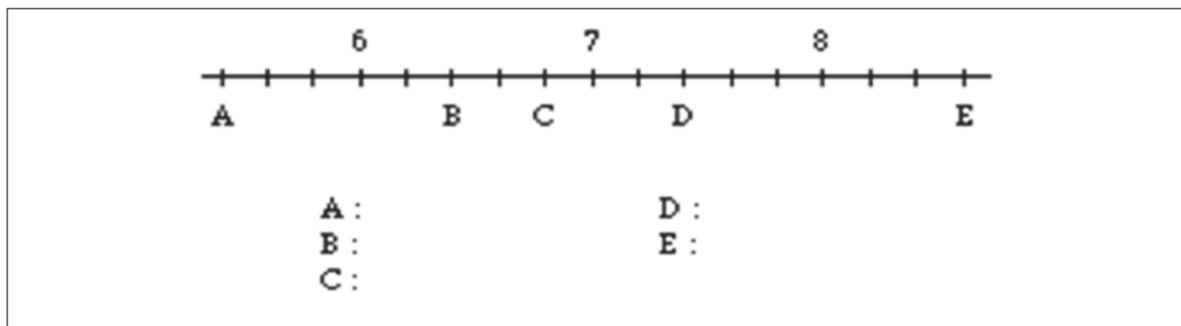
1) Décrire et analyser les procédures de résolution mises en œuvre par Ambre, Anaé et Mahé en identifiant les réussites et les erreurs éventuelles.

2) Décrire une autre procédure, utilisable par un élève de CM2, qui permet de résoudre le problème.

Production d'Ambre	Production d'Anaé
<p>Il faut encore 5 pour avoir 20. $15 + 5 = 20$</p> <p>Il doit payer en tout 35,60. $30,60 + 5 = 35,60$</p> <p>Il a assez.</p> $\begin{array}{r} 30,60 \\ + 5 \\ \hline 35,60 \end{array}$	$3 \times 5 = 15$ $\begin{array}{r} 30,60 \\ - 30,00 \\ \hline 00,60 \\ - 0,50 \\ \hline 00,10 \\ - 00,10 \\ \hline 00,00 \end{array}$ <p>5 façons de 6,12 €.</p> $5 \times 4 = 20$ $\begin{array}{r} 6,12 \\ \times 4 \\ \hline 24,48 \end{array}$ <p>20 cahiers coûtent 24,48 €.</p> <p>Le prof a a assez d'argent en poche.</p>
Production de Mahé	
$30,60 \div 15 = 2,4$ $2,4 \times 20 = 48,80$ <p>Le prix pour vingt c'est 48,80. Il manque 80 centimes.</p>	

SITUATION 4

Un enseignant de CM1 donne à ses élèves l'exercice suivant :



- 1) Expliciter les savoirs mathématiques mobilisés dans cette situation.
- 2) Analyser les erreurs des deux élèves dont les copies sont reproduites ci-dessous :

A : ? B : 6 + deux quart(s) C : 6 + quatre quart(s) D : 7 + deux quart(s)
E : 8 + trois quart(s)

Copie d'Agnès

A : 5,7 B : 6,2 C : 6,4 D : 7,2 E : 8,3

Copie de Nassim

CORRIGÉS

DES CINQ

SUJETS 2019

MISE AU POINT À PROPOS DE LA PROPORTIONNALITÉ¹

La notion de « proportionnalité » est très présente dans les sujets du CRPE. Il nous semble important de faire une mise au point sur le vocabulaire utilisé pour parler des propriétés afférentes, en cohérence avec les documents ressources publiés sur Eduscol.

À toute situation de proportionnalité, on peut associer une fonction linéaire qui traduit la relation liant les deux grandeurs en présence. Cette fonction décrit et généralise la situation. De manière générique, on peut noter f cette fonction linéaire.

Les deux propriétés principalement citées pour décrire une procédure ou analyser une situation sont les suivantes :

- (A) *pour tous réels x et y on a* $f(x + y) = f(x) + f(y)$
- (B) *pour tous réels k et x on a* $f(k \times x) = k \times f(x)$

On montre, par exemple dans [simard2012] que les propriétés (A) et (B) sont des propriétés caractéristiques d'une fonction linéaire (sous réserve d'une condition de continuité de la fonction f).

La propriété (A) est communément appelée *propriété additive* ou *propriété de linéarité pour l'addition*.

La propriété (B) est communément appelée *propriété multiplicative* ou *propriété de linéarité pour la multiplication par un nombre* ou encore *propriété d'homogénéité*.

La locution « propriété de linéarité pour l'addition » est redondante, nous préférerons « propriété additive » pour désigner la propriété (A). Nous choisirons, de même, la locution « propriété multiplicative » pour désigner la propriété (B). Le terme mathématique « homogénéité » est moins connu du public auquel s'adresse ce document donc nous ne l'utiliserons pas.

Une situation de proportionnalité met en jeu deux grandeurs liées par un coefficient multiplicateur, on passe d'une grandeur à l'autre en multipliant par un nombre a . Ce nombre est appelé *coefficient de proportionnalité* de la situation. La fonction linéaire sous-jacente est définie par $f(x) = a \times x$.

Il convient de distinguer les multiples significations de ce nombre a :

- a est le *coefficient de proportionnalité* lorsque l'on considère la structure multiplicative de la situation (dans ce cas, il s'agit d'une grandeur quotient et il s'exprime dans l'unité quotient des unités en jeu, par exemple des « euros par tartelettes ») ;
- a est la *valeur commune des rapports* des deux grandeurs en jeu lorsque l'on considère la situation en terme de *rapports égaux* (dans ce cas, il s'agit d'une grandeur quotient et il s'exprime dans l'unité quotient des unités en jeu, par exemple des « euros par tartelettes ») ;
- a est le *coefficient* qui définit la *fonction linéaire* associée à la situation de proportionnalité lorsque l'on considère la situation d'un point de vue *fonctionnel* (dans ce cas, il s'agit d'un nombre sans unité appelé scalaire) ;
- $a = f(1)$ est la *valeur de l'unité* (ou *valeur pour « un »*) lorsque l'on considère une procédure de *passage à l'unité* (dans ce cas, il s'agit de la mesure d'une grandeur et il s'exprime dans l'unité en jeu, par exemple des « euros ») ;
- a est le *coefficent directeur de la droite représentative de la fonction linéaire* associée à la situation de proportionnalité lorsque l'on se place dans le cadre graphique. On peut également dire que a est la *pente* ou *l'inclinaison* de la droite représentative de la fonction linéaire associée (dans ce cas, il s'agit d'un nombre sans unité appelé scalaire).

¹ Référence :

[simard2012] Simard A., « Fondements mathématiques de la proportionnalité dans la perspective d'un usage didactique », Petit x, n° 89, 2012, 51-63

Ces distinctions permettent d'être précis lorsque l'on décrit une procédure. Une procédure de retour à l'unité insiste sur la *valeur pour « un »*, alors qu'une procédure de recherche du coefficient de proportionnalité insiste sur le coefficient multiplicatif qui lie une grandeur à l'autre.

Le tableau de proportionnalité est un tableau de valeurs de la fonction linéaire associée à la situation. La construction d'un tel tableau relève d'une compétence d'organisation et de gestion de données. Cette structure s'avère efficace pour clarifier une situation de proportionnalité, en particulier identifier le statut des différentes données, éventuellement mieux « visualiser » des liens entre les nombres présents (correspondant à une même grandeur ou liés par la relation), et pour schématiser la procédure utilisée par l'élève. Les propriétés additive et/ou multiplicative sont généralement représentées par des flèches avec un symbole « + » ou « × », le coefficient de proportionnalité par une flèche avec « $\times a$ » qui « fait passer » d'une grandeur à l'autre, le passage à l'unité est exprimé en ajoutant, le cas échéant, une ligne ou une colonne avec la valeur pour « un ». Un tableau de proportionnalité ne donne pas la réponse à la recherche d'une quatrième proportionnelle, c'est une schématisation mais pas une technique de résolution.

Remarque :

Lorsque l'élève considère l'utilisation d'un tableau comme une technique de résolution, il peut être amené à conclure que tout tableau à double entrée est un tableau de proportionnalité (ce qui est une erreur fréquente).

Finalement il semble important de faire le point sur trois procédures particulières :

- « le passage à l'unité »,
- « la règle de trois »,
- « le produit en croix ».

Pour cela on se donne un exemple de situation tiré de la partie 3.C. du sujet du Groupement 2 du CRPE 2014.

Lorsque je fais une mousse au chocolat pour 8 personnes, j'utilise 6 œufs.
 Quand je fais une mousse au chocolat pour 12 personnes, j'utilise 9 œufs.
 Combien faudra-t-il d'œufs si je fais une mousse au chocolat pour 20 personnes ?

La procédure de *passage à l'unité* consiste à chercher le nombre d'œufs pour 1 personne puis à multiplier ce résultat par 20 pour répondre à la question. Dans cet exemple, s'il faut 6 œufs pour 8 personnes, il faut $6 : 8 = 0,75$ œuf par personne, et donc $0,75 \times 20 = 15$ œufs pour 20 personnes.

Remarque :

- dans cette procédure, le premier calcul est une division, le second est une multiplication. Le résultat de la division peut être entier, décimal ou rationnel non décimal... ce qui représente une difficulté selon le niveau de l'élève ;
- si le résultat de cette division est non décimal, l'utilisation d'une valeur approchée peut donner un résultat final approximatif et faux (par exemple : pour 3 personnes il faut 2 œufs, donc pour une personne il faut $2 : 3 \approx 0,66$ œufs donc pour 30 personnes il faut $0,66 \times 30 = 19,8$ œufs... au lieu de 20 œufs) ;
- le résultat de la division peut être difficile à re-contextualiser car 0,75 œuf par personne n'a pas beaucoup de sens dans la réalité.

La procédure de *la règle de trois* consiste à répondre à la question en trois temps sans faire de calculs intermédiaires.

S'il faut 6 œufs pour 8 personnes

alors il faut huit fois moins pour 1 personne, soit $\frac{6}{8}$ œufs pour 1 personne

et il faut vingt fois plus pour 20 personnes, soit $20 \times \frac{6}{8} = \frac{20 \times 6}{8} = \frac{120}{8} = 15$ œufs pour 20 personnes.

Remarque sur le calcul du résultat :

- dans cette procédure, le premier calcul est une multiplication, le second est une division ;
- le résultat de la multiplication 20×6 n'a aucun sens vis à vis du contexte de l'énoncé ;
- l'utilisation de l'égalité $20 \times \frac{6}{8} = \frac{20 \times 6}{8}$ fait appel à une propriété du calcul fractionnaire ;
- le fait de « multiplier puis diviser » peut donner des calculs plus simples que « diviser puis multiplier »

(dans l'exemple cité $\frac{20 \times 6}{8} = \frac{120}{8} = 15$ est une suite de calculs dans les entiers, alors que le calcul $20 \times \frac{6}{8} = 20 \times 0,75 = 15$ nécessite un passage dans les décimaux).

La procédure du *produit en croix* est vue au collège (programme de la classe de quatrième). Cette procédure consiste à ranger les valeurs en jeu dans un tableau (de proportionnalité) et à faire un calcul (multiplication puis division ou division puis multiplication).

$$20 \times 6 : 8 = 15$$

8	6
20	?

Remarque :

Il s'agit d'une procédure dé-contextualisée et purement technique qui masque le sens de la notion de proportionnalité. Cette procédure ne fait pas partie du programme de l'école élémentaire.

MISE AU POINT SUR LE CHOIX DES EXPRESSIONS UTILISÉES À PROPOS DE L'ÉCRITURE DES NOMBRES

L'expression « **écriture d'un nombre** » fait référence aux différentes écritures possibles pour un même nombre.

Pour les nombres entiers, on distingue :

- **L'écriture à l'aide des mots nombres** est la transcription écrite de notre système de numération orale. Nous préférons cette expression à l'expression « écriture en lettres », qui peut prêter à confusion avec « écriture algébrique » ou l'écriture en chiffres romain par exemple.
De leur côté, les programmes parlent de « noms des nombres », ceux-ci pouvant être constitués d'un ou plusieurs mots nombres.
- **L'écriture en chiffres** : celle-ci dépend du système de numération utilisé, en particulier des chiffres (les signes) utilisés et de la base choisie ; celle-ci va permettre l'utilisation d'un nombre fini de chiffres pour écrire tous les nombres.

Lorsque la base de numération est dix, on parle d'**écriture décimale**.

Les programmes parlent « d'écriture usuelle » ou indifféremment « d'écriture en chiffres » et « d'écriture chiffrée ».

Lorsque la base de numération est deux, on parle d'**écriture binaire**.

Lorsque la base de numération est soixante, on parle d'**écriture sexagésimale**.

Attention à l'utilisation du terme "chiffre". On écrit le nombre 15 en dessinant le chiffre 1 puis le chiffre 5. Mais dans une consigne du type « Prends 2 jetons », 2 est un nombre et non un chiffre, puisqu'il exprime une quantité.

On rencontre aussi des écritures liées aux différentes opérations :

- **Écriture additive** : c'est l'écriture d'un nombre sous la forme d'une somme.

Par exemple :

5 + 2 est une écriture additive du nombre sept.

3 + 3 + 3 + 3 + 3 est une écriture additive du nombre quinze.

- **Écriture multiplicative** : c'est l'écriture d'un nombre sous la forme d'un produit.

Par exemple :

6 × 10 est une écriture multiplicative du nombre soixante.

2 × 3 × 5 × 7 est une écriture multiplicative du nombre deux-cent-dix.

- **Décomposition canonique** : ce sont des écritures qui font référence à la valeur des chiffres selon leur position (« canons » de la numération, les puissances de 10), par exemple $437 = 4 \times 100 + 3 \times 10 + 7$.

Dans les programmes, « l'écriture en ligne mixte » désigne un type de décomposition mêlant décomposition additive et multiplicative. Par exemple $437 = 43 \times 10 + 7$ ou $437 = 2 \times 220 - 3$.

Dans les programmes de cycle 2, on trouve l'expression « l'écriture en unités de numération » qui désigne des écritures du type « 5d 6u », mais aussi « 4d 16u » ou « 6u 5d » pour 56.

L'écriture de nombres non entiers amène l'utilisation d'autres écritures :

- **Les écritures fractionnaires.** Ce sont les écritures du type

$$\frac{2}{3}, \quad \frac{238}{10}, \quad \frac{5}{1}, \quad \frac{20}{5}, \quad \frac{2,2}{3} \dots$$

On réserve le terme de **fraction** aux écritures fractionnaires dont le numérateur et le dénominateur sont des nombres entiers.

Les nombres rationnels sont les nombres qui peuvent s'écrire sous la forme d'une fraction.

Il n'y a pas unicité de l'écriture d'un nombre rationnel sous forme de fraction :

$\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \frac{5}{10}, \frac{6}{12}$ sont des écritures fractionnaires du même nombre.

De même $\frac{4}{3}, \frac{8}{6}, \frac{12}{9}$ sont des écritures fractionnaires du même nombre.

Une **fraction décimale** désigne une écriture fractionnaire dont le dénominateur est 10, 100, 1000... (ou toute autre puissance de 10).

Les nombres décimaux sont les nombres qui peuvent s'écrire sous la forme d'une fraction décimale.

$\frac{3227}{100}$ est un nombre décimal, mais aussi $\frac{1}{2}$ qui peut s'écrire $\frac{5}{10}$.

- **L'écriture à virgule.**

L'écriture à virgule est une convention d'écriture des nombres.

$\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \frac{5}{10}, \frac{6}{12}$ sont des écritures du nombre dont l'écriture à virgule est 0,5.

L'écriture à virgule d'un nombre décimal s'appelle son écriture décimale. Elle peut s'écrire avec un nombre fini de chiffres.

Les nombres non décimaux peuvent aussi s'écrire avec une virgule, mais leur écriture comporte alors une infinité de chiffres :

- Périodique dans le cas d'un rationnel ; par exemple : $\frac{4}{3} = 0,66666 \dots$
- Non périodique dans le cas d'un réel non rationnel (cas de l'écriture à virgule de π par exemple).

On proscritra l'expression « nombre à virgule », car « à virgule » est une caractéristique de l'écriture du nombre et non du nombre lui-même.

MISE AU POINT SUR LA RÉDACTION DES SOLUTIONS DES PROBLÈMES PORTANT SUR LES CALCULS DE GRANDEURS

Il s'agit dans les formulations utilisées de bien distinguer les trois concepts intervenants, à savoir l'**objet**, la **grandeur** et la **mesure**, et d'éviter au maximum les abus de langage.

Le langage courant et le langage des manuels contiennent de nombreuses formes incorrectes, où sont confondues grandeur et mesure.

Exemples :

On écrira :

« un triangle équilatéral a ses trois côtés de même longueur » ;
« la longueur du segment est 3 cm ».

plutôt que

« un triangle équilatéral a ses trois côtés de même mesure » ;
« la mesure du segment est 3 cm ».

D'autre part, certains mots sont polysémiques : par exemple diamètre désigne parfois un segment ou une longueur ou la mesure de cette longueur.

Dans ces annales, on utilise le verbe « mesurer » uniquement pour l'action de mesurer avec un instrument ou des unités étalons.

On utilisera des expressions telles que « la hauteur de la tour Eiffel est (ou vaut) 320 m », plutôt que la formulation incorrecte : « la tour Eiffel mesure 320 m ».

Les programmes de cycle 3 précisent : « La notion de mesure d'une grandeur, consiste à associer, une unité étant choisie, un nombre (entier ou non) à la grandeur considérée. Il s'agit de déterminer combien d'unités ou de fractionnements de l'unité sont contenus dans la grandeur à mesurer. Les opérations sur les grandeurs permettent également d'aborder les opérations sur leurs mesures... »

Les programmes de cycle 4 indiquent que les élèves doivent « mener des calculs impliquant des grandeurs mesurables, notamment des grandeurs composées, en conservant les unités. »

Dans ces annales, nous nous conformerons autant que possible aux injonctions des programmes.

Exemples :

- Calcul de la somme de la masse de deux objets, l'un de masse 1 kg 800 g et l'autre de masse 450 g :
 $1 \text{ kg} + 800 \text{ g} + 450 \text{ g} = 1 \text{ kg} + 1250 \text{ g} = 2 \text{ kg} + 250 \text{ g} = 2,250 \text{ kg}$

- Calcul avec des grandeurs composées :

La durée du parcours est égale au quotient de la distance parcourue par la vitesse du parcours :

$$\frac{45 \text{ km}}{30 \frac{\text{km}}{\text{h}}} = 1,5 \text{ h}$$

- Calcul du volume d'une pyramide à base carrée :

$$\frac{1}{3} \times (7,5 \text{ cm})^2 \times 10 \text{ cm} = \frac{1}{3} \times 56,25 \text{ cm}^2 \times 10 \text{ cm} = 187,5 \text{ cm}^3$$

- Calcul à l'aide du théorème de Thalès :

$$\frac{DJ}{DH} = \frac{JK}{HE} \quad \text{donc} \quad \frac{DJ}{9 \text{ cm}} = \frac{10 \text{ cm}}{12 \text{ cm}} = \frac{10}{12} \quad \text{et donc} \quad DJ = \frac{10}{12} \times 9 \text{ cm} = 7,5 \text{ cm}$$

Parfois, nous ne pourrons éviter certains abus :

De manière générale AB désigne la longueur du segment [AB] et on écrit par exemple $AB = 3 \text{ cm}$. Mais, lorsque la lisibilité des calculs l'exige, on utilise aussi AB pour désigner la mesure de la longueur (une unité étant choisie), en étant conscient qu'il s'agit d'un abus de notation.

Exemples :

- 1) Un triangle ABC rectangle en A est tel que $AB = 3 \text{ cm}$; $AC = 4 \text{ cm}$. Calculer BC.

Dans la correction de cet exercice, on note de la même manière les grandeurs AB, AC, BC et leur mesure pour effectuer les calculs sur les nombres.

$$BC^2 = AC^2 + BC^2 = 9 + 16 = 25$$

$$BC = \sqrt{25} = 5$$

La longueur du segment [BC] est 5 cm.

- 2) Dans un calcul à l'aide du théorème de Thalès :

$$\frac{DJ}{DH} = \frac{JK}{HE} \quad \text{donc} \quad \frac{12 - x}{12} = \frac{JK}{9} \quad \text{c'est - à - dire} \quad JK = \frac{9 \times (12 - x)}{12} = 0,75(12 - x)$$

GROUPEMENT 1 – avril 2019

PREMIÈRE PARTIE

A - Situation des trois carrés

Dans cette partie, toutes les mesures de longueur sont exprimées en cm, et toutes les mesures d'aire sont exprimées en cm².

1) Vérification de l'égalité des aires

La mesure de l'aire du petit carré gris (exprimée en cm²) est : $3 \times 3 = 9$.

La mesure de l'aire du grand carré gris est : $4 \times 4 = 16$.

La mesure de l'aire du carré blanc est : $5 \times 5 = 25$.

Or : $9 + 16 = 25$.

Donc **la somme des mesures des aires des deux carrés gris est égale à la mesure de l'aire du carré blanc.**

Remarque

Le sujet indique « la somme des aires des deux carrés gris est égale à l'aire du carré blanc », la réponse se fait grâce à la mesure des aires dans l'unité cm². Pour répondre en restant dans le cadre de la grandeur « aire », la réponse se ferait par découpage et recollement sans chevauchement, ce qui n'est pas envisageable au concours.

2) L'affirmation de Claude

Remarque

Dans un premier temps, il s'agit de comprendre que dans la figure 1, le carré AEFC est une copie du petit carré gris de la question précédente, que le carré ABGD est une copie du grand carré gris de la question précédente et le carré BCHI une copie du carré blanc de la question précédente.

Dans cette question, on s'interroge sur la nature du triangle ABC formé en prenant un sommet de chacun des carrés respectivement.

Pour cela on cherche à savoir si l'égalité (E) est vérifiée : $AC^2 + AB^2 = BC^2$ (E).

Or les mesures (en centimètres) de ces différentes longueurs sont : AC = 3, AB = 4 et BC = 5.

Dans la question précédente, nous avons vérifié que : $9 + 16 = 25$.

Ainsi l'égalité (E) est vérifiée.

La réciproque du théorème de Pythagore permet de conclure que le triangle ABC est rectangle en A.

L'affirmation de Claude est vraie.

3) L'affirmation de Dominique

Remarque

La figure 2 comporte un implicite important : les points M, J et P sont alignés. Ce qui implique que les droites (IJ) et (PN) sont parallèles (puisque perpendiculaires à la même droite (MP)).

La stratégie consiste à calculer les mesures de MN et de IJ.

Les points M, J et P sont supposés alignés. Ainsi, le triangle MPN est rectangle en P (l'angle droit provient du carré blanc). On sait que les côtés des carrés gris ont pour mesures respectives 3 et 4 et que celui du carré blanc a pour mesure 5. Ainsi : MP = 3 + 4 + 5 = 12.

Et : PN = 5.

Calcul de MN

Le théorème de Pythagore dans le triangle MPN, rectangle en P donne : $MN^2 = MP^2 + PN^2$.

Ainsi : $MN^2 = 12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169$.

On en déduit: MN = 13.

MN est un nombre entier naturel, donc un nombre décimal.

Calcul de IJ

Les points M, J et P sont alignés dans cet ordre. Les points M, I et N sont alignés dans cet ordre. Les droites (IJ) et (NP) sont (supposément) parallèles. Ainsi les triangles MIJ et MNP sont en configuration de Thalès.

Le théorème de Thalès implique l'égalité suivante : $\frac{IJ}{NP} = \frac{MJ}{MP}$.

On en déduit : $IJ = NP \times \frac{MJ}{MP} = 5 \times \frac{3}{12} = \frac{5}{4}$.

Le nombre fractionnaire $\frac{5}{4}$ est – il un nombre décimal ?

Méthode 1 : expression du nombre rationnel sous forme de fraction décimale

On peut écrire : $\frac{5}{4} = \frac{5 \times 25}{4 \times 25} = \frac{125}{100}$.

La fraction $\frac{125}{100}$ est une fraction décimale (son dénominateur est une puissance de dix). Elle représente donc un nombre décimal. Donc **IJ est un nombre décimal**.

Méthode 2 : expression du nombre rationnel sous forme d'écriture à virgule ayant un nombre fini de chiffres

Si on calcule $\frac{5}{4}$, on obtient 1,25 qui est l'expression d'un nombre décimal. Donc **IJ est un nombre décimal**.

Méthode 3 : reconnaissance directe à partir de la fraction rationnelle

$\frac{5}{4}$ est une fraction qui s'écrit sous la forme $\frac{a}{2^p 5^q}$, avec a, p et q des nombres entiers :

$$\frac{5}{4} = \frac{5}{2^2} = \frac{5}{2^2 \times 5^0}$$

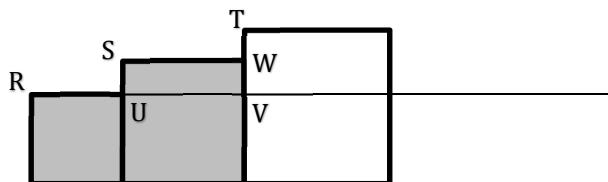
Donc $\frac{5}{4}$ est un nombre décimal. Donc **IJ est un nombre décimal**.

Puisque MN et IJ sont des nombres décimaux, l'affirmation de Dominique est vraie.

4) Affirmation de Camille*Remarque*

La figure 3 comporte un implicite important : les carrés sont positionnés comme sur la figure 2 (alignement des côtés de base).

Dans la figure 3, on considère les points U, V et W suivants :



On a : $RU = 3$; $SW = UV = 4$; $SU = 4 - 3 = 1$; $TV = 5 - 3 = 2$; $TW = 5 - 4 = 1$.

Par ailleurs, les triangles RSU, RTV et STW sont rectangles respectivement en U, V et W.

Méthode 1 : mise en œuvre du théorème de Pythagore

Par le théorème de Pythagore dans le triangle RSU, rectangle en U, on a :

$$RS^2 = RU^2 + SU^2 = 3^2 + 1^2 = 10.$$

Donc : $RS = \sqrt{10}$.

Par le théorème de Pythagore dans le triangle RVT, rectangle en V, on a :

$$RT^2 = RV^2 + VT^2 = 7^2 + 2^2 = 49 + 4 = 53.$$

Donc : $RT = \sqrt{53}$.

Par le théorème de Pythagore dans le triangle STW, rectangle en W, on a :

$$ST^2 = SW^2 + WT^2 = 4^2 + 1^2 = 16 + 1 = 17.$$

Donc : $ST = \sqrt{17}$.

Si les points R, S et T sont alignés, alors l'égalité suivante est vérifiée : $RS + ST = RT$.

Or: $\sqrt{10} + \sqrt{17} \neq \sqrt{53}$.

En effet :

- si on effectue les calculs à la calculatrice, on obtient : $\sqrt{10} + \sqrt{17} \approx 7,285$ et $\sqrt{53} \approx 7,280$ (valeurs approchées par défaut au millième près), ce qui montre que ces nombres ne sont pas égaux ;

- si on s'intéresse au carré de ces nombres, on obtient d'une part :

$$(\sqrt{10} + \sqrt{17})^2 = (\sqrt{10})^2 + (\sqrt{17})^2 + 2 \times \sqrt{10} \times \sqrt{17} = 10 + 17 + 2 \times \sqrt{170} = 27 + 2 \times \sqrt{170}.$$

D'autre part, on a : $\sqrt{53}^2 = 53$;

Or $\sqrt{170}$ est irréductible, de sorte que les deux carrés ne sont pas égaux. Or si les carrés respectifs de deux nombres positifs sont différents, alors ces nombres sont différents.

On en déduit que les points R, S et T ne sont pas alignés. **L'affirmation de Camille est fausse.**

Méthode 2 : mise en œuvre des théorèmes de Pythagore puis de Thalès

Par le théorème de Pythagore dans le triangle RSU, rectangle en U, on a :

$$RS^2 = RU^2 + SU^2 = 3^2 + 1^2 = 10.$$

Donc : $RS = \sqrt{10}$.

Par le théorème de Pythagore dans le triangle RVT, rectangle en V, on a :

$$RT^2 = RV^2 + VT^2 = 7^2 + 2^2 = 49 + 4 = 53.$$

Donc : $RT = \sqrt{53}$.

Les points R, U et V sont alignés dans cet ordre.

On a : $\frac{RU}{RV} = \frac{3}{7}$ et $\frac{RS}{RT} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{53}}$.

Or : $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{53}} \neq \frac{3}{7}$.

En effet :

- si on effectue les calculs à la calculatrice, on obtient : $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{53}} \approx 0,434$ et $\frac{3}{7} \approx 0,429$ (arrondis au millième près), ce qui montre que ces nombres ne sont pas égaux ;
- si on s'intéresse au carré de ces nombres, on obtient $\frac{10}{53}$ et $\frac{9}{49}$ qui sont deux fractions irréductibles non égales ; or si les carrés respectifs de deux nombres positifs sont différents, alors ces nombres sont différents.

Si les points R, S et T étaient alignés, le théorème de Thalès serait vérifié. Puisque le théorème de Thalès n'est pas vérifié, les points R, S et T ne sont alignés. **L'affirmation de Camille est fausse.**

Méthode 3 : questionnement sur les triangles semblables

Les deux triangles RSU et RTV sont rectangles en U et V respectivement. Ils possèdent un sommet commun et un côté porté par la même droite (RU). Si les points R, S et T sont alignés, cela signifie que les triangles RSU et RTV sont semblables.

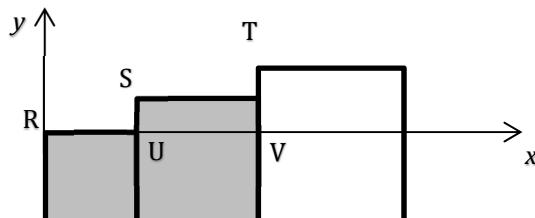
On a : $\frac{US}{RU} = \frac{1}{3}$ et $\frac{TV}{RV} = \frac{2}{7}$

Or : $\frac{1}{3} \neq \frac{2}{7}$.

On en déduit que les triangles RSU et RTV ne sont pas semblables.

Ainsi, les points R, S et T ne sont pas alignés. **L'affirmation de Camille est fausse.**

Méthode 4 : résolution dans un repère orthonormé.



On introduit un repère orthonormé dont l'origine se situe (avantageusement) en R et qui est gradué en cm. Les coordonnées des points sont R(0; 0), U(3; 0), V(7; 0), S(3; 1) et T(7; 2).

Si les points R, S et T sont alignés, cela signifie que les droites (RS) et (RT) sont confondues, c'est-à-dire qu'elles ont le même coefficient directeur (elles ont déjà un point commun R).

$$\text{Le coefficient directeur de la droite (RS) est : } \frac{\overline{US}}{\overline{RU}} = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Le coefficient directeur de la droite (RT) est : } \frac{\overline{TV}}{\overline{RV}} = \frac{2}{7}.$$

Or $\frac{1}{3} \neq \frac{2}{7}$ donc les droites (RS) et (RT) ne sont pas confondues.

Ainsi, **les points R, S et T ne sont pas alignés.**

Méthode 5 : résolution trigonométrique

Les deux triangles RSU et RTV sont rectangles en U et V respectivement. Ils possèdent un sommet commun et un côté porté par la même droite (RU). Si les points R, S et T sont alignés, cela signifie que les droites (RS) et (RT) forment le même angle avec la droite (RU).

$$\text{On a : } \tan(\widehat{URS}) = \frac{\overline{US}}{\overline{RU}} = \frac{1}{3} \text{ et } \tan(\widehat{VRT}) = \frac{\overline{VT}}{\overline{RV}} = \frac{2}{7}.$$

$$\text{Or : } \frac{1}{3} \neq \frac{2}{7}.$$

Donc les angles \widehat{URS} et \widehat{VRT} ne sont pas égaux. On en déduit que les points R, S et T ne sont pas alignés.

L'affirmation de Camille est fausse.

B - Situation des cinq carrés

1) Obtention d'une équation

Les mesures des côtés des carrés, exprimées en centimètres, sont des entiers consécutifs. Ainsi les mesures sont respectivement $(n - 2)$, $(n - 1)$ et n pour les carrés gris ; $(n + 1)$ et $(n + 2)$ pour les carrés blancs. La somme des aires des carrés gris exprimées en cm^2 , est alors :

$$(n - 2)^2 + (n - 1)^2 + n^2 = (n^2 - 4n + 4) + (n^2 - 2n + 1) + n^2 = 3n^2 - 6n + 5.$$

La somme des aires des carrés blancs exprimées en cm^2 , est :

$$(n + 1)^2 + (n + 2)^2 = (n^2 + 2n + 1) + (n^2 + 4n + 4) = 2n^2 + 6n + 5.$$

La condition « la somme des aires des trois carrés gris est égale à la somme des aires des deux carrés blancs » se traduit par l'égalité : $3n^2 - 6n + 5 = 2n^2 + 6n + 5$.

Ou encore : $3n^2 - 2n^2 - 6n - 6n = 0$.

Soit : $n^2 - 12n = 0$.

Résoudre le problème revient donc à résoudre l'équation $n^2 - 12n = 0$.

Remarque

Le vocabulaire utilisé pour cette question pourrait laisser penser que le problème « recherche des cinq carrés » est équivalent au problème « résolution de l'équation $n^2 - 12n = 0$ », alors qu'il n'en est rien comme le prouvent les questions suivantes.

2) Solutions de l'équation $n^2 - 12n = 0$

Après factorisation par n , l'équation $n^2 - 12n = 0$ s'écrit : $n \times (n - 12) = 0$.

Un produit de facteurs est nul si, et seulement si, l'un au moins de ses facteurs est nul.

Ainsi le produit $n \times (n - 12)$ est nul si et seulement si : soit $n = 0$, soit $n - 12 = 0$.

Les solutions de l'équation $n^2 - 12n = 0$ sont donc $n = 0$ et $n = 12$.

3) Les solutions à retenir

La solution de l'équation $n = 0$ ne peut pas donner une solution au problème des cinq carrés.

En effet les mesures des côtés des carrés sont à chercher parmi les nombres positifs.

Or $n - 1$ et $n - 2$ sont (strictement) négatifs dans le cas $n = 0$.

La solution de l'équation $n = 12$ donne une solution au problème des cinq carrés.

En effet les nombres entiers $12 - 2, 12 - 1, 12, 12 + 1$ et $12 + 2$ sont consécutifs et positifs.

On peut également vérifier que : $10^2 + 11^2 + 12^2 = 100 + 121 + 144 = 365$.
D'autre part, on a : $13^2 + 14^2 = 169 + 196 = 365$.

Ceci prouve que le quintuplet (10, 11, 12, 13, 14) est solution du problème des cinq carrés.

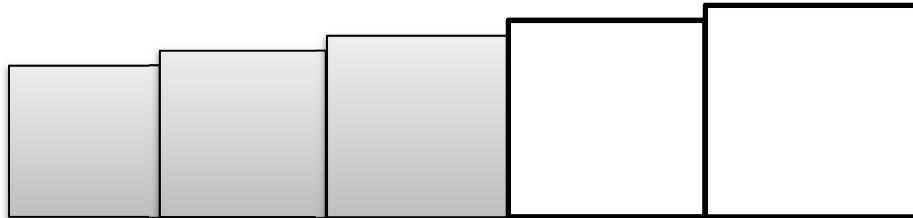
4) Figure à l'échelle $\frac{1}{5}$

Les mesures des côtés des carrés solutions sont, en centimètres : 10, 11, 12, 13 et 14.

À l'échelle $\frac{1}{5}$, les mesures des côtés des représentants des carrés solutions sont, en centimètres :

$$10 \times \frac{1}{5} = 2 ; \quad 11 \times \frac{1}{5} = 2,2 ; \quad 12 \times \frac{1}{5} = 2,4 ; \quad 13 \times \frac{1}{5} = 2,6 \text{ et } 14 \times \frac{1}{5} = 2,8.$$

Ce qui donne la figure suivante :



C - Situation des sept carrés

1) Interprétation graphique

Résoudre le problème des sept carrés revient à identifier le(s) nombre(s) entiers x pour lesquels il y a égalité des sommes des aires des carrés gris et des carrés blancs (exprimées en fonction de x). Ceci revient à résoudre l'équation $4x^2 - 36x + 86 = 3x^2 - 6x + 5$ et à ne considérer que les solutions x_0 telles que les nombres $(x_0 - 6, x_0 - 5, x_0 - 4, x_0 - 3, x_0 - 2, x_0 - 1, x_0)$ sont des entiers naturels consécutifs.

Or, résoudre l'équation $4x^2 - 36x + 86 = 3x^2 - 6x + 5$ revient à résoudre l'équation $f(x) = g(x)$, ce qui, graphiquement, revient à regarder si les courbes représentatives des fonctions f et g se coupent en un point dont l'abscisse est un nombre entier positif plus grand que 6 (pour que $x - 6$ soit positif).

Sur le graphique présenté, les courbes se coupent en deux points, l'un ayant une abscisse comprise entre 2 et 4 et l'autre ayant une abscisse comprise entre 26 et 28 (et qui semble être 27).

Ainsi, la situation des sept carrés semble avoir au moins une solution.

2) Vérification

Pour $x = 27$, les nombres entiers (20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27) sont consécutifs.

De plus : $21^2 + 22^2 + 23^2 + 24^2 = 2030$ et $25^2 + 26^2 + 27^2 = 2030$.

Ceci prouve que l'heptuplet (20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27) est solution du problème des sept carrés.

D - Situation des carrés

1) Feuilles de calculs

Dans chacune des feuilles de calcul la colonne A donne des valeurs pour le côté du premier carré (sous-entendu le plus petit). La colonne B donne l'aire du premier carré. La colonne C donne l'aire du second carré, calculé à partir de la mesure de son côté obtenu comme la mesure du côté du petit carré à laquelle on a ajouté 1. Et ainsi de suite jusqu'à la colonne E.

Dans la feuille de calcul A, on regarde la ligne 2, et sur cette ligne, on se concentre sur la cellule F2. L'aire de la partie grise (F2) est obtenue comme somme des valeurs des cellules B2 (aire du premier carré) et E3 (aire du 4^{ème} carré). Ainsi, cette feuille de calcul est associée au cas 1.

Par déduction, la feuille A correspond au cas 1 et la feuille B correspond au cas 2.

Remarque

Il n'est pas utile de vérifier précisément que la feuille B correspond au cas 2, mais pour se rassurer on peut vérifier qu'effectivement dans le cas de feuille B, la cellule F2 correspond à la somme des cellules B2, C2 et D2.

2) a) Pour la feuille de calcul A, formule de la cellule E2

Pour calculer l'aire du quatrième carré (colonne E) à partir de la longueur du côté du premier (colonne A), il faut connaître la longueur du côté du quatrième carré. Or la longueur du côté du deuxième carré est obtenue en ajoutant 1 à celle du premier, puis celle du troisième carré en ajoutant 1 à celle du deuxième,... La longueur du côté du quatrième carré est donc obtenue en ajoutant 3 à celle du premier carré. Les formules suivantes pourraient convenir :

$$\begin{aligned} &= (A2+3)*(A2+3) \\ &= (A2+3)^2 \\ &= (\$A2+3)*(\$A2+3) \\ &= (\$A2+3)^2 \\ &= (\$A2+3)*(A2+3) \\ &= (A2+3)*(\$A2+3) \end{aligned}$$

Remarque

On pourrait également envisager les formules obtenues en remplaçant A2+3 par D2+1 ou C2+2 ou B2+1 dans les formules ci-dessus. Bien entendu, ces dernières formules ne sont valables que si les cases B2, C2 et/ou D2 sont renseignées correctement en référence à la cellule A2.

2) b) Pour la feuille de calcul A, formule de la cellule F2

La colonne F présente les résultats des sommes des aires deux carrés grisés, c'est-à-dire des aires du premier et du quatrième carré.

Les formules suivantes pourraient convenir :

$$\begin{aligned} &= B2+E2 \\ &= \$B2+\$E2 \\ &= B2+\$E2 \\ &= \$B2+E2 \end{aligned}$$

Remarque

On pourrait envisager beaucoup d'autres formules valables mais celles présentées sont les formules les plus cohérentes.

3) Conjectures

Pour la feuille de calcul A qui correspond au cas 1, on remarque que sur les valeurs données, il y a un écart constant de 4 unités d'aire entre l'aire de la partie grise et l'aire de la partie blanche.

Conjecture 1 : la différence entre l'aire de la partie grise et l'aire de la partie blanche est constante égale à 4 cm^2 donc le problème des carrés (cas 1) n'admet pas de solution.

Pour la feuille de calcul B qui correspond au cas 2.

L'aire de la partie grise est une fonction croissante du côté du plus petit carré.

L'aire de la partie grise est une fonction croissante du côté du plus petit carré.

Pour $n = 1$, l'aire de la partie grise est plus petite que l'aire de la partie blanche.

Pour $n = 2$, l'aire de la partie grise est plus grande que l'aire de la partie blanche.

Pour les valeurs plus grandes de n , l'aire de la partie grise est toujours plus grande que l'aire de la partie blanche.

Conjecture 2 : le problème des carrés (cas 2) n'admet pas de solution.

4) Démonstration

On appelle n la longueur en cm du côté du plus petit carré (n est un nombre entier naturel).

Cas 1

L'aire de la partie grise vaut : $n^2 + (n+3)^2 = n^2 + n^2 + 6n + 9 = 2n^2 + 6n + 9$.

L'aire de la partie blanche vaut : $(n+1)^2 + (n+2)^2 = n^2 + 2n + 1 + n^2 + 4n + 4 = 2n^2 + 6n + 5$.

La différence des deux aires vaut : $(2n^2 + 6n + 9) - (2n^2 + 6n + 5) = 4$.

Ainsi, quelle que soit la valeur de n , la différence est constante et toujours égale à 4.

La conjecture 1 est démontrée. Le problème des carrés (cas 1) n'admet pas de solution.

Cas 2

L'aire de la partie grisée vaut :

$$n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 = n^2 + (n^2 + 2n + 1) + (n^2 + 4n + 4) = 3n^2 + 6n + 5.$$

L'aire de la partie blanche vaut : $(n+3)^2 = n^2 + 6n + 9$.

Méthode 1 : à partir de l'égalité entre les aires

On cherche n , s'il existe, tel que les deux aires sont égales, c'est-à-dire pour lesquels :

$$(3n^2 + 6n + 5) = (n^2 + 6n + 9)$$

Cette équation est équivalente à : $2n^2 - 4 = 0$.

Ou encore à : $n^2 - 2 = 0$.

Cette équation possède deux solutions $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$, mais aucune d'entre elles n'est un entier naturel. Par conséquent cette équation ne donne pas de solution dans l'ensemble des entiers naturels.

La conjecture 2 est démontrée. Le problème des carrés (cas 2) n'admet pas de solution.

Méthode 2 : à partir de la différence entre les aires

La différence des deux aires vaut : $(3n^2 + 6n + 5) - (n^2 + 6n + 9) = 2n^2 - 4$.

L'égalité des aires des surfaces grises et blanches est obtenue lorsque cette différence est égale à 0, c'est-à-dire pour les entiers n tels que : $2n^2 - 4 = 0$.

Soit lorsque : $n^2 = 2$.

Or cette équation ne donne pas de solution dans l'ensemble des entiers naturels, donc de tels entiers n n'existent pas.

La conjecture 2 est démontrée. Le problème des carrés (cas 2) n'admet pas de solution.

DEUXIEME PARTIE

EXERCICE 1

Affirmation 1

Pour pouvoir comparer le pourcentage de tablettes défectueuses pour chaque société, il est nécessaire de connaître pour chacune d'entre elles le nombre total d'appareils défectueux (de types Electrix et Tronix) ainsi que le nombre total de tablettes que ces sociétés fabriquent.

Calcul du nombre de tablettes par société

En reprenant les tableaux de l'énoncé :

Société 1	Nombre de tablettes (par jour)	Pourcentage moyen de tablettes défectueuses	Nombre moyen de tablettes défectueuses
Type Electrix	2 000	5 %	$2\ 000 \times \frac{5}{100} = 100$
Type Tronix	70 00	2 %	$7\ 000 \times \frac{2}{100} = 140$

Au total, la société 1 fabrique 9000 tablettes ($2\ 000 + 7\ 000 = 9\ 000$) par jour. Parmi ces tablettes, 240 en moyenne sont défectueuses ($100 + 140 = 240$).

Société 2	Nombre de tablettes (par jour)	Pourcentage moyen de tablettes défectueuses	Nombre moyen de tablettes défectueuses
Type Electrix	6 000	3 %	$6\ 000 \times \frac{3}{100} = 180$
Type Tronix	1 000	2 %	$1\ 000 \times \frac{2}{100} = 20$

Au total, la société 2 fabrique 7 000 tablettes ($6\ 000 + 1\ 000 = 7\ 000$) par jour.

Parmi ces tablettes, 200 en moyenne sont défectueuses ($180 + 20 = 200$).

Calcul du pourcentage de tablettes défectueuses par société

Méthode 1 : mise en œuvre du produit en croix

On exprime les données relatives à chacune des sociétés dans un tableau de proportionnalité :

Société 1		Société 2	
Nombre de tablettes	Nombre moyen de tablettes défectueuses	Nombre de tablettes	Nombre moyen de tablettes défectueuses
9 000	240	7 000	200
100	$\frac{240 \times 100}{9\ 000} \approx 2,67$ (par excès au centième près)	100	$\frac{200 \times 100}{7\ 000} \approx 2,85$ (par défaut au centième près)

Ainsi le pourcentage moyen d'appareils défectueux est d'au plus 2,67 % pour la société 1, alors qu'il est d'au moins 2,85 % pour la société 2. Par conséquent, ce pourcentage est le plus faible pour la société 1.

L'affirmation 1 est donc vraie.

Méthode 2 : calculs directs

Chaque jour, la société 1 constate en moyenne 240 appareils défectueux sur les 9 000 fabriqués, ce qui représente le pourcentage moyen suivant (valeur approchée par excès au centième près) :

$$\frac{240}{9\ 000} \times 100 \approx 2,67$$

Chaque jour, la société 2 constate en moyenne 200 appareils défectueux sur les 7 000 fabriqués, ce qui représente le pourcentage moyen suivant (valeur approchée par défaut au centième près) :

$$\frac{200}{7\ 000} \times 100 \approx 2,85$$

Ainsi le pourcentage moyen d'appareils défectueux est d'au plus 2,67 % pour la société 1, alors qu'il est d'au moins 2,86 % pour la société 2. Par conséquent, ce pourcentage est le plus faible pour la société 1.
L'affirmation 1 est donc vraie.

Affirmation 2

Méthode 1 : exhibition d'un contre-exemple à partir de la longueur de l'arête

Si la longueur de l'arête du cube est égale à 1 cm, l'aire d'une face carrée de ce cube est alors égale à 1 cm². Par conséquent, l'aire de ce cube est égale à : $6 \times 1 \text{ cm}^2 = 6 \text{ cm}^2$.

Le volume de ce cube est de 1 cm³.

Ainsi pour une aire égale à 6 cm² le volume du cube est égal à 1 cm³.

Si la longueur du côté du carré est égale à 2 cm, l'aire d'une face carrée de ce cube est alors égale à 4 cm². Par conséquent, l'aire du cube est égale à : $6 \times 4 \text{ cm}^2 = 24 \text{ cm}^2$.

Le volume de ce cube est de 8 cm³.

Ainsi pour une aire égale à 24 cm², le volume du cube est égal à 8 cm³.

On en déduit que lorsqu'on a multiplié l'aire du cube par 4 (l'aire est passée de 6 cm² à 24 cm²), le volume du cube a été multiplié par 8 (le volume est passé de 1 cm³ à 8 cm³).

On en déduit que le volume du cube n'est pas proportionnel à son aire.

L'affirmation 2 est donc fausse.

Méthode 2 : mise en évidence du non respect de la propriété de linéarité multiplicative

On appelle x cm² l'aire du cube. On en déduit que l'aire d'une des faces du cube est égale à : $\frac{x}{6}$ cm².

Donc la longueur d'une arête est égale à : $\sqrt{\frac{x}{6}}$ cm.

On en déduit le volume du cube : $\left(\sqrt{\frac{x}{6}}\right)^3$ cm³.

Si l'aire du cube est multipliée par deux, alors l'aire d'une des faces de ce cube est égale à : $\frac{2 \times x}{6}$ cm².

La longueur d'une arête est alors égale à : $\sqrt{\frac{2 \times x}{6}}$ cm et le volume du cube devient :

$$\left(\sqrt{\frac{2 \times x}{6}}\right)^3 \text{ cm}^3 = \left(\sqrt{2} \times \sqrt{\frac{x}{6}}\right)^3 \text{ cm}^3 = (\sqrt{2})^3 \times \left(\sqrt{\frac{x}{6}}\right)^3 \text{ cm}^3.$$

Or : $(\sqrt{2})^3 = 2\sqrt{2}$.

Par conséquent le volume du cube est multiplié par $2\sqrt{2}$ (et non pas par 2). On en déduit que le volume du cube n'est pas proportionnel à son aire.

L'affirmation 2 est donc fausse.

Méthode 3 : explicitation de la fonction qui associe le volume du cube à son aire

En reprenant les notations de la méthode 2, on exprime le volume du cube (exprimé en cm³) en fonction de son aire (exprimée en cm²) notée x . Notons f cette fonction : $f(x) = \left(\sqrt{\frac{x}{6}}\right)^3$. Cette fonction n'est pas une fonction linéaire puisqu'elle ne s'écrit pas sous la forme : $f(x) = a \times x$ (où a désigne un nombre réel).

Remarque

Pour justifier que f n'est pas une fonction linéaire, on peut aussi montrer que f ne vérifie pas la propriété multiplicative de linéarité en montrant par exemple que : $f(2 \times x) \neq 2 \times f(x)$ (on pourra se référer aux calculs de la méthode 2).

Par conséquent la situation représentée par cette fonction n'est pas une situation de proportionnalité.

L'affirmation 2 est donc fausse.

Affirmation 3*Méthode 1 : calculs avec conversion des mesures en L*Puisque $1 \text{ dm}^3 = 1 \text{ L}$, on peut exprimer la capacité du récupérateur d'eau en L :

$$0,3 \text{ m}^3 = 0,3 \times 1000 \text{ dm}^3 = 300 \text{ L}$$

Nous savons qu'il faut 15 L d'eau pour arroser 1 m^2 .Pour arroser un potager de 5 m^2 , il faut donc : $5 \times 15 \text{ L} = 75 \text{ L}$.Or : $300 \text{ L} = 4 \times 75 \text{ L}$.

Par conséquent, il est possible d'arroser quatre fois le potager avec l'eau du récupérateur.

L'affirmation 3 est donc vraie.*Méthode 2 : calculs avec conversion des mesures en dm^3* Nous savons qu'il faut 15 L d'eau pour arroser 1 m^2 . Puisque $1 \text{ dm}^3 = 1 \text{ L}$, on a : $15 \text{ L} = 15 \text{ dm}^3$.Pour arroser un potager de 5 m^2 , il faut donc : $5 \times 15 \text{ dm}^3 = 75 \text{ dm}^3$.Par ailleurs : $0,3 \text{ m}^3 = 300 \text{ dm}^3 = 4 \times 75 \text{ dm}^3$.

Par conséquent, il est possible d'arroser quatre fois le potager avec l'eau du récupérateur.

L'affirmation 3 est donc vraie.*Méthode 3 : calculs avec conversion des mesures en m^3* Nous savons qu'il faut 15 L d'eau pour arroser 1 m^2 .Donc, pour arroser une fois le potager, il faut : $5 \times 15 \text{ L} = 75 \text{ L}$.Pour l'arroser 4 fois il faut alors : $4 \times 75 \text{ L} = 300 \text{ L}$.Or : $300 \text{ L} = 300 \text{ dm}^3 = 0,3 \text{ m}^3$.

Par conséquent, il est possible d'arroser quatre fois le potager avec l'eau du récupérateur.

L'affirmation 3 est donc vraie.**Affirmation 4***Méthode 1 : utilisation d'une identité remarquable*Puisque $A = 7 + \frac{2}{10}$, on a :

$$A^2 = \left(7 + \frac{2}{10}\right)^2 = 7^2 + 2 \times 7 \times \frac{2}{10} + \left(\frac{2}{10}\right)^2 = 49 + \frac{28}{10} + \frac{4}{100} = 49 + \left(2 + \frac{8}{10}\right) + \frac{4}{100}.$$

On en déduit que la partie décimale de A est égale à : $\frac{8}{10} + \frac{4}{100}$.**Par conséquent, l'affirmation 4 est fausse.***Méthode 2 : calculs*On sait que : $A = 7 + \frac{2}{10} = 7,2$.On calcule alors : $A^2 = 51,84$.La partie décimale de A^2 est donc égale à : $0,84 = \frac{84}{100}$.**Par conséquent, l'affirmation 4 est fausse.**

EXERCICE 2

1) a) Nombre de fois où Inès a obtenu le nombre 6

Les occurrences des nombres de 1 à 5 sont données dans le tableau : $30 + 41 + 32 + 28 + 31 = 162$.
Puisqu’Inès a lancé 200 fois le dé, le nombre d’occurrences du nombre 6 est alors : $200 - 162 = 38$.
Inès a obtenu 38 fois le nombre 6.

1) b) Fréquence d’apparition du nombre 1

Méthode 1 : utilisation du « produit en croix »

<i>Nombre d’apparitions du chiffre « 1 »</i>	<i>Nombre total de lancers</i>
30	200
$\frac{30 \times 100}{200} = 15$	100

La fréquence d’apparition du nombre 1 est de 15 %.

Méthode 2 : mise en œuvre de la propriété de linéarité multiplicative

Nous savons que pour 200 lancers, le nombre 1 est apparu 30 fois.

Par conséquent pour 100 lancers (deux fois moins), le nombre 1 devrait apparaître deux fois moins, soit 15 fois.

La fréquence d’apparition du nombre 1 est de 15 %.

Méthode 3 : calcul direct

Nous savons que le nombre 1 est apparu 30 fois sur 200 lancers.

Sa fréquence d’apparition est donc : $\frac{30}{200} = 0,15$.

La fréquence d’apparition du nombre 1 est de 15 %.

2) a) Probabilité d’obtenir deux nombres dont le produit est égal à 9

Méthode 1 : exploration de tous les possibles

Le tableau suivant présente tous les produits possibles selon les différents jets de dés.

<i>Produit des deux nombres</i>	<i>Premier dé</i>					
	1	2	3	4	5	6
<i>Deuxième dé</i>	1	2	3	4	5	6
	2	4	6	8	10	<u>12</u>
	3	6	<u>9</u>	<u>12</u>	15	18
	4	8	<u>12</u>	16	20	24
	5	10	15	20	25	30
	6	<u>12</u>	18	24	30	36

Ce tableau compte 36 cases. Une seule case (grise) fait apparaître le nombre 9 : elle correspond au jet de dés « 3 » et « 3 ».

On en déduit que la probabilité d’obtenir deux nombres dont le produit est égal à neuf est de $\frac{1}{36}$.

Méthode 2 : calcul direct de la probabilité

On étudie la décomposition du nombre 9 en produits de deux facteurs : $9 = 1 \times 9 = 9 \times 1 = 3 \times 3$.

Un seul de ces produits met en jeu des nombres inférieurs ou égaux à 6. Les deux dés étant équilibrés, chaque jet de dé est equiprobable, avec une probabilité égale à : $\frac{1}{6}$.

Par conséquent, la probabilité d'obtenir « 3 » avec chacun des dés est de $\frac{1}{6}$.

On en déduit que la probabilité d'obtenir « 3 » et « 3 » est égale à : $\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$.

La probabilité d'obtenir deux nombres dont le produit est égal à neuf est de $\frac{1}{36}$.

2) b) Probabilité d'obtenir deux nombres dont le produit est égal à 12

Méthode 1 : exploration de tous les possibles

En reprenant le tableau des possibles élaboré dans la méthode 1 de la question précédente, on constate quatre cases faisant apparaître le nombre 12 (souligné). Il y a donc 4 chances sur 36 cas possibles.

On en déduit que la probabilité d'obtenir deux nombres dont le produit est égal à douze est de :

$$\frac{4}{36} = \frac{1}{9}.$$

Méthode 1 bis : calcul de la probabilité à partir de l'exploration de tous les possibles

En reprenant le tableau des possibles élaboré dans la méthode 1 de la question précédente, on constate quatre cases faisant apparaître le nombre 12 (souligné). Chaque case du tableau a une probabilité de réalisation de $\frac{1}{36}$.

On en déduit que la probabilité d'obtenir deux nombres dont le produit est égal à douze est de :

$$4 \times \frac{1}{36} = \frac{1}{9}.$$

Méthode 2 : calcul direct de la probabilité

On étudie la décomposition de 12 en produits de deux facteurs inférieurs ou égaux à 6 :

$$12 = 2 \times 6 = 6 \times 2 = 3 \times 4 = 4 \times 3.$$

Quatre décompositions multiplicatives sont possibles, soit quatre jets des deux dés. Les deux dés étant équilibrés, chaque jet de dé a une probabilité égale à : $\frac{1}{6}$.

On en déduit que la probabilité d'obtenir deux nombres dont le produit est égal à douze est de :

$$\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = 4 \times \frac{1}{36} = \frac{1}{9}.$$

Méthode 2 bis : calcul direct de la probabilité

On étudie la décomposition de 12 en produits de deux facteurs inférieurs ou égaux à 6 :

$$12 = 2 \times 6 = 6 \times 2 = 3 \times 4 = 4 \times 3.$$

Quatre décompositions multiplicatives sont possibles, soit quatre jets des deux dés. Les deux dés étant équilibrés, chaque jet de deux dés est equiprobable, avec une probabilité égale à : $\frac{1}{36}$.

On en déduit que la probabilité d'obtenir deux nombres dont le produit est égal à douze est de :

$$4 \times \frac{1}{36} = \frac{1}{9}.$$

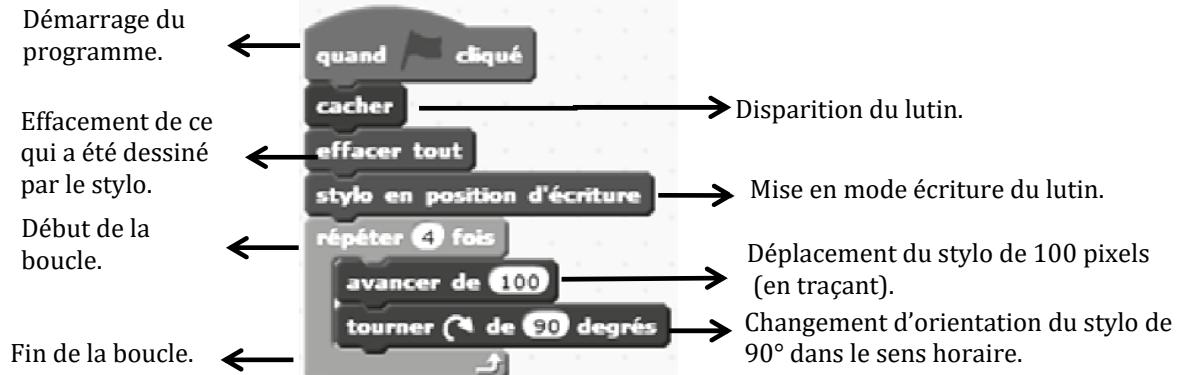
EXERCICE 3

1) Nature de la figure tracée en exécutant le programme A

Remarque

Ni le détail des actions réalisées par le programme, ni les justifications n'étaient attendus. Nous les donnons ici pour une meilleure compréhension du candidat.

Dans le programme A, les instructions du langage Scratch correspondent aux actions suivantes :

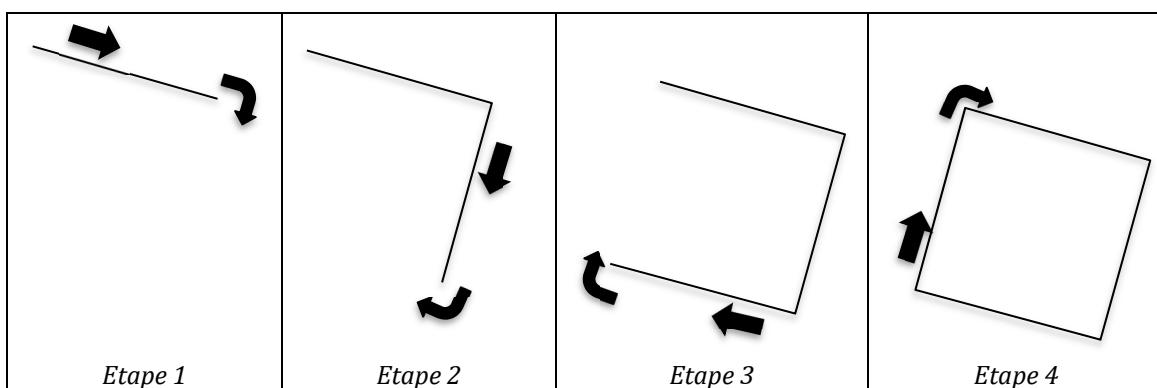


Par conséquent, après avoir fait disparaître le lutin, le programme fait tracer un segment de 100 pixels de longueur avant d'orienter le stylo à 90° dans le sens horaire (*étape 1*).

Un deuxième segment est alors tracé (faisant donc un angle droit avec le précédent) et le stylo orienté à 90° dans le sens horaire (*étape 2*).

Puis un troisième segment est tracé (faisant de même un angle droit avec le deuxième) et le stylo orienté à 90° dans le sens horaire (*étape 3*)

Enfin un quatrième segment est tracé (faisant un angle droit avec le troisième) et le stylo orienté de nouveau à 90° dans le sens horaire (*étape 4*). Alors le stylo retrouve sa position initiale ($4 \times 90^\circ = 360^\circ$).

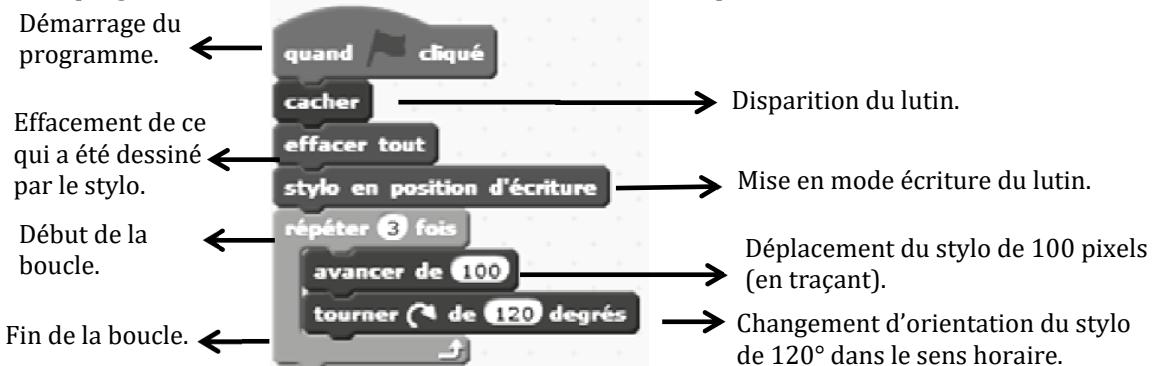


Le polygone ainsi tracé est alors un quadrilatère dont les côtés sont de même longueur et qui possède quatre angles droits.

On en déduit que le programme A fait tracer un carré de 100 pixels de côté.

Nature de la figure tracée en exécutant le programme B

Dans le programme B, les instructions du langage *Scratch* correspondent aux actions suivantes :

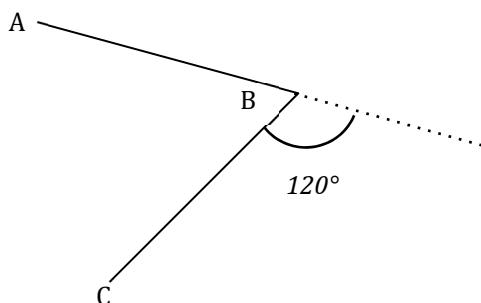


On en déduit qu'après avoir fait disparaître le lutin et effacé ce qui a été précédemment tracé, le programme fait tracer un segment de 100 pixels de longueur avant d'orienter le stylo à 120° dans le sens horaire (*étape 1*).

Un deuxième segment est alors tracé (faisant donc un angle de 120° avec le précédent) et le stylo orienté à 120° dans le sens horaire (*étape 2*).

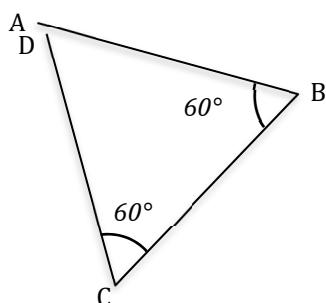
Enfin un troisième segment est tracé (faisant de même un angle de 120° avec le deuxième) et le stylo orienté à 120° dans le sens horaire (*étape 3*). Alors le stylo retrouve sa position initiale ($3 \times 120^\circ = 360^\circ$).

Pour plus de précision, on peut comprendre le script scratch de la manière suivante : le programme fait tracer deux segments successifs de même longueur (100 pixels) formant un angle obtus de 120° . Notons-les [AB] et [BC] comme sur la figure ci-dessous.



L'angle aigu \widehat{ABC} est alors égal à : $180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.

Par conséquent, le troisième segment tracé par le programme (appelons-le [CD]) est tel que $CD = AB$ et tel que l'angle aigu \widehat{BCD} est aussi égal à 60° .



Or par construction le triangle ABC est isocèle en B ($AB = BC$), par conséquent $\widehat{BAC} = \widehat{BCA} = 60^\circ$.

On en déduit que ce triangle est équilatéral.

Par ailleurs : $\widehat{BCA} = 60^\circ = \widehat{BCD}$.

Donc A et D sont alignés.

Puisque $CD = BC$ et que $BC = CA$, alors $CD = CA$. On en déduit alors que $D = A$.

Ainsi le programme B fait tracer un triangle équilatéral de 100 pixels de côté.

2) a) Calcul de la mesure de l'angle \widehat{FBC}

Par hypothèse, ABCDE est un pentagone régulier. Par conséquent tous ses angles sont égaux (par exemple égaux à \widehat{CBA}) et leur somme vaut : $180^\circ \times 5 - 360^\circ = 900^\circ - 360^\circ = 540^\circ$.

On en déduit : $5 \times \widehat{CBA} = 540^\circ$.

Soit : $\widehat{CBA} = 540^\circ \div 5 = 108^\circ$.

D'autre part, le point F appartient à la droite (AB) qui n'appartient pas à la demi-droite [BA].

Alors : $\widehat{FBA} = 180^\circ$.

Or : $\widehat{FBA} = \widehat{FBC} + \widehat{CBA}$.

On en déduit l'égalité : $180^\circ = 108^\circ + \widehat{FBC}$.

D'où : $\widehat{FBC} = 180^\circ - 108^\circ = 72^\circ$.

2) b) Modifications à apporter au programme A pour obtenir un pentagone régulier

Lorsque le stylo trace le segment [AB].

Pour que la figure tracée soit un pentagone régulier, il faut que :

- tous ses côtés soient de même longueur : il suffira donc de conserver dans le programme l'instruction :



- le stylo tourne de 72° dans le sens horaire (d'après la question précédente), ce qui correspond à l'instruction :



Pour que la figure tracée soit un pentagone, il est nécessaire de tracer 5 côtés : ainsi les deux instructions précédentes devront être répétées cinq fois, soit le bloc :

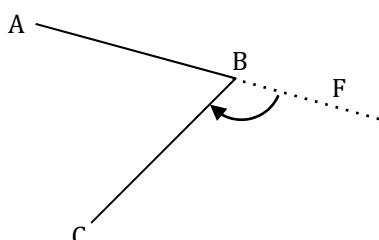


Le programme modifié sera alors le suivant :



3) Identification du programme permettant de tracer un polygone régulier dont l'utilisateur choisit le nombre de côtés

Dans tout ce qui suit, n désigne le nombre de côtés indiqués par l'utilisateur (n doit être un entier naturel supérieur ou égal à 3, nombre minimum de côtés pour que la ligne brisée forme un polygone). En reprenant les notations de la question 2, on notera [AB] et [BC] les deux premiers segments tracés par le programme, ainsi que F un point de la droite (AB) n'appartenant pas à demi-droite [BA] :



Méthode 1 : identification des conditions à respecter pour que le programme convienne

Condition (1)

Pour que le programme convienne, il faut tout d'abord que le nombre de segments tracés soit le nombre n choisi par l'utilisateur. Cette valeur, stockée dans la variable **réponse**, doit donc apparaître dans la boucle « Répéter \circ fois ».

Par conséquent, pour que la condition (1) soit vérifiée, il faut que la boucle suivante apparaisse dans le programme :



Cette boucle apparaît dans les programmes 2, 3 et 4, mais pas dans le programme 1, ce qui élimine celui-ci.

Condition (2)

Pour que le programme permette d'obtenir un polygone régulier à n côtés, il est nécessaire que les n segments tracés soient de même longueur. Cette condition est vérifiée dans tous les programmes puisque l'instruction **avancer de 10** figure dans chacune des boucles.

Remarque

Dans le programme 3, l'ordre des instructions dans la boucle est différent des autres programmes (on tourne le stylo puis on avance) mais cela ne change rien à la structure du programme.

Condition (3)

La condition (3) fait référence à la propriété admise : « dans un polygone régulier à n côtés, l'angle \widehat{FBC} est égal à $\frac{360^\circ}{n}$ ». La condition (3) correspond donc à l'égalité suivante : $\widehat{FBC} = \frac{360^\circ}{n}$.

L'instruction **tourner (de degrés)** désigne l'angle \widehat{FBC} .

Par conséquent, pour que la condition (3) soit vérifiée, il faut que l'instruction suivante apparaisse dans le programme :

Cette instruction apparaît uniquement dans le programme 2, ce qui élimine les programmes 1, 3 et 4 :

- dans les programmes 1 et 4, l'instruction **tourner (de 180 / réponse) degrés** fait dépendre l'angle du nombre de côtés choisi, mais ne fait pas tourner le lutin du bon angle ;
- dans le programme 2, l'instruction **tourner (de 360 / 10 degrés)** ne fait pas dépendre l'angle du nombre de côtés choisi.

Le programme 1 ne convient pas parce qu'il ne respecte ni la condition (1), ni la condition (3).

Les programmes 3 et 4 ne conviennent pas parce qu'ils ne respectent pas la condition (3).

Le programme 2 respecte toutes les conditions. Par ailleurs, puisque l'un des programmes doit convenir, ce doit être le programme 2.

Méthode 2 : analyse de chacun des programmes

Analyse du programme 1

Dans le programme 1, on analyse le bloc suivant :



Ce bloc fait tracer :

- **dix segments** consécutifs quel que soit n le nombre de segments choisi par l'utilisateur;
- des segments formant un angle de $\frac{180^\circ}{n}$ dans le sens horaire avec les segments précédemment tracés.

Méthode 2.1 : mise en évidence d'une figure n'ayant pas n côtés

Si l'utilisateur souhaite tracer un dodécagone en entrant la valeur « 12 », la boucle permettant de tracer les segments doit être répétée douze fois. Or le programme 1 fait toujours répéter la boucle dix fois.

Ne faisant pas tracer le nombre de segments souhaités, le programme 1 ne convient pas.

Méthode 2.2 : mise en évidence d'une figure ne vérifiant pas la propriété de l'angle \widehat{FBC}

Si l'utilisateur entre la valeur « 3 », le programme fait calculer : $\widehat{FBC} = \frac{180^\circ}{n} = 60^\circ$.

$$\text{Or : } \frac{360^\circ}{3} = 120^\circ.$$

L'angle \widehat{FBC} ne vérifie donc pas la propriété admise « dans un polygone régulier à n côtés, $\widehat{FBC} = \frac{360^\circ}{n}$ ».

Par conséquent le programme 1 ne convient pas.

Méthode 2.3 : mise en évidence d'une figure dont les angles ne correspondent pas à ceux attendus

Si l'utilisateur entre la valeur « 3 », cela signifie qu'il souhaite un triangle équilatéral.

Le programme fait calculer : $\widehat{FBC} = \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$.

$$\text{Donc : } \widehat{ABC} = 180^\circ - \widehat{FBC} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ.$$

Or dans un triangle équilatéral, tous les angles sont égaux à 60° . La figure tracée n'est par conséquent pas un triangle équilatéral.

Ne faisant pas tracer la figure souhaitée, le programme 1 ne convient pas.

Méthode 2.4 : mise en évidence d'une figure ne vérifiant pas la propriété sur la somme des angles

Si l'utilisateur entre la valeur « 3 », le programme fait calculer : $\widehat{FBC} = \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$.

$$\text{Donc : } \widehat{ABC} = 180^\circ - \widehat{FBC} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ.$$

Or : $3 \times \widehat{ABC} = 360^\circ$ et $180^\circ \times 3 - 360^\circ = 540^\circ - 360^\circ = 180^\circ$, donc : $3 \times \widehat{ABC} \neq 180^\circ \times 3 - 360^\circ$.

La propriété des angles d'un polygone régulier proposée en début d'exercice n'est donc pas vérifiée dans le cas $n = 3$.

Par conséquent le programme 1 ne convient pas.

Méthode 2.5 : démonstration dans le cas général en appui sur la propriété de l'angle \widehat{FBC}

Pour que le programme permette d'obtenir un polygone régulier à n côtés, il est nécessaire que l'angle \widehat{FBC} soit égal à $\frac{360^\circ}{n}$.

Or dans le programme 1 : $\widehat{FBC} = \frac{180^\circ}{n}$.

Ne vérifiant pas la propriété, le programme 1 ne convient pas.

Méthode 2.6 : démonstration dans le cas général en appui sur la propriété de la somme des angles

Pour que le programme permette d'obtenir un polygone régulier à n côtés, il est nécessaire que les n angles soient égaux, par exemple à \widehat{ABC} . La propriété explicitée en début d'exercice correspond alors à l'égalité suivante : $n \times \widehat{ABC} = 180^\circ \times n - 360^\circ$.

Or dans le programme 1 : $\widehat{FBC} = \frac{180^\circ}{n}$.

$$\text{Alors : } \widehat{ABC} = 180^\circ - \widehat{FBC} = 180^\circ - \frac{180^\circ}{n}.$$

$$\text{Donc : } n \times \widehat{ABC} = n \times \left(180^\circ - \frac{180^\circ}{n}\right) = n \times 180^\circ - n \times \frac{180^\circ}{n} = n \times 180^\circ - 180^\circ \neq 180^\circ \times n - 360^\circ.$$

Ne vérifiant pas la propriété des angles d'un polygone régulier, le programme 1 ne convient pas.

Analyse du programme 2

Dans le programme 2, on analyse le bloc suivant :



Ce bloc fait tracer n segments consécutifs de même longueur, formant un angle de $\frac{360^\circ}{n}$ avec les précédents.

$$\text{On obtient alors : } \widehat{FBC} = \frac{360^\circ}{n}.$$

Ainsi la propriété admise portant sur les angles \widehat{FBC} d'un polygone régulier est vérifiée.

Par conséquent, le programme 2 est celui qui convient.

Analyse du programme 3

Dans le programme 3, on analyse le bloc suivant :



Ce bloc fait tracer n segments consécutifs de même longueur, formant toujours le même angle avec les précédents, égal à : $\widehat{FBC} = \frac{360^\circ}{10} = 36^\circ$.

Méthode 2.7 : mise en évidence d'une figure ne vérifiant pas la propriété admise sur les angles \widehat{FBC}

Si l'utilisateur entre la valeur « 3 », \widehat{FBC} doit vérifier l'égalité suivante pour que le polygone obtenu soit régulier : $\widehat{FBC} = \frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$.

Or le programme impose : $\widehat{FBC} = 36^\circ$.

Ne conduisant pas aux angles souhaités, le programme 3 ne convient pas.

Méthode 2.8 : mise en évidence d'une figure dont les angles ne correspondent pas à ceux attendus

Si l'utilisateur entre la valeur « 3 », cela signifie qu'il souhaite un triangle équilatéral.

Le programme impose : $\widehat{FBC} = 36^\circ$, donc : $\widehat{ABC} = 180^\circ - \widehat{FBC} = 180^\circ - 36^\circ = 144^\circ$.

Or dans un triangle équilatéral $\widehat{ABC} = 60^\circ$.

Ne faisant pas tracer la figure souhaitée, le programme 3 ne convient pas.

Remarque :

La méthode 2.8 pourrait également déboucher sur des contradictions concernant la somme des angles dans un triangle ($3 \times 144^\circ > 180^\circ$), ou bien concernant la somme des angles dans un polygone régulier à trois côtés ($3 \times 144^\circ = 432^\circ \neq 180^\circ \times 3 - 360^\circ$).

Méthode 2.9 : mise en évidence d'une figure ne correspondant pas à celle attendue

Si l'utilisateur souhaite tracer un dodécagone, il entre la valeur « 12 ». La boucle se répète 12 fois, mais au bout de 10 répétitions, les segments se chevauchent. Ainsi, pour une valeur n supérieure ou égale à 10, le programme conduit à un décagone régulier de côté 10 pixels ($10 \times 144^\circ = 180^\circ \times 10 - 360^\circ$).

Ne faisant pas tracer la figure souhaitée, le programme 3 ne convient pas.

Méthode 2.10 : mise en évidence d'une figure ne correspondant pas à celle attendue

Si l'utilisateur souhaite tracer un carré, il entre la valeur « 4 ». La boucle se répète 4 fois, les angles étant tous de mesure 36° , en 4 répétitions, on obtient $4 \times 36^\circ = 144^\circ \neq 360^\circ$ donc la ligne brisée ne se referme pas.

Ne faisant pas tracer la figure souhaitée, le programme 3 ne convient pas.

Méthode 2.11 : démonstration dans le cas général en appui sur la propriété de l'angle \widehat{FBC}

Pour que le programme permette d'obtenir un polygone régulier à n côtés, il est nécessaire que l'angle \widehat{FBC} soit égal à $\frac{360^\circ}{n}$.

Or dans le programme 3 : $\widehat{FBC} = \frac{360^\circ}{10} = 36^\circ$.

Ne vérifiant pas la propriété, le programme 3 ne convient pas.

Méthode 2.12: démonstration dans le cas général en appui sur la propriété de la somme des angles

Pour que le programme permette d'obtenir un polygone régulier à n côtés, il est nécessaire que les n angles soient égaux, par exemple à \widehat{ABC} . La propriété sur la somme des angles d'un polygone régulier correspond alors à l'égalité suivante : $n \times \widehat{ABC} = 180^\circ \times n - 360^\circ$.

Or dans le programme 3 : $\widehat{FBC} = \frac{360^\circ}{10} = 36^\circ$.

Donc : $\widehat{ABC} = 180^\circ - \widehat{FBC} = 180^\circ - 36^\circ = 144^\circ$.

Alors : $n \times \widehat{ABC} = 144^\circ \times n$

Or l'égalité $144^\circ \times n = 180^\circ \times n - 360^\circ$ est équivalente à : $(180^\circ - 144^\circ) \times n = 360^\circ$

Ou encore à : $n = \frac{360^\circ}{36^\circ} = 10$.

Par conséquent la propriété sur la somme des angles n'est vérifiée que dans le cas où $n = 10$.

Par conséquent, le programme 3 ne convient pas dès que $n \neq 10$.

Analyse du programme 4

Dans le programme 4, on analyse le bloc suivant :



Ce bloc fait tracer n segments consécutifs de même longueur, et formant un angle de $\frac{180^\circ}{n}$ avec les précédents.

Méthode 2.13 : mise en évidence d'une figure ne correspondant pas à celle attendue

Si l'utilisateur entre la valeur « 6 », $\widehat{FBC} = \frac{180^\circ}{6} = 30^\circ$.

Or : $6 \times 30^\circ = 180^\circ < 360^\circ$.

On en déduit que le programme 4 conduit à **une ligne brisée non fermée**.

Par conséquent, le programme 4 ne convient pas.

Méthode 2.14 : mise en évidence d'une figure dont les angles ne correspondent pas à ceux attendus

Si l'utilisateur entre la valeur « 3 », cela signifie qu'il souhaite un triangle équilatéral.

Le programme fait calculer : $\widehat{FBC} = \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$.

Donc : $\widehat{ABC} = 180^\circ - \widehat{FBC} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.

Or dans un triangle équilatéral $\widehat{ABC} = 60^\circ$.

Ne faisant pas tracer la figure souhaitée, le programme 4 ne convient pas.

Remarque

La méthode 2.14 pourrait également déboucher sur des contradictions concernant la somme des angles dans un triangle ($3 \times 120^\circ > 180^\circ$), ou bien concernant la somme des angles dans un polygone régulier à trois côtés ($3 \times 120^\circ = 360^\circ \neq 180 \times 3 - 360^\circ$).

Méthode 2.15 : démonstration dans le cas général

Le programme 4 impose $\widehat{FBC} = \frac{180^\circ}{n}$.

Or nous avons admis (voir méthode 2.5) que pour un polygone régulier : $\widehat{FBC} = \frac{360^\circ}{n}$.

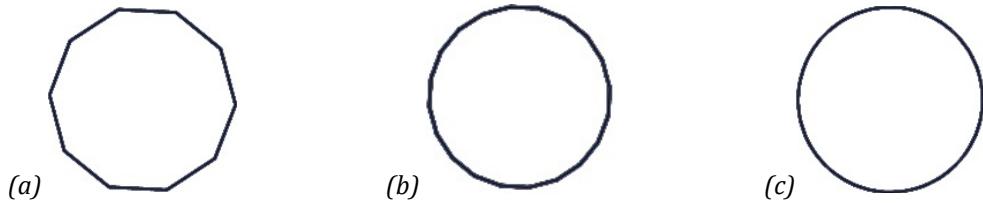
Par conséquent, le programme 4 ne convient pas.

Remarque

A partir du calcul de \widehat{FBC} , on pourrait également raisonner sur la somme des angles dans le polygone (voir méthode 2.6).

4) Construction d'une figure ayant l'apparence d'un cercle

Un polygone régulier peut prendre l'apparence d'un cercle sur l'écran à condition qu'il possède un « grand nombre » de côtés. On peut donc utiliser le programme 2 précédent en choisissant n « suffisamment grand ». Par exemple, les figures (a), (b) et (c) suivantes présentent le polygone avec respectivement $n = 10$, $n = 20$ et $n = 100$.



TROISIÈME PARTIE

SITUATION 1

1) Usage du nombre mobilisé dans cette situation

Pour réussir la tâche, les élèves doivent réaliser une collection *équipotente* à la collection de places vides (avec autant d'éléments). L'usage du nombre permettrait de mémoriser la quantité de places vides (aspect cardinal) et conduirait l'élève à ne faire qu'un seul voyage.

On peut donc supposer que la réponse attendue à cette question est la suivante : **l'usage du nombre comme mémoire de la quantité est mobilisé dans cette situation.**

Cependant la contrainte portant sur le nombre de voyages n'est pas donnée dans la consigne. Ainsi l'élève n'est pas obligé d'utiliser une procédure numérique dans cette situation (par exemple la procédure de l'élève C donne la réponse exacte mais l'élève exécute une correspondance terme à terme qui se passe du concept de nombre).

2) Intérêt du quai

La présence du quai accompagnée de l'*obligation d'y déposer les voyageurs avant de les faire monter à bord* conduit les élèves à une **première validation** en leur permettant de réaliser mentalement une correspondance terme à terme entre les voyageurs et les places vides. De plus, si l'élève constate une erreur, il est à même de la rectifier. Ainsi le quai matérialise aussi un moment de **retour sur l'action**.

3) Analyse des procédures mises en œuvre par chacun des élèves

L'élève A réalise d'abord une **estimation de la quantité**. Lorsque les voyageurs sont déposés sur le quai, on peut supposer que l'élève a comparé les deux collections, ce qui lui a permis d'identifier les voyageurs supplémentaires et de les ramener.

Remarque

On ne peut pas savoir si l'élève A a effectivement utilisé le dénombrement des collections ou seulement effectué une correspondance terme à terme, ou encore s'il a reproduit la disposition spatiale des places vides avec les voyageurs pour identifier les voyageurs supplémentaires.

On peut supposer, en l'absence de toute autre indication, que l'élève B a dénombré la collection des places vides pour ensuite constituer la collection de voyageurs de même taille.

L'élève C semble avoir réalisé une **correspondance terme à terme** entre la collection des places vides et la collection des voyageurs.

L'élève D semble s'être appuyé sur la disposition spatiale des places vides pour **décomposer la collection en deux sous-collections**, l'une de quatre places (colonne de gauche), l'autre de trois (colonne de droite). Il a alors ramené 4 voyageurs dans une main et 3 dans l'autre. On ne peut pas savoir si l'élève a dénombré ces sous-collections ou s'il a mis en œuvre une reconnaissance visuelle immédiate (*subitizing*) de ces petites quantités.

4) Proposition de deux modifications de la tâche pour aider les élèves A et C à progresser

Restreindre à un seul le nombre de voyages autorisés pourra bloquer la procédure de correspondance terme à terme (élève C) ou celle s'appuyant sur une estimation de la quantité (élève A). Avec cette contrainte, seule une procédure utilisant le nombre est envisageable.

Diminuer le nombre de places vides pour rester dans le domaine numérique maîtrisé par ces élèves pourrait constituer une deuxième piste.

Jouer sur la disposition spatiale des places vides :

- proposer des constellations du dé pourrait permettre une reconnaissance de la quantité des places vides ;
- proposer des « blocs » de très petites quantités (deux places et puis une place et encore deux places par exemple) pourrait permettre la reconnaissance visuelle immédiate des quantités.

SITUATION 2

1) Analyse des procédures de chacun des élèves

Remarquons tout d'abord que tous les calculs sont justes et les procédures correctes.

Élève 1

L'élève 1 s'appuie sur les écritures chiffrées.

Pour effectuer le calcul écrit $12,42 - 6,8$, l'élève 1 s'appuie sur la propriété de l'écart constant en réalisant d'abord la décomposition additive de $12,42$ en $6 + 6,42$ et de $6,8$ en $6 + 0,8$.

Mathématiquement, la règle de l'écart constant pourrait s'écrire ici :

$$12,42 - 6,8 = (12,42 - 6) - (6,8 - 6) = 6,42 - 0,8.$$

Ceci le conduit à une nouvelle expression : $6,42 - 0,8$.

À partir de $6,42$ qu'il décompose en partie entière (6) et partie décimale (0,42), il cherche à retirer 0,42 à 0,8 toujours en s'appuyant sur la propriété de l'écart constant. Il obtient alors l'expression : $6 - 0,38$.

Il réalise alors ce calcul et grâce à ses connaissances sur les nombres décimaux, il trouve le résultat correct 5,62.

Mathématiquement, la règle de l'écart constant pourrait s'écrire ici :

$$6,42 - 0,8 = (6,42 - 0,42) - (0,8 - 0,42) = 6 - 0,38.$$

Élève 2

L'élève 2 s'appuie sur l'expression orale des nombres décimaux.

L'élève 2 transforme l'expression « 12 unités et 42 centièmes » en « 1242 centièmes », ainsi que « 6 unités et 8 dixièmes » en « 68 dixièmes » puis en « 680 centièmes ». Il met ainsi en œuvre ses connaissances sur les relations entre les différentes unités de la numération décimale.

Il effectue alors le calcul $1242 - 680$ sans référer aux unités de numération. Pour cela, il s'appuie sur la propriété de l'écart constant en ajoutant 20 à chaque terme de la soustraction. Il obtient alors le calcul $1262 - 700$ qu'il effectue correctement en trouvant 562.

Il exprime alors le résultat en centièmes sans revenir à l'écriture à virgule.

Élève 3

Pour effectuer le produit de 15 par 0,24, l'élève 3 s'appuie sur la décomposition additive de 15 suivante : $15 = 10 + 5$.

Il met implicitement en œuvre la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, puisqu'il calcule alors : $10 \times 0,24 + 5 \times 0,24$.

En s'appuyant sur les relations entre les unités de numération (ou sur la « loi des zéros » appliquée aux nombres décimaux), il trouve : $10 \times 0,24 = 2,4$.

Pour effectuer le calcul $5 \times 0,24$, il n'y a aucun indice qui permette d'identifier sa procédure. On peut supposer :

- que l'élève 3 sait que $5 \times 0,24$ est la moitié $10 \times 0,24$, donc 1,2 (utilisation implicite de l'associativité de la multiplication) ;
 - ou que l'élève 3 prend en compte le fait que 5 est la moitié de dix, met implicitement en œuvre l'associativité de la multiplication et s'appuie sur sa connaissance des doubles et moitiés :
- $$5 \times 0,24 = \frac{10}{2} \times 0,24 = \frac{10 \times 0,24}{2} = \frac{2,4}{2} = 1,2 ;$$
- ou encore que l'élève 3 utilise la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition en calculant : $5 \times 0,24 = 5 \times 0,2 + 5 \times 0,4 = 1 + 0,2 = 1,2$.

Il ajoute alors les résultats des deux multiplications pour obtenir le résultat attendu.

Élève 4

L'élève 4 s'appuie sur l'expression orale des nombres décimaux puisque le produit $15 \times 0,24$ est mis sous la forme 15 × 24 centièmes. Cela permet à l'élève de mettre en œuvre des procédures de calcul mental sur les nombres entiers.

L'élève 4 s'appuie sur la décomposition additive de 24 en $20 + 4$, met implicitement en œuvre la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition puisqu'il calcule $15 \times 20 + 15 \times 4$.

Pour obtenir le résultat du premier produit, il utilise l'associativité de la multiplication, ses connaissances sur les doubles et sa maîtrise de la multiplication par 10 en faisant :

$$15 \times 20 = 15 \times (2 \times 10) = (15 \times 2) \times 10 = 30 \times 10 = 300.$$

Le calcul du deuxième produit s'appuie :

- soit sur la connaissance des relations entre 15 et ses premiers multiples (fait numérique) :
 $15 \times 4 = 60$;
- soit sur les doubles en mettant implicitement en œuvre l'associativité de la multiplication (multiplier par 4, c'est multiplier par 2 puis encore par 2) :
 $15 \times 4 = 15 \times (2 \times 2) = (15 \times 2) \times 2 = 30 \times 2 = 60$;

Ainsi l'élève 4 écrit : 15×24 centièmes = 300 centièmes + 60 centièmes.

Il calcule alors la somme pour obtenir 360 centièmes. Ce résultat n'est pas exprimé sous forme d'écriture à virgule.

2) Explicitation de ce qui distingue les deux élèves pour chaque calcul

Comme nous l'avons remarqué dans la question précédente, les élèves 1 et 3 réalisent leurs calculs en les exprimant à l'aide de l'écriture à virgule des nombres décimaux. En revanche, les élèves 2 et 4 s'appuient sur l'expression littérale des nombres décimaux et sur les relations entre les unités de numération en exprimant chacun de ces nombres en centièmes, ce qui leur permet de revenir à un calcul avec des nombres entiers.

SITUATION 3

1) Notion sous-jacente à ces problèmes

Il s'agit clairement de problèmes de **proportionnalité** qui font référence au contexte familier des recettes de cuisine. Dans tous les problèmes, le nombre d'œufs à prévoir est proportionnel au nombre de personnes. Dans le problème 1, la fonction linéaire f qui associe le nombre d'œufs nécessaires au nombre de personnes (noté x), est donnée par : $f(x) = \frac{2}{3}x$.

Dans le problème 2, la fonction linéaire g qui associe le nombre d'œufs nécessaires au nombre de personnes (noté x), est donnée par : $g(x) = \frac{3}{5}x$.

Dans le problème 3, la fonction linéaire h qui associe le nombre de personnes au nombre d'œufs utilisés (noté y), est donnée par : $h(y) = 2y$.

Remarque

L'expression de chaque fonction linéaire n'est pas attendue. Elle est donnée ici en complément de la réponse.

2) Analyse de productions d'élèves

Chaque élève propose une procédure correcte et mène des calculs justes.

Élève A

L'élève A reconnaît que 24 personnes, c'est pareil que 9 personnes et encore 15 personnes (symbolisé par le calcul $9 + 15 = 24$). Or pour 9 personnes il faut 6 œufs et pour 15 personnes il en faut 10, donc pour 24 personnes, il en faut : $6 + 10 = 16$.

Les calculs sont réalisés en ligne.

Cette procédure met en œuvre la propriété additive de la fonction linéaire sous-jacente à ce problème de proportionnalité : $f(9 + 15) = f(9) + f(15)$.

Élève B

Cet élève est dans la même démarche de modélisation que l'élève A mais utilise une représentation schématique de la situation. Il représente un groupe de 9 personnes auquel il fait correspondre 6 œufs, un groupe de 15 personnes auquel il fait correspondre 10 œufs et enfin, il représente le regroupement des 24 personnes auquel il fait correspondre 16 œufs. Les additions posées montrent que son raisonnement se fonde implicitement sur la propriété additive de la fonction linéaire sous-jacente à ce problème de proportionnalité.

Élève C

Dans un premier temps l'élève ré-écrit l'énoncé pour en extraire les informations pertinentes et placer la question.

L’élève déduit de la donnée « 6 œufs pour 10 personnes », la donnée « 3 œufs pour 5 personnes » (en prenant la moitié de part et d’autre).

Il utilise ici, implicitement, la propriété multiplicative de la fonction linéaire sous-jacente à ce problème de proportionnalité : $g\left(\frac{1}{2} \times 10\right) = \frac{1}{2} \times g(10)$.

Il reconnaît ensuite que 15 personnes c’est pareil que trois groupes de 5 personnes ; il fait alors correspondre 3 œufs à chacun de ces groupes et en déduit le nombre d’œufs pour 15 personnes :

$$3 + 3 + 3 = 9.$$

Il utilise ici la propriété additive de la fonction linéaire sous-jacente à ce problème de proportionnalité : $g(5 + 5 + 5) = g(5) + g(5) + g(5)$.

Remarque

Le fait de passer par un groupe de 5 personnes est certainement lié à la proximité numérique de 10 et 15, le facteur commun 5 apparaît ici naturellement sans même le conscientiser.

Élève D

De la donnée « 5 œufs pour 10 personnes », l’élève déduit la donnée « 1 œuf pour 2 personnes » sans expliciter ses calculs. Il cherche le rapport qui lie la grandeur « nombre d’œufs » et la grandeur « nombre de personnes »

Hypothèse 1 : utilisation du coefficient de proportionnalité

L’élève D modélise la situation de manière multiplicative et il cherche « par quoi multiplier 5 pour obtenir 10 » (sans forcément se dire précisément cela). Il déduit facilement que chaque œuf utilisé permet d’obtenir une portion pour 2 personnes (le nombre de personnes correspond au double du nombre d’œufs). Puisque le double de 3 est égal à 6, avec 3 œufs, il est possible de faire de la mousse pour le 6 personnes.

Hypothèse 2 : passage à l’unité

L’élève D se dit (sans être explicite) « avec 5 œufs je fais de la mousse pour 10 personnes, alors avec 5 fois moins d’œuf, je fais de la mousse pour 5 fois moins de personnes », donc « avec 1 œuf je fais de la mousse pour 2 personnes ». Et ensuite « avec 3 œufs, je peux faire de la mousse pour 3 fois plus de personnes », soit : $3 \times (2 \text{ personnes}) = 6 \text{ personnes}$.

Notons que cette procédure est basée la propriété multiplicative de la fonction linéaire sous-jacente à ce problème de proportionnalité.

3) Progressivité dans l’apprentissage de la notion

Rappel

Dans une situation de proportionnalité reliant deux grandeurs A et B, le coefficient de proportionnalité correspond au rapport externe, c'est-à-dire au rapport entre deux mesures des grandeurs A et B se correspondant. On appelle rapport interne, le rapport entre deux mesures d'une même grandeur (A ou B). Avant de mettre en évidence cette progressivité, nous présentons une analyse des trois exercices.

Exercice 1

Cet énoncé propose deux couples de données (9 personnes, 6 œufs) et (15 personnes, 10 œufs) pour poser une question sur un troisième couple de données (24 personnes, ? œufs).

Le coefficient de proportionnalité (égal à $\frac{2}{3}$) n’est ni un nombre entier ni un nombre décimal, ce qui bloque son utilisation. Les données de cet énoncé orientent alors les procédures sur les propriétés de la linéarité. Or le passage à l’unité n’est pas envisageable dans le contexte retenu, puisque la recette nécessite moins d’un œuf par personne, et le rapport interne entre 9 ou 15 et 24 est complexe, ce qui bloque toute procédure mettant en jeu la propriété multiplicative de la linéarité.

En revanche la relation additive simple entre 9, 15 et 24 facilite l’utilisation de la propriété additive de la linéarité.

Cet exercice invite donc l’élève à combiner les deux couples de données pour en extraire un troisième, c'est-à-dire à mettre en œuvre la propriété additive de la linéarité. De plus, si l’élève schématisé l’énoncé (comme l’élève A), le résultat découle directement par analyse du schéma (on « voit » les 24 personnes et donc les 15 œufs).

Exercice 2

Cet énoncé donne un seul couple de données (10 personnes, 6 œufs) pour poser une question sur un deuxième couple de données (15 personnes, ? œufs).

Les données de cet énoncé orientent sur l'utilisation des propriétés de linéarité de la fonction. En effet, le coefficient de proportionnalité (égal à $\frac{6}{10}$) est un nombre décimal non entier, ce qui bloque son utilisation.

Notons d'autre part que le passage à l'unité n'est pas envisageable dans le contexte retenu, puisque la recette nécessite moins d'un œuf par personne. En revanche le rapport interne de la situation (c'est-à-dire ici le rapport multiplicatif entre 10 et 15) devrait inciter à identifier des groupements de 5 personnes : il s'agirait donc de passer de deux groupes de 5 personnes à trois groupes de 5 personnes. Le recours à trois groupes de même cardinal orienterait alors vers des procédures utilisant la propriété multiplicative de la linéarité (c'est 3 fois la même chose) ou la propriété additive de la linéarité (c'est la même chose ajoutée trois fois). On pourrait alors relever une certaine progressivité entre les exercices 1 et 2 puisque les procédures attendues consistent dans l'exercice 1, à combiner additivement deux ensembles de mesures différentes, (en lien avec la propriété additive de linéarité) puis dans l'exercice 2 plusieurs ensembles de même mesure ce qui permet une mise en lien avec la propriété multiplicative de linéarité.

Exercice 3

Cet énoncé ne présente qu'un seul couple de données (5 œufs, 10 personnes).

Le rapport interne (entre 5 et 3) est trop complexe pour être utilisé directement, alors que le coefficient de proportionnalité ($\frac{10}{5} = 2$) est simple (nombre entier dont la table est bien connue). Ces données devraient inciter l'élève à utiliser une procédure qui privilégie soit l'utilisation du coefficient de proportionnalité, soit le passage à l'unité (la donnée « 1 œuf pour 2 personnes » ayant alors tout son sens).

Les données numériques choisies peuvent donc favoriser le recours à des procédures impliquant la multiplication (passage par l'unité ou coefficient de proportionnalité), même si ces procédures s'appuient sur deux aspects différents d'une situation de proportionnalité (propriétés de linéarité jouant sur les rapports internes ou relation entre deux grandeurs jouant sur le rapport externe). On pourrait alors relever une certaine progressivité entre les exercices 2 et 3.

4) Un exercice permettant de poursuivre l'apprentissage de la proportionnalité

Remarque

*Cette question est très ouverte et recèle le piège du « produit en croix », puisque cette technique **ne relève pas des programmes du cycle 3**. L'exercice à proposer devra donc poursuivre l'apprentissage initié avec les 3 exercices précédents. On pourra par exemple revenir sur une procédure particulière (proposition 1), ou ré-investir toutes les procédures (proposition 2), ou étendre les connaissances au champ conceptuel de la proportionnalité (proposition 3), ou introduire différentes représentations des situations de proportionnalité (proposition 4), ou prouver que certaines situations ne sont pas modélisables par la proportionnalité (proposition 5) ou encore proposer des problèmes où la proportionnalité est un outil et pas un objet d'apprentissage (proposition 6).*

Proposition 1 : revenir sur une procédure particulière

Exemple 1 : Si 15 vis identiques pèsent, en tout, 60g, combien pèsent 26 de ces vis ?

Les données numériques de cet énoncé (le rapport externe ($\frac{60}{15} = 4$) est un nombre entier naturel, le rapport interne ($\frac{26}{15}$) est complexe) incitent à ré-investir le passage à l'unité et/ou l'utilisation du coefficient de proportionnalité.

Proposition 2 : ré-investir toutes les procédures possibles

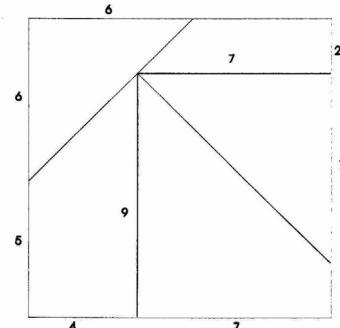
Exemple 2 : Si 15 vis identiques pèsent, en tout, 22,5g, combien pèsent 30 de ces vis ? 5 vis de ces vis ? 35 vis ? 1 vis ? 87 vis ?

Dans cet exercice, on peut inciter les élèves à confronter leur stratégie. L'objectif n'est pas de mettre en avant telle ou telle procédure particulière, mais de permettre à l'élève de disposer d'un répertoire de procédures, s'appuyant toujours sur le sens, parmi lesquelles il pourra choisir en fonction des nombres présents dans l'énoncé. La comparaison de différentes procédures doit permettre aux élèves d'acquérir ces

procédures et de prendre conscience qu'en fonction des nombres en jeu dans un problème, certaines sont plus efficaces que d'autres.

Proposition 3 : investigation du champ conceptuel de la proportionnalité (concentrations, agrandissement-réduction, échelles, vitesses constantes, pourcentages)

Exemple 3⁽¹⁾ : « Chaque équipe a reçu un puzzle et doit en reconstruire un autre, mais plus grand ! Pour cela il faudra respecter la règle suivante : "un segment qui mesure 4 cm sur le puzzle que je vous ai donné devra mesurer 6 cm sur le puzzle que vous construirez". »



Proposition 4 : introduction de différentes représentations (tableau de proportionnalité ou graphique)

Exemple 4 : Recette de la mousse au citron

Nombre de personnes	9 personnes	3 personnes	24 personnes	36 personnes
Nombre d'œufs	6 œufs	?	?	?

Vous pourrez représenter les procédures par des flèches reliant les cases du tableau.

Exemple 5 : Représenter graphiquement les données trouvées dans l'exemple 4. Relier les points trouvés par une droite et proposer une conjecture sur la représentation graphique d'une situation de proportionnalité.

Proposition 5 : Travailler sur des situations qui ne sont pas des situations de proportionnalité

La reconnaissance des situations de proportionnalité passe aussi par la reconnaissance de situations qui ne sont pas modélisable par la proportionnalité et par l'argumentation adéquate.

Exemple 6⁽²⁾ : Théo a 5 ans. Il mesure 110 cm. Quelle sera sa taille à 10 ans ?

Proposition 6 : énoncé ouvert ou la proportionnalité intervient comme un outil et non comme un objet d'étude

Exemple 7 : Sur cette photo, quelle est la taille du Géant ?

Dans cet exercice l'élève doit faire le choix de se placer dans le modèle proportionnel pour donner une réponse raisonnée. Les valeurs numériques n'ont que peu d'intérêt comparées au raisonnement à mettre en œuvre.



(1) BROUSSEAU G. (1981). Problèmes de didactiques des décimaux. *Recherches en didactique des mathématiques*, 2(1), 37-127.

(2) Simard A. (2012). Proportionnalité en CM2-6ème. *Petit x*, 90, 35-52.

GROUPEMENT 2 – avril 2019

PREMIÈRE PARTIE

Le problème proposé consiste à étudier le volume utile d'un appentis et d'évaluer le coût de construction.

A - Surface de l'appentis et étude du volume utile

1) Calcul de l'aire du rectangle ABFE

$AE = 4,8 \text{ m}$ et $AB = 1,5 \text{ m}$.

L'aire d'un rectangle se calcule avec la formule $L \times l$ c'est-à-dire ici $4,8 \text{ m} \times 1,5 \text{ m}$ soit $7,2 \text{ m}^2$.

L'aire du rectangle ABFE (la surface au sol) est $7,2 \text{ m}^2$.

2) Calcul de l'aire du toit et de la pente

2) a) Calcul de la longueur CD

I est le point du segment [BC] tel que ABID est un rectangle, donc

$AD = BI = 2,4 \text{ m}$ et $DI = AB = 1,5 \text{ m}$.

Comme C, I et B sont alignés dans cet ordre,

$CI = BC - IB = 2,4 \text{ m} - 1,5 \text{ m} = 0,8 \text{ m}$.

Comme ABID est un rectangle, (DI) est perpendiculaire à (BC). Le triangle DIC est donc rectangle en I.

D'après le théorème de Pythagore :

$$CD^2 = DI^2 + CI^2$$

$$CD^2 = 1,5^2 + 0,8^2 = 2,25 + 0,64 = 2,89$$

$$CD = \sqrt{2,89} \text{ m} = 1,7 \text{ m}.$$

La longueur CD est égale à 1,7 m.

2) b) Surface du toit

Comme l'appentis a une forme de prisme droit, les faces latérales CDHG et AEHD sont des rectangles.

Comme AEHD est un rectangle, $HD = AE = 4,8 \text{ m}$.

Notons \mathcal{A} l'aire du rectangle CDHG :

$$\mathcal{A} = 4,8 \text{ m} \times 1,7 \text{ m} = 8,16 \text{ m}^2.$$

L'aire de la surface du toit est $8,16 \text{ m}^2$.

Remarque

La question de l'énoncé n'est pas claire « en déduire la surface du toit CDHG », la réponse serait : CDHG est un rectangle car la surface est un ensemble de points. Ici il est attendu l'aire c'est-à-dire une grandeur attachée à cette surface.

2) c) Pente du toit

Dans le triangle DIC rectangle en I,

$$\tan \widehat{CDI} = \frac{CI}{DI} = \frac{0,8}{1,5}.$$

Avec la calculatrice, on trouve :

$$\widehat{CDI} = \tan^{-1} \left(\frac{0,8}{1,5} \right) \quad \text{soit} \quad \widehat{CDI} \approx 28^\circ.$$

La pente du toit est environ à 28° .

Remarque

On aurait tout aussi bien pu utiliser les autres relations trigonométriques dans le triangle rectangle DCI :

$$\cos \widehat{CDI} = \frac{DI}{CD} \qquad \text{ou} \qquad \sin \widehat{CDI} = \frac{CI}{CD}.$$

3) Représentation du trapèze. Calcul de l'aire du trapèze et du volume utile de l'appentis

3) a) Calcul des dimensions et tracé

La représentation du rectangle ABCD à l'échelle 1/50 est une réduction de celui-ci.

Plusieurs techniques sont disponibles pour résoudre ces problèmes d'échelle.

L'échelle de 1/50 signifie que sur la représentation 1 cm correspond à 50 cm dans la réalité c'est-à-dire 0,5 m. Disposant de cette relation, on détermine les dimensions manquantes en appliquant les techniques de recherche de quatrième proportionnelle.

Dans ce cas particulier, on peut donc diviser les mesures en réalité en m par 0,5 pour obtenir les mesures sur la représentation en cm.

On peut aussi directement s'appuyer sur la définition suivante d'une échelle de reproduction : l'échelle est le nombre (sans dimension) par lequel il faut multiplier les dimensions dans la réalité pour obtenir les dimensions sur la représentation.

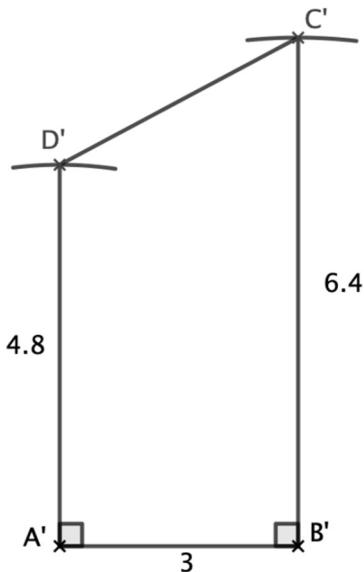
Les dimensions du trapèze A'B'C'D' sont celles du trapèze ABCD multipliées par 1/50 :

Dimensions en réalité	$AB = 1,5 \text{ m}$	$AD = 2,4 \text{ m}$	$BC = 3,2 \text{ m}$
Dimensions sur la représentation	$A'B' = 1,5 \text{ m} \times \frac{1}{50}$ $A'B' = 0,03 \text{ m}$ $A'B' = 3 \text{ cm}$	$A'D' = 2,4 \text{ m} \times \frac{1}{50}$ $A'D' = 0,048 \text{ m}$ $A'D' = 4,8 \text{ cm}$	$B'C' = 3,2 \text{ m} \times \frac{1}{50}$ $B'C' = 0,064 \text{ m}$ $B'C' = 6,4 \text{ cm}$

Remarque

Pour le tracé d'un trapèze rectangle, il suffit de la mesure de trois longueurs. La longueur CD n'est pas nécessaire.

Représentation de la figure



3) b) Aire du trapèze

L'aire d'un trapèze est donnée par la formule $\frac{(\text{grande base} + \text{petite base}) \times \text{hauteur}}{2}$.

$$\text{Donc } \mathcal{A}_{\text{trapèze}} = \frac{(AD + BC) \times AB}{2} = \frac{(2,4 \text{ m} + 3,2 \text{ m}) \times 1,5 \text{ m}}{2} = 4,2 \text{ m}^2.$$

L'aire du trapèze ABCD est $4,2 \text{ m}^2$.

Remarque

On peut aussi décomposer le trapèze en un rectangle ABID et un triangle rectangle DIC. L'aire du trapèze ABCD s'obtient alors en sommant les aires du rectangle ABID et du triangle rectangle DIC,

$$\text{soit } 1,5 \text{ m} \times 2,4 \text{ m} + \frac{1,5 \text{ m} \times 0,8 \text{ m}}{2}; \text{ soit } 3,6 \text{ m}^2 + 0,6 \text{ m}^2; \text{ ce qui est bien égal à } 4,2 \text{ m}^2.$$

3) c) Volume utile

Cet appentis est représenté par un prisme droit de base le trapèze ABCD et de hauteur AE. Le volume d'un prisme est donné par la formule : Aire de la base \times hauteur.

Le volume V du prisme droit est égal à :

$$V = 4,2 \text{ m}^2 \times 4,8 \text{ m} = 20,16 \text{ m}^3.$$

Un stère vaut 1 m^3 donc $20,16 \text{ m}^3 > 15 \text{ stères}$.

L'appentis contient assez de place pour stocker 15 stères de bois.

Autre méthode

Si on calcule le volume du parallélépipède rectangle ABIDEFKH (avec I le point du segment [BC] tel que ABID est un rectangle et K le point du segment [FG] tel que EFKH est un rectangle), on trouve aussi un résultat supérieur à 15 stères : $AE \times AB \times AD \approx 17 \text{ m}^3$.

Et le volume de l'appentis est supérieur à celui de ce parallélépipède rectangle puisque ce dernier est inclus dans le prisme droit ABCDEFGH.

B - Réalisation de la dalle**1) Évacuer la terre**

Calculons le volume du trou creusé qui est assimilé à un parallélépipède rectangle dont le volume est donné par la formule $L \times l \times h$.

En reprenant le résultat obtenu à la question 1 de la partie A pour l'aire du rectangle ABFE, on a :

$$7,2 \text{ m}^2 \times 25 \text{ cm} = 7,2 \text{ m}^2 \times 0,25 \text{ m} = 1,8 \text{ m}^3.$$

Le volume de terre non tassée est le volume du trou augmenté de 30 %, c'est-à-dire multiplié par $(1 + \frac{30}{100})$ soit 1,3 :

$$1,8 \text{ m}^3 \times 1,3 = 2,34 \text{ m}^3.$$

Calculons le nombre de voyage nécessaire avec une remorque de $0,7 \text{ m}^3$.

$$2,34 \text{ m}^3 \div 0,7 \text{ m}^3 \approx 3,34 \text{ m}^3.$$

3 voyages permettront d'évacuer $3 \times 0,7 \text{ m}^3$, soit $2,1 \text{ m}^3$ et il restera $0,24 \text{ m}^3$ à évacuer.

Pour évacuer complètement la terre, le propriétaire devra donc effectuer 4 voyages.

2) Coût d'une livraison de béton**2) a) Prix facturé pour 8 m^3**

Avec l'entrepreneur A, il faut faire deux livraisons car le camion ne peut contenir que 7 m^3 :

$$98 \text{ €} \times 8 + 150 \text{ €} \times 2 = 1\,084 \text{ €}.$$

Avec l'entrepreneur B, un seul voyage suffit :

$$75 \text{ €} \times 8 + 240 \text{ €} = 840 \text{ €}.$$

Le prix facturé pour l'achat de 8 m^3 de béton est de 1 084 € avec l'entrepreneur A et 840 € avec l'entrepreneur B.

2) b) Représentations graphiques des fonctions f et g

En lisant sur le graphique les coordonnées des points d'intersection des droites d_1 et d_2 avec l'axe des ordonnées, on lit respectivement (0 ; 150) et (0 ; 240).

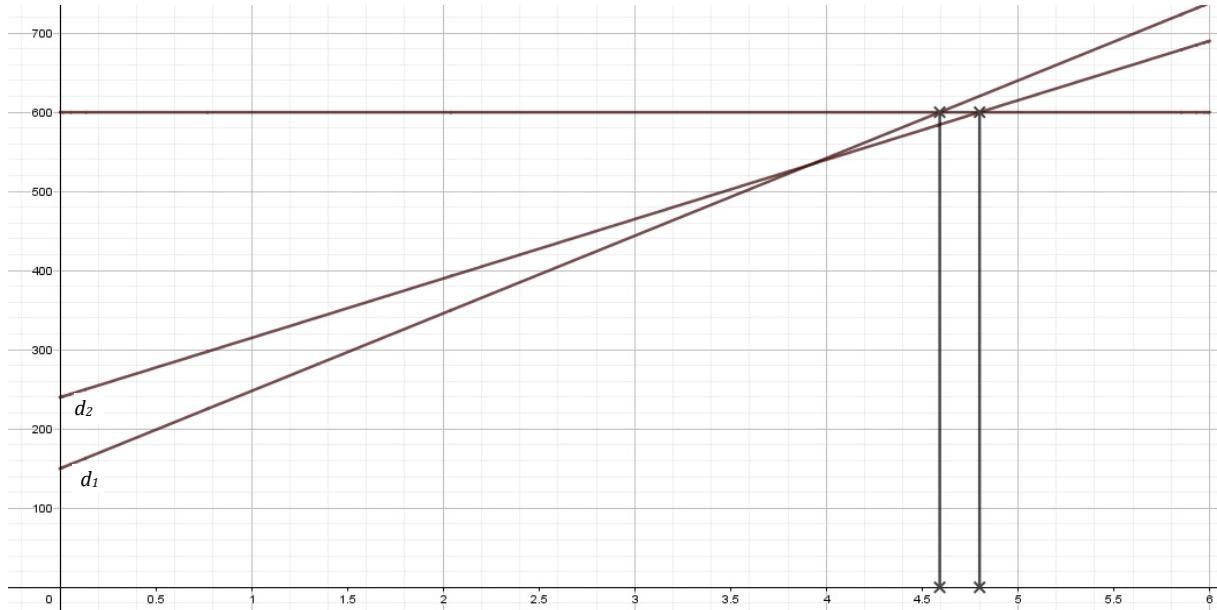
L'ordonnée de ces points correspond au prix à payer pour l'achat de zéro m^3 , c'est-à-dire seulement le prix de la livraison.

d_1 est donc la représentation graphique de la fonction f exprimant le prix à payer à l'entrepreneur A, et d_2 est la représentation graphique de la fonction g exprimant le prix à payer à l'entrepreneur B.

2) c) Volume maximum de béton que l'on peut commander avec 600 €

Pour déterminer graphiquement une valeur approchée du volume de béton que l'on peut commander avec 600 €, on lit sur le graphique l'abscisse des points d'ordonnée 600 de d_1 et d_2 : environ 4,6 pour d_1 et environ 4,8 pour d_2 .

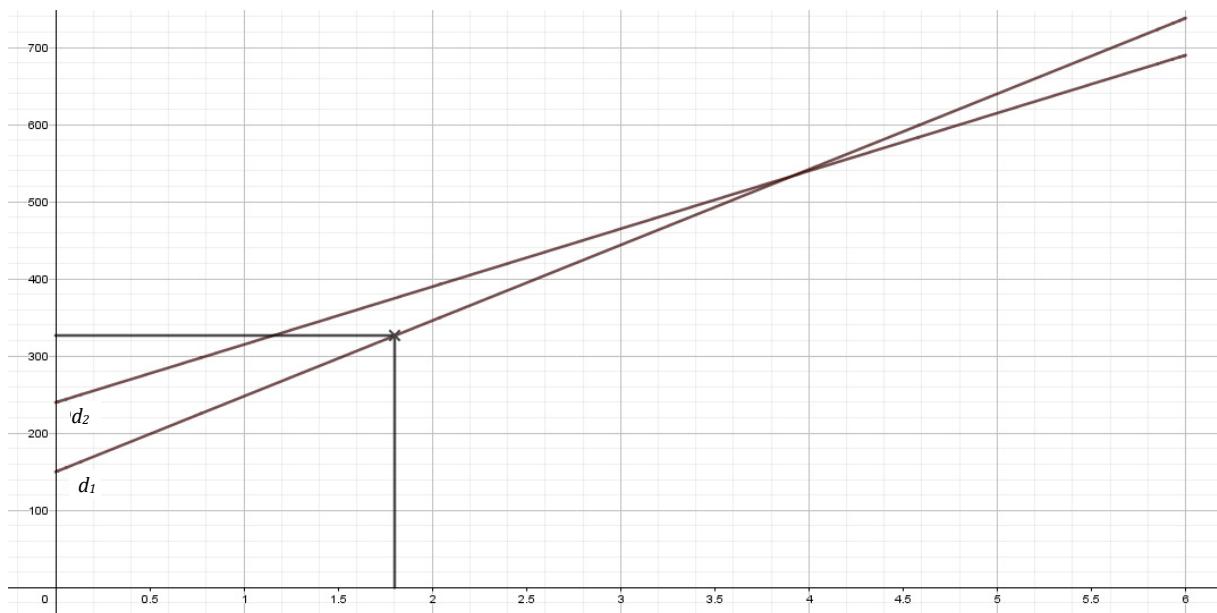
Avec 600 €, on peut commander au maximum environ 4,8 m³, en choisissant l'entrepreneur B.

**2) d) Prix à payer pour réaliser la dalle**

Le volume du trou pour la dalle est de 1,8 m³.

On lit sur le graphique que le point de d_1 d'abscisse 1,8 est en dessous du point de d_2 d'abscisse 1,8. Cela signifie que pour la commande permettant de réaliser la dalle de l'appentis, l'entrepreneur A est moins cher que l'entrepreneur B.

Pour lire graphiquement le prix facturé avec l'entrepreneur A de 1,8 m³ de béton, on lit environ 320 pour l'ordonnée du point de d_1 d'abscisse 1,8.



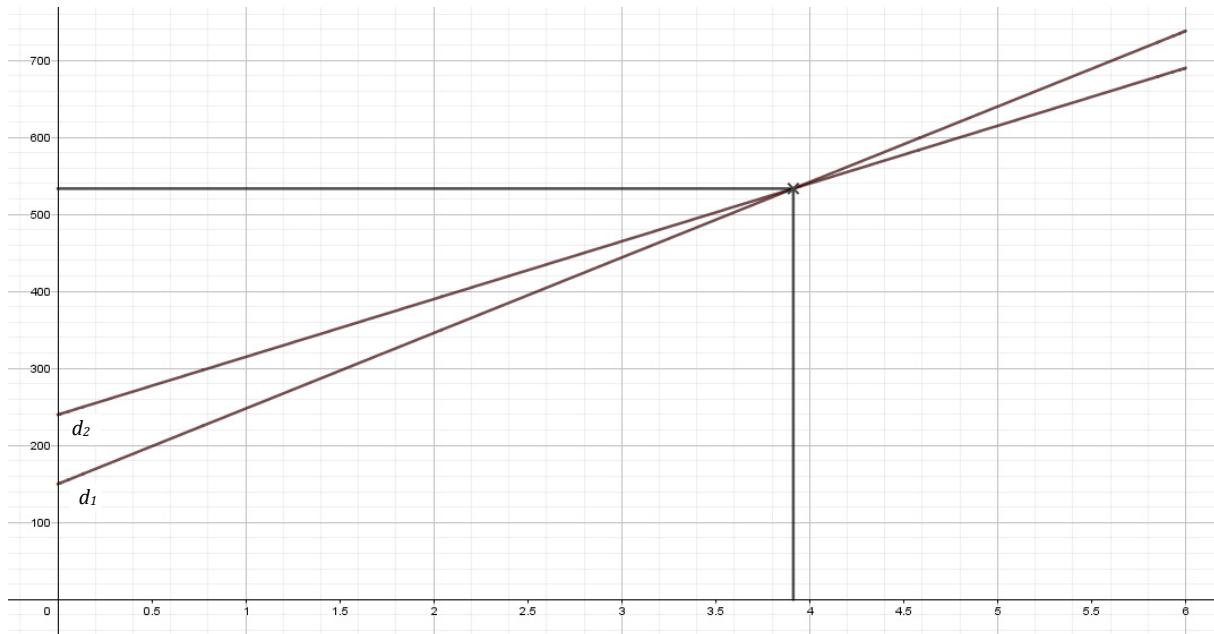
Il est demandé de calculer le prix à payer, c'est-à-dire pour l'entrepreneur A :

$$98 \text{ €} \times 1,8 + 150 \text{ €} = 326,40 \text{ €}.$$

Le prix à payer pour l'achat de béton nécessaire à la réalisation de la dalle est 326,40 euros.

2) e) Calcul du prix le plus intéressant

Les droites d_1 et d_2 se coupent en un point dont l'abscisse est environ 3,8. À partir de cette abscisse, les points de d_2 sont en dessous de ceux de d_1 . Ce qui signifie que le prix de l'entrepreneur B devient plus intéressant que le prix de l'entrepreneur A.



Déterminons par le calcul l'abscisse du point d'intersection de d_1 et d_2 , c'est le volume x pour lequel le prix facturé par l'entrepreneur A est égal au prix facturé par l'entrepreneur B.

On a alors :

$$98x + 150 = 75x + 240$$

$$98x - 75x = 240 - 150$$

$$23x = 90$$

$$x = \frac{90}{23}$$

$$\text{soit } x \approx 3,91.$$

Donc, si on travaille au dixième de mètre cube près, pour $3,9 \text{ m}^3$ de béton, c'est l'entrepreneur A qui a le prix le plus intéressant alors que pour 4 m^3 de béton, c'est l'entrepreneur B qui devient plus intéressant.

La valeur approchée au dixième de mètre cube près du volume de béton à partir duquel il est préférable de changer d'entrepreneur est d'environ 4 m^3 .

Autre méthode

On peut aussi chercher les valeurs du volume x pour lesquelles le prix facturé par l'entrepreneur A est inférieur ou égal au prix facturé par l'entrepreneur B. On résout alors l'inéquation :

$$98x + 150 \leq 75x + 240 \text{ avec } x \leq 7 \text{ m}^3.$$

On obtient :

$$23x \leq 90$$

$$\text{soit } x \leq \frac{90}{23}.$$

$$\text{Or } \frac{90}{23} \approx 3,91 \text{ soit } 3,9 < \frac{90}{23} < 4.$$

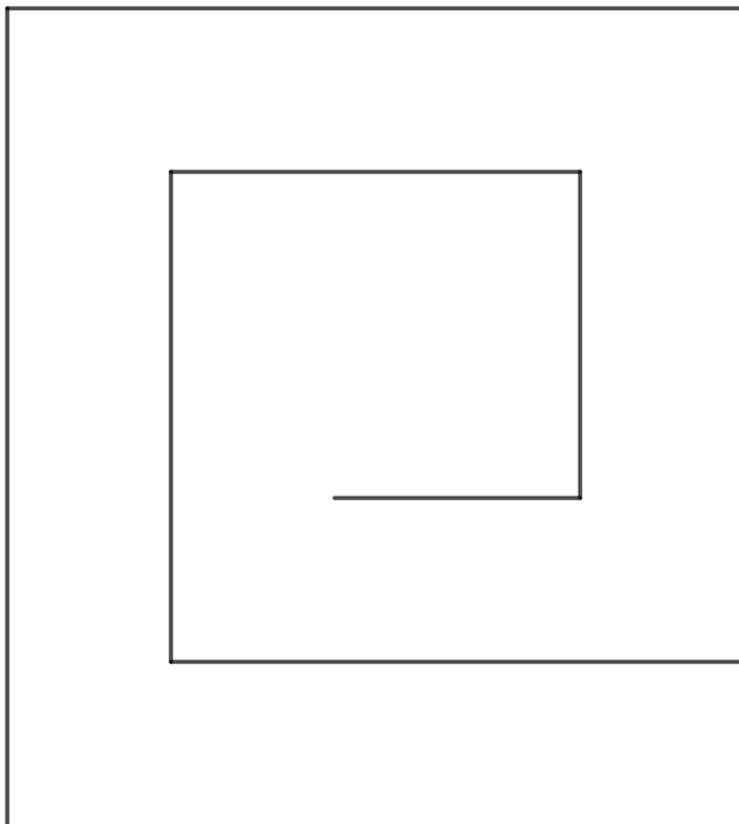
Donc la valeur approchée au dixième de mètre cube près du volume de béton à partir duquel il est préférable de changer d'entrepreneur est d'environ 4 m^3 .

DEUXIEME PARTIE

EXERCICE 1

L'exercice porte sur la compréhension et la modification d'un programme avec le logiciel Scratch.

1) Tracé de la figure obtenue en lançant le programme Scratch



Remarques

Le premier segment a pour longueur 3 cm, car la variable longueur est initialisée à 20, puis augmentée de 10 à l'entrée dans la boucle, avant le premier tracé.

La boucle comprend 8 itérations, il y a donc 8 segments en tout, de mesures de longueur respectives exprimées en cm : 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 et 10.

La direction de départ est donnée dans l'énoncé « le premier tracé se fait horizontalement vers la droite ». Il aurait pu être intégrer au programme avec l'instruction "s'orienter en direction de 90".

2) Figure obtenue en supprimant la ligne 6

Si on supprime la ligne 6, la longueur des segments ne sera plus modifiée et tous les segments auront pour longueur 3 cm.

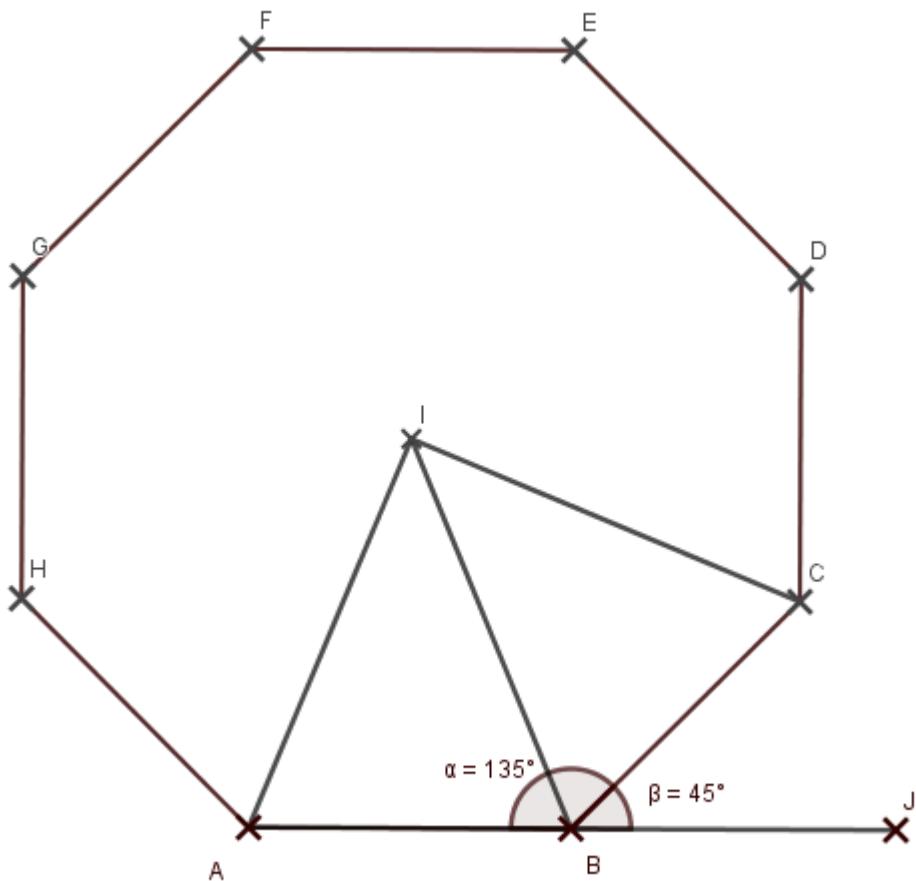
On obtiendra donc un carré de côté 3 cm, sur lequel le lutin aura repassé deux fois.

3) Obtenir un octogone régulier

Un octogone régulier a 8 côtés de même longueur et 8 angles au centre de 45° .

On modifie l'instruction 3 « mettre longueur à 20 » en « mettre longueur à 40 », car le côté de l'octogone doit être de 40 pixels.

On supprime l'instruction 6 car la longueur des côtés d'un octogone régulier est toujours la même.



Dans l'octogone régulier ABCDEFGH de centre I, l'angle \widehat{AIB} est égal à 45° ($360^\circ \div 8$). Le triangle AIB est isocèle en I et on a donc $\widehat{ABI} = 67,5^\circ$; on en déduit que $\widehat{ABC} = 135^\circ$. Lorsque le lutin se déplace de A à B pour qu'à partir de B, il se dirige dans la direction de C, il doit tourner de $180^\circ - 135^\circ$ soit 45° .

On **modifie donc l'instruction 8** « tourner de 90 degrés » en « tourner de 45 degrés ».

Ainsi l'on obtient un octogone régulier de côté 40 pixels.

Voici le script :



Remarque

Les copies d'écran du logiciel Scratch correspondent à la version disponible en ligne.

EXERCICE 2

1) Vitesse retenue pour une vitesse moyenne de 123 km/h

D'après le document 3, quand la vitesse moyenne est supérieure à 100 km/h, la vitesse retenue est la vitesse moyenne diminuée de 5 %.

Pour diminuer de 5 %, on multiplie par $1 - \frac{5}{100}$, soit 0,95.

$$123 \times 0,95 = 116,85.$$

Pour la vitesse moyenne calculée de 123 km/h, la vitesse retenue est de 116,85 km/h.

2) Vitesse retenue pour un parcours en 4 minutes de la distance entre les deux radars

D'après le document 1, la distance entre les deux points de détection du véhicule est de 5,1 km. Le véhicule a parcouru cette distance en 4 minutes.

$$4 \text{ min} = \frac{4}{60} \text{ h}$$

La relation liant vitesse (V), durée de parcours (T) et distance parcourue (D) est :

$$V = \frac{D}{T}$$

$$\text{soit } V = \frac{5,1 \text{ km}}{\frac{4}{60} \text{ h}} = 5,1 \times \frac{60}{4} \text{ km/h} = 76,5 \text{ km/h.}$$

La vitesse moyenne du véhicule est de 76,5 km/h.

Cette vitesse étant inférieure à 100 km/h, on calcule la vitesse retenue en soustrayant 5 km/h à la vitesse calculée :

$$76,5 \text{ km/h} - 5 \text{ km/h} = 71,5 \text{ km/h.}$$

Pour un véhicule parcourant en 4 minutes la distance entre les deux points d'enregistrement, la vitesse retenue est 71,5 km/h.

3) Calcul de la vitesse moyenne pur une vitesse retenue de 114 km/h

La vitesse retenue est supérieure à 100 km/h, elle a donc été diminuée de 5 %, c'est à dire multipliée par 0,95. Pour retrouver la vitesse moyenne, on divise la vitesse retenue par 0,95 :

$$114 \text{ km/h} \div 0,95 = 120 \text{ km/h.}$$

La vitesse moyenne du véhicule calculée par l'ordinateur était de 120 km/h.

Remarque

Une baisse de 5 % n'est pas compensée par une hausse de 5 %.

Autrement exprimé, dans ce cas, il aurait été erroné de chercher la vitesse moyenne calculée en effectuant :

$$114,5 \text{ km/h} \times 1,05.$$

4) Calcul de la vitesse d'un véhicule enregistré par les deux radars

Calcul de la durée entre les instants d'enregistrement

Pour calculer la durée écoulée entre deux instants, on utilise une des techniques de la soustraction.

Méthode 1 : par complément

$$9 \text{ h } 17 \text{ min } 56 \text{ s} + 4 \text{ min} = 9 \text{ h } 21 \text{ min } 56 \text{ s} ;$$

$$9 \text{ h } 21 \text{ min } 56 \text{ s} + 4 \text{ s} = 9 \text{ h } 21 \text{ min } 60 \text{ s} = 9 \text{ h } 22 \text{ min} ;$$

$$9 \text{ h } 22 \text{ min} + 7 \text{ s} = 9 \text{ h } 22 \text{ min } 07 \text{ s}.$$

La durée entre 9 h 17 min 56 s et 9 h 22 min 07 s est de 4 min + 4 s + 7 s, soit 4 min 11 s.

Méthode 1bis

On aurait aussi pu calculer les durées entre les instants 9 h 17 min 56 s, 9 h 18 min, 9 h 22 min et 9 h 22 min 07s.

Soit 4 s + 4 min + 7 s = 4 min 11 s.

Méthode 2 : technique dite « de l'emprunt »

9 h 22 min 07 s – 9 h 17 min 56 s

On ne peut pas soustraire 56 s à 7 s.

$$9 \text{ h } 22 \text{ min } 07 \text{ s} - 9 \text{ h } 17 \text{ min } 56 \text{ s} = 9 \text{ h } 21 \text{ min } 67 \text{ s} - 9 \text{ h } 17 \text{ min } 56 \text{ s}.$$

On a "échangé" une des 22 minutes contre 60 secondes, de façon à rendre possible la soustraction des secondes : $67 \text{ s} - 56 \text{ s} = 11 \text{ s}$.

Donc $9 \text{ h } 22 \text{ min } 07 \text{ s} - 9 \text{ h } 17 \text{ min } 56 \text{ s} = 4 \text{ min } 11 \text{ s}$.

Remarque 1

Cette technique est parfois aussi appelée « par cassage ».

Remarque 2

La conversion en seconde des horaires fournis est ici une technique possible mais trop coûteuse.

Entre 9 h 17 min 56 s et 9 h 22 min 07 s, il s'est donc écoulé 4 minutes et 11 secondes, ce qui correspond à $4 \times 60 \text{ s} + 11 \text{ s}$ soit 251 s.

Convertissons cette durée exprimée en s en h :

$$251 \text{ s} = \frac{251}{3600} \text{ h}.$$

D'où le calcul de la vitesse moyenne en km/h :

$$V = \frac{\frac{5,1 \text{ km}}{251 \text{ s}}}{\frac{3600}{251} \text{ h}} = 5,1 \times \frac{3600}{251} \text{ km/h} \approx 73,15 \text{ km/h}.$$

La vitesse moyenne de ce véhicule est de 73,15 km/h. La vitesse retenue est donc de 68,15 km/h.

D'après le document 1, la vitesse est limitée à 70 km/h sur ce tronçon.

Le véhicule ne sera donc pas sanctionné par une contravention.

Remarque

On peut calculer la vitesse en km/s et trouver environ 0,02 km/s puis convertir cette vitesse en km/h en multipliant par 3 600. On perd de la précision avec les arrondis et il faut par conséquent garder toutes les valeurs de la calculatrice avant la multiplication par 3600.

EXERCICE 3

Calcul du volume d'un cube :

$$5 \text{ cm} \times 5 \text{ cm} \times 5 \text{ cm} = 125 \text{ cm}^3 = 0,000125 \text{ m}^3.$$

Remarque

Pour faciliter les conversions, on peut s'appuyer sur les relations entre les unités de longueur et les propriétés du calcul sur les puissances :

$$125 \text{ cm}^3 = 125 \times (10^{-2} \text{ m})^3 = 125 \times 10^{-6} \text{ m}^3.$$

Méthode 1 : comparaison des masses des cubes

Calcul de la masse en g d'un cube en fer :

$$7860 \text{ kg/m}^3 \times 0,000125 \text{ m}^3 = 0,9825 \text{ kg} = 982,5 \text{ g}.$$

Calcul de la masse en g d'un cube en nickel :

$$8900 \text{ kg/m}^3 \times 0,000125 \text{ m}^3 = 1,1125 \text{ kg} = 1112,5 \text{ g}.$$

Le cube de 1110 g que l'on a pesé est donc un cube en nickel, car sa masse est plus proche de celle trouvée en calculant avec la masse volumique du nickel.

Méthode 2 : comparaison de masses volumiques

On peut calculer la masse volumique du cube et la comparer à celle du fer et du nickel :

$$\text{masse volumique du cube} = \frac{\text{masse du cube}}{\text{volume du cube}}.$$

Soit pour le cube pesé : $\frac{1,110 \text{ kg}}{0,000125 \text{ m}^3} = 8\,880 \text{ kg/m}^3$.

La masse volumique trouvée est plus proche de celle du nickel que celle du fer.

Le cube pesé est donc en nickel.

Remarque

Les valeurs trouvées ne donnent pas exactement le résultat, on peut émettre l'hypothèse que la masse pesée du cube n'est pas tout à fait exacte ou que la balance n'est pas suffisamment précise.

EXERCICE 4

1) Recherche de l'âge médian

Construisons le tableau des effectifs cumulés croissants :

Age	14	15	16	17	18	19	20	21	22
Effectifs	1	4	7	4	4	8	16	10	6
Effectifs cumulés croissants	1	5	12	16	20	28	44	54	60

L'effectif total est de 60 personnes. La médiane est donc l'âge moyen entre la 30^{ème} et la 31^{ème} personne. La 30^{ème} et la 31^{ème} personne ont toutes les deux 20 ans.

L'âge médian est donc 20 ans.

2) Calcul de pourcentage

Le nombre de personnes de moins de 18 ans est 16.

Rapporté au total de 60 personnes, on calcule le pourcentage : $\frac{16}{60} \times 100 \approx 27$ (arrondi à l'unité).

Le pourcentage, arrondi à l'unité, de membres du club qui ont moins de 18 ans est 27 %.

3) Calcul de probabilités

3) a) Probabilité pour que le gagnant ait 22 ans

Chaque billet a la même probabilité d'être tiré, qui est de $\frac{1}{60}$.

Les tirages étant équiprobables, la probabilité d'un événement est donnée par :

$$\frac{\text{nombre de cas favorables à l'événement}}{\text{nombre total de cas}}$$

Il y a 6 personnes de 22 ans. La probabilité pour que le gagnant ait 22 ans est de $\frac{6}{60}$.

3) b) Probabilité pour que le gagnant ait au moins 18 ans

Le nombre de personnes ayant au moins 18 ans est : $4 + 8 + 16 + 10 + 6 = 44$.

La probabilité pour que le gagnant ait au moins 18 ans est de $\frac{44}{60}$ soit $\frac{11}{15}$.

Remarque

Pour dénombrer les gagnants d'au moins 18 ans on peut également soustraire du nombre total de membres ceux qui ont au plus 17 ans ($60 - 16$).

TROISIÈME PARTIE

SITUATION 1

1) Notion mathématique

Ce problème relève de la **proportionnalité**. En effet, comme on suppose que toutes les oranges fournissent la même quantité de jus, la quantité de jus est proportionnelle au nombre d'oranges pressées.

2) Procédures

Remarque

Dans une optique de formation, nous proposons ci-dessous plusieurs procédures possibles. On rappelle au candidat que si l'énoncé demande trois procédures, il est important de se conformer à cette demande en se limitant au nombre de procédures demandées.

Voici **des procédures** que l'on peut attendre d'un élève de CM2 :

Utilisation de la propriété de linéarité multiplicative

- L'élève peut utiliser la propriété de linéarité multiplicative pour affirmer que 3 oranges fournissent $300 \text{ mL} \div 2 = 150 \text{ mL}$ de jus.
Puis il utilise à nouveau la propriété de linéarité multiplicative pour affirmer que 9 oranges fournissent $150 \text{ mL} \times 3 = 450 \text{ mL}$ de jus.
Pour ce faire, l'élève a remarqué que 6 est le double de 3 et 9 le triple de 3.
- L'élève peut utiliser la propriété de linéarité multiplicative pour affirmer que 18 oranges fournissent $300 \text{ mL} \times 3 = 900 \text{ mL}$ de jus.
Puis il utilise à nouveau la propriété de linéarité multiplicative pour affirmer que 9 oranges fournissent $900 \text{ mL} \div 2 = 450 \text{ mL}$ de jus.
Pour ce faire, l'élève a remarqué que 18 est le triple de 6 et 9 la moitié de 18.
- L'élève peut chercher le nombre qui, multiplié par 6, donne 9, trouver 1,5, et utiliser la propriété de linéarité multiplicative pour affirmer que 9 oranges fournissent $300 \text{ mL} \times 1,5 = 450 \text{ mL}$.

Utilisation de la propriété de linéarité multiplicative et de la propriété de linéarité additive

- L'élève peut utiliser la propriété de linéarité multiplicative pour affirmer que 3 oranges fournissent $300 \text{ mL} \div 2 = 150 \text{ mL}$ de jus.
Puis il utilise la propriété de linéarité additive pour affirmer que 9 oranges fournissent 450 mL de jus ($300\text{mL} + 150 \text{ mL}$).
Pour ce faire, l'élève a remarqué que $9 = 6 + 3$ avec 3 qui est la moitié de 6.

Passage à l'unité

- Si 6 oranges fournissent 300 mL de jus, alors 1 orange fournit 6 fois moins de jus, soit : $300 \text{ mL} \div 6 = 50 \text{ mL}$ de jus.
Et 9 oranges en fournissent 9 fois plus, soit $50 \text{ mL} \times 9 = 450 \text{ mL}$.
Cette procédure utilise deux fois la propriété de linéarité multiplicative mais avec le passage par l'unité (d'où son nom). Le raisonnement décrit ici s'appelle aussi règle de trois.

Recherche du coefficient de proportionnalité

- L'élève peut rechercher le coefficient de proportionnalité, c'est à dire le nombre par lequel il faut multiplier 6 pour obtenir 300.
C'est 50.
Comme $9 \times 50 = 450$, il trouve ainsi que 9 oranges fournissent 450 mL de jus.

Remarque

Cette procédure conduit à la création d'une grandeur quotient et le coefficient de proportionnalité s'exprime en mL/orange.

Extrait du document ressource "Résoudre des problèmes de proportionnalité au cycle 3" : « En fin de cycle 3, une nouvelle procédure est abordée, elle utilise le coefficient de proportionnalité. »

Et dans le paragraphe "Progressivité des apprentissages", on peut lire : « Si le coefficient de proportionnalité est rencontré au cours moyen, notamment lors de travaux sur les échelles, son institutionnalisation dans un cadre général peut être reportée en toute fin de cycle 3. »

3) Modification des données numériques afin d'amener les élèves à utiliser la procédure dite de passage à l'unité

Les relations numériques entre les nombres 6 et 9, nombres d'oranges, incitent à utiliser les propriétés de linéarité permettant d'exploiter ces relations. En choisissant des nombres premiers entre eux, par exemple 7 et 9, on dissuaderait l'utilisation de ces procédures.

Pour dissuader simultanément l'utilisation du coefficient de proportionnalité, c'est la relation entre le nombre d'oranges et la quantité de jus qu'il faut modifier, afin que le coefficient de proportionnalité soit moins évident pour des élèves de CM2, par exemple, on pourrait choisir 7 oranges donnent 336 mL.

L'énoncé serait modifié ainsi :

Il faut 7 oranges pour obtenir 336 mL de jus.
Quelle quantité de jus peut-on obtenir avec 9 oranges ?

Il n'existe pas de relation arithmétique simple entre 7 et 9 et la relation multiplicative entre les nombres 7 et 336 n'est pas évidente. Cela conduit donc à adopter une procédure systématisée (dite de passage par l'unité) : recherche du volume de jus obtenu pour une orange (7 fois moins que pour 7 oranges) puis recherche du volume de jus obtenu pour 9 oranges (9 fois plus que pour une orange).

SITUATION 2

1) Analyse des productions

Production A

Il tente d'approcher 98 avec deux additions et une soustraction.

Les deux additions sont posées en colonne et sont correctes. L'une des deux comporte une retenue, qui est correctement gérée.

La soustraction n'est pas correcte.

On peut faire l'hypothèse que celle-ci est pensée en termes d'écart : pour les unités, l'écart entre 0 et 0 est 0 ; pour les dizaines, l'écart entre 0 et 1 est 1. Il a alors pu interrompre son calcul, observant qu'il ne pourrait pas obtenir le résultat attendu.

L'élève semble avoir perçu que 98 était proche de 100 qu'il atteint par l'addition de 75 et 25.

Production B

Il tente d'approcher 98 par des additions successives.

Il les pose en colonne.

Celles qui sont terminées sont correctes, y compris celle avec retenue.

La dernière addition n'est pas terminée. On peut supposer que cet élève s'est aperçu qu'il ne pouvait pas atteindre un nombre se terminant par 8. L'addition non terminée et barrée ($75 + 10$) l'est peut-être aussi pour la même raison.

Le fait de n'avoir tenté que des additions peut laisser supposer qu'il ne maîtrise pas les autres opérations. L'élève ne semble pas avoir établi de stratégie puisqu'il obtient 75 par le calcul alors que le nombre était disponible dans la liste.

Production C

L'élève parvient à obtenir le nombre cible 98 en utilisant les nombres imposés.

Il additionne en ligne 75 et 25 d'une part ; il soustrait en ligne 10 et 8 d'autre part.

Puis il soustrait en ligne ses deux résultats.

Il est probable que cet élève ait repéré que 98 était proche de 100 et qu'il manquait 2. Il a trouvé comment faire 2 avec les nombres proposés ($10 - 8$).

En conclusion, on peut faire l'hypothèse que l'élève C a construit une stratégie en s'appuyant sur des faits numériques.

Production D

L'élève parvient à obtenir le nombre cible 98 en utilisant les nombres imposés.

Il obtient 100 en multipliant 25 par 4, puis 2 en soustrayant 8 à 10.

Enfin, il soustrait ses deux résultats.

Ses calculs sont effectués en ligne.

Comme pour l'élève C, on peut faire l'hypothèse que l'élève D a construit une stratégie en s'appuyant sur des faits numériques.

2) Faits numériques

Il faudrait interroger les élèves C et D pour savoir s'ils ont mobilisé des faits numériques mémorisés.

Pour l'addition de 75 et 25, on ne sait pas comment l'élève C a procédé : addition posée « dans sa tête » avec la retenue, ou décompositions canoniques des deux termes pour additionner les dizaines et les unités, ou connaissance de faits numériques mémorisés.

Pour l'élève D, on ne sait pas, là encore, comment il a procédé. Pour 25 multiplié par 4, ce peut être mentalement en faisant le double de 25, 50, et le double de 50, 100 ; cela peut être aussi la connaissance de ce fait numérique mémorisé mais il a aussi pu effectuer la multiplication posée « dans sa tête ».

3) Nouvel exercice

Remarque

Si on veut que les élèves mobilisent des connaissances sur les multiples de 9, il faut que les nombres proposés contiennent certains multiples de 9 ou des nombres qui permettent de former des multiples de 9 avant d'atteindre ou d'approcher la cible.

Le choix de la cible peut influer sur la reconnaissance de multiples de 9 et encourager leur utilisation.

Par exemple 936 peut être reconnu comme multiple de 9 en mobilisant la numération et les faits numériques (9×100 et 9×4).

Autre exemple : 814 peut être décomposé en $810 + 4$, 810 étant reconnu comme multiple de 9 à partir de la décomposition 81×10 .

On raisonnerait de même avec 723 ($720 + 3$).

Le choix d'une cible comme par exemple 784 nécessiterait des décompositions plus complexes pour établir une relation avec des multiples de 9.

Pour réinvestir la connaissance des multiples de 9, on pourrait proposer comme nombre cible 936 et les nombres à utiliser $9 - 100 - 27 - 18 - 2 - 4$.

Ainsi la cible peut être atteinte de plusieurs manières :

- $9 \times 100 = 900$; $18 \times 2 = 36$; $900 + 36 = 936$;
- $9 \times 100 = 900$; $18 : 2 = 9$; $27 + 9 = 36$; $900 + 36 = 936$;
- $4 \times 9 = 36$; $18 : 2 = 9$; $9 \times 100 = 900$; $900 + 36 = 936$;
- $100 + 4 = 104$; $104 \times 9 = 936$;
- ...

Autre proposition

Avec des nombres plus petits, on peut proposer comme nombre cible 80, et $9 - 5 - 27 - 4 - 36 - 8$ comme liste des nombres à utiliser.

Ainsi la cible peut être atteinte de plusieurs manières :

- $9 \times 5 = 45$; $45 + 27 = 72$; $72 + 8 = 80$;
- $9 \times 8 = 72$; $37 - 26 = 9$; $72 + 9 = 81$; $5 - 4 = 1$ et $81 - 1 = 80$;
- $27 + 36 = 63$; $63 + 9 + 8 = 80$;
- $36 - 27 = 9$; $9 \times 9 = 81$; $5 - 4 = 1$ et $81 - 1 = 80$;
- ...

4) Avantages et points de vigilance de l'activité le compte est bon dans l'apprentissage du calcul mental

Remarque

Dans une optique de formation, nous proposons ci-dessous plusieurs avantages. On rappelle au candidat que si l'énoncé demande deux avantages, il est important de se conformer à cette demande en se limitant au nombre demandé.

Avantages

- Cette activité permet aux élèves de faire un grand nombre de calculs en un temps limité et favorise ainsi, par entraînement, l'acquisition d'automatismes et la mémorisation de faits numériques.
- Le calcul en ligne permet de travailler sur les nombres en utilisant des propriétés de ces nombres ou des opérations : décomposition additive ou multiplicative, compléments à la dizaine ou à la centaine, commutativité et associativité de l'addition et de la multiplication, distributivité de la multiplication sur l'addition et la soustraction.
- Cette activité incite les élèves à rentrer dans une démarche de résolution de problème en établissant des étapes successives et en les communiquant ensuite.
- Si l'activité est complètement mentale, c'est-à-dire sans aucun support écrit, cela permet de travailler la capacité de la mémoire à court terme, par la mémorisation nécessaire des résultats intermédiaires.
- La diversité des procédures possibles permet de réaliser des mises en commun, donnant à chaque élève l'occasion de s'approprier les procédures des autres élèves, et ainsi de varier son répertoire de procédures personnelles.
- Cette activité permet de réinvestir de manière ludique les faits numériques ou les procédures vues dans des séances plus classiques de calcul.
- Cette activité motive la nécessité d'apprendre à être performant en calcul.

Points de vigilance

- Il est important de rester dans le champ numérique et les opérations maîtrisées des élèves, pour permettre aux élèves d'entrer dans l'activité et réaliser de nombreux essais.
- Le choix d'une activité sans aucun support écrit ou avec autorisation d'écrire des calculs intermédiaires doit être pensé en fonction des objectifs spécifiques assignés à l'activité : activer la mémoire des faits numériques ou travailler la mémoire de travail pour l'activité mentale. Sans support écrit, le risque est grand pour certains élèves de ne pas parvenir à enchaîner plusieurs étapes par manque de mémoire.
- Le choix du nombre cible et des nombres disponibles pour les calculs doivent permettre de réussir, et on doit pouvoir obtenir le résultat avec plusieurs procédures différentes dont certaines sont en lien avec l'objectif, pour être valorisées lors de mises en commun.

SITUATION 3

1) Calcul en ligne et calcul mental

Le calcul en ligne nécessite de mobiliser les propriétés des nombres et des opérations pour gérer les calculs de manière réfléchie, contrairement au calcul posé qui est algorithmisé. Il permet, comme dans le calcul mental, de construire des résultats intermédiaires, de convoquer des faits numériques mémorisés, de travailler sur des décompositions astucieuses des nombres en jeu pour simplifier les calculs. Les procédures personnelles peuvent être variées d'un élève à l'autre.

Le calcul en ligne permet aussi de soulager la mémoire de travail : pour certains élèves qui en ressentiraient le besoin, il permet d'écrire des étapes intermédiaires qui seraient trop lourdes à traiter sans support écrit tandis que pour d'autres, il peut permettre de proposer des calculs plus complexes dans lesquels les compétences développées en calcul mental pourront s'exercer.

Dans les écritures intermédiaires, le calcul en ligne permet de visualiser les différentes écritures, décompositions (additives, multiplicatives) des nombres.

Remarque

On lira avec profit le document ressources "Le calcul en ligne au cycle 3" téléchargeable sur le site d'Eduscol à l'adresse <https://eduscol.education.fr/cid101461/ressources-maths-cycle-3.html>.

2) Analyse de productions**Amina**

Elle a additionné les chiffres les plus à droite, puis en remontant ainsi de droite à gauche, elle a effectué l'addition chiffre par chiffre, sans tenir compte du rang dans l'écriture du nombre, comme pour l'addition posée de deux nombres entiers.

Elle a fait, dans un premier temps, comme si la virgule n'était pas présente.

Elle a écrit ses résultats à l'aide d'un arbre à calcul.

Pour produire le résultat final, elle a gardé 12 comme partie entière, puis a additionné les deux autres résultats pour former la partie décimale.

Elle a peut-être repéré que le premier nombre avait deux chiffres après la virgule et a donc écrit son résultat aussi avec deux chiffres après la virgule.

Cette élève n'obtient donc pas le bon résultat.

Tony

Il a mentalement décomposé 2,7 en 2 + 0,7.

Il a ensuite utilisé la propriété d'associativité de l'addition pour calculer d'abord $12,47 + 2$, puis il a ajouté 0,7 à son résultat.

La gestion des rangs et de la retenue est correctement effectuée, certainement de tête car il n'y a aucune trace de ce calcul.

Il obtient le bon résultat.

Zoé

Elle a additionné les parties entières ($12 + 2 = 14$), puis a traité les parties décimales chiffre par chiffre en partant de la gauche : l'addition des dixièmes $4 + 7 = 11$, et les centièmes, soit 7.

Elle a ensuite « assemblé » ces deux résultats pour produire la partie décimale 117.

Sa conception d'un nombre décimal est peut-être celle de deux entiers séparés par une virgule, elle ajouterait alors 47 et 70 pour la partie après la virgule.

Elle ne met pas en pratique le principe décimal de la numération qui conduit à décomposer 11 dixièmes en 1 unité et 1 dixième.

Elle n'obtient pas le bon résultat.

Ugo

Il a considéré séparément les parties entières et les parties décimales qu'il a additionnées comme s'il s'agissait de deux couples d'entiers : $12 + 2 = 14$ et $47 + 7 = 54$.

Il a ensuite « reconstitué » le résultat en « assemblant » les deux parties de part et d'autre de la virgule.

Son résultat n'est pas correct.

3) Étayage de l'enseignante pour Zoé

L'étayage devrait porter sur le principe de la numération décimale et notamment sur les deux principes fondamentaux :

- chaque chiffre correspond à une valeur selon son positionnement dans le nombre ;
- les unités de valeur sont reliées entre elles par des relations décimales ($10 \times \frac{1}{10} = 1$ par exemple) : 10 unités d'un ordre sont égales à 1 unité de l'ordre supérieur.

Les différents étayages possibles

- Pour aider Zoé à corriger son erreur, on peut lui demander de revenir à l'écriture fractionnaire des nombres en jeu,

$$\text{soit } 12 + \frac{4}{10} + \frac{7}{100} \quad \text{et} \quad 2 + \frac{7}{10}.$$

puis de réaliser l'addition à partir de ces écritures,

$$\text{soit } (12 + 2) + \left(\frac{4}{10} + \frac{7}{10}\right) + \frac{7}{100} = 14 + \frac{11}{10} + \frac{7}{100}.$$

Ensuite on pourrait demander à Zoé de décomposer $\frac{11}{10}$ canoniquement sous forme de somme de fractions décimales :

$$\frac{11}{10} = \frac{10}{10} + \frac{1}{10} = 1 + \frac{1}{10}.$$

On lui demande alors de terminer son calcul et de le confronter à son résultat.

On peut aussi reprendre l'écriture fractionnaire :

$$12,47 + 2,7 = \frac{1\,247}{100} + \frac{270}{100} = \frac{1\,517}{100} = 15,17.$$

- L'enseignante pourrait proposer d'oraliser et d'écrire les nombres sous la forme 12 unités, 4 dixièmes et 7 centièmes ; 2 unités et 7 dixièmes puis les ajouter et demander la transformation de 11 dixièmes en 1 unité et 1 dixième.
- On peut aussi proposer à Zoé de placer les nombres sur une droite graduée pour lui faire comprendre que les nombres décimaux ne sont pas deux entiers juxtaposés et en se déplaçant de 2,7 à partir de 12,47, s'apercevoir que l'on dépasse 15.
- On peut aussi s'appuyer sur du matériel et des représentations des fractions décimales pour permettre de visualiser les différentes unités de numération et les échanges à effectuer : comme par exemple des carrés de 10 par 10, des barres de 10 et des unités qui représenteraient l'unité, les dixièmes et les centièmes.
- On peut aussi suggérer à Zoé, pour prendre conscience du caractère erroné de son résultat, de le contrôler en le comparant à une estimation de celui attendu : $12,47 + 2,7 > 12 + 2,7$ donc le résultat attendu est supérieur à 14,7. Or $14,117 < 14,7$ donc le résultat obtenu est incorrect.
Cette attitude réflexive face aux calculs est à développer chez les élèves. Elle mobilise, en leur donnant du sens, différentes actions de l'activité mathématique : comparer, estimer, calculer. Sur l'exemple donné, il est probable que la comparaison des deux nombres déplace la difficulté pour l'élève. Cela renforce l'idée de la nécessité d'un travail sur le fondement de la construction des nombres décimaux et de leur écriture avec une virgule.

Remarque

D'autres manières de faire invalider le résultat de Zoé sont possibles, par exemple lui faire calculer cette addition à l'aide d'une calculatrice. Mais cette méthode, si elle permet à Zoé de savoir qu'elle a fait une erreur, ne lui permettrait pas forcément de la comprendre et la corriger.

GROUPEMENT 3 – avril 2019

PREMIERE PARTIE

A – Utilisation et interprétation de l'IMC chez l'adulte

Remarque

L'IMC est une grandeur quotient calculée en kg/m². Cependant, dans la vie courante, cet indice est généralement donné sans unité. C'est aussi souvent le cas dans l'énoncé de ce problème. Mais, pour des raisons de cohérence et de rigueur mathématique, nous l'indiquerons à chaque fois.

1) Calcul de l'IMC de Claire

On utilise la formule IMC = $\frac{P}{T^2}$ avec ici P = 53 kg et T = 1,6 m.

On calcule $\frac{53}{1,6^2} \approx 20,7$.

donc l'**IMC de Claire est d'environ 20,7 kg/m²**.

Cette valeur étant comprise entre 18,5 kg/m² et 25 kg/m², on peut dire que **Claire est de corpulence normale**.

2) a) Formule écrite en D2

Pour compléter le tableau, plusieurs formules peuvent être écrites en D2, par exemple :

$=B2/C2^2$ ou $=B2/(C2*C2)$ ou $=$B2/$C2^2$

Remarque

Une seule formule était demandée, il y a d'autres possibilités.

2) b) Pourcentage des hommes « obèses » ou « en surpoids » parmi les interrogés

Sur les 8 hommes interrogés, 3 ont un IMC supérieur à 25 kg/m².

Or $\frac{3}{8} = 0,375 = \frac{37,5}{100}$.

Donc **parmi les hommes interrogés, 37,5% sont en surpoids ou obèses**.

3) Calcul de la masse à perdre pour avoir un IMC de 25 kg/m²

Méthode 1 : recherche puis utilisation de la taille de la personne

Puisque IMC = $\frac{P}{T^2}$, on a $T^2 = \frac{P}{IMC} = \frac{70 \text{ kg}}{28 \text{ kg/m}^2} = 2,5 \text{ m}^2$.

On en déduit : $T = \sqrt{2,5} \text{ m}$.

Pour que l'IMC de la personne soit égale à 25 kg/m², il faut que sa nouvelle masse corporelle P' soit solution de l'équation :

$$25 \text{ kg/m}^2 = \frac{P'}{\sqrt{2,5}^2 \text{ m}^2}$$

c'est-à-dire $P' = 25 \text{ kg/m}^2 \times 2,5 \text{ m}^2 = 62,5 \text{ kg}$.

La personne doit donc peser 62,5 kg, soit 7,5 kg de moins que sa masse corporelle actuelle de 70 kg.

Pour avoir un IMC de 25 kg/m², la personne doit donc perdre 7,5 kg.

Méthode 2 : recherche directe de la nouvelle masse

Si on note P' la masse corporelle correspondant à un IMC de 25 kg/m², on doit avoir :

$$25 \text{ kg/m}^2 = \frac{P'}{T^2}$$

donc : $P' = 25 \text{ kg/m}^2 \times T^2$.

Or la masse actuelle P de la personne est de 70 kg et correspond à un IMC de 28 kg/m².

Donc on a : $28 \text{ kg/m}^2 = \frac{70 \text{ kg}}{T^2}$, d'où : $T^2 = \frac{70 \text{ kg}}{28 \text{ kg/m}^2}$.

On en déduit la valeur de P' :

$$P' = \frac{70 \text{ kg}}{28 \text{ kg/m}^2} \times 25 \text{ kg/m}^2 = 62,5 \text{ kg.}$$

La personne doit donc peser 62,5 kg, soit 7,5 kg de moins que sa masse corporelle actuelle de 70 kg.

Pour avoir un IMC de 25 kg/m², la personne doit donc perdre 7,5 kg.

Méthode 3 : utilisation du rapport constant $\frac{P}{IMC}$

Puisque $IMC = \frac{P}{T^2}$, on a $T^2 = \frac{P}{IMC}$.

Or, la taille T est invariable (pour la personne considérée), donc ce rapport reste constant.

Si on note P' la masse corporelle de la personne correspondant à un IMC de 25 kg/m², on doit avoir :

$$\frac{P'}{25 \text{ kg/m}^2} = \frac{70 \text{ kg}}{28 \text{ kg/m}^2} \quad \text{d'où } P' = \frac{70 \text{ kg}}{28 \text{ kg/m}^2} \times 25 \text{ kg/m}^2 = 62,5 \text{ kg.}$$

La personne doit donc peser 62,5 kg.

Puisqu'elle pèse actuellement 70 kg, **pour avoir un IMC de 25 kg/m², la personne doit perdre 7,5 kg.**

4) Masses minimale et maximale d'une personne de 1,72 m et de « corpulence normale »

L'IMC d'une personne de « corpulence normale » est comprise entre 18,5 kg/m² et 25 kg/m².

Si on note P la masse d'une telle personne mesurant 1,72 m, on aura :

$$18,5 \text{ kg/m}^2 \leq \frac{P}{1,72^2 \text{ m}^2} < 25 \text{ kg/m}^2$$

c'est-à-dire :

$$18,5 \text{ kg/m}^2 \times 1,72^2 \text{ m}^2 \leq P < 25 \text{ kg/m}^2 \times 1,72^2 \text{ m}^2$$

et donc :

$$54,7304 \text{ kg} \leq P < 73,96 \text{ kg.}$$

Pour avoir une « corpulence normale », une personne mesurant 1,72 m doit donc peser au minimum 54,730 kg et au maximum 73,960 kg.

Remarque

L'énoncé n'indique rien sur la précision attendue des nombres exprimant les masses. Nous faisons le choix de donner un encadrement avec des valeurs approchées au gramme près des valeurs maximales et minimales. Soulignons néanmoins que, dans les pratiques courantes, on pourra considérer qu'une personne est de « corpulence normale » lorsque sa masse corporelle est approximativement comprise entre 55 kg et 74 kg.

B – L'obésité et le surpoids en France

Remarques préliminaires

- D'après sa définition mathématique, une probabilité est un nombre compris entre 0 et 1. On la donne généralement sous forme d'écriture décimale ou fractionnelle. Ici, on nous demande de donner un pourcentage, qui n'est pas un « nombre » à proprement parler : on assimilera donc « un centième » à « un pour cent », confusion fréquente dans « la vie courante ».
- L'énoncé dit que « la répartition de la population pouvant être appelée est dans la même proportion que celle de l'échantillon ». Cela semble signifier que, pour chacune des catégories étudiées, le rapport entre son effectif au sein de l'échantillon et l'effectif total de l'échantillon, est égal au rapport entre son effectif dans la population pouvant être appelée et l'effectif total de cette population. Autrement dit, on considère que l'échantillon étudié est représentatif de la population pouvant être appelée et que les résultats statistiques de cette étude sur un échantillon peuvent être considérés comme des probabilités relatifs à la population globale.

1) Probabilité d'appeler une personne en surpoids ou obèse

Parmi les 25 714 personnes de l'échantillon étudié, le nombre de personnes en surpoids ou obèses est :
 $3\ 551 + 4\ 739 + 2\ 119 + 1\ 747 = 12\ 156$.

Le rapport entre l'effectif de ces personnes et l'effectif total de l'échantillon est donc : $\frac{12\ 156}{25\ 714} \approx 0,4727$.

Dans l'échantillon, environ 47 % des personnes sont « en surpoids » ou « obèses ».

L'énoncé suppose que « la répartition de la population pouvant être appelée est dans la même proportion que celle de l'échantillon », donc, dans la population pouvant être appelée, il y a environ 47 % de personnes en surpoids ou obèses.

Puisqu'on appelle une personne « au hasard », il s'agit d'une situation d'équiprobabilité.

La probabilité d'appeler une personne en surpoids ou obèse est donc d'environ 47 %.

2) Probabilité que l'homme appelé soit en surpoids ou obèse

Sur les 12 214 hommes de l'échantillon, 4 739 + 1 747 sont en surpoids ou obèses, ce qui correspond à un rapport de :

$$\frac{4\ 739 + 1\ 747}{12\ 214} \approx 0,5310.$$

Donc, sachant qu'on a appelé un homme, la probabilité que celui-ci soit obèse ou en surpoids est d'environ 53 %.

3) Probabilité que la personne obèse appelée soit un homme

Dans l'échantillon il y a 2 119 femmes obèses et 1 747 hommes obèses, soit au total 3 866 personnes obèses. Donc le rapport entre le nombre d'hommes obèses et le nombre de personnes obèses est :

$$\frac{1\ 747}{3\ 866} \approx 0,4519.$$

Si on a appelé une personne obèse, la probabilité que celle-ci soit un homme est d'environ 45 %.

4) Validité de l'affirmation : « plus de $\frac{1}{6}$ de la population de l'échantillon est obèse »

Une personne prétend que plus de $\frac{1}{6}$ de la population de l'échantillon est obèse.

Méthode 1 : comparaison des rapports

D'après la question précédente, dans l'échantillon il y a 25 714 personnes parmi lesquelles 3 866 sont obèses. La proportion de personnes obèses dans cet échantillon est donc :

$$\frac{3\ 866}{25\ 714} \approx 0,1503.$$

Or $\frac{1}{6} \approx 0,1667$ donc les personnes obèses correspondent à moins d'un sixième de la population totale.

La personne a tort.

Méthode 2 : on suppose qu'il y a un sixième de personnes obèses dans l'échantillon et on compare les effectifs réels et théoriques

Méthode 2a : calcul de l'effectif de l'échantillon qui correspondrait

Dans l'échantillon, il y a au total 3 866 personnes obèses.

Si ces personnes constituaient $\frac{1}{6}$ de l'échantillon, il y aurait $6 \times 3\ 866$ personnes dans l'échantillon, c'est-à-dire 23 196 personnes.

Or, l'échantillon réel contient 25 714 personnes, soit davantage que 23 196.

Les personnes obèses constituent donc moins d'un sixième de l'échantillon.

La personne a tort.

Méthode 2b : calcul de l'effectif de la population qui serait alors obèse dans l'échantillon

Dans l'échantillon, il y a au total 25 714 personnes.

On a $\frac{25\ 714}{6} \approx 4\ 286$ donc $\frac{1}{6}$ de l'échantillon correspond à un effectif d'environ 4 286 personnes.

Or il n'y a que 3 866 personnes obèses dans cet échantillon, donc la personne a tort.

C – Utilisation et interprétation de l'IMC chez l'enfant

1) L'IMC et l'âge d'un enfant sont-ils proportionnels ?

Remarque préliminaire

Dans cette question, il s'agit d'utiliser le graphique pour parler de l'IMC « chez l'enfant ».

Or, alors que ce graphique montre plusieurs courbes, seule la courbe de l'IMC d'Emma est celle d'un enfant « réel ». Les autres sont des courbes théoriques « moyennes » qui ne correspondent donc, de fait, à aucun enfant. Pour pouvoir répondre il faut donc :

- soit considérer que le cas d'Emma peut être généralisé à « tout enfant » (le cas d'Emma est alors « un exemple générique ») ;
- soit considérer que, pour tout enfant, l'une des courbes « théoriques » donnera une bonne approximation de l'évolution de son IMC en fonction de son âge.

Cette seconde hypothèse semble légitime car toutes ces courbes ont sensiblement « la même forme ». On peut donc supposer que toute courbe représentant l'évolution de l'IMC d'un enfant donné en fonction de son âge aura globalement cette « même forme », quel que soit l'enfant considéré. C'est notamment le cas pour la courbe de l'IMC d'Emma qui est en général « proche » de la courbe « centrale » de la zone grise.

L'énoncé ne donnant aucune indication sur l'hypothèse à utiliser, nous proposerons les deux raisonnements pour chaque méthode.

NB : le cas d'Emma peut fournir un contre-exemple à l'affirmation générale « l'IMC d'un enfant est toujours proportionnel à son âge » mais ne permet pas d'affirmer ce qui semble être la réponse attendue : « l'IMC d'un enfant n'est jamais proportionnel à son âge ».

Méthode 1 : utilisation de « la forme » du graphique

Dans une situation de proportionnalité, la fonction donnant l'une des variables en fonction de l'autre est une fonction linéaire et sa représentation graphique est une droite (passant par l'origine du repère).

Méthode 1a : avec le cas d'Emma considéré comme « cas générique »

Sur le graphique la courbe représentant l'IMC d'Emma en fonction de son âge n'est pas une droite, donc l'IMC d'Emma n'est pas proportionnel à son âge.

Donc, chez l'enfant, l'IMC n'est pas proportionnel à l'âge.

Méthode 1b : avec les courbes « théoriques »

Sur le graphique donné, aucune des courbes représentant l'IMC théorique en fonction de l'âge (maximum, minimum, moyenne, ...) n'est une droite.

Donc, chez l'enfant, l'IMC n'est pas proportionnel à l'âge.

Méthode 2 : utilisation de la valeur initiale de l'IMC

Dans une situation de proportionnalité, si l'une des variables est nulle, l'autre l'est aussi.

Remarque

Le poids d'un enfant à la naissance étant toujours non nul, l'IMC ne peut pas être nul. Cet argument seul permet de conclure mais l'énoncé demande d'utiliser le graphique.

Méthode 2a : avec le cas d'Emma considéré comme « cas générique »

L'IMC de Emma à 0 an (à sa naissance) est différent de 0 : il est environ égal à 13,5 kg/m², donc l'IMC d'Emma n'est pas proportionnel à son âge.

Donc, chez l'enfant, l'IMC n'est pas proportionnel à l'âge.

Méthode 2b : avec les courbes « théoriques »

Quand l'âge d'un enfant est égal à 0 (à la naissance) son IMC n'est pas égal à 0 : sur le graphique, il n'est pas envisagé qu'il soit inférieur à 11 kg/m^2 .

Donc, chez l'enfant, l'IMC n'est pas proportionnel à l'âge.

Méthode 3 : utilisation de valeurs particulières lues sur le graphique

Si deux grandeurs sont proportionnelles, le rapport entre deux valeurs correspondantes est constant (égal au coefficient de proportionnalité).

Remarque

Dans le cas d'une lecture graphique, cette méthode est peu pertinente car plus complexe que les précédentes. Elle est néanmoins correcte.

Méthode 3a : avec le cas d'Emma considéré comme « cas générique »

On peut lire sur le graphique, par exemple, que l'IMC d'Emma à 2 ans valait environ 16 kg/m^2 et qu'à 3 ans il valait environ 15 kg/m^2 .

Les deux rapports $\frac{16}{2} = 8$ et $\frac{15}{3} = 5$ ne sont pas égaux.

Donc l'IMC d'Emma n'est pas proportionnel à son âge.

Donc, chez l'enfant, l'IMC n'est pas proportionnel à l'âge.

Méthode 3b : avec les courbes « théoriques »

On considère, par exemple, la valeur maximale de l'IMC pour une corpulence normale.

On lit sur la courbe supérieure de la partie grisée du graphique que l'IMC d'un enfant de 1 an est d'environ 20 kg/m^2 et que celle d'un enfant de 7 ans vaut environ 18 kg/m^2 .

Les deux rapports $\frac{20}{1}$ et $\frac{18}{7}$ ne sont pas égaux.

Donc chez l'enfant, l'IMC n'est pas proportionnel à l'âge.

2) Lectures graphiques

2) a) IMC maximum d'une fille de 12 ans non considérée « en surpoids »

On lit sur la courbe « supérieure » de la partie grisée la valeur de l'IMC correspondant à 12 ans : sur cette courbe, le point d'abscisse 12 a pour ordonnée 22.

Donc l'IMC maximum d'une fille de 12 ans non considérée « en surpoids » est 22 kg/m^2 .

2) b) IMC d'une fille de 7 ans « de corpulence normale »

On lit sur les courbes « inférieure » et « supérieure » de la partie grisée les valeurs de l'IMC correspondant à 7 ans : les points d'abscisse 7 ont pour ordonnée environ 13 et environ 18 respectivement sur chacune de ces deux courbes.

Pour être considérée « de corpulence normale », une fille de 7 ans doit avoir un IMC compris environ entre 13 kg/m^2 et 18 kg/m^2 .

2) c) Âge minimum d'une fille considérée « en insuffisance pondérale » avec un IMC de 15 kg/m^2

La courbe « inférieure » de la zone grisée passe « au-dessus » de la droite d'équation $y = 15$ en un point d'abscisse approximative 13,5.

Une fille avec un IMC de 15 kg/m^2 sera considérée « en insuffisance pondérale » au-delà de 13,5 ans (13 ans et demi).

3) Lecture de l'IMC d'Emma

La courbe représentant l'IMC d'Emma est au-dessous de la droite d'équation $y = 16$ sur deux intervalles : lorsque l'abscisse x est inférieure à 0,5, et lorsqu'elle est comprise entre 2 et 10.

Emma a eu un IMC inférieur à 16 kg/m^2 lorsqu'elle avait moins de 6 mois puis entre 2 et 10 ans.

D – Alimentation

1) Valeurs nutritionnelles du goûter de Frédéric

Puisque Frédéric mange 30 g de gâteau et boit 200 mL de soda, on complète le tableau en multipliant les valeurs nutritionnelles de 100 g de gâteau par $\frac{30}{100}$ (ou 0,3) et celles de 100 mL de soda par 2.

Valeurs nutritionnelles moyennes pour le goûter de Frédéric	1 portion de 30 g de gâteau	200 mL de soda	Total
Matières grasses (lipides) dont matières grasses saturées	4,8 g 1,86 g	0 g 0 g	4,8 g 1,86 g
Glucides dont sucres	16,2 g 12,6 g	29,4 g 29,4 g	45,6 g 42 g
Protéines	1,65 g	0 g	1,65 g

2) a) Apport énergétique du sucre contenu dans le goûter de Frédéric

Remarque

L'apport énergétique apporté par le sucre est proportionnel à la masse de sucre absorbée. On peut donc utiliser toutes les propriétés relatives aux situations de proportionnalité. De plus, dans cette question, les nombres en jeu sont tels que les calculs peuvent être faits mentalement.

Méthode 1 : utilisation de la propriété multiplicative de la linéarité

Une masse de 6 g de sucre correspond à un apport énergétique de 24 Kcal, donc 42 g de sucre (7×6 g) correspondent à 168 Kcal (7×24 Kcal).

Le sucre contenu dans le goûter de Frédéric lui fournit un apport énergétique de 168 Kcal.

Méthode 2 : utilisation du coefficient de proportionnalité

Une masse de 6 g de sucre correspond à un apport énergétique de 24 Kcal.

Puisque $24 = 6 \times 4$, le coefficient de proportionnalité permettant de calculer l'apport énergétique à partir de la masse de sucre est 4.

Or, $42 \times 4 = 168$, donc 42 g de sucre correspondent à 168 Kcal.

Le sucre contenu dans le goûter de Frédéric lui fournit un apport énergétique de 168 Kcal.

Méthode 3 : utilisation du « retour à l'unité »

Puisque 6 g de sucre apportent 24 Kcal, alors 1 g de sucre apporte 4 Kcal (« 6 fois moins ») et 42 g de sucre apportent 168 Kcal (« 42 fois plus »).

Le sucre contenu dans le goûter de Frédéric lui fournit un apport énergétique de 168 Kcal.

2) b) Nombre de morceaux de sucre correspondant à la masse maximale de sucre que devrait consommer Frédéric

L'apport énergétique en sucre ne devrait pas dépasser 10 % de l'apport énergétique quotidien qui, pour Frédéric est de 1 985 Kcal. Donc cet apport énergétique maximal en sucre est de 198,5 Kcal.

Or, un morceau de sucre apporte 24 Kcal et $\frac{198,5}{24} \approx 8,27$.

On en déduit que la masse de sucre que Frédéric ne devrait pas dépasser quotidiennement est celle contenue dans environ 8,3 morceaux (arrondi au 10ème).

Remarque

L'énoncé n'indique pas la précision attendue du résultat. On pourrait penser qu'un nombre de morceaux de sucre est nécessairement un nombre entier mais il ne s'agit pas ici de donner concrètement 8,3 morceaux de sucre. La traduction d'une masse de sucre en nombre de morceaux de sucre peut néanmoins permettre de « visualiser » la quantité de sucre à ne pas dépasser.

2) c) Pourcentage des apports quotidiens apportés par le sucre du goûter de Frédéric

D'après 2) a) on sait que le sucre contenu dans son goûter apporte 168 Kcal à Frédéric et, d'après l'énoncé de 2) b), que l'apport énergétique quotidien qui lui est recommandé est 1 985 Kcal.

Le rapport entre les deux est :

$$\frac{168}{1\,985} \approx 0,08463.$$

Donc le sucre de son goûter apporte à Frédéric environ 8,46 % de l'apport énergétique quotidien recommandé.

DEUXIÈME PARTIE

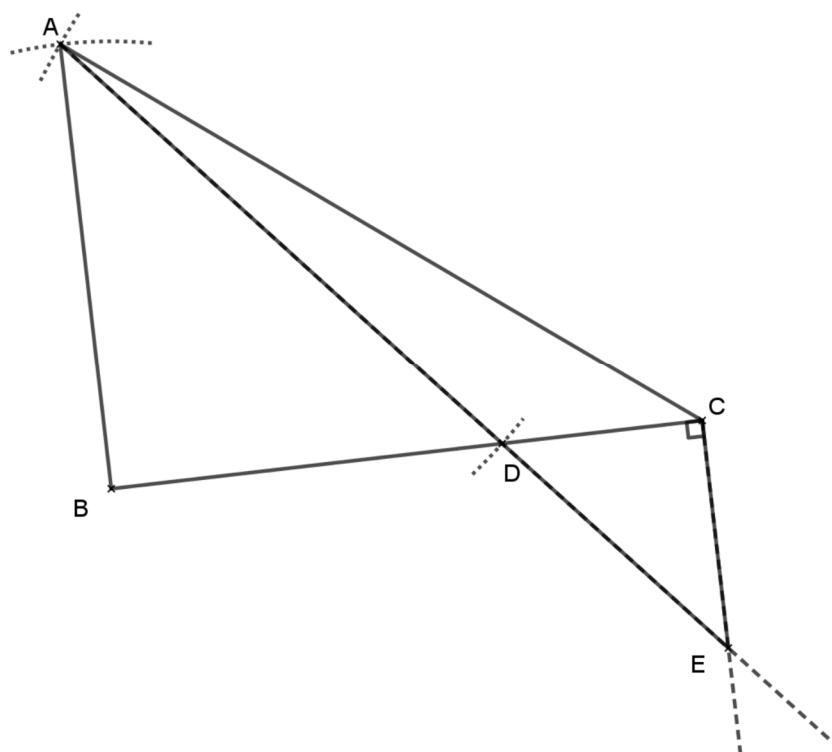
EXERCICE 1

Remarques

À partir de la 2^{ème} question, l'exercice demande de calculer des longueurs et des aires. Les données initiales sont des nombres entiers mais ce n'est pas le cas des nombres cherchés. Or, l'énoncé ne nous donne aucune indication sur la précision attendue des résultats : dans ce corrigé, nous donnerons donc toujours les valeurs exactes.

Afin de ne pas alourdir le texte du corrigé de cet exercice, dans tous les calculs, nous remplacerons XY non par la longueur du segment [XY] mais par la mesure de cette longueur avec pour unité le cm.

1) Perpendicularité des droites (AB) et (BC)



Le plus long côté du triangle ABC est [AC].

On a : $AC^2 = 10^2 = 100$.

Et $AB^2 + BC^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$.

On constate que $AB^2 + BC^2 = AC^2$ donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en B.

Donc, les droites (AB) et (BC) sont perpendiculaires.

Remarque

On peut savoir que le triplet (3 ; 4 ; 5) et tous ses multiples sont des « triplets pythagoriciens », donc (6 ; 8 ; 10) est un triplet pythagoricien, ce qui implique que le triangle ABC ayant pour longueur de côtés 6 cm, 8 cm et 10 cm est un triangle rectangle.

2) Calcul de la longueur BD

Dans le rectangle ABD, rectangle en B, on applique le théorème de Pythagore.

On a : $AD^2 = AB^2 + BD^2$.

D'où : $BD^2 = AD^2 - AB^2 = 8^2 - 6^2 = 64 - 36 = 28$.

On en déduit : $BD = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$.

Ainsi, la longueur BD est égale à $2\sqrt{7}$ cm.

3) Calcul de la longueur CE

Puisque les droites (AB) et (CE) sont perpendiculaires à (BC), elles sont parallèles entre elles.

D'autre part, les droites (BC) et (CE) sont sécantes en D.

Donc, d'après le théorème de Thalès, on a :

$$\frac{DE}{DA} = \frac{DC}{DB} = \frac{CE}{AB}$$

Or, $AB = 6$, $DB = 2\sqrt{7}$ et $DC = BC - BD = 8 - 2\sqrt{7}$ (car D est un point du segment [BC]).

$$\text{Donc : } \frac{CE}{6} = \frac{8 - 2\sqrt{7}}{2\sqrt{7}} .$$

$$\text{D'où } CE = 6 \times \frac{8 - 2\sqrt{7}}{2\sqrt{7}} = 3 \times \frac{8 - 2\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{24 - 6\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{24\sqrt{7}}{7} - 6 .$$

Soit $CE \approx 3,07$.

Ainsi, la longueur CE est égale à $\left(\frac{24\sqrt{7}}{7} - 6\right)$ cm (soit environ 3,1 cm arrondi au 10ème).

Remarque :

La forme du résultat n'étant pas imposée, on peut aussi répondre, par exemple, que CE est égale à $\frac{24 - 6\sqrt{7}}{\sqrt{7}}$ cm

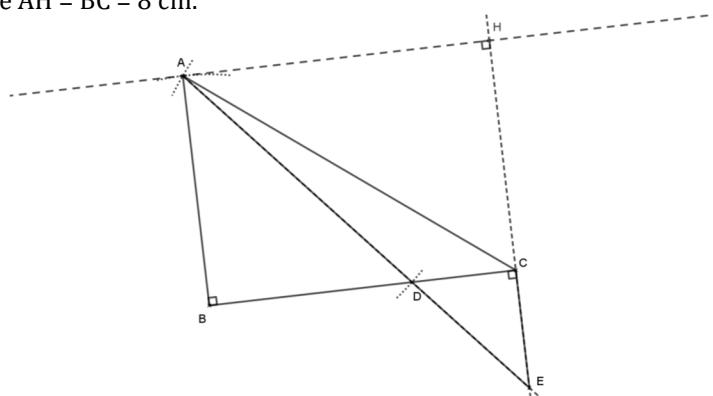
ou à $\frac{24\sqrt{7} - 42}{7}$ cm.

4) Calcul de l'aire du triangle ACE

Méthode 1 : calcul direct de l'aire du triangle ACE

Dans le triangle ACE, la hauteur relative au côté [CE] est la perpendiculaire à (CE) passant par A.

Si on note H le pied de cette hauteur, le quadrilatère AHCB a trois angles droits, donc c'est un rectangle. On en déduit que $AH = BC = 8$ cm.



Puisque le segment [AH] est la hauteur relative au côté [CE] du triangle ACE, on a :

$$\text{Aire (ACE)} = \frac{CE \times AH}{2} = \left(\frac{24\sqrt{7}}{7} - 6\right) \times \frac{8}{2} = \frac{96\sqrt{7}}{7} - 24 \approx 12,28.$$

L'aire du triangle ACE est donc égale à $\left(\frac{96\sqrt{7}}{7} - 24\right)$ cm² (soit environ 12,3 cm²).

Méthode 2 : décomposition de l'aire du triangle ACE en somme des aires de deux triangles

L'aire du triangle ACE est égale à la somme de l'aire du triangle ADC et de l'aire du triangle DCE.

Dans le triangle ADC, la hauteur issue de A est [AB] car (AB) et (BC) sont perpendiculaires (d'après 1)),

$$\text{donc Aire (ADC)} = \frac{DC \times AB}{2}.$$

$$\text{Le triangle DCE est rectangle en C, donc Aire (DCE)} = \frac{EC \times DC}{2}.$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}\text{Aire (ACE)} &= \frac{\text{DC} \times \text{AB}}{2} + \frac{\text{EC} \times \text{DC}}{2} \\ &= \frac{\text{DC}}{2} \times (\text{AB} + \text{EC}) \\ &= \frac{(8 - 2\sqrt{7})}{2} \times \left[6 + \left(\frac{24\sqrt{7}}{7} - 6 \right) \right] \\ &= \frac{12}{7} \times (8\sqrt{7} - 14). \\ \text{Aire (ACE)} &= \frac{96\sqrt{7}}{7} - 24 \approx 12,28.\end{aligned}$$

L'aire du triangle ACE est égale à $\left(\frac{96\sqrt{7}}{7} - 24 \right)$ cm², soit environ 12,3 cm².

Remarque

Puisque l'énoncé ne dit rien sur la forme du résultat attendu, la simplification des écritures avec quotients et racines carrées n'est pas nécessaire.

On pourrait donc admettre comme réponse, par exemple :

$$\text{Aire (ABC)} = \frac{(8 - 2\sqrt{7}) \times 6}{2} + \frac{\left(\frac{24\sqrt{7}}{7} - 6 \right) \times (8 - 2\sqrt{7})}{2} \approx 12,28.$$

En outre, pour cette question, il est possible que les correcteurs de l'épreuve aient accepté dans les calculs l'utilisation de valeurs approchées des longueurs obtenues dans les questions précédentes.

EXERCICE 2

2) $30n + 25$ est divisible par 5

Pour tout entier n , on peut écrire : $30n + 25 = 5 \times (6n + 5)$.

Comme n est un nombre entier, $6n + 5$ est aussi un nombre entier.

On en déduit que $30n + 25$ est divisible par 5, pour tout n .

2) a) Vérification du résultat du programme lorsque le nombre choisi est 8

Voici les différentes étapes du programme de calcul lorsque que le nombre entier choisi est 8.

Instruction du programme	Résultat et/ou calcul effectué
Choisir un nombre entier	8
Multiplier par 3	$8 \times 3 = 24$
Ajouter 5	$24 + 5 = 29$
Élever au carré	$29^2 = 841$
Soustraire 9 fois le carré du nombre de départ	$841 - 9 \times 8^2 = 841 - 576 = 265$

Si le nombre entier choisi est 8, le résultat est bien 265.

2) b) Résultat du programme lorsque le nombre entier choisi est (-56)

Voici les différentes étapes du programme de calcul lorsque que le nombre entier choisi est (-56).

Instruction du programme	Résultat et/ou calcul effectué
Choisir un nombre entier	-56
Multiplier par 3	$-56 \times 3 = -168$
Ajouter 5	$-168 + 5 = -163$
Élever au carré	$(-163)^2 = 26\ 569$
Soustraire 9 fois le carré du nombre de départ	$26\ 569 - 9 \times (-56)^2 = 26\ 569 - 28\ 224 = -1\ 655$

Si le nombre entier choisi est (-56), le résultat est (-1 655).

2) c) Divisibilité par 5 du résultat du programme

Voici les différentes étapes du programme de calcul lorsque que le nombre entier choisi est n .

Instruction du programme	Résultat et/ou calcul effectué
Choisir un nombre entier	n
Multiplier par 3	$3n$
Ajouter 5	$3n + 5$
Élever au carré	$(3n + 5)^2$
Soustraire 9 fois le carré du nombre de départ	$(3n + 5)^2 - 9n^2$

Si le nombre choisi est n , le résultat du programme de calcul est donc $(3n + 5)^2 - 9n^2$.

On transforme l'écriture de cette expression.

Méthode 1 : développement de l'expression donnant le résultat

On a : $(3n + 5)^2 - 9n^2 = (3n + 5)(3n + 5) - 9n^2 = (9n^2 + 15n + 15n + 25) - 9n^2 = 30n + 25$.

Le résultat du programme de calcul est donc $30n + 25$.

D'après la question 1), on sait que ce nombre est divisible par 5 quel que soit le nombre entier n ,

donc **le résultat du programme est divisible par 5 quel que soit le nombre de départ**.

Remarque

Dans le calcul précédent, l'utilisation du produit remarquable $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ permet d'écrire directement $(3n + 5)^2 - 9n^2 = (9n^2 + 30n + 25) - 9n^2 = 30n + 25$.

Méthode 2 : factorisation de l'expression donnant le résultat

On utilise le produit remarquable $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.

On a : $(3n + 5)^2 - 9n^2 = (3n + 5)^2 - (3n)^2 = (3n + 5 + 3n)(3n + 5 - 3n) = (6n + 5) \times 5$.

Ce nombre est toujours un multiple de 5.

Le résultat du programme de calcul est divisible par 5 quel que soit le nombre de départ.

EXERCICE 3

1) Programme permettant de tracer le dessin

Le programme qui permet de tracer ce dessin est le **programme C**.

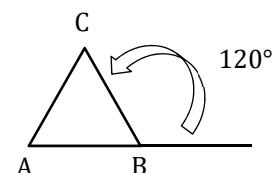
2) Justification de la valeur de l'angle de rotation

Les triangles qui composent cette figure sont des triangles équilatéraux (tous les segments tracés par le programme sont de même longueur L) et l'on sait que les angles d'un triangle équilatéral sont tous égaux à 60 degrés.

Le choix qui est fait par le programme est de commencer la construction de chaque triangle à partir du sommet « en bas à droite » (B sur le schéma ci-contre).

Par conséquent, l'objet « chat » étant initialement orienté « vers la droite », il doit effectuer une rotation de $180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ avant d'effectuer le tracé [BC].

Il en est de même lorsqu'il arrive au sommet C puis en A.



3) Tracé à main levée des figures obtenues avec chacun des programmes non retenus

Remarque

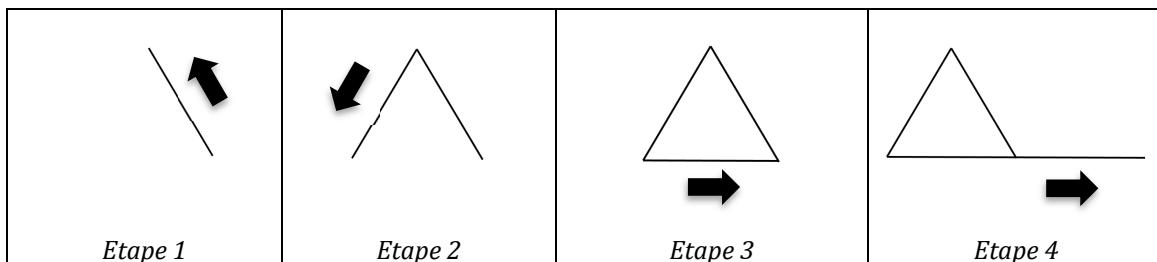
Ni le détail des actions réalisées par le programme, ni les justifications n'étaient attendus. Nous les donnons ici pour une meilleure compréhension du candidat.

Programme A :

Les instructions du langage *Scratch* correspondent aux actions suivantes :



Par conséquent, après avoir demandé à l'utilisateur de fixer une valeur pour L, le programme fait orienter le stylo à 120° dans le sens anti-horaire et tracer un segment de longueur L (*étape 1*), orienter le stylo à 120° dans le sens anti-horaire et tracer un segment de longueur L (*étape 2*), orienter le stylo à 120° dans le sens anti-horaire et tracer un segment de longueur L (*étape 3*) puis tracer un segment de longueur L (*étape 4*).



Ces quatre étapes sont répétées quatre fois.

On en déduit que le programme A fait tracer quatre triangles équilatéraux et un segment de longueur L comme ci-dessous :



Programme B

Les instructions du langage *Scratch* correspondent aux actions suivantes :

Mise en mode écriture du lutin.

La boucle de tracé d'un triangle suivi du tracé d'un segment de longueur L est répétée 4 fois.



Fixer une valeur pour L.

Exécution du tracé d'un triangle : répéter 3 fois, changement d'orientation du stylo de 120° dans le sens anti-horaire et tracé d'un segment de longueur L.

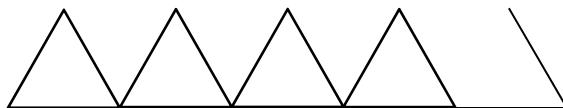
Exécution du tracé d'un segment de longueur L.

Changement d'orientation du stylo de 120° dans le sens anti-horaire et tracé d'un segment de longueur.

Par conséquent, après avoir demandé à l'utilisateur de fixer la valeur de L, comme le programme A, le programme B fait orienter le stylo à 120° dans le sens anti-horaire et tracer un segment de longueur L (*étape 1*), orienter le stylo à 120° dans le sens anti-horaire et tracer un segment de longueur L (*étape 2*), orienter le stylo à 120° dans le sens anti-horaire et tracer un segment de longueur L (*étape 3*) puis tracer un segment de longueur L (*étape 4*).

Comme dans le programme A, ces quatre étapes sont répétées quatre fois mais ensuite le programme fait orienter le stylo à 120° dans le sens anti-horaire et tracer un segment de longueur L.

On en déduit que le programme B fait tracer quatre triangles équilatéraux et deux segments de longueur L comme ci-dessous :

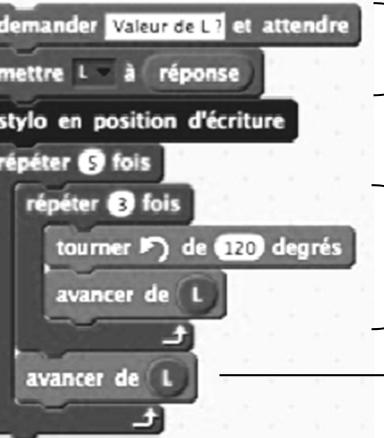


Programme C

Les instructions du langage *Scratch* correspondent aux actions suivantes :

Mise en mode écriture du lutin.

La boucle de tracé d'un triangle suivi du tracé d'un segment de longueur L est répétée 5 fois.



Fixer une valeur pour L.

Exécution du tracé d'un triangle : répéter 3 fois, changement d'orientation du stylo de 120° dans le sens anti-horaire et tracé d'un segment de longueur L.

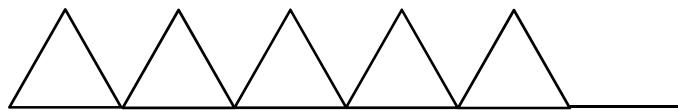
Exécution du tracé d'un segment de longueur L.

Par conséquent, après avoir demandé à l'utilisateur de fixer la valeur de L, comme les programmes A et B, le programme D fait orienter le stylo à 120° dans le sens anti-horaire et tracer un segment de longueur L (*étape 1*), orienter le stylo à 120° dans le sens anti-horaire et tracer un segment de longueur L

(étape 2), orienter le stylo à 120° dans le sens anti-horaire et tracer un segment de longueur L (étape 3) puis tracer un segment de longueur L (étape 4).

Ces quatre étapes sont répétées cinq fois.

On en déduit que le programme D fait tracer cinq triangles équilatéraux et un segment de longueur L comme ci-dessous :



TROISIÈME PARTIE

SITUATION 1

1) Compétences mobilisées pour résoudre ce problème : modéliser et calculer

Modéliser

La compétence « modéliser » est mobilisée ici puisque les élèves sont amenés à passer d'une situation réelle ou de la vie courante (comparaison de sommes d'argent) à la résolution d'un problème en utilisant un modèle mathématique adéquat (ici la soustraction).

Pour le résoudre, l'élève doit comprendre l'énoncé, interpréter les données fournies (24 et 8) et, au regard de la question posée, les mettre en relation avec le résultat cherché par un calcul pertinent.

Remarque

Selon la typologie de Vergnaud, il s'agit ici d'un problème de comparaison d'états avec une comparaison positive (« de plus »).

Calculer

L'élève mobilise aussi la compétence « calculer » puisqu'il doit ensuite chercher la différence entre 8 et 24. Pour cela, diverses procédures de calcul, plus ou moins expertes, sont utilisables.

Il peut aussi tester les différentes réponses proposées (8, 32, 15, ...), ce qui peut l'amener alors à effectuer des additions.

2) Deux difficultés que les élèves pourraient rencontrer

Les élèves peuvent rencontrer différentes difficultés. Citons deux types de difficultés :

Des difficultés liées au choix de l'énoncé

- La présence du mot « plus » dans l'énoncé peut amener les élèves à recourir à l'addition pour résoudre le problème alors qu'il faut ici utiliser la soustraction. La présence de ce mot « inducteur » constitue donc une première difficulté.
- Les élèves pourraient également avoir des difficultés à identifier lequel des deux enfants a « le plus d'argent » ou « le moins ». En effet, la phrase « Il a 8 euros de plus que Lilou » doit être interprétée correctement pour pouvoir en déduire que c'est Léo qui a le plus d'argent.

Des difficultés liées au calcul

Les élèves peuvent aussi être confrontés à des difficultés liées au calcul à effectuer (qu'il soit mental, en ligne ou posé) : il s'agit ici de rechercher une différence, ce qui, a priori, est une tâche moins maîtrisée qu'effectuer une addition, d'autant plus qu'il y a ici un « passage » de dizaine (avec une retenue dans le cas de la soustraction posée).

Même si les élèves choisissent de tester les valeurs proposées (8, 32, 15, ...), ils peuvent éprouver des difficultés à effectuer les différentes soustractions (24 – 8, 24 – 15, ...) ou additions (8 + 8, 8 + 32, 8 + 15, ...). à réaliser.

3) a) Analyse de la trace écrite de chacun des travaux présentés (procédures suivies, compétences mises en œuvre, erreurs éventuelles)

Kiara

La procédure suivie par Kiara consiste à écrire une opération en ligne. Elle met en œuvre des compétences liées au calcul mental d'une addition écrite en ligne (le résultat est exact). Sa procédure est erronée puisque cette élève modélise le problème par une addition. En effet, elle ajoute les deux nombres figurant dans l'énoncé (alors qu'il fallait soustraire 8 à 24). Peut-être a-t-elle été influencée par la présence du mot inducteur « de plus » dans l'énoncé.

Lucas

La procédure suivie par Lucas consiste à représenter les sommes évoquées dans l'énoncé sous forme de pièces de monnaie et billets pour ensuite calculer la somme totale. Il met en œuvre des compétences liées à

la représentation de sommes d'argent (il décompose les nombres selon des valeurs de pièces et de billets qui existent) et des compétences liées au calcul mental d'une addition (le résultat est exact).

Mais sa procédure est erronée puisqu'il ajoute les données au lieu de les soustraire, peut-être influencé lui aussi par la présence du mot inducteur « de plus » dans l'énoncé. D'autre part, la représentation des deux sommes d'argent 24 € et 8 € dans des sortes de « porte-monnaie » peut laisser penser qu'il attribue chacune d'elles à un enfant. Or, si Léo possède bien 24 €, on ne connaît pas la somme possédée par Lilou puisque c'est précisément la question posée.

Maya

La procédure de Maya consiste à soustraire 8 de 24. Pour effectuer ce calcul, elle écrit 24 puis enlève 4 (elle écrit alors 20) et encore 4 (elle écrit 16). Ces soustractions successives sont représentées par des flèches (une entre 24 et 20 et une autre entre 20 et 16) et Maya barre au fur et à mesure les nombres écrits comme pour mieux visualiser les résultats successivement obtenus. Maya met en œuvre des compétences liées à la modélisation (elle a bien compris qu'il s'agissait de trouver la somme possédée par Lilou en retirant 8 euros à la somme possédée par Léo) et des compétences liées au calcul mental d'une soustraction (elle utilise la technique du « passage à la dizaine inférieure » : $24 - 8 = 24 - 4 - 4 = 20 - 4$).

Sa procédure est pertinente et la réponse donnée est celle qui est attendue.

Arif

La procédure suivie par Arif consiste à enlever 8 à 24 à l'aide d'une représentation des nombres prenant appui sur les constellations du dé. Ainsi, 24 est décomposé en 2 dizaines et 4 unités, chaque dizaine étant représentée par le regroupement de deux constellations du cinq, et les 4 unités sont représentées par la constellation du quatre. Il barre ensuite 8 ronds (en commençant par les unités seules) et dénombre les ronds non barrés. Il écrit en ligne la soustraction effectuée permettant de résoudre le problème. Son résultat est exact.

Il met en œuvre des compétences liées à la modélisation (il a bien compris qu'il s'agissait de trouver la somme possédée par Lilou en retirant 8 euros à la somme possédée par Léo) et des compétences liées au calcul en prenant appui sur la représentation de nombres sous formes de constellation. Sa procédure est pertinente et la réponse donnée est celle qui est attendue.

3) b) Remédiation ou accompagnement pouvant être mettre en place pour aider Lucas et Kiara

Plusieurs aides sont possibles dont l'objectif principal serait de faire comprendre aux élèves qu'un des nombres de l'énoncé représente le montant possédé par un des deux enfants et l'autre la relation entre les montants possédés par les deux enfants (et que l'addition de ces données ne permet pas de répondre au problème).

Par exemple, l'enseignant peut :

- demander à l'élève de dire si c'est Lilou ou Léo qui a le plus d'argent ;
- proposer à l'élève de représenter la somme possédée par Lilou et par Léo en utilisant la schématisation ou des pièces de monnaie ;
- utiliser de la monnaie fictive pour « jouer » la situation avec l'élève et l'aider à comparer deux sommes différentes en utilisant le terme « de plus » ;
- faire un travail spécifique sur les mots « inducteurs » afin d'amener l'élève à constater que la présence de mots « inducteurs » comme ici « plus » ne suffit pas à choisir l'opération à effectuer.

4) Représentation schématique à prévoir pour aider les élèves à modéliser cette situation

Plusieurs types de schémas sont envisageables.

Schéma n°1 : en utilisant des ensembles

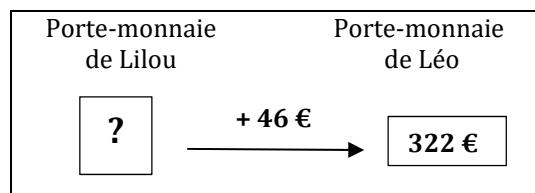


Schéma n°2 : en appui sur un diagramme en barres

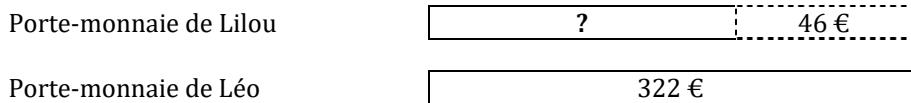
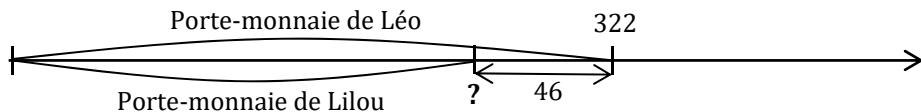


Schéma n°3 : en appui sur une demi-droite graduée



SITUATION 2

1) Démarche pour convaincre l'élève que sa réponse est fausse sans s'appuyer sur la bonne réponse

Pour convaincre l'élève que sa réponse est fausse, l'enseignant peut demander à l'élève de représenter un lit de dimension 12 carreaux sur 10 carreaux et l'amener à constater qu'il n'a pas la même « forme » que le lit initial.

Il peut aussi lui demander de représenter ce lit dans la pièce agrandie et l'amener à constater que la longueur du lit correspond à la largeur de la pièce agrandie, ce qui n'était pas le cas sur le plan initial.

Ou alors, l'enseignant peut demander à l'élève de calculer la longueur de l'étagère (avec la même règle) et l'amener à constater que le lit et l'étagère agrandis ne peuvent entrer ensemble dans la pièce agrandie.

2) Trois procédures correctes pouvant être mises en œuvre

Remarque

Il s'agit d'un problème de proportionnalité dans un contexte de mesure de longueur. Pour le résoudre, il faut admettre que chaque longueur sur le plan agrandi est proportionnelle à la longueur correspondante sur le plan initial.

Méthode 1 : utilisation de la linéarité multiplicative

- Formulation en langage naturel

Le grand côté de la chambre mesure 12 cm sur le plan initial et mesurera 18 cm sur le plan agrandi, donc comme la largeur de l'étagère (2 cm) représente $\frac{1}{6}$ du grand côté de la chambre sur le plan initial, la

largeur de l'étagère représentera $\frac{1}{6}$ du grand côté de la chambre sur le plan agrandi (soit 3 cm). De plus, la longueur de l'étagère (6 cm) est le triple de sa largeur (2 cm) sur le plan initial, donc elle correspondra au triple de sa largeur (6 cm) sur le plan agrandi (soit 9 cm).

Donc, les dimensions de l'étagère sur le plan agrandi sont 3 cm et 9 cm.

- En rangeant les données dans un tableau de proportionnalité :

	: 6	$\times 3$	
Longueur sur le plan initial (en cm)	12	2	6
Longueur sur le plan agrandi (en cm)	18	3	9

: 6 $\times 3$

: 6 $\times 3$

Justification mathématique

Dans cette méthode, la propriété mathématique sous-jacente est la linéarité multiplicative de la fonction qui à une longueur sur le plan initial associe la longueur correspondante sur le plan agrandi.

Remarques

a) Dans cette situation de proportionnalité, la fonction f qui à une longueur en centimètres sur le plan initial associe une longueur en centimètres sur le plan agrandi est une fonction linéaire.

Cette fonction f vérifie, quels que soient les réels k et x , $f(k \times x) = k \times f(x)$.

Ici, on utilise cette propriété successivement avec $k = \frac{1}{6}$ et $x = 12$, puis avec $k = 3$ et $x = 2$:

$$f(2) = f\left(\frac{1}{6} \times 12\right) = \frac{1}{6} \times f(12) = \frac{1}{6} \times 12 = 2 \text{ et } f(6) = f(3 \times 2) = 3 \times f(2) = 3 \times 2 = 6.$$

b) On peut résoudre ce problème par cette méthode avec d'autres valeurs et coefficients.

Méthode 2 : utilisation du coefficient de proportionnalité

- Formulation en langage naturel

Le grand côté de la chambre qui mesurait 12 cm sur le plan initial mesure 18 cm sur le plan agrandi, donc on lui a ajouté 6, c'est-à-dire sa moitié. Quand on agrandit le plan, la nouvelle longueur s'obtient en ajoutant sa moitié à la longueur initiale : cela correspond à une multiplication mentale par 1,5 (ou $\frac{3}{2}$).

Comme l'étagère mesure 2 cm de large sur le plan initial, on ajoute 1 cm et donc, l'étagère mesurera 3 cm sur le plan agrandi. De la même manière, comme l'étagère mesure 6 cm de long sur le plan initial, on ajoute 3 cm et donc, l'étagère mesurera 9 cm de long sur le plan agrandi.

Donc, les dimensions de l'étagère sur le plan agrandi sont 3 cm et 9 cm.

- En rangeant les données dans un tableau de proportionnalité :

Longueur sur le plan initial (en cm)	12	2	6	$\times 1,5$
Longueur sur le plan agrandi (en cm)	18	3	9	

Justification mathématique

Dans cette méthode, on utilise le fait que le rapport entre deux grandeurs proportionnelles est constant : ce rapport est le coefficient de proportionnalité.

Remarque

Dans cette situation de proportionnalité, la fonction linéaire f est telle qu'il existe un nombre a tel que, quel que soit le réel x , $f(x) = a \times x$.

Ici, on sait d'une part que $f(12) = 18$ et d'autre part que $f(12) = a \times 12$;

on en déduit que $12a = 18$, donc que $a = \frac{3}{2} = 1,5$

puis que $f(2) = \frac{3}{2} \times 2 = 3$ et que $f(6) = \frac{3}{2} \times 6 = 9$.

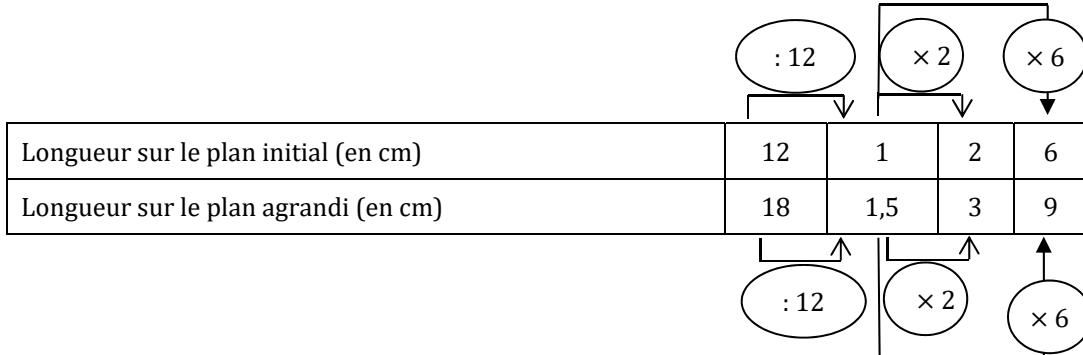
Méthode 3 : utilisation du retour à l'unité (ou de la « règle de trois »)

- Formulation en langage naturel

Le grand côté de la chambre qui mesurait 12 cm sur le plan initial mesure 18 cm sur le plan agrandi, donc une longueur représentée par 1 cm sur le plan initial (« 12 fois moins »), est représentée par 1,5 cm sur le plan agrandi (car $18 \text{ cm} : 12 = 1,5 \text{ cm}$), donc la largeur de l'étagère représentée par 2 cm sur le plan initial (« 2 fois plus ») sera représentée par 3 cm sur le plan agrandi (car $2 \times 1,5 \text{ cm} = 3$). De même, la longueur de l'étagère représentée par 6 cm sur le plan initial (« 6 fois plus ») sera représentée par 9 cm sur le plan agrandi (car $6 \times 1,5 \text{ cm} = 9$).

Donc, les dimensions de l'étagère sur le plan agrandi sont 3 cm et 9 cm.

- En rangeant les données dans un tableau de proportionnalité :



Justification mathématique

On utilise successivement deux fois la propriété multiplicative de la linéarité (cf. méthode 1) avec l'intermédiaire du « retour à l'unité », donc ici une première division par 12 (ou multiplication par $\frac{1}{12}$).

Remarque

Cette méthode, basée sur un raisonnement systématique, utilise la propriété multiplicative de la linéarité. Du point de vue des calculs, elle peut paraître identique à la méthode 2, mais du point de vue des raisonnements sous-jacents, ces deux méthodes sont différentes.

En effet, dans les deux cas, la première étape consiste à diviser 18 par 12 et on obtient 1,5 :

- dans la méthode 2, on cherche ainsi un coefficient qui permet de passer d'une longueur sur le plan initial à une longueur sur le plan agrandi : $\frac{18 \text{ cm}}{12 \text{ cm}} = 1,5 \text{ cm/cm}$;
- dans la méthode 3, on utilise un rapport entre deux valeurs de la grandeur « longueur sur le plan initial » (calculé de longueur à longueur sur le plan initial, puis utilisé de longueur à longueur sur le plan agrandi) : $\frac{18 \text{ cm}}{12} = 1,5 \text{ cm}$.

Remarque

La technique du « produit en croix » pour la recherche d'une quatrième proportionnelle ne relève pas du programme de CM2.

SITUATION 3

1) a) Erreurs et réussites de chacun des élèves pour l'exercice 1

Production de Célestine

Sa réponse est inexacte, notamment pour les nombres 5,8 et 5,121. Célestine réussit à ordonner les nombres décimaux ayant le même nombre de chiffres mais échoue à ordonner ceux dont l'écriture est de longueur différente. Il semble qu'elle ordonne les nombres décimaux comme si c'étaient des nombres entiers, sans tenir compte de la virgule.

Production de Toufik

Toufik range correctement les nombres décimaux mais les donne dans l'ordre décroissant au lieu de les ranger dans l'ordre croissant (sa compréhension du signe « < » est donc erronée).

Production de Paola

Sa réponse est correcte. Elle sait ordonner des nombres décimaux.

Production de Miroslav

Miroslav se réfère tout d'abord à la partie entière : les nombres ayant 5 comme partie entière sont plus petits que celui qui a pour partie entière 6. Il sait donc ordonner des nombres ayant des parties entières différentes.

Ensuite, à partie entière égale, il ordonne les nombres en fonction de la longueur de leur partie décimale, ce qui correspond à comparer les parties décimales comme des nombres entiers. Lorsque les écritures ont le même nombre de chiffres après la virgule, le rangement est correct mais dans le cas contraire, cette « règle implicite » induit des comparaisons erronées telles que $5,8 < 5,05$ ou $5,29 < 5,121$.

1) b) Tâche à proposer à Miroslav

Pour aider Miroslav à corriger ses erreurs, l'enseignant pourra lui demander d'écrire les nombres à l'aide des fractions décimales, par exemple : $5,8 = \frac{58}{10}$ ou $5,8 = 5 + \frac{8}{10}$ et $5,05 = 5 + \frac{5}{100} = \frac{505}{100}$.

En revenant à la définition des nombres décimaux, ce changement d'écriture renforce la compréhension de leur écriture, puis la conversion des dixièmes en centièmes peut faciliter la comparaison des nombres :

$$\frac{58}{10} = \frac{580}{100} \quad \text{et} \quad 505 < 580 \quad \text{donc} \quad 5,05 < 5,8 \quad (\text{ou bien } \frac{8}{10} = \frac{80}{100} \text{ et } \frac{80}{100} > \frac{5}{100} \dots).$$

L'utilisation d'une droite graduée faisant apparaître sous forme de zooms successifs les unités, dixièmes, centièmes et millièmes sur laquelle Miroslav devra placer les nombres à ordonner lui permettra aussi de consolider ses connaissances.

2) Analyse de l'exercice proposé pour évaluer la compétence « savoir comparer deux nombres décimaux »

Les productions de Miroslav et de Célestine analysées lors de la question précédente montrent que certains élèves se limitent à mettre en œuvre leurs connaissances sur les nombres entiers pour ranger des nombres décimaux en utilisant notamment la propriété : « le nombre qui a l'écriture la plus longue est le plus grand ». Or, les nombres proposés dans cet exercice ont tous le même nombre de chiffres dans la partie décimale. Cela permet aux élèves de comparer les parties décimales comme des nombres entiers. Ainsi, rien n'indique qu'un élève qui réussit cet exercice soit capable de comparer des nombres dont l'écriture décimale ne serait pas mise au même format : il est notamment vraisemblable que Miroslav aurait réussi cet exercice alors que l'on a vu, dans la question précédente, qu'il ne maîtrise pas la compétence « savoir comparer deux nombres décimaux ».

Pour rendre l'exercice plus pertinent, il faut choisir des nombres qui, à partie entière égale, n'ont pas le même nombre de chiffres dans la partie décimale tout en s'assurant qu'un nombre « court » puisse être supérieur à un nombre « long ». On pourra par exemple proposer les nombres de l'exercice précédent (notamment, 5,121 ; 5,29 et 5,8).

Remarque

On peut aussi modifier a minima les nombres à ordonner dans cet exercice et proposer par exemple :

$$7,328 ; 7,35 ; 12,4 ; 7,5 ; 12,01 ; 7,051$$

3) Réussite et erreurs de Célestine à l'exercice 2

Célestine réussit à trouver un nombre compris entre 8,3 et 8,5 (question a) car ses connaissances sur les nombres entiers suffisent : $83 < 84 < 85$.

À la question b), elle répond 4,7,5 : on peut penser que, pour elle, la notation « virgule 5 » permet d'écrire le nombre qui est au milieu : « entre 7 et 8 on a 7,5 donc entre « 4 virgule 7 » et « 4 virgule 8 » on a « 4 virgule 7,5 ».

L'absence de réponse à la question c) montre que Célestine ne conçoit pas les nombres entiers comme des décimaux et n'envisage donc pas la possibilité de transformer l'écriture de 7 pour faire apparaître des décimales : $7 = 7,0$.

GROUPEMENT 4 – avril 2019

PREMIÈRE PARTIE :

A – Première étude des trois types de flacons

1) Étude des volumes des différents flacons

Remarque préalable

Ce n'est pas dit explicitement dans l'énoncé, mais on considérera que pour la forme du premier flacon, le parallélépipède est rectangle, et que pour celle du second flacon, le cylindre est droit.

1) a) Volume du flacon de forme parallélépipédique

Si l'on prend comme base de ce flacon de forme parallélépipédique, le rectangle dont les dimensions sont la longueur et la largeur utiles, on obtient comme aire de la base : $5 \text{ cm} \times 3 \text{ cm} = 15 \text{ cm}^2$

La hauteur utile étant de 6 cm, le volume V de ce flacon est :

$$V = 15 \text{ cm}^2 \times 6 \text{ cm} = 90 \text{ cm}^3.$$

Le volume du flacon de forme parallélépipédique est de 90 cm^3 .

Remarque

La formule donnée par l'énoncé est la formule générale donnant le volume d'un prisme, famille à laquelle appartiennent les parallélépipèdes rectangles.

On pouvait aussi procéder en une seule étape en utilisant la formule classique spécifique à ces solides :

$$\text{Volume d'un parallélépipède rectangle} = \text{longueur} \times \text{largeur} \times \text{hauteur}.$$

1) b) Volume du flacon de forme cylindrique

La base de ce cylindre est un disque de diamètre 5 cm, donc de rayon moitié, soit 2,5 cm.

L'aire d'un disque de rayon R est donnée par la formule : Aire(disque) = $\pi \times R^2$.

L'aire de la base de ce flacon est donc : $\pi \times (2,5 \text{ cm})^2 = 6,25 \pi \text{ cm}^2$.

Sa hauteur utile étant de 6 cm, son volume V est : $V = 6,25 \pi \text{ cm}^2 \times 6 \text{ cm} = 37,5 \pi \text{ cm}^3$.

La valeur exacte du volume du flacon de forme cylindrique est $37,5 \pi \text{ cm}^3$.

Une valeur approchée en est $117,81 \text{ cm}^3$.

La valeur arrondie de ce volume à l'unité près de centimètre cube est de 118 cm^3 .

1) c) Volume du flacon de forme pyramidale

Le volume de ce flacon est égal à la différence entre celui de la pyramide que forment ensemble le flacon et son bouchon et celui de la pyramide réduite correspondant au seul bouchon.

Le coefficient de la réduction qui permet de passer de la première à la seconde de ces pyramides est donné par le rapport entre les côtés de leurs bases respectives. Ce coefficient est donc égal à $\frac{2}{5}$, c'est-à-dire à 0,4.

Calcul du volume de la pyramide que forment ensemble le flacon et le bouchon

L'aire de la base carrée de la grande pyramide est de $(5 \text{ cm})^2 = 25 \text{ cm}^2$.

Sa hauteur étant de 11 cm, son volume V est :

$$V = \frac{25 \text{ cm}^2 \times 11 \text{ cm}}{3} = \frac{275}{3} \text{ cm}^3 \approx 91,667 \text{ cm}^3.$$

Calcul du volume du bouchon

Méthode 1 : en utilisant uniquement le coefficient de réduction

Puisque le coefficient de la réduction faisant passer de la grande pyramide à celle correspondant au seul bouchon est de 0,4, le rapport entre leurs volumes est de $0,4^3$.

Le volume V' du bouchon est donc égal à :

$$V' = 0,4^3 \times V = 0,4^3 \times \frac{275}{3} \text{ cm}^3 = \frac{17,6}{3} \text{ cm}^3$$

soit $V' \approx 5,867 \text{ cm}^3$.

Méthode 2 : en déterminant la hauteur et en utilisant la formule du volume

Le rapport entre la hauteur h' du seul bouchon et la hauteur h de la grande pyramide est donné par le coefficient de la réduction faisant passer de la grande pyramide à celle correspondant au seul bouchon.

On a donc $\frac{h'}{h} = 0,4$ d'où $h' = 0,4 \times h = 0,4 \times 11 \text{ cm} = 4,4 \text{ cm}$.

L'aire de la base du bouchon est de $(2 \text{ cm})^2 = 4 \text{ cm}^2$.

Sa hauteur étant de 4,4 cm, son volume V' est : $V' = \frac{4 \text{ cm}^2 \times 4,4 \text{ cm}}{3} = \frac{17,6}{3} \text{ cm}^3$
soit $V' \approx 5,867 \text{ cm}^3$.

Calcul du volume du flacon

Le volume du flacon est donc égal à :

$$V - V' = \frac{275}{3} \text{ cm}^3 - \frac{17,6}{3} \text{ cm}^3 = \frac{257,4}{3} \text{ cm}^3$$

soit $V - V' = 85,8 \text{ cm}^3$.

Remarque

Le calcul suivant, $V - V' \approx 91,667 \text{ cm}^3 - 5,867 \text{ cm}^3 \approx 85,8 \text{ cm}^3$, effectué avec des valeurs approchées, permet de vérifier que $85,8 \text{ cm}^3$ est une valeur approchée du volume du flacon ; il ne permet toutefois pas d'affirmer qu'il s'agit de la valeur exacte.

2) Enquête auprès des clients

2) a) Proportion de personnes préférant le flacon cylindrique

Le nombre total de personnes ayant répondu à l'enquête est de $82 + 109 + 47 = 238$ personnes.

Parmi elles, 109 ont déclaré préférer le flacon cylindrique, ce qui représente une proportion de :

$$\frac{109}{238} \approx 0,458.$$

La proportion de personnes préférant le flacon cylindrique, en pourcentage à l'unité près, est donc d'environ 46 %.

2) b) Angle du secteur associé dans un diagramme circulaire

Méthode 1 : en utilisant la proportion exacte obtenue à la question précédente

Dans un diagramme circulaire, l'angle plein (360°) correspond à l'effectif total (ici 238) et les angles des différents secteurs angulaires sont proportionnels aux effectifs qu'ils représentent.

Ainsi puisque la proportion de personnes ayant choisi le flacon cylindrique est de $\frac{109}{238}$; le secteur angulaire les représentant correspond à cette même fraction d'un tour complet, et son angle au centre a pour mesure :

$$\frac{109}{238} \times 360^\circ \approx 164,87^\circ.$$

La mesure de l'angle du secteur représentant le nombre de personnes ayant choisi le flacon cylindrique est, au degré près, de 165° .

Méthode 2 : en utilisant la proportion arrondie obtenue à la question précédente

En utilisant la valeur de 46 % trouvée à la question précédente comme valeur approchée de la proportion $\frac{109}{238}$, on obtient pour l'angle du secteur une valeur de $0,46 \times 360^\circ \approx 165,6^\circ$, valeur que l'on est amené à arrondir au degré près à **166°**.

Remarque

Cet exemple montre que pour assurer la précision voulue mieux vaut dans les calculs utiliser autant que faire se peut des valeurs exactes.

Méthode 3 : autres raisonnements utilisant la proportionnalité

D'autres raisonnements s'appuyant sur la proportionnalité sont possibles. On peut par exemple utiliser un tableau de proportionnalité.

Si l'on note α l'angle du secteur représentant le nombre de personnes ayant choisi le flacon cylindrique, on peut traduire la situation par le tableau suivant :

Forme du flacon	parallélépipédique	cylindrique	pyramide	Total
Angle du secteur angulaire		α		360°
Nombre de personnes l'ayant choisi	82	109	47	238

On en déduit $\frac{\alpha}{109} = \frac{360^\circ}{238}$; d'où $\alpha = \frac{109 \times 360^\circ}{238} \approx 164,87^\circ$.

La mesure de l'angle du secteur représentant le nombre de personnes ayant choisi le flacon cylindrique est, au degré près, de 165° .

B – Flacons cylindriques

1) Conditionnement du parfum

Par définition, une capacité d'un litre correspond au volume d'un cube dont l'arête est un décimètre. Cette égalité est traduite par la relation $1 \text{ L} = 1 \text{ dm}^3$, qui donne après conversion $1 \text{ L} = 1000 \text{ cm}^3$.

Méthode 1 : en convertissant les 50 L en cm^3

Une cuve de 50 L correspond donc à un volume de $50\,000 \text{ cm}^3$. Le nombre de flacons que permet de remplir cette cuve est donc égal à $\frac{50\,000}{118} \approx 423,73$.

Avec une cuve de 50 L, on peut ainsi remplir 423 flacons pleins.

Méthode 2 : en convertissant les 118 cm^3 en L

La conversion donne $118 \text{ cm}^3 = 0,118 \text{ L}$.

Le nombre de flacons s'obtient en divisant la volume de la cuve par celui d'un flacon.

Le calcul donne $\frac{50\,000 \text{ L}}{118 \text{ L}} \approx 423,73$.

Avec une cuve de 50 L, on peut ainsi remplir 423 flacons pleins.

2) Étude du coût des flacons

2) a) Prix de 2 500 flacons

Entreprise 1

Le prix de 2 500 flacons commandés à l'entreprise 1 sera de :

$$2\,500 \times 2,40 \text{ €} = \mathbf{6\,000 \text{ €}}$$

Entreprise 2

En incluant les frais de transport, le prix de 2 500 flacons commandés à l'entreprise 2 sera de :

$$2\,500 \times 1,80 \text{ €} + 2\,000 \text{ €} = 4\,500 \text{ €} + 2\,000 \text{ €} = \mathbf{6\,500 \text{ €}}$$

2) b) Montant de x flacons commandés à l'entreprise 1

Le montant $f(x)$ de x flacons (x étant un nombre entier compris entre 1 et 10 000) commandés à l'entreprise 1 est donné par l'expression : $f(x) = 2,4 x$.

2) c) Montant de x flacons commandés à l'entreprise 2

Le montant $g(x)$ de x flacons (x étant un nombre entier compris entre 1 et 10 000) commandés à l'entreprise 2 est donné par l'expression : $g(x) = 1,8 x + 2\,000$.

2) d) Représentations graphiques des fonctions f et g

La fonction f est de la forme $f(x) = ax$. Il s'agit donc d'une fonction affine particulière : c'est une fonction linéaire. Sa représentation graphique est donc portée par une droite passant par l'origine.

La fonction g est de la forme $g(x) = ax + b$. Il s'agit donc d'une fonction affine. Sa représentation graphique est portée par une droite.

Plus précisément les représentations graphiques des fonctions f et de g sont les points de ces deux droites dont les abscisses sont les nombres entiers compris entre 1 et 10 000.

Pour réaliser chaque tracé des droites auxquelles appartiennent l'ensemble de ces points, il suffit de déterminer les coordonnées de deux points.

On a aisément les coordonnées des points d'abscisse nulle (par exemple à l'aide de l'ordonnée à l'origine) : la représentation de f passe par l'origine et celle de g passe par le point de coordonnées $(0 ; 2\,000)$.

Par ailleurs, d'après les résultats de la question a), la représentation de la fonction f passe par le point $(2\,500 ; 6\,000)$ et celle de g par le point $(2\,500 ; 6\,500)$.

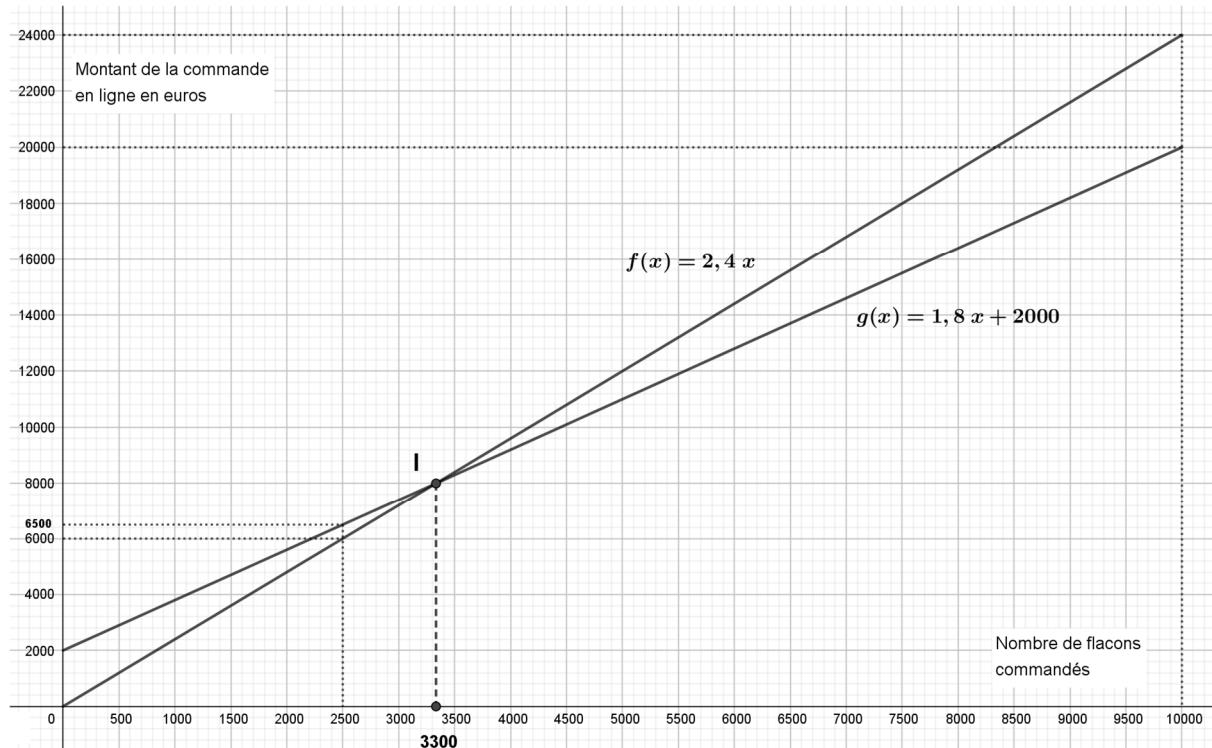
Remarque

Le calcul des coordonnées d'un troisième point permet une vérification, mais améliore aussi la précision si on le choisit suffisamment éloigné des deux points déjà choisis.

On pouvait ainsi utilement dans chacun des cas calculer le prix de 10 000 flacons commandés.

On a $f(10\,000) = 2,4 \times 10\,000 = 24\,000$

et $g(10\,000) = 1,8 \times 10\,000 + 2\,000 = 18\,000 + 2\,000 = 20\,000$.

**2) e) Détermination graphique du nombre de flacons à partir duquel commander à l'entreprise 2 devient plus avantageux**

Commander à l'entreprise 2 devient plus avantageux lorsque la droite représentant la fonction g est située en dessous de la droite représentant la fonction f .

Par lecture graphique, c'est le cas pour les valeurs de x supérieures à l'abscisse du point I d'intersection de ces deux droites.

Avec la précision permise par le graphique (au millimètre près), on obtient 3 300 comme valeur approchée de l'abscisse de I de, à 100 près.

Ainsi choisir l'entreprise 2 devient plus avantageux lorsque la commande dépasse un nombre de l'ordre de 3 300 flacons.

Remarque

Compte tenu de la précision permise par l'unité, toute valeur approchée comprise entre 3 300 et 3 400 flacons était acceptable.

2) f) Détermination par le calcul de ce même nombre

Choisir l'entreprise 2 devient plus avantageux lorsque le nombre x de flacons commandés vérifie l'inéquation $g(x) < f(x)$, c'est-à-dire $1,8x + 2\,000 < 2,4x$ ou encore $2,4x > 1,8x + 2\,000$.

Cette dernière inéquation s'écrit $2,4x - 1,8x > 2\,000$.

$$\text{D'où } 0,6x > 2\,000 \text{ puis } x \geq \frac{2\,000}{0,6}, \text{ soit } x > 3\,333,3.$$

Ainsi l'entreprise 2 devient plus avantageuse à partir de 3 334 flacons commandés.

2) g) Montant d'une commande de 7 500 flacons

Le volume de la commande étant supérieur à 3 334 flacons, c'est l'entreprise 2 qui sera la plus avantageuse. Le montant en euros sera de $g(7\,500) = 1,8 \times 7\,500 + 2\,000 = 13\,500 + 2\,000 = 15\,500$.

Une commande de 7 500 flacons sera facturée 15 500 € par l'entreprise 2.

Remarque

On peut aussi procéder comme dans la question 2) a) sans utiliser le résultat de la question 2) f).

Entreprise 1

Le prix de 7 500 flacons commandés à l'entreprise 1 sera de : $7\,500 \times 2,40 \text{ €} = 18\,000 \text{ €}$.

Entreprise 2

En incluant les frais de transport, le prix de 2 500 flacons commandés à l'entreprise 2 sera de :

$$7\,500 \times 1,80 \text{ €} + 2\,000 \text{ €} = 15\,500 \text{ €}.$$

15 500 € < 18 000 € donc l'entreprise 2 est la plus avantageuse. Avec cette entreprise, une commande de 7 500 flacons sera facturée 15 500 €.

C – Emballage d'un flacon cylindrique

1) Patron de la boîte sans couvercle

Remarque préalable

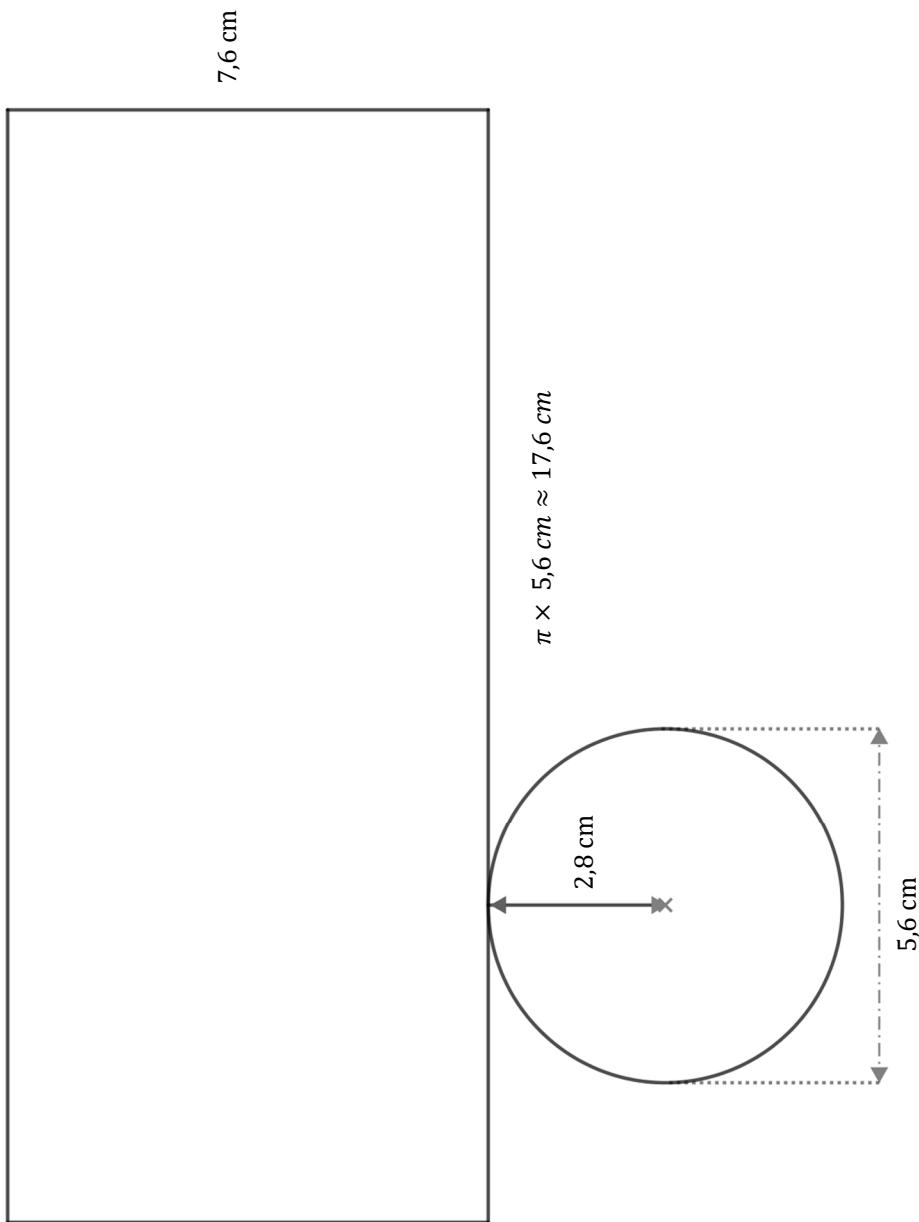
Il s'agit dans l'énoncé d'un usage impropre du terme de « patron ». Mieux vaudrait parler de « développement » de la boîte cylindrique avec un fond mais sans couvercle car les deux faces qui la composent n'ont pas d'arête commune mais sont simplement reliées par un point.

Le développement de cette boîte cylindrique sans couvercle est composé de deux faces.

Le fond est un disque de diamètre $D = 5,6 \text{ cm}$, et donc de rayon $R = 2,8 \text{ cm}$.

La face latérale, une fois développée, est un rectangle dont :

- la longueur L est égale à la circonférence du disque : d'où $L = 2\pi R = \pi D = \pi \times 5,6 \text{ cm} \approx 17,6 \text{ cm}$;
- la largeur l est égale à la hauteur du cylindre, soit $l = 7,6 \text{ cm}$.



2) Masse de la boîte sans couvercle

2) a) Calcul de l'aire du patron

L'aire du « patron » de la boîte sans couvercle est la somme des aires des deux surfaces qui le composent.

La face rectangulaire a pour aire $A_{\text{rectangle}} = L \times l = \pi \times 5,6 \text{ cm} \times 7,6 \text{ cm} = 42,56 \pi \text{ cm}^2$.

Le disque a pour aire $A_{\text{disque}} = \pi R^2 = \pi \times (2,8 \text{ cm})^2 = \pi \times 7,84 \text{ cm}^2 = 7,84 \pi \text{ cm}^2$.

Le patron a donc pour aire : $A_{\text{patron}} = A_{\text{rectangle}} + A_{\text{disque}} = 42,56 \pi \text{ cm}^2 + 7,84 \pi \text{ cm}^2 = 50,4 \pi \text{ cm}^2$

La valeur exacte de l'aire du patron de la boîte sans couvercle est $50,4 \pi \text{ cm}^2$.

On obtient à la calculatrice une valeur approchée de $158,34 \text{ cm}^2$.

La valeur arrondie à l'unité près (le cm^2) est donc de 158 cm^2 .

2) b) Masse de la boîte sans couvercle

Par définition de la masse surfacique, on a la relation :

$$\frac{\text{masse de la boîte}}{\text{aire du patron}} = \text{masse surfacique.}$$

On en déduit la relation suivante :

$$\text{masse de la boîte} = \text{aire du patron} \times \text{masse surfacique.}$$

La masse surfacique étant exprimée en gramme par mètre carré, l'homogénéité de ces formules sera assurée en exprimant la masse de la boîte en gramme et l'aire du patron en mètre carré.

En privilégiant pour l'aire du patron, la valeur exacte obtenue à la question précédente, une conversion en mètres carrés donne :

$$A_{\text{patron}} = 0,00504 \pi \text{ m}^2$$

D'où pour la masse de la boîte :

$$\text{masse de la boîte} = 0,00504 \text{ m}^2 \times 810 \text{ g/m}^2 = 4,0824\pi \text{ g}$$

soit **masse de la boîte** $\approx 12,825 \text{ g}$.

Remarque

En utilisant pour l'aire du patron, la valeur approchée obtenue à la question précédente, on obtenait successivement :

$$A_{\text{patron}} \approx 0,0158 \text{ m}^2 \text{ et } \text{masse de la boîte} = 0,0158 \text{ m}^2 \times 810 \text{ g/m}^2 = 12,798 \text{ g.}$$

On retrouve ici la valeur approchée au gramme près de 13 g.

Notons toutefois que si le degré de précision voulue avait été plus important, au milligramme près par exemple, utiliser la valeur approchée pour l'aire du patron n'aurait pas convenu.

DEUXIÈME PARTIE

EXERCICE 1

1) Construction de la figure représentant le parterre

Sur la représentation, nous noterons respectivement A, B, C, D et E les points correspondants dans la réalité aux piquets A, B, C, D et E.

Il s'agit ici dans un premier temps de construire un triangle connaissant les longueurs de ses trois côtés :

$$AB = 8 \text{ cm} ; \quad AC = 6 \text{ cm} ; \quad BC = 10,5 \text{ cm} .$$

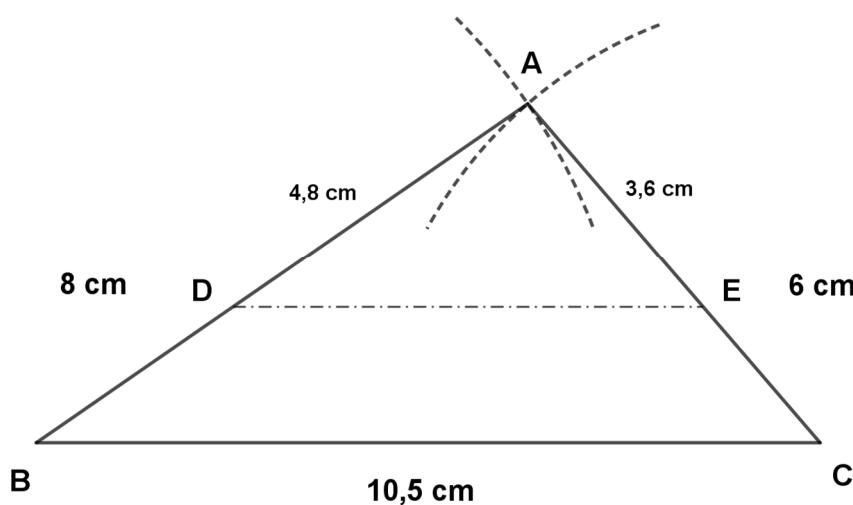
Pour ce faire, on commence par tracer à l'aide de la règle graduée l'un de ces trois segments, par exemple [BC]. Le point A sera alors l'un des deux points d'intersection du cercle de centre B et de rayon 8 cm et du cercle de centre C et de rayon 6 cm.

Remarque

Même si l'énoncé ne l'exigeait pas, on laisse apparent les arcs de cercle correspondants à cette construction.

Il ne reste plus qu'à placer à l'aide de la règle graduée :

- le point D qui appartient au segment [AB] et vérifie $AD = 4,8 \text{ cm}$;
- le point E qui appartient au segment [AC] et vérifie $AE = 3,6 \text{ cm}$.



2) Parallélisme des segments [BC] et [DE]

Les points A, D et B sont alignés dans cet ordre. De même les points A, E et C sont alignés dans cet ordre.

Comparons les rapports $\frac{AD}{AB}$ et $\frac{AE}{AC}$.

$$\text{On a d'une part, } \frac{AD}{AB} = \frac{4,8}{8} = \frac{48}{80} = \frac{6}{10} = 0,6 \text{ et d'autre part, } \frac{AE}{AC} = \frac{3,6}{6} = \frac{36}{60} = \frac{6}{10} = 0,6.$$

Puisque ces deux rapports sont égaux entre eux, on peut affirmer, d'après la réciproque du théorème de Thalès, que les droites (BC) et (DE) sont parallèles.

Ainsi la corde qui relie les piquets D et E est bien parallèle à celle qui relie les piquets B et C.

Remarque

On peut aussi procéder en comparant les rapports $\frac{AB}{AD}$ et $\frac{AC}{AE}$, que l'on trouve tous deux égaux à $\frac{5}{3}$. Dans ce cas, on doit être attentif à comparer les valeurs exactes, qui s'écrivent sous forme fractionnaire, et non les valeurs décimales approchées.

L'égalité des valeurs approchées des rapports en effet ne permet pas de conclure.

On pouvait aussi, variante du théorème de Thalès, comparer entre eux les rapports $\frac{AB}{AC}$ et $\frac{AD}{AE}$ (tous deux égaux à $\frac{4}{3}$) ou encore les rapports $\frac{AC}{AB}$ et $\frac{AE}{AD}$ (tous deux égaux à $\frac{3}{4}$ et donc à 0,75).

3) Calcul de la distance entre les piquets D et E

Méthode 1 : utilisation d'un rapport d'homothétie

Les calculs effectués à la question précédente et le parallélisme obtenu permettent d'affirmer que le triangle ADE est une réduction à l'échelle 0,6 du triangle ABC.

Le segment [DE] est donc l'image du segment [BC] par une homothétie de rapport 0,6 et on a :

$$DE = 0,6 \times BC = 0,6 \times 10,5 \text{ m} = 6,3 \text{ m.}$$

La distance entre les piquets D et E est donc de 6,3 mètres.

Méthode 2 : utilisation du théorème de Thalès dans le sens direct

Les points A, D et B sont alignés dans cet ordre. De même les points A, E et C sont alignés dans cet ordre.

On a démontré que les droites (DE) et (BC) sont parallèles.

Le théorème de Thalès, utilisé ici dans le sens direct, permet d'affirmer l'égalité entre les rapports suivants :

$$\frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}.$$

Les deux derniers rapports sont égaux à 0,6 (cf question précédente).

$$\text{On a donc } \frac{DE}{BC} = 0,6 \quad \text{d'où } DE = 0,6 \times BC = 0,6 \times 10,5 \text{ m} = 6,3 \text{ m.}$$

La distance entre les piquets D et E est donc de 6,3 mètres.

4) Égalité des aires des deux zones de plantations

Le triangle ADE est l'image du triangle ABC dans une homothétie de rapport 0,6.

Le rapport entre les aires de ces deux triangles est donc de $0,6^2 = 0,36$.

Ainsi l'aire du triangle ADE est égale à 36 % de l'aire totale du triangle ABC.

Par différence, l'aire de la seconde zone de plantation, qui correspond au trapèze BCED, est égale à 64 % de l'aire du triangle ABC.

En conséquence, les deux zones de plantations ne sont pas de même aire.

Remarques

1) On peut aussi déduire le fait que les deux aires ne sont pas égales des deux égalités suivantes :

$$\text{Aire (ADE)} = 0,36 \text{ Aire(BCED)} \quad \text{et} \quad \text{Aire (ADE)} = 0,64 \text{ Aire(BCED)}.$$

2) Dans cette configuration, le triangle ABC n'est pas rectangle (AB et AC étant égaux à 8 m et à 6 m, il faudrait pour cela que BC soit égal à 10 m, ce qui n'est pas le cas) et l'on ne connaît aucune des hauteurs du triangle. Il est donc très délicat de déterminer l'aire totale du triangle ABC ou celle de l'une ou l'autre des zones de plantation. Ces calculs dépasseraient de loin les compétences inscrites au programme du cycle 4.

EXERCICE 2

1) Somme obtenue en lançant deux dés cubiques

1) a) La modélisation et le résultat de Karim sont-ils corrects ?

Démarche A : en explicitant et en discutant le raisonnement de Karim

Karim modélise la situation de la façon suivante : il identifie 11 événements élémentaires et incompatibles entre eux qui correspondent aux sommes qu'il est possible d'obtenir. Parmi eux, il repère 6 sommes paires (2 ; 4 ; 6 ; 8, 10 et 12) et 5 qui sont impaires (3 ; 5 ; 7 ; 9 et 11).

Pour conclure, il utilise alors implicitement la formule suivante donnant la probabilité d'un événement E :

$$p(E) = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}.$$

Or cette formule n'est valable que lorsqu'il y a équiprobabilité, c'est-à-dire lorsque l'ensemble des cas possibles recensés ont tous la même probabilité d'apparition, ce qui n'est pas le cas dans la modélisation proposée par Karim.

Pour s'en convaincre comparons les probabilités des événements « la somme est égale à 2 » et « la somme est égale à 7 » en considérant pour les distinguer que l'un des dés est rouge et l'autre vert.

Pour réaliser l'événement « la somme est 2 », le dé rouge doit absolument indiquer 1 et le dé vert aussi. Il n'y a donc qu'un seul cas favorable.

Par contre, pour réaliser l'événement « la somme est 7 », on peut être indifférent au résultat du dé rouge, il y aura toujours une possibilité (sur les 6) d'obtenir avec le dé vert le complément à 7. On trouve alors six cas favorables.

Cet argument permet d'affirmer qu'il n'y a pas équiprobabilité et que le raisonnement de Karim n'est pas correct.

Démarche B : en proposant une modélisation correcte de la situation

Méthode 1 : à l'aide d'un tableau à double entrée

Considérons pour les distinguer que l'un des dés est rouge et l'autre est vert.

Suite au lancer du dé rouge, il y a 6 issues possibles équiprobables.

De façon indépendante, suite au lancer du dé vert, il y a aussi 6 issues possibles équiprobables.

Suite au lancer des deux dés, il y a donc $6 \times 6 = 36$ issues élémentaires possibles, incompatibles entre elles, et équiprobables.

On peut recenser ces 36 issues sous la forme un tableau à double entrée. Chacune de ses cases correspond à l'une de ces issues élémentaires. En indiquant dans chaque case la somme des deux dés, on obtient le tableau suivant :

dé rouge \ dé vert	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Sur les 36 cas possibles, il y en a 18 pour lesquels la somme obtenue est paire (cases grises) et 18 pour lesquels cette somme est impaire (cases blanches).

La probabilité d'obtenir une somme paire est de $\frac{18}{36} = \frac{1}{2}$; il en est de même pour la probabilité d'obtenir une somme impaire.

La probabilité d'obtenir une somme paire est donc égale à celle d'obtenir une somme impaire.

Méthode 2 : à l'aide d'un raisonnement arithmétique portant sur la parité d'une somme

La somme est paire lorsque les deux dés indiquent des nombres de même parité, c'est-à-dire :
pair + pair ou impair + impair.

Que le premier dé indique un nombre pair ou un nombre impair, dans les deux cas le second dé a trois chances sur six, donc une chance sur deux d'indiquer un nombre ayant la parité attendue pour obtenir une somme paire.

L'évènement « obtenir une somme paire » a donc une probabilité de $\frac{1}{2}$.

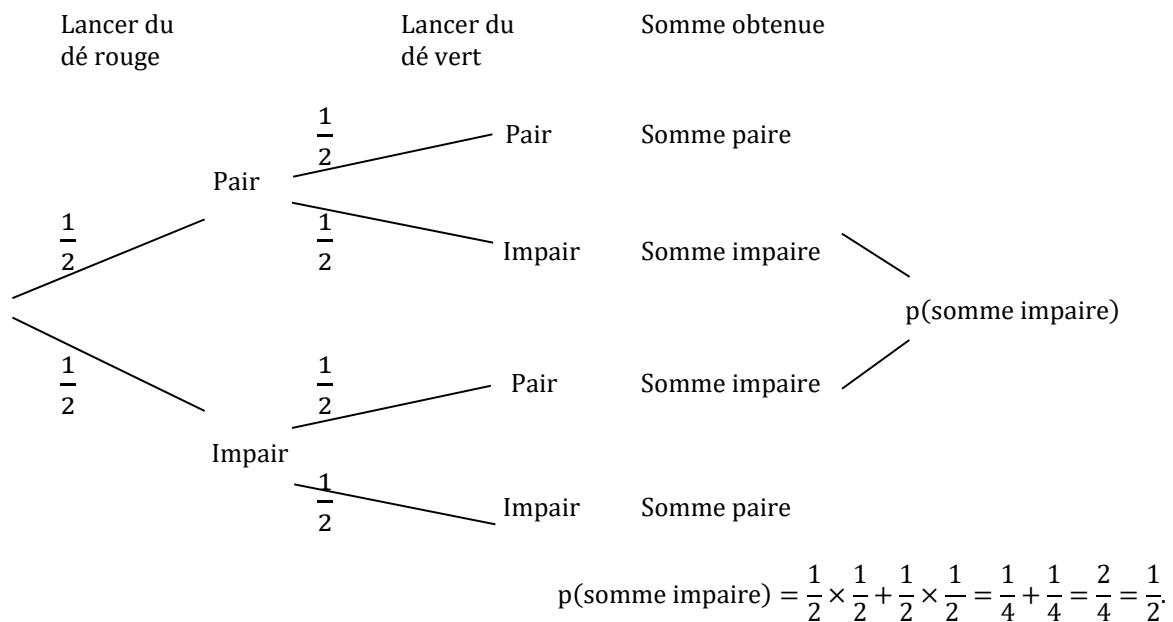
Pour conclure, on peut faire le même raisonnement sur l'évènement « obtenir une somme impaire » ou remarquer qu'il est le complémentaire du précédent pour obtenir une probabilité de $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Les probabilités d'obtenir une somme paire ou bien impaire sont donc égales.

Méthode 3 : à l'aide d'un arbre binaire pondéré (ou non)

On peut représenter la situation par un arbre binaire en n'envisageant à chaque lancer que deux issues possibles, le résultat obtenu est pair ou bien impair.

Pour chacun des deux dés, la probabilité que le résultat du lancer indique un nombre pair est de $\frac{1}{2}$ (3 faces sur 6). Il en est de même pour la probabilité que le résultat du lancer indique un nombre impair.



$$p(\text{somme impaire}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

L'évènement « la somme est impaire » peut se décomposer en :

« le nombre donné par le dé rouge est pair » ET PUIS « le nombre donné par le dé vert est impair »
OU BIEN

« le nombre donné par le dé rouge est impair » ET PUIS « le nombre donné par le dé vert est pair »

La probabilité p de l'évènement « la somme est impaire » est donc donnée par le calcul suivant :

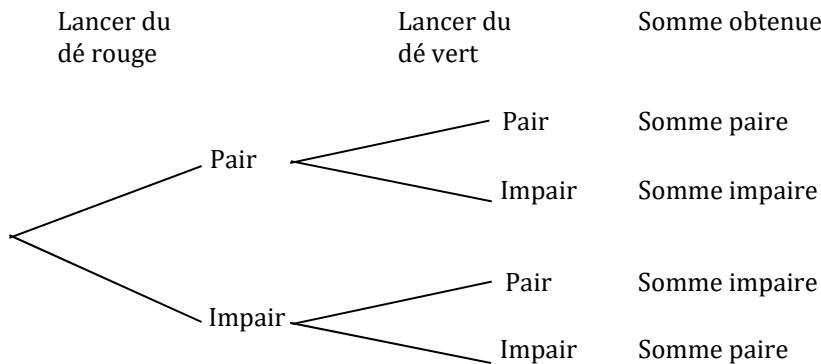
$$p = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

À l'aide d'un calcul analogue ou en utilisant le fait que les deux évènements sont complémentaires :

on obtient aussi pour l'évènement « la somme est paire » une probabilité de $\frac{1}{2}$.

Méthode 3 bis : à l'aide d'un arbre binaire non pondéré

Comme pour chacun des deux lancers de dés, il y a équiprobabilité entre obtenir un résultat pair ou obtenir un résultat impair, l'arbre suivant (qui n'est pas pondéré) est un arbre où chacune branche a la même probabilité d'apparition. Parmi les 4 issues possibles, deux conduisent à une somme paire et deux autres à une somme impaire. On trouve donc que les deux probabilités sont égales à $\frac{2}{4}$, donc à $\frac{1}{2}$.



Il y a 4 issues possibles. Deux donnent une somme paire ; deux une somme impaire.

Remarque

L'ordre dans lequel on considère les deux lancers étant indifférent, on pouvait dans les méthodes 3 et 3 bis commencer par représenter le résultat du lancer du dé vert et représenter ensuite celui du dé rouge.

Méthode 4 : à l'aide d'un arbre de choix recensant les 36 issues possibles

On peut aussi modéliser la situation à l'aide d'un arbre équiprobable (non reproduit ici) comportant à partir de la racine 6 branches se partageant ensuite chacune en 6 pour recenser les 36 issues équiprobables possibles et identifier parmi elles celles où la somme obtenue est paire et celles où elle est impaire.

1) b) A-t-on une chance sur trois d'obtenir un multiple de 3 comme l'affirme Brigitte ?

Méthode 1 : à l'aide d'un tableau à double entrée

Dans le tableau à double entrée réalisé à la question précédente, on repère cette fois les cases où la somme obtenue est un multiple de 3.

dé rouge \ dé vert	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Sur les 36 cas possibles, il y en a 12 pour lesquels la somme obtenue est paire (cases grises).

La probabilité d'obtenir une somme multiple de 3 est donc de $\frac{12}{36} = \frac{1}{3}$.

On a donc bien une chance sur trois d'obtenir une somme multiple de 3 comme l'affirme Brigitte.

Méthode 2 : à l'aide d'un raisonnement arithmétique portant sur les restes dans la division euclidienne par 3

Parmi les six issues équiprobables possibles du lancer d'un dé cubique, deux sont des nombres dont le reste dans la division euclidienne par 3 est nul (il s'agit de 3 et 6), deux sont des nombres dont le reste dans cette même division est 1 (1 et 4), et deux sont des nombres dont le reste est 2 (2 et 5).

Ainsi, quel que soit le nombre obtenu avec le premier lancer, ou dit autrement quel que soit le reste dans la division euclidienne par 3 du nombre obtenu avec le dé rouge, au second lancer (le dé vert) il y a aura toujours 2 chances sur 6 d'obtenir un nombre tel que la somme des résultats des deux lancers ait un reste nul dans la division par 3, c'est-à-dire soit multiple de 3.

On peut donc affirmer que la probabilité d'obtenir un score multiple de 3 est de $\frac{2}{6}$, c'est-à-dire $\frac{1}{3}$.

À titre d'exemples,

- si l'on obtient un 6 avec le dé rouge, avec le dé vert deux issues sur six (3 et 6) donneront une somme multiple de 3 ;
- si l'on obtient un 5 avec le dé rouge, avec le dé vert deux issues sur six (1 et 4) donneront une somme multiple de 3 ;
- ...

Remarque

Si l'on avait utilisé un arbre de choix à la question précédente, on pouvait réutiliser ce même arbre pour dénombrer parmi les 36 issues possibles, les 12 cas favorables où le score est un multiple de 3 et en déduire la probabilité cherchée : $\frac{12}{36} = \frac{1}{3}$

2) Produit obtenu en lançant un dé cubique et un dé tétraédrique

2) a) Les probabilités d'obtenir un produit pair ou impair sont-elles égales ?

Méthode 1 : à l'aide d'un tableau à double entrée

Lorsque qu'on lance un dé cubique, il y a 6 issues équiprobables possibles. Lorsqu'on lance un dé tétraédrique, il y a 4 issues équiprobables possibles.

Lorsqu'on lance ensemble ces deux dés, il y a $6 \times 4 = 24$ issues équiprobables possibles, chacune correspondant à l'une des cases d'un tableau à double entrée à six colonnes et quatre lignes. On indiquant dans chaque case le produit obtenu, on obtient le tableau suivant :

Dé à 6 faces Dé à 4 faces	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24

Sur les 24 cas possibles, il y en a 6 pour lesquels le produit obtenu est impair (cases grises) et 18 pour lesquels le produit obtenu est pair (cases blanches).

La probabilité d'obtenir un produit pair est de $\frac{18}{24} = \frac{3}{4}$; et qu'il soit impair est de $\frac{6}{24} = \frac{1}{4}$.

La probabilité d'obtenir un produit pair est donc très largement supérieure à celle d'obtenir un produit impair (c'est le triple).

Méthode 2 : à l'aide d'un raisonnement arithmétique portant sur la parité d'un produit

Un produit de plusieurs facteurs est pair si et seulement si au moins de ses facteurs est pair.

Un produit de plusieurs facteurs est impair si et seulement si tous ses facteurs sont impairs.

Cette dernière condition est la plus simple à utiliser ici.

L'évènement « le produit des nombres indiqués par les deux dés est impair » peut se décomposer en : « le nombre indiqué par le dé cubique est impair » ET PUIS « le nombre indiqué par le dé tétraédrique est impair ».

Parmi les 6 faces du dé cubique, 3 portent des nombres impairs (1 ; 3 et 5).

La probabilité de l'évènement « le nombre indiqué par le dé cubique est impair » est donc de $\frac{3}{6}$.

Parmi les 4 faces du dé tétraédrique, 2 portent des nombres impairs (1 et 3).

La probabilité de l'événement « le nombre indiqué par le dé tétraédrique est impair » est donc de $\frac{2}{4}$.

Ces deux événements sont indépendants.

La probabilité de l'événement « le produit des nombres indiqués par les deux dés est impair » est donc :

$$p = \frac{3}{6} \times \frac{2}{4} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$$

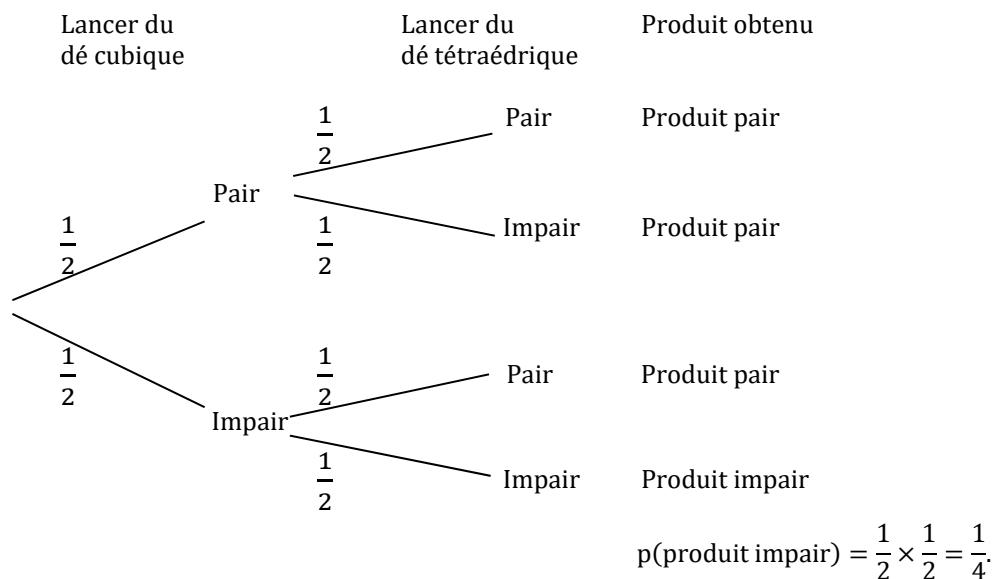
Cette probabilité est inférieure à $\frac{1}{2}$.

C'est donc l'événement complémentaire « le produit des nombres indiqués par les deux dés est pair » qui est le plus probable ; sa probabilité est de $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

Méthode 3 : à l'aide d'un arbre binaire pondéré (ou non)

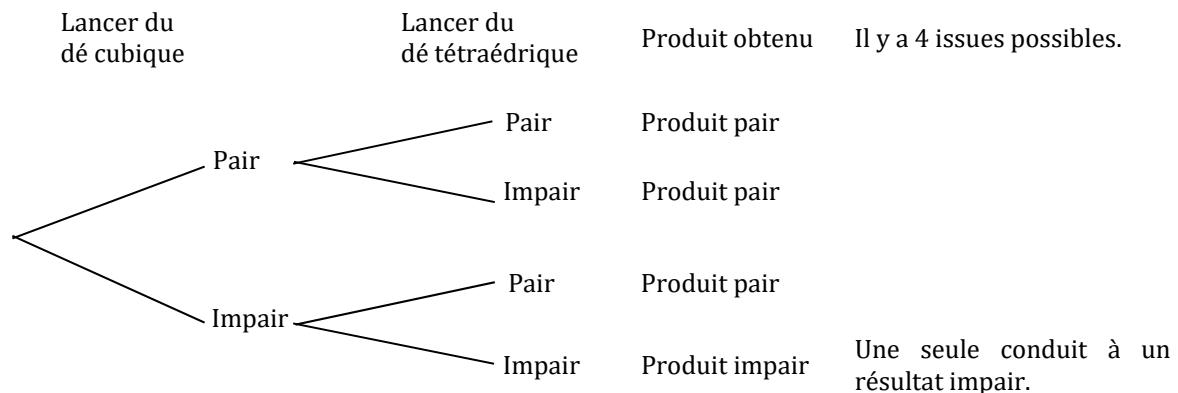
On peut représenter la situation par un arbre binaire en n'envisageant à chaque lancer que deux issues possibles, le résultat obtenu est pair ou bien impair.

Pour le dé cubique, comme pour le dé tétraédrique, la probabilité que le résultat du lancer indique un nombre pair est de $\frac{1}{2}$ (3 faces sur 6 dans un cas, 2 faces sur 4 d'autre l'autre). Il en est de même de la probabilité que le résultat du lancer indique un nombre impair.



Méthode 3 bis : à l'aide d'un arbre binaire non pondéré

Comme pour chacun des deux lancers de dés, il y a équivalente entre obtenir un résultat pair ou obtenir un résultat impair, l'arbre suivant (qui n'est pas pondéré) est un arbre où chacune branche a la même probabilité d'apparition. Parmi les 4 issues possibles, une seule conduit à un produit impair et trois à un résultat pair. On trouve donc des probabilités respectives de $\frac{1}{4}$ et $\frac{3}{4}$.



Remarque

L'ordre dans lequel on considère les deux lancers étant indifférent, on pouvait dans les méthodes 3 et 3 bis commencer par représenter le résultat du lancer du dé tétraédrique et représenter ensuite celui du dé cubique.

Méthode 4 : à l'aide d'un arbre recensant les 24 issues possibles

On pouvait aussi modéliser la situation à l'aide d'un arbre équiprobable (non reproduit ici) comportant à partir de la racine 6 branches se partageant ensuite chacune en 4 (ou bien l'inverse) pour recenser les 24 issues équiprobables possibles et identifier les cas où le produit obtenu est pair et ceux où il est impair.

2) b) Probabilité d'obtenir un produit multiple de 3

Dans cette question, on pouvait reprendre en l'adaptant, la méthode utilisée à la question précédente.

Méthode 1 : à l'aide d'un tableau à double entrée

Lorsque qu'on lance un dé cubique, il y a 6 issues équiprobables possibles. Lorsqu'on lance un dé tétraédrique, il y a 4 issues équiprobables possibles.

Lorsqu'on lance ensemble ces deux dés, il y a $6 \times 4 = 24$ issues équiprobables possibles, chacune correspondant à l'une des cases d'un tableau à double entrée, de six colonnes et quatre lignes. En indiquant dans chaque case le produit obtenu, on obtient le tableau suivant :

Dé à 6 faces Dé à 4 faces	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24

Sur les 24 cas possibles, il y en a 12 pour lesquels le produit obtenu est un multiple de 3 (cases grises).

La probabilité d'obtenir un produit multiple de 3 est donc de $\frac{12}{24}$ soit $\frac{1}{2}$.

Méthode 2 : à l'aide d'un raisonnement arithmétique portant sur les multiples de 3

3 est un nombre premier. En conséquence :

- un produit de plusieurs facteurs est multiple de 3 si et seulement si au moins de ses facteurs est un multiple de 3 ;
- un produit de plusieurs facteurs n'est pas un multiple de 3 si et seulement si aucun de ces facteurs n'est multiple de 3.

Cette dernière condition, qui est la plus simple à utiliser ici, permet d'obtenir la probabilité de l'évènement complémentaire de celui cherché.

L'évènement « le produit des nombres indiqués n'est pas un multiple de 3 » peut se décomposer en : « le nombre indiqué par le dé cubique n'est pas un multiple de 3 » ET PUIS « le nombre indiqué par le dé tétraédrique n'est pas un multiple de 3 ».

Parmi les 6 faces du dé cubique, 4 ne portent pas des nombres multiples de 3 (1 ; 2 ; 4 et 5). La probabilité de l'évènement « le nombre indiqué par le dé cubique n'est pas un multiple de 3 » est donc de $\frac{4}{6}$.

Parmi les 4 faces du dé tétraédrique, 3 ne portent pas un nombre multiple de 3 (1 ; 2 et 4).

La probabilité de l'évènement « le nombre indiqué par le dé tétraédrique n'est pas un multiple de 3 » est donc de $\frac{3}{4}$.

Ces deux évènements sont indépendants.

La probabilité de l'évènement « le produit des nombres indiqués par les deux dés n'est pas un multiple de 3 » est donc :

$$p = \frac{4}{6} \times \frac{3}{4} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$$

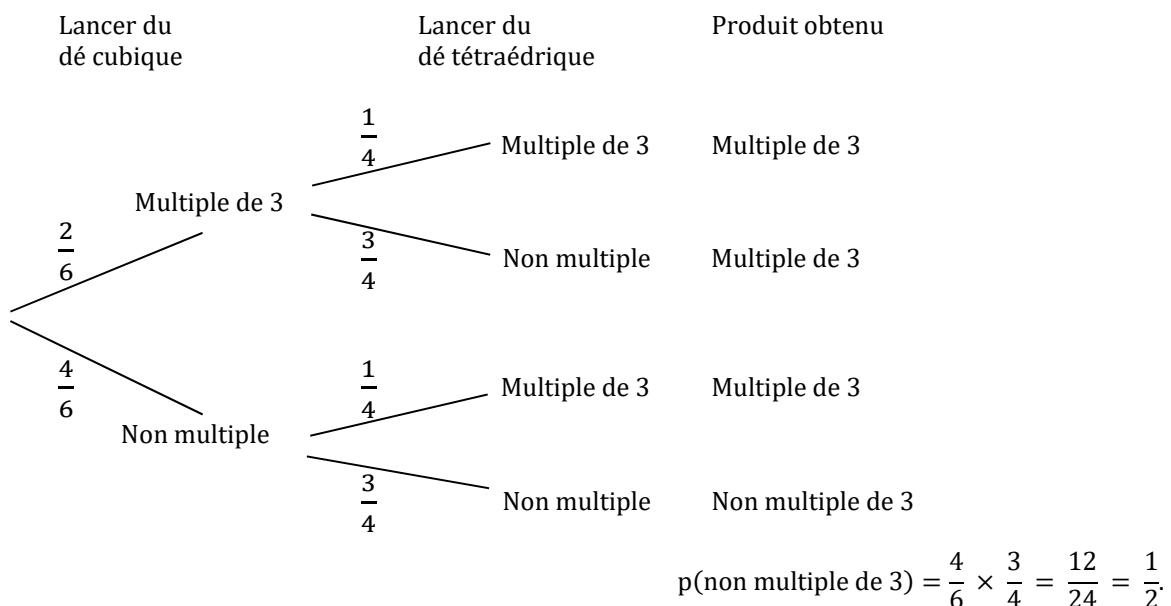
La probabilité de l'évènement complémentaire « le produit des nombres indiqués par les deux dés est un multiple de 3 » est donc $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Méthode 3 : à l'aide d'un arbre binaire pondéré

On peut représenter la situation par un arbre binaire en n'envisageant à chaque lancer que deux issues possibles, le résultat obtenu est un multiple de 3 ou non.

Pour le dé cubique, seules deux des six faces portent un nombre multiple de 3. Les probabilités d'obtenir ou non un nombre multiple de 3 avec ce dé sont donc respectivement de $\frac{2}{6}$ et de $\frac{4}{6}$.

Pour le dé tétraédrique, seule une des quatre faces porte un nombre multiple de 3. Les probabilités d'obtenir ou non un nombre multiple de 3 avec ce dé sont donc respectivement de $\frac{1}{4}$ et de $\frac{3}{4}$.



Remarque

1) L'ordre dans lequel on considère les deux lancers étant indifférent, on pouvait commencer par représenter le résultat du lancer du dé tétraédrique et représenter ensuite celui du dé cubique.

2) Contrairement à la question précédente, on ne pouvait plus modéliser la situation à l'aide d'un arbre binaire non pondéré car il n'y a plus équivalibilité.

Méthode 4 : à l'aide d'un arbre recensant les 24 issues possibles

On peut aussi modéliser la situation à l'aide d'un arbre équiprobable (non reproduit ici) comportant à partir de la racine 6 branches se partageant ensuite chacune en 4 (ou bien l'inverse) pour recenser les 24 issues équiprobables possibles et identifier les cas où le produit obtenu est un multiple de 3.

EXERCICE 3

1) a) Nombre obtenu en entrant le nombre 5 dans le programme A

Lorsque l'on entre le nombre 5, la variable « réponse » prend la valeur 5 et le programme rend le résultat du calcul $5 \times 4 + 7$.

Comme $5 \times 4 + 7 = 20 + 7 = 27$, quand on entre le nombre 5 dans le programme A, **la réponse obtenue est bien le nombre 27.**

1) b) Nombre obtenu en entrant le nombre $\frac{7}{10}$ dans le programme A

Lorsque l'on entre le nombre $\frac{7}{10}$, la variable « réponse » prend la valeur $\frac{7}{10}$, nombre décimal dont l'écriture à virgule est 0,7.

La réponse obtenue à l'issue de l'exécution du programme sera le résultat du calcul : $0,7 \times 4 + 7$.

On a $0,7 \times 4 + 7 = 2,8 + 7 = 9,8$.

Quand on entre le nombre $\frac{7}{10}$ dans le programme A, **la réponse obtenue sera le nombre 9,8** (nombre qui s'écrit aussi $\frac{98}{10}$).

2) Nombre à entrer dans le programme B pour obtenir le nombre 0,69

Méthode 1 : méthode algébrique à l'aide d'une résolution d'équation

Si l'on note x le nombre entré dans le programme B, le nombre obtenu à l'issue de l'exécution du script sera le résultat du calcul : $x \times 9 - 3$, expression que l'on écrit usuellement sous la forme $9x - 3$.

Ainsi le nombre x qu'il faut entrer dans le programme B pour que le résultat affiché soit 0,69 doit être solution de l'équation : $9x - 3 = 0,69$.

Cette équation est équivalente à $9x = 3 + 0,69$ puis à $9x = 3,69$.

On obtient $x = \frac{3,69}{9}$, d'où $x = 0,41$.

Le nombre qu'il faut entrer dans le programme B pour que le résultat affiché soit égal à 0,69 est donc le nombre 0,41 (qui s'écrit aussi sous forme de fraction décimale $\frac{41}{100}$).

Méthode 2 : méthode arithmétique

Le nombre cherché après multiplication par 9 et retrait de 3 est égal à 0,69, donc le nombre cherché multiplié par 9 est égal à 3,69.

On trouve donc le nombre cherché par la division 3,69 : 9 = **0,41**.

3) Preuve qu'en entrant un nombre impair dans le script B on obtient un multiple de 6

Les nombres pairs (qui correspondent aux doubles) sont les nombres de la forme $2k$, où k est un nombre entier.

Les nombres impairs (que l'on peut aussi définir comme ceux dont le reste dans la division euclidienne par 2 est égal à 1) sont les nombres de la forme $2k + 1$, où k est un nombre entier.

Si l'on entre un nombre impair dans le programme B, le nombre obtenu à l'issue de l'exécution du script sera le résultat du calcul suivant : $(2k + 1) \times 9 - 3$.

Cette expression peut s'écrire $9(2k + 1) - 3$.

En la développant, puis en la simplifiant, on obtient : $9(2k + 1) - 3 = 18k + 9 - 3 = 18k + 6$.

Dans cette dernière expression, on peut mettre 6 en facteur.

Le résultat obtenu peut alors s'écrire sous la forme $6(3k + 1)$.

Comme k est un nombre entier, $3k + 1$ est aussi un nombre entier. Notons le K .

Ainsi, en entrant un nombre impair dans le programme B, le résultat obtenu s'écrit sous la forme $6K$, où K est un nombre entier. On reconnaît dans cette écriture la forme générale des multiples de 6.

En conséquence quel que soit le nombre impair entré dans le programme B, le résultat obtenu sera toujours un multiple de 6.

4) Existence de nombres permettant d'obtenir le même résultat avec les deux programmes

Si l'on note x le nombre que l'on entre dans chacun des deux programmes,

- le nombre obtenu à l'issue de l'exécution du script A sera le résultat du calcul : $x \times 4 + 7$, expression que l'on écrit usuellement sous la forme $4x + 7$;
- le nombre obtenu à l'issue de l'exécution du script sera le résultat du calcul : $x \times 9 - 3$, expression que l'on écrit usuellement sous la forme $9x - 3$.

Ces deux résultats seront égaux à la seule condition que le nombre x entré soit solution de l'équation :

$$4x + 7 = 9x - 3.$$

Cette équation se transforme en

$$4x - 9x = -3 - 7$$

puis en

$$-5x = -10; \quad \text{d'où} \quad 5x = 10 \quad \text{et} \quad x = 2.$$

Il existe donc un seul nombre qui permette d'obtenir le même résultat affiché avec les deux programmes. Il s'agit du nombre 2.

Ce n'était pas demandé, mais on peut vérifier que dans les deux cas on obtient un résultat égal à 15.

Remarque

Une recherche à l'aide d'essais organisés pouvait conduire à trouver 2 comme étant une solution au problème posé. Mais une telle procédure ne permettait pas de justifier que 2 est la seule et unique solution. Or la formulation de la question demandait très clairement d'être exhaustif et de s'assurer d'avoir trouvé toutes les solutions.

TROISIÈME PARTIE

SITUATION 1

1) Notion mathématique que le jeu permet de travailler

La tâche consiste à construire une collection de jetons équivalente à une collection de points présentés sous forme d'une constellation de dé. Le jeu permet donc de travailler l'aspect cardinal du nombre, pour des quantités allant de 1 à 6.

2) Conjecture sur les stratégies des trois élèves

Stratégie d'Anissa

Anissa prend directement le nombre de jetons correspondant à la constellation du dé. Elle identifie donc visuellement et immédiatement la quantité de points présents sur la face du dé. Elle peut avoir reconnu la quantité six globalement grâce à la mémorisation de la constellation du dé (configuration spatiale) associée à la formulation de cette quantité.

Remarque

On peut parler ici de subitizing. Michel Fayol définit ce terme « subitizing » comme étant le dénombrement rapide, précis et assuré de la numérosité d'une collection présentée pendant une durée très brève. Ce processus consiste en une « aperception globale » d'une quantité qui ne nécessite pas de recours au comptage.

Anissa peut aussi avoir identifié des sous-collections disjointes, par exemple « trois et trois » (lecture par ligne) ou « deux et deux et deux » (lecture par colonne). Elle prend ensuite le bon nombre de jetons. Elle peut les avoir pris un à un tout en récitant la comptine numérique jusqu'à six, ou en égrenant la comptine jusqu'à trois (première ligne) et encore jusqu'à trois (deuxième ligne) ou encore jusqu'à deux, trois fois de suite, en associant le comptage à chacune des trois sous-collections de deux points. Elle peut aussi avoir recomposé « trois et trois ça fait six » et prendre six jetons en récitant la comptine numérique jusqu'à six.

Stratégie d'Elvina

Elvina prend une poignée de jetons, les organise à l'identique de la constellation du dé puis repose l'excédent. Elle réalise ainsi une correspondance terme à terme de la collection de jetons avec celle des points du dé en s'appuyant sur l'organisation spatiale de la constellation. Elvina peut avoir pris de façon volontaire plus de jetons que nécessaire par estimation visuelle, sachant qu'elle peut ensuite repérer l'excédent. Des observations sur plusieurs jeux permettraient de savoir si telle est bien sa stratégie.

Stratégie de Martin

Martin prend le bon nombre de jetons pour 1, 2 ou 3 obtenus sur le dé. On peut supposer qu'il procède par subitizing pour la reconnaissance de ces petites quantités et qu'il dénombre ensuite par la même méthode (subitizing) ou par comptage la quantité de jetons correspondante.

Pour les constellations 4, 5 et 6, il semble ne pas reconnaître immédiatement le nombre correspondant : il utilise alors un dénombrement par comptage (en pointant avec son doigt chacun des points de la constellation du dé) tout en prenant au fur et à mesure un jeton.

3) Modifications du jeu pour complexifier la tâche pour Anissa

Modification n°1

Les constellations du dé sont organisées. On peut donc proposer à Anissa des collections non organisées de points. Pour 5 ou 6 points, la reconnaissance par subitizing sera ainsi moins probable, Anissa devra alors mobiliser une autre stratégie pour dénombrer cette collection.

Modification n°2

Plutôt qu'utiliser une représentation analogique du nombre (constellation de points), on peut proposer l'écriture chiffrée des nombres.

Modification n°3

Lancer simultané de deux dés. La reconnaissance immédiate de la constellation n'est plus possible. Cela met alors en jeu la recomposition des deux nombres obtenus (par exemple « quatre et deux ça fait six »).

Remarque

Pour proposer des modifications pertinentes il faudrait connaître plus précisément les connaissances de l'élève et les intentions de l'enseignant. Par exemple, pour la modification n°2, Anissa connaît-elle les écritures chiffrées des nombres ? Est-ce un objectif de l'enseignant à ce moment de l'année ?

4) Modification du jeu pour qu'Elvina mobilise d'autres stratégies

On peut demander à Elvina de prendre en une seule fois le bon nombre de jetons : pour gagner, elle n'aura ni le droit d'en remettre dans la boîte de jetons, ni le droit d'en reprendre. Cela peut l'orienter vers une procédure de dénombrement, elle peut aussi conserver sa procédure de mise en correspondance terme à terme, mais elle devra la réaliser mentalement en prenant les jetons un à un et en imaginant leur organisation spatiale.

Il est aussi possible d'éloigner le dé de la collection de jetons pour éviter qu'Elvina puisse voir la configuration spatiale de la constellation du dé au moment où elle constitue la collection de jetons. Cela rendra difficile la reproduction spatiale de la configuration. On peut imposer ici aussi le fait de prendre en une seule fois le bon nombre de jetons pour éviter des allers-retours qui permettraient à Elvina de reproduire pas à pas la configuration spatiale de la constellation.

On peut également organiser une situation de communication entre deux enfants (ou avec l'enseignant) en demandant à Elvina de commander le nombre de jetons indiqués par le dé à un autre enfant (ou à l'enseignant) qui ne voit pas le dé (qui est éloigné par exemple). Si par exemple, elle obtient la constellation du 6, elle doit demander « six » jetons à l'élève (ou à l'enseignant). Elle sera ainsi amenée à utiliser une procédure numérique.

5) Ce que permet de faire travailler de nouveau la situation avec deux dés

Avec les deux dés, les élèves devront construire une collection de jetons équivalente à deux sous-collections de points présentés sous forme de constellations de deux dés. Ce nouveau jeu permet donc de travailler la décomposition-recomposition des nombres, pour des quantités allant de 2 à 6 (par exemple « deux et trois font cinq »).

SITUATION 2

1) Influence du choix du papier uni sur les procédures des élèves

Le papier uni permet la mise en œuvre de procédures plus diverses que si le support donné était quadrillé. L'absence de quadrillage pourrait notamment amener les élèves à utiliser certaines propriétés géométriques de la figure (milieux, alignements, égalité de longueurs, symétrie, ...) : il est ainsi possible, par exemple, de placer le « sommet de la tête » au milieu du côté supérieur de la feuille. Les élèves peuvent aussi repérer les points remarquables de la figure sans tracer de quadrillage (par agrandissement des longueurs). La réalisation d'un quadrillage reste toutefois encore possible : réalisation d'un quadrillage « agrandi » de 7 carreaux par 8 carreaux (1 carreau pour 3 cm) ou réalisation d'un quadrillage de 21 sur 24 mais agrandissement des longueurs par 3 sur ce quadrillage. Ces procédures qui s'appuient sur un quadrillage imposent la réalisation de ce quadrillage, ce qui conduit à utiliser les relations de proportionnalité.

2) a) Description des procédures de trois élèves

Procédure de Manon

Manon a repéré puis placé les points clés de la figure : sommets des triangles représentant la bouche et le nez, sommets des rectangles représentant les yeux, extrémités des segments représentant les sourcils, sommets du polygone formant le visage. Elle peut avoir repéré les points à partir d'une même origine (par exemple en démarrant en bas à gauche et rejoignant un point donné par dénombrement des côtés de carreaux dans un déplacement horizontal vers la droite et dans un déplacement vertical vers le haut). Elle peut aussi avoir repéré les points de proche en proche.

Pour placer les points clés sur la feuille avec l agrandissement voulu, Manon a déterminé la relation de proportionnalité : si on utilise toute la longueur de la feuille, 8 cm sont représentés par 24 cm, toutes les dimensions sont alors multipliées par 3 et en utilisant ce coefficient pour la largeur, on constate que les 7 cm seront représentés par 21 cm (3×7 cm). Toute la feuille sera ainsi utilisée si on multiplie les dimensions par 3. Manon peut alors placer les points clés du masque agrandi en utilisant ce coefficient d agrandissement. En toute rigueur, pour le placement des points clés, elle devrait utiliser son équerre pour réaliser des déplacements horizontaux (direction perpendiculaire au bord vertical du support) et verticaux (direction perpendiculaire au bord horizontal du support). Aucun trait de construction n'est là pour suggérer qu'elle ait effectivement procédé ainsi. Pour terminer, elle a relié les différents points pour obtenir le masque.

Procédure de Sarah

Sarah a construit un quadrillage de 21×24 carreaux. Chaque carreau a ainsi les mêmes dimensions que les carreaux de la figure modèle : ce sont des carrés de 1 cm de côté. Pour réaliser ce quadrillage, elle a mis des repères à 1 cm d intervalle sur les longueurs et largeurs du support rectangulaire, puis elle a tracé les lignes verticales et horizontales. Elle a aussi comme Manon déterminé et utilisé la relation de proportionnalité : un côté de carreau de la figure modèle devient 3 côtés de carreau pour la figure agrandie. Elle a alors pu placer des points clés et les relier (contour du visage, sourcils et yeux).

Procédure d'Amir

Amir a construit une partie de quadrillage formé de 7 lignes de 3 cm de large et de 4 colonnes de 3 cm de large (sur la partie gauche). On peut supposer que comme Manon et Sarah, il s'est appuyé sur la relation de proportionnalité – 1 cm est représenté par 3 cm – pour construire ce quadrillage, qui est un agrandissement (incomplet) du quadrillage de la figure modèle. Il a ensuite placé les points clés de la figure sur la partie gauche et relié les points. Le quadrillage incomplet laisse penser qu'il a complété la figure par symétrie par rapport à l'axe vertical central.

2) b) Réussites et erreurs dans les productions de Léon et Sarah

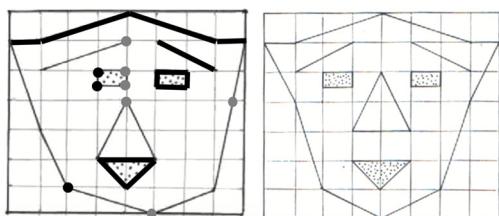
Production de Léon

Réussites

Léon a réalisé un agrandissement correct du quadrillage de la figure modèle (en tenant compte de la précision que permettent les instruments utilisés), le tracé de la bouche, de l'œil droit, du sourcil droit et du haut du visage sont correctement tracés (en gras sur la figure). Il met en œuvre une procédure qui permettrait d'aboutir à l agrandissement voulu.

Erreurs

On peut noter des erreurs dans la relation de contiguïté des deux triangles, Léon produit un côté commun alors qu'il ne le faudrait pas, certains points clés sont mal positionnés et un point clé a été oublié (en gris sur la figure). Ses principales difficultés sont donc relatives à l'utilisation du repérage sur le quadrillage pour reproduire la figure à partir du modèle et des relations spatiales entre les sous-figures.



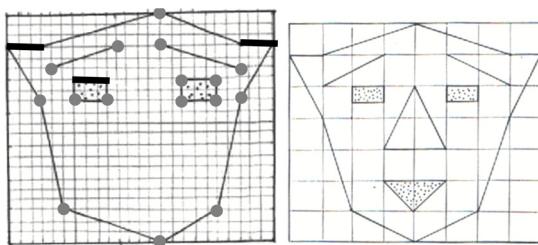
Production de Sarah

Réussites

Sarah met en œuvre une procédure qui permettrait d'aboutir à l agrandissement voulu. Quelques points clés ont été bien repérés (en gras).

Erreurs

Le quadrillage manque de précision dans le tracé. De nombreux points clés sont mal placés (erreur de comptage de carreaux ou erreur dans la relation de proportionnalité utilisée). Par ailleurs il manque des éléments (bouche et nez).



SITUATION 3

1) Mobilisation des compétences modéliser et calculer dans le problème

Pour résoudre ce problème faisant référence à une situation « de la vie quotidienne » les élèves vont devoir mobiliser des outils mathématiques et mobiliser ainsi la compétence « modéliser ». Le problème mathématique obtenu par cette modélisation consiste à identifier deux nombres dont la somme est de 128 et la différence est de 75. Pour résoudre ce problème mathématique les élèves vont devoir mobiliser la compétence « calculer » : faire des calculs mentalement, en ligne ou posés et éventuellement contrôler la vraisemblance de leur résultat.

Extrait des compétences mathématiques pour le cycle 3

Modéliser

« Utiliser les mathématiques pour résoudre quelques problèmes issus de situations de la vie quotidienne. Reconnaître et distinguer des problèmes relevant de situations additives, multiplicatives, de proportionnalité.

Reconnaitre des situations réelles pouvant être modélisées par des relations géométriques (alignement, parallélisme, perpendicularité, symétrie).

Utiliser des propriétés géométriques pour reconnaître des objets. »

Calculer

« Calculer avec des nombres décimaux, de manière exacte ou approchée, en utilisant des stratégies ou des techniques appropriées (mentalement, en ligne, ou en posant les opérations).

Contrôler la vraisemblance de ses résultats.

Utiliser une calculatrice pour trouver ou vérifier un résultat. »

2) Analyse des trois productions d'élèves en repérant les réussites et les erreurs

Production de Leïna

Erreurs

Leïna modélise le problème par la recherche de la différence entre 128 et 75. Cette erreur peut être liée à une volonté de faire une opération avec les deux nombres fournis dans l'énoncé. Tout se passe alors comme si elle considérait que le prix des skis était de 128 euros, ce qui l'amènerait à enlever 75 euros des 128 euros pour trouver le prix des bâtons.

Réussites

Leïna pose l'opération pour trouver le résultat de son calcul. La réalisation du calcul posé est correcte ($128 - 75 = 53$). Elle conclut en indiquant le prix des bâtons de skis comme cela est demandé.

Production de Mathis

Erreurs

Mathis modélise le problème par la recherche de la somme de 128 et 75. Tout comme Leïna, Mathis cherche peut-être à faire une opération avec les deux nombres fournis et considère que le prix des skis est de 128 euros. Il est possible qu'il soit influencé par l'expression « 75 euros de plus que les bâtons » dans l'énoncé, ce qui l'amène à ajouter 75 euros. Il semble ne pas avoir contrôlé la vraisemblance de son résultat (puisque il trouve un prix de bâtons plus élevé que celui des skis).

Réussites

Mathis effectue un calcul correct pour le calcul de $128 + 75$. On peut penser qu'il a obtenu mentalement ou à l'aide de la calculatrice ce résultat puisqu'il n'y a pas de trace de calcul à l'écrit. Il conclut en indiquant le prix des bâtons de skis comme cela est demandé.

Production de Mickaël

Réussites

Mickaël a trouvé le résultat correct. En partant d'un prix de 26,50 euros pour les bâtons il calcule la somme $26,5 + 75 = 101,50$ sur la première ligne pour obtenir le prix des skis. Il écrit ensuite en-dessous le prix des bâtons (26,50) et pose l'addition de ces deux prix. Il calcule correctement cette addition et obtient 128,00. Cela lui permet de confirmer que le prix des bâtons est bien de 26,50 euros, il n'a donc pas besoin de faire un autre essai. Mickaël n'a toutefois pas fait de phrase réponse pour indiquer le prix des bâtons.

3) Autre démarche qu'un élève de cycle 3 aurait pu entreprendre pour arriver à la solution

Démarche 1 : des essais successifs et ajustements

Cette démarche consiste à choisir un premier prix de bâtons en utilisant un ordre de grandeur et à calculer le prix des skis correspondant à 75 euros de plus puis le total et le comparer à 128 euros. S'il est plus grand que 128, il faut choisir un prix de bâtons plus petit et s'il est plus petit que 128, il faut choisir un prix de bâtons plus grand.

Exemple d'essais successifs

- Pour un prix de bâtons de 30 euros, le prix des skis est de 105 euros ($30 + 75 = 105$) et le prix total est de 135 euros ($105 + 30 = 135$). Ce prix est supérieur à 128 euros. Il faut donc choisir un prix de bâtons inférieur à 30 euros.
- Pour un prix de bâtons de 27 euros, le prix des skis est de 102 euros ($27 + 75 = 102$) et le prix total est de 129 euros ($102 + 27 = 129$). Ce prix est supérieur à 128 euros. Il faut donc choisir un prix de bâtons inférieur à 27 euros.
- Pour un prix de bâtons de 26 euros, le prix des skis est de 101 euros ($26 + 75 = 101$) et le prix total est de 127 euros ($101 + 26 = 127$). Ce prix est inférieur à 128 euros. Il faut donc choisir un prix de bâtons supérieur à 26 euros.
- Pour un prix de bâtons de 26,50 euros, le prix des skis est de 101,50 euros ($26,50 + 75 = 101,50$) et le prix total est de 128 euros ($101,50 + 26,50 = 128$). Ce prix est égal à 128 euros, le prix des bâtons est donc bien égal à 26,50 euros.

Démarche 2 : un essai et un ajustement

Cette démarche consiste à choisir un premier prix de bâtons en utilisant un ordre de grandeur et à calculer le prix des skis correspondant à 75 euros de plus puis le total. Si le total est différent de 128, il faut ensuite calculer la différence entre le prix trouvé et 128. Ce montant correspond au double de l'écart entre le vrai prix des bâtons et le prix des bâtons testé. En effet, pour calculer le prix total on ajoute (ou retranche) cette différence au prix des bâtons et des skis. Il suffit alors d'enlever du prix des bâtons testé (ou d'ajouter) la moitié de l'écart de prix total.

Exemple : En considérant un prix de bâtons de 30 euros, le prix des skis est de 105 euros ($30 + 75 = 105$) et le prix total est de 135 euros ($105 + 30 = 135$). Ce prix est supérieur à 128 euros de 7 euros.

Or dans la somme $105 + 30$ le surplus de prix des bâtons est compté deux fois : dans 105 et dans 30. Il faut donc diviser par 2 l'écart de 7 euros et le diminuer le prix des bâtons et des skis équitablement de 3,50 euros chacun.

Le prix des bâtons obtenu est alors de 26,50 euros ($30 - 3,5 = 26,5$).

Remarque

Cette méthode, appelée « de fausse position », consiste à fournir une solution approchée et s'appuyer sur l'écart constaté pour trouver la solution cherchée.

Démarche 3 : raisonnement utilisant le prix des bâtons uniquement

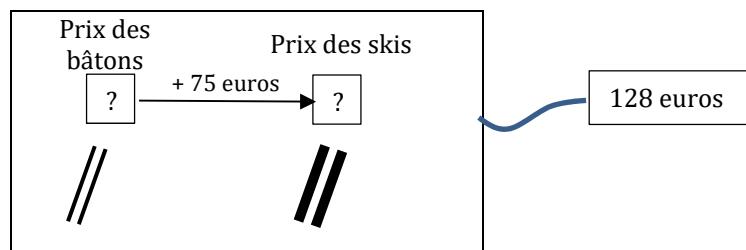
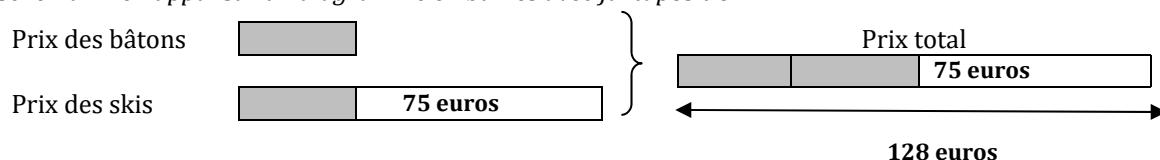
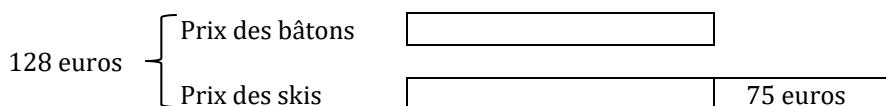
Étant donné que le prix des skis est constitué du prix des bâtons auquel on ajoute 75 euros, on peut donc considérer que le prix total (skis et bâtons) de 128 euros est constitué de deux fois le prix des bâtons et de 75 euros. En enlevant 75 euros à ce prix total ($128 - 75 = 53$) on obtient alors le double du prix des bâtons, soit 53 euros. Le prix des bâtons est donc de 26,50 euros ($53 : 2 = 26,5$).

Remarque

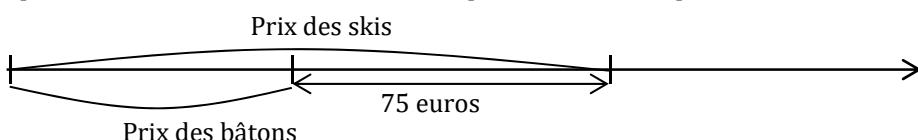
Même si cette démarche est proche de la démarche algébrique (qui consisterait à choisir comme inconnue x le prix des bâtons puis à mettre en équation), ici c'est uniquement un raisonnement arithmétique qui est mis en œuvre.

4) Un schéma pour aider les élèves à modéliser la situation

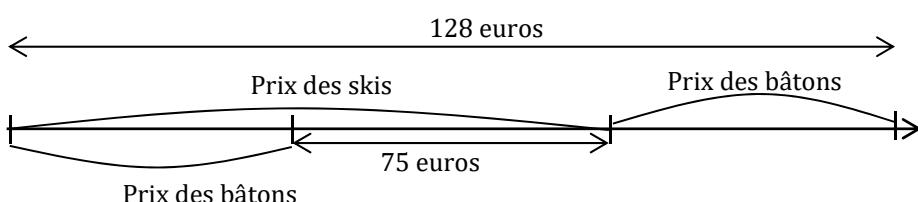
Pour modéliser la situation, les élèves doivent prendre en compte à la fois la relation entre le prix des skis et des bâtons ainsi que le prix total. Ce sont deux difficultés identifiées dans les productions d'élèves. Voici différentes propositions de schémas prenant simultanément en compte les deux contraintes du problème.

Schéma 1 : en utilisant des ensembles*Schéma 2 : en appui sur un diagramme en barres avec juxtaposition**Schéma 3 : en appui sur un diagramme en barres sans juxtaposition**Schéma 4 : en appui sur une demi-droite graduée*

1^{ère} étape : schématisation de la relation entre prix des bâtons et prix des skis



2^{ème} étape : ajout de la contrainte liée au prix total en reportant le prix des bâtons

**Remarque**

Les schémas proposés sont donnés tels qu'ils pourraient apparaître à l'issue de la mise en commun. L'enseignant pourra faire le choix en début de mise en commun de se limiter à des schémas partiels, en particulier sans indiquer les valeurs numériques, en laissant à charge des élèves de les compléter pour les aider à modéliser cette situation.

GROUPEMENT 5 – avril 2019

PREMIÈRE PARTIE :

A - Boisson à base de sirop

1) Calcul de volumes respectant la composition de la boisson

1) a) Volume de boisson avec 5 cL de sirop

Pour réaliser la boisson, il faut mélanger un volume de sirop pour sept volumes d'eau.
Avec 5 cL de sirop, on doit ajouter $5 \text{ cL} \times 7 = 35 \text{ cL}$ d'eau.

Au total, on obtient $35 \text{ cL} + 5 \text{ cL} = 40 \text{ cL}$ de boisson.

Avec 5 cL de sirop, le volume de boisson obtenu est 40 cL.

2) b) Volume de sirop pour 24 cL de boisson

La boisson contient 1 volume de sirop et 7 volumes d'eau soit 1 volume de sirop pour 8 volumes en tout.

Pour 24 cL de boisson, le volume de sirop est donc $\frac{24 \text{ cL}}{8} = 3 \text{ cL}$ (ou encore $24 \text{ cL} = 3 \text{ cL} + 3 \text{ cL} \times 7$).

Pour obtenir 24 cL de boisson, il faut 3 cL de sirop.

2) Pourcentage du volume de la boisson représenté par le volume de sirop

Le volume V de la boisson est proportionnel au volume v de sirop.

Comme indiqué dans la réponse à la question précédente, si le volume V de la boisson contient 8 volumes v alors il contient 1 volume v de sirop.

Le volume v de sirop représente donc un huitième du volume V de la boisson.

$$\frac{1}{8} = 0,125, \text{ soit } 12,5\%.$$

Le volume v de sirop représente 12,5 % du volume V de la boisson.

B - Des verres cylindriques

1) Contenance du verre

Le volume du cylindre est donné par la formule :

$$V = \text{aire de la base} \times \text{hauteur}.$$

La base du cylindre est un disque et l'aire d'un disque est donnée par la formule :

$$A = \pi \times \text{rayon}^2.$$

Le volume d'un cylindre de hauteur 10,5 cm et de diamètre 6 cm (rayon 3 cm) est donné par la formule :

$$V = \pi \times \left(\frac{6 \text{ cm}}{2}\right)^2 \times 10,5 \text{ cm} = \pi \times 9 \text{ cm}^2 \times 10,5 \text{ cm} = 94,5 \pi \text{ cm}^3.$$

On a $1 \text{ L} = 1 \text{ dm}^3$ donc $100 \text{ cL} = 1000 \text{ cm}^3$, soit $1 \text{ cm}^3 = \frac{1}{10} \text{ cL}$.

La contenance du verre est donc $94,5 \pi \times \frac{1}{10} \text{ cL} = 9,45 \pi \text{ cL}$, soit environ 29,688 cL.

La contenance du verre est bien environ 29,7 cL.

2) Boisson composée de 3 cL de sirop

2) a) Hauteur de la marque correspondant au volume de sirop

Comme on l'a vu à la question précédente, on a $1 \text{ cL} = 10 \text{ cm}^3$, soit $3 \text{ cL} = 30 \text{ cm}^3$.

Méthode 1

Le sirop versé prend la forme du verre, on cherche donc la hauteur h_s d'un cylindre de rayon 3 cm.

Son volume est $V_s = \pi \times (3 \text{ cm})^2 \times h_s$, il est égal à 30 cm^3 .
 On a $V_s = 30 \text{ cm}^3$
 soit $\pi \times (3 \text{ cm})^2 \times h_s = 30 \text{ cm}^3$
 donc $h_s = \frac{30 \text{ cm}^3}{\pi \times 9 \text{ cm}^2} = \frac{10}{3\pi} \text{ cm}$ soit $h_s \approx 1,061 \text{ cm}$.

Méthode 2

Le verre étant cylindrique, le volume de liquide contenu est proportionnel à sa hauteur dans le verre.
 Pour une hauteur de $10,5 \text{ cm}$, le volume du verre est $29,7 \text{ cL}$ environ.
 Pour 3 cL de sirop, la hauteur sera donc $\frac{3 \text{ cL} \times 10,5 \text{ cm}}{29,7 \text{ cL}} \approx 1,061 \text{ cm}$.

La marque doit être positionnée à une hauteur de $1,1 \text{ cm}$ (au mm près).

2) b) Hauteur de la marque correspondant au volume total de la boisson

Méthode 1 : utilisation de la proportionnalité

Le verre étant cylindrique, le volume de liquide contenu est proportionnel à sa hauteur dans le verre.
 Le volume total de la boisson représente 8 fois le volume du sirop.
 Sa hauteur h_b dans le verre est donc 8 fois la hauteur h_s du sirop.

Si la hauteur de sirop dans le verre est $h_s = \frac{10}{3\pi} \text{ cm}$, celle de la boisson est $h_b = 8 \times h_s$.
 On a donc $h_b = \frac{80}{3\pi} \text{ cm} \approx 8,488 \text{ cm}$.

Remarque

Pour obtenir la valeur approchée au mm près de la hauteur de la marque correspondant au volume total de la boisson, on doit utiliser la valeur exacte de la hauteur trouvée à la question précédente (et non la valeur approchée). Dans le cas contraire, on augmenterait l'imprécision du résultat car on multiplierait par 8 l'écart entre la valeur exacte et la valeur approchée.

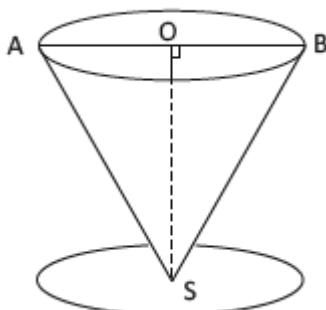
Méthode 2 : calcul à partir du volume

Avec un volume de sirop de 3 cL , on obtient un volume total de boisson de 24 cL . (voir question 1) b) de la partie A).

Son volume est $V_b = \pi \times (3 \text{ cm})^2 \times h_b$, il est égal à 240 cm^3 .
 On a $V_b = 240 \text{ cm}^3$
 soit $\pi \times (3 \text{ cm})^2 \times h_b = 240 \text{ cm}^3$
 donc $h_b = \frac{240 \text{ cm}^3}{\pi \times 9 \text{ cm}^2} = \frac{80}{3\pi} \text{ cm} \approx 8,488 \text{ cm}$.

La marque correspondant au volume total de la boisson doit être positionnée à une hauteur de $8,5 \text{ cm}$ (au mm près).

C - Des verres coniques



1) Hauteur SO

O est le milieu de [AB] donc $OB = \frac{AB}{2} = \frac{12 \text{ cm}}{2} = 6 \text{ cm}$.

Selon la description, le triangle SOB est rectangle en O.

D'après le théorème de Pythagore, appliqué au triangle SOB, on a $OB^2 + SO^2 = SB^2$

donc $SO^2 = SB^2 - OB^2$

soit $SO^2 = (10 \text{ cm})^2 - (6 \text{ cm})^2 = 100 \text{ cm}^2 - 36 \text{ cm}^2 = 64 \text{ cm}^2$.

On a donc $SO = 8 \text{ cm}$.

La hauteur SO d'un verre conique est 8 cm.

2) Volume maximal de boisson dans un verre conique

Le volume du cône est donné par la formule $V = \frac{1}{3} \times \text{aire de la base} \times \text{hauteur}$.

Le verre a la forme d'un cône de rayon 6 cm et de hauteur 8 cm.

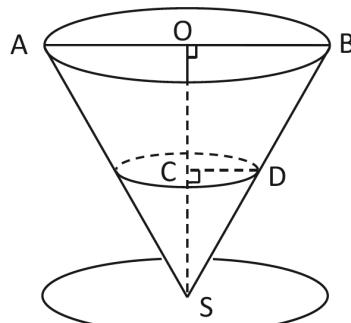
La base du cône est un disque de rayon 6 cm. Son aire est $\pi \times (6 \text{ cm})^2$.

Le volume $V_{\text{cône}}$ de ce cône est donc donné par la formule $V_{\text{cône}} = \frac{1}{3} \times \pi \times (6 \text{ cm})^2 \times 8 \text{ cm}$.

On a donc $V_{\text{cône}} = \frac{1}{3} \times \pi \times 36 \text{ cm}^2 \times 8 \text{ cm} = 96\pi \text{ cm}^3$.

Or $96\pi \text{ cm}^3 = \frac{96\pi}{10} \text{ cL} = 9,6\pi \text{ cL}$ soit environ 30,159 cL.

Le volume maximal de boisson contenue dans un verre conique est 30,2 cL, arrondi au dixième près.

3) a) Expression de r en fonction de h 

(CD) est perpendiculaire à (OS) et (OB) est perpendiculaire à (OS), on peut donc en déduire que les droites (CD) et (OB) sont parallèles.

De plus, les points S, C et O sont alignés dans cet ordre et les points S, D et B sont alignés dans cet ordre.

On peut donc appliquer le théorème de Thalès et on a $\frac{SC}{SO} = \frac{SD}{SB} = \frac{CD}{OB}$.

$\frac{SC}{SO} = \frac{CD}{OB}$ donc $\frac{h}{8 \text{ cm}} = \frac{r}{6 \text{ cm}}$.

Ainsi, $r = \frac{6}{8} h$ donc $r = \frac{3}{4} h$.

L'expression de r en fonction de h est $r = \frac{3}{4} h$.

3) b) Calcul du volume du petit cône

Le petit cône a pour hauteur h et pour rayon du disque de base r .

Son volume est donc $v = \frac{1}{3} \times \pi \times r^2 \times h$.

On a vu que $r = \frac{3}{4} h$.

On a donc $v = \frac{1}{3} \times \pi \times \left(\frac{3}{4} h\right)^2 \times h$ soit $v = \frac{1}{3} \times \pi \times \frac{9}{16} h^2 \times h$.

Et donc $v = \frac{3}{16} \times \pi \times h^3$.

On obtient bien $v = \frac{3\pi}{16} h^3$.

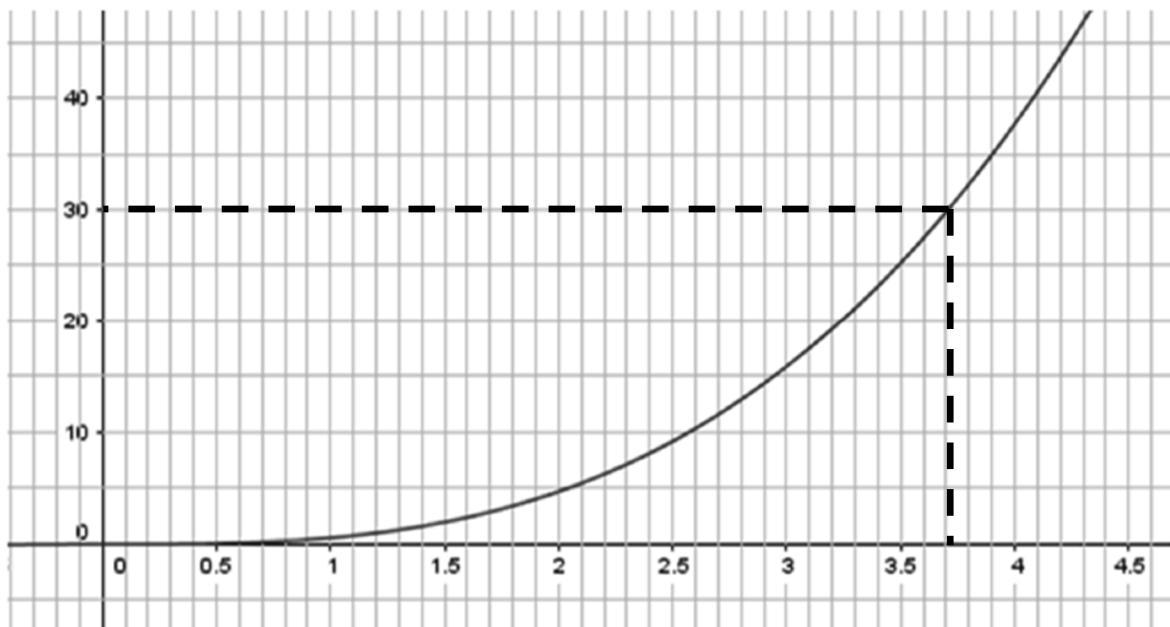
3) c) Utilisation de la représentation graphique pour trouver une hauteur

Sur la représentation de la fonction f qui à x associe $\frac{3}{16}x^3$, on peut donc lire en ordonnées le volume v (en cm^3) et en abscisses la hauteur h (en cm) correspondante.

Pour lire la hauteur associée à un volume donné, le volume doit être exprimé en cm^3 .

$$3 \text{ cL} = 30 \text{ cm}^3.$$

Sur la courbe, on repère le point d'ordonnée 30 et on lit son abscisse : c'est la mesure de la hauteur, en cm, correspondant à un volume de 3 cL dans le verre.



On lit sur le graphique une hauteur d'environ 3,7 cm.

Pour un volume dans le verre de 3 cL, la hauteur est environ 3,7 cm .

3) d) Calcul de la longueur DS

Méthode 1 : utilisation du théorème de Pythagore

Le triangle DCS est rectangle en C, on peut appliquer le théorème de Pythagore.

$$\text{On a : } DS^2 = CD^2 + CS^2 \text{ avec } CD = r \text{ et } CS = h.$$

$$\text{De plus, } r = \frac{3}{4}h.$$

$$\text{Donc } DS^2 = \left(\frac{3}{4}h\right)^2 + h^2$$

$$\text{soit } DS^2 = \frac{9}{16}h^2 + \frac{16}{16}h^2 = \frac{25}{16}h^2.$$

$$\text{Ainsi } DS = \sqrt{\frac{25}{16}h^2} = \frac{5h}{4}.$$

$$\text{Avec } h \approx 3,7 \text{ cm, on trouve } DS \approx \frac{5 \times 3,7 \text{ cm}}{4} \text{ donc } DS \approx 4,6 \text{ cm.}$$

Méthode 2 : utilisation du théorème de Thalès

$$\text{D'après la question 3) a), on a } \frac{SC}{SO} = \frac{SD}{SB} = \frac{CD}{OB}.$$

$$\text{On a donc } SD = \frac{SC \times SB}{SO} \text{ avec } SC = h \text{ (soit environ 3,7 cm)}, SB = 10 \text{ cm et } SO = 8 \text{ cm.}$$

$$\text{Ainsi, } SD \approx \frac{3,7 \text{ cm} \times 10 \text{ cm}}{8 \text{ cm}} \text{ c'est -- à -- dire } SD \approx 4,6 \text{ cm.}$$

Pour un volume de sirop de 3 cL, la longueur DS est bien environ 4,6 cm.

3) e) Affirmation de Vincent

Méthode 1 : utilisation des rapports d agrandissement

Dans le verre, les parties occupées par le sirop et la boisson sont des cônes semblables (celui de la boisson est un agrandissement de celui du sirop). Si, dans un agrandissement, les longueurs sont dans un rapport k , les volumes sont dans un rapport k^3 (les aires sont dans un rapport k^2).

Ici, si on double la hauteur du cône représentant le sirop, le volume de celui représentant la boisson sera multiplié par $2^3 = 8$. Vincent a donc raison, la boisson contiendrait bien alors 1 volume de sirop pour 8 volumes en tout, ou encore 1 volume de sirop pour 7 volumes d'eau.

Méthode 2 : vérification par calcul du volume

On a vu précédemment que $v_1 = \frac{3\pi}{16} h_1^3$ (volume v de liquide dans le verre selon la hauteur h du liquide).

Calculons le volume v_2 de liquide dans le verre pour une hauteur h_2 doublée ($h_2 = 2h_1$).

$$\text{On a : } v_2 = \frac{3\pi}{16} h_2^3 = \frac{3\pi}{16} (2h_1)^3 = \frac{3\pi}{16} 2^3 \times h_1^3 = 2^3 \times \frac{3\pi}{16} h_1^3 = 2^3 \times v_1 = 8 \times v_1.$$

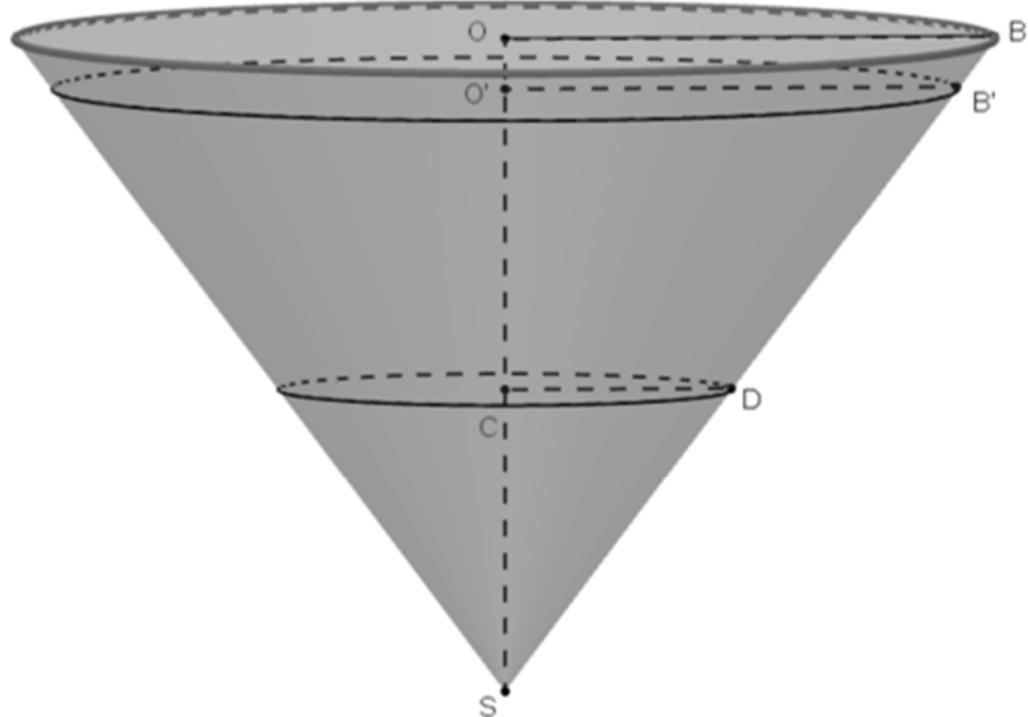
Vincent a raison, $v_2 = 8 \times v_1$.

L'affirmation de Vincent est vraie.

3) f) Position de la marque repérant le volume total de boisson

Remarque

Bien que non indiqué explicitement, la question semble porter sur un volume de boisson obtenue avec un volume de sirop de 3 cL.



Considérons la hauteur du sirop SC et la hauteur de la boisson SO' .

Comme dans la question 3) a), on peut appliquer le théorème de Thalès et on a :

$$\frac{SC}{SO'} = \frac{SD}{SB'} = \frac{CD}{O'B'}$$

$$\text{On a de plus : } \frac{SC}{SO'} = \frac{1}{2} \quad \text{donc} \quad \frac{SD}{SB'} = \frac{1}{2}$$

D'où $SB' = 2 SD$ soit $SB' \approx 2 \times 4,6 \text{ cm}$ ou encore $SB' \approx 9,2 \text{ cm}$.

La marque repérant le volume total de la boisson doit être placée à environ 9,2 cm de S sur le segment [SB].

D - Comparaison des deux verres

1) Identification des représentations

Méthode 1 : utilisation de résultats précédents

Lors des questions précédentes, il a été démontré que, pour le verre conique, si on double la hauteur de liquide dans le verre, on multiplie par 8 son volume. Il n'y a donc pas une relation de proportionnalité entre la hauteur de liquide et son volume, la représentation graphique associée au verre conique n'est donc pas une droite passant par l'origine du repère. Pour le verre cylindrique, il y a une relation de proportionnalité entre la hauteur de liquide dans le verre et son volume, la représentation graphique est donc une droite passant par l'origine du repère.

Méthode 2 : utilisation de valeurs numériques

Pour le verre cylindrique, un volume d'environ 29,7 cL de boisson correspond à une hauteur de 10,5 cm. Le point de coordonnées (10,5 ; 29,7) est un point de la droite C_1 (et pas de C_2), on peut donc en conclure que la représentation graphique C_1 correspond au verre cylindrique. Par conséquent, C_2 correspond au verre conique.

De la même façon, on aurait pu choisir des valeurs pour le verre conique. Pour un volume dans le verre de 3 cL, la hauteur est environ 3,7 cm. Le point de coordonnées (3,7 ; 3) est un point de la courbe C_2 (et pas de C_1), on peut donc en conclure que la représentation graphique C_2 correspond au verre conique. Par conséquent, C_1 correspond au verre cylindrique.

Remarque

L'allure de la courbe donnée en partie C permet de conclure directement que C_2 correspond au verre conique (c'est une courbe alors que C_1 est une droite).

La représentation graphique C_1 correspond au verre cylindrique et la représentation graphique C_2 correspond au verre conique.

2) Point d'intersection des deux courbes

Par lecture graphique, le point d'intersection des deux courbes (différent de l'origine du repère) a approximativement pour coordonnées (6,9 ; 19). Cela signifie que pour une même hauteur de liquide, les verres contiennent le même volume de boisson.

Pour une hauteur de liquide de 6,9 cm environ, les deux verres contiennent le même volume de liquide, environ 19 cL.

DEUXIÈME PARTIE

EXERCICE 1

a) Comparaison de vitesses

Méthode 1 : calcul de la vitesse de la balle en km/h et comparaison avec la vitesse du train

La vitesse de la balle de tennis est :

$$v_b = \frac{23 \text{ m}}{0,46 \text{ s}} = \frac{\frac{23}{0,46} \text{ km}}{\frac{0,46}{3600} \text{ h}} = \frac{23}{1000} \times \frac{3600}{0,46} \text{ km/h} = \frac{23 \times 3600}{46 \times 10} \text{ km/h} = \frac{3600}{2 \times 10} \text{ km/h} = 180 \text{ km/h.}$$

La balle de tennis est donc plus rapide que le train.

Méthode 2 : autre formulation de la première méthode

La balle parcourt 1 m en 0,02 s.

Elle parcourt 1 km (distance mille fois plus longue que 1 m) en $1000 \times 0,02 \text{ s} = 20 \text{ s}$ (durée mille fois plus longue que 0,02 s).

$1 \text{ h} = 3600 \text{ s} = 180 \times 20 \text{ s}$.

En 1 h (soit une durée 180 fois plus longue que 20 s), la balle parcourt 180 km (distance cent quatre-vingt fois plus longue que 1 km).

Méthode 3 : calcul du temps mis par le train pour parcourir 23 m et comparaison avec le temps de la balle

$$v_t = \frac{175\,000 \text{ m}}{3\,600 \text{ s}} = \frac{1\,750 \text{ m}}{36 \text{ s}} = \frac{875}{18} \text{ m/s.}$$

Pour parcourir 23 m, le train mettra $\frac{23 \text{ m}}{\frac{875}{18} \text{ m/s}}$ soit $\frac{18 \times 23}{875} \text{ s} \approx 0,47 \text{ s}$.

Le temps mis pour parcourir 23 m est plus long pour le train que pour la balle, le train est donc moins rapide.

L'affirmation 1 est fausse.

b) Série statistique

Le raisonnement s'appuie sur le tableau présentant les hauteurs de pousses rangées par ordre croissant.

L'effectif est de 27 élèves, donc 27 pousses.

La médiane de la série statistique est la hauteur de la poussée du quatorzième élève ($\frac{27+1}{2} = 14$), soit 11 cm.

Avec un élève supplémentaire, donc un effectif de 28 élèves, la médiane de cette nouvelle série statistique devient la moyenne des hauteurs des quatorzième et quinzième pousses.

Les treizième, quatorzième et quinzième pousses de la série initiale ont pour hauteur 11 cm.

Selon la hauteur de la poussée du nouvel élève, trois cas sont à envisager pour le calcul de la nouvelle médiane : inférieure, égale ou supérieure à 11 cm.

- Si la hauteur de la poussée du nouvel élève est inférieure à 11 cm, cette poussée sera avant la treizième de la série initiale. La treizième de la série initiale deviendra la quatorzième de la nouvelle série et la quatorzième de la série initiale deviendra la quinzième de la nouvelle série. Les hauteurs des quatorzième et quinzième pousses de la nouvelle série sont donc 11 cm et la médiane ne change pas.
- Si la hauteur de la poussée du nouvel élève est égale à 11 cm, les treizième, quatorzième, quinzième et seizième pousses de la nouvelle série ont pour hauteur 11 cm et la médiane ne change pas.
- Si la hauteur de la poussée du nouvel élève est supérieure à 11 cm, l'ordre des quinze premières pousses ne change pas ; les hauteurs des quatorzième et quinzième pousses sont toujours 11 cm (ce sont les mêmes valeurs que dans la série initiale) et la médiane ne change pas.

L'affirmation 2 est vraie.

La moyenne des hauteurs de la série initiale (M_1) est le quotient de la somme de toutes les hauteurs (S_1) par le nombre de pousses, 27. La moyenne des hauteurs de la nouvelle série (M_2) est le quotient de la somme de toutes les hauteurs (S_1 augmentée de la nouvelle hauteur h_2) par le nouveau nombre de pousses, 28.

On a $M_2 = M_1 + 0,25 \text{ cm}$ selon l'information donnée.

S_1 étant connue, $\frac{S_1+h_2}{28} - \frac{S_1}{27} = 0,25$ cm est une équation du premier degré où l'inconnue est h_2 .
On peut donc trouver h_2 .

Remarque

La résolution n'est pas demandée ici, voici toutefois comment trouver la valeur de h_2 .

$$\frac{S_1 + h_2}{28} - \frac{S_1}{27} = 0,25 \text{ cm.}$$

On a :

$$S_1 = 1 \times 1 \text{ cm} + 3 \times 3 \text{ cm} + 6 \times 7 \text{ cm} + 2 \times 10 \text{ cm} + 3 \times 11 \text{ cm} + 3 \times 13 \text{ cm} + 5 \times 15 \text{ cm} + 2 \times 19 \text{ cm} + 2 \times 20 \text{ cm} = 297 \text{ cm}$$

$$\text{et } M_1 = \frac{297 \text{ cm}}{28} = 11 \text{ cm.}$$

$$\text{Donc } \frac{297 \text{ cm} + h_2}{28} - 11 \text{ cm} = 0,25 \text{ cm}$$

$$\text{soit } \frac{297 \text{ cm} + h_2}{28} = 11,25 \text{ cm}$$

$$\text{d'où } 297 \text{ cm} + h_2 = 28 \times 11,25 \text{ cm}$$

$$\text{et } h_2 = 315 \text{ cm} - 297 \text{ cm.}$$

$$\text{Donc } h_2 = 18 \text{ cm.}$$

L'affirmation 3 est vraie.

c) Division euclidienne

Méthode 1 : décompositions de A et B et factorisation par 3

D'après les données de l'énoncé, les deux nombres entiers A et B peuvent se décomposer sous la forme :

$A = 9 \times q_1 + 7$ et $B = 6 \times q_2 + 5$ (q_1 et q_2 sont des nombres entiers).

$$\text{Donc } A - B = 9 \times q_1 + 7 - (6 \times q_2 + 5)$$

$$A - B = 9q_1 - 6q_2 + 7 - 5$$

$$A - B = 3 \times (3q_1 - 2q_2) + 2.$$

A étant supérieur à B, on a $A - B \geq 0$ et donc $3q_1 - 2q_2 \geq 0$ puisque $3q_1 - 2q_2$ est entier.

L'expression : $A - B = 3 \times (3q_1 - 2q_2) + 2$, avec $3q_1 - 2q_2$ entier, caractérise la division euclidienne de A – B par 3, dont le reste est 2 et le quotient $(3q_1 - 2q_2)$.

Méthode 2 : calcul séparé des restes

$A = 3 \times (3q_1 + 2) + 1$ et $B = 3 \times (2q_2 + 1) + 2$ (où $3q_1 + 2$ et $2q_2 + 1$ sont des nombres entiers).

Ces expressions caractérisent la division euclidienne de A et de B par 3. Pour A, le reste est 1 et pour B, le reste est 2. Il n'est donc pas possible de conclure directement par rapport au reste de A – B dans la division euclidienne par 3.

$$A - B = 3 \times (3q_1 + 2) + 1 - 3 \times (2q_2 + 1) - 2$$

$$A - B = 3 \times (3q_1 - 2q_2 + 1) - 1$$

$$A - B = 3 \times (3q_1 - 2q_2) + 3 - 1$$

$$A - B = 3 \times (3q_1 - 2q_2) + 2.$$

L'expression : $A - B = 3 \times (3q_1 - 2q_2) + 2$, avec $3q_1 - 2q_2$ entier, caractérise la division euclidienne de A – B par 3, dont le reste est 2 et le quotient $(3q_1 - 2q_2)$.

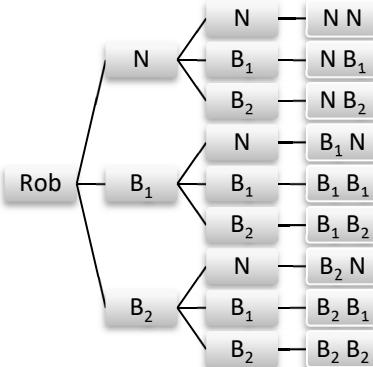
L'affirmation 4 est vraie.

EXERCICE 2

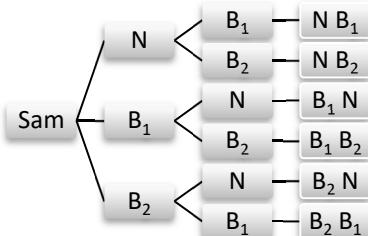
1) Tirages possibles

En utilisant les notations N, B₁, B₂ pour désigner les trois boules indiscernables au toucher contenues dans l'urne, pour mettre en évidence la liste exhaustive des compositions possibles des tirages de deux boules, on peut utiliser un arbre (ou un tableau à double entrée ou toute autre organisation...).

Pour le tirage de Rob qui remet la boule dans l'urne après le premier tirage :



Pour le tirage de Sam qui ne remet pas la boule dans l'urne après le premier tirage :



Pour Rob, la liste des couples de tirages possibles est :

(N ; N), (N ; B₁), (N ; B₂), (B₁ ; N), (B₁ ; B₁), (B₁ ; B₂), (B₂ ; N), (B₂ ; B₁) et (B₂ ; B₂).

Pour Sam, la liste des couples de tirages possibles est :

(N ; B₁), (N ; B₂), (B₁ ; N), (B₁ ; B₂), (B₂ ; N) et (B₂ ; B₁).

Remarque

La seconde liste peut être obtenue à partir de la première en supprimant les couples correspondant au tirage de deux boules identiques.

2) Affirmation de Dorine

Probabilité d'obtenir une boule blanche lors du second tirage

Pour le tirage de Rob, il y a 9 issues possibles parmi lesquelles 6 présentent une boule blanche au second tirage : (N ; B₁), (N ; B₂), (B₁ ; B₁), (B₁ ; B₂), (B₂ ; B₁) et (B₂ ; B₂).

Ainsi, la probabilité pour Rob de tirer une boule blanche au second tirage est $\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$.

Remarque

On peut également considérer l'urne avant le second tirage. Dans la mesure où Rob a remis la première boule qu'il a tirée dans l'urne, il y a une boule noire et deux blanches. La probabilité de tirer une boule blanche au second tirage est donc bien $\frac{2}{3}$.

Pour le tirage de Sam, il y a 6 issues possibles parmi lesquelles 4 présentent une boule blanche au second tirage : (N ; B₁), (N ; B₂), (B₁ ; B₂) et (B₂ ; B₁).

Ainsi, la probabilité pour Sam de tirer une boule blanche au second tirage est $\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$.

L'affirmation de Dorine est vraie.

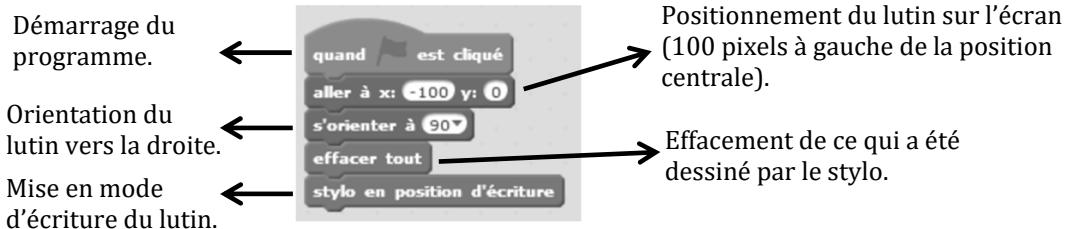
EXERCICE 3

1. Tracés des programmes

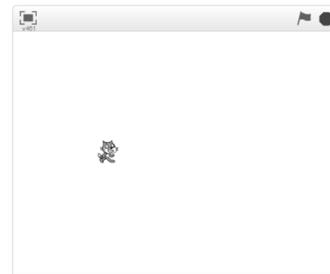
Remarque

Ni le détail des actions réalisées par les programmes, ni les justifications n'étaient attendus. Nous les donnons ici pour une meilleure compréhension du candidat.

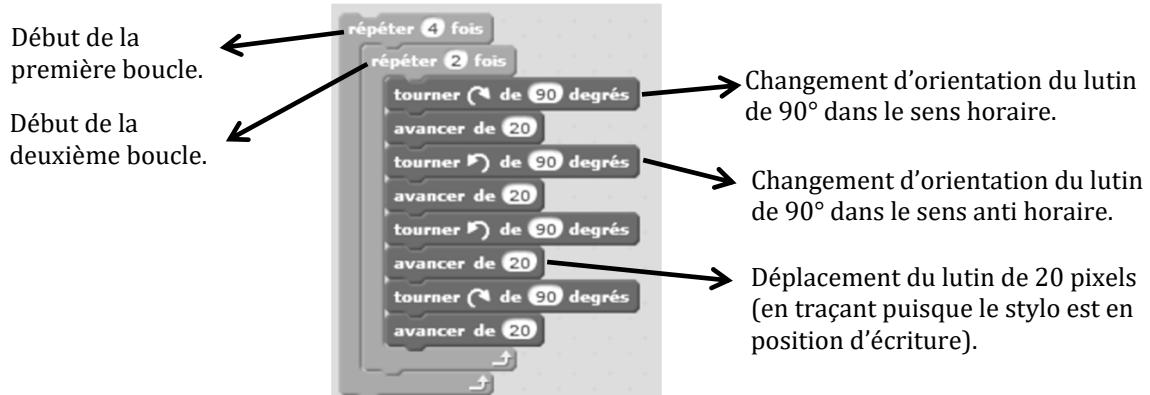
Dans les trois programmes, la phase d'initialisation du lutin est identique :



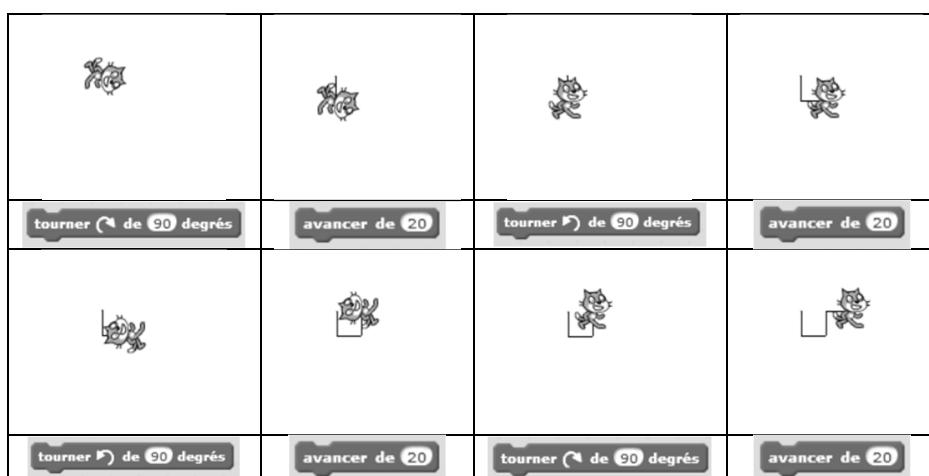
Par conséquent, dans cette phase, les programmes placent le lutin dans la fenêtre de tracé (centré verticalement, décalé vers la gauche de 100 pixels) puis l'orientent vers la droite. Ensuite, tous les tracés précédents sont effacés et le stylo placé en position d'écriture (ainsi, tous les déplacements ultérieurs du lutin laisseront une trace).



Boucles du programme 1



Si on s'intéresse aux actions à l'intérieur de la deuxième boucle, le lutin pivote d'un quart de tour vers la droite, avance de 20 pixels, pivote d'un quart de tour vers la gauche, avance de 20 pixels, pivote d'un quart de tour vers la gauche, avance de 20 pixels, pivote d'un quart de tour vers la droite et avance de 20 pixels.



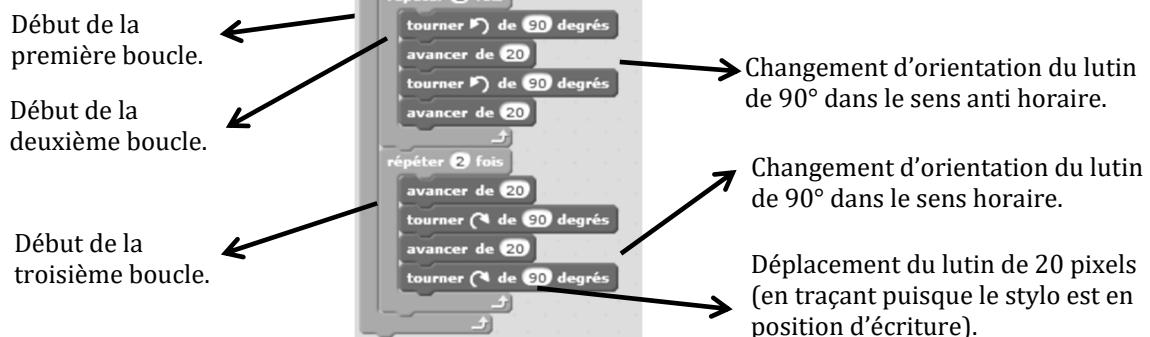
Toutes ces actions sont répétées deux fois pour réaliser un tracé (deuxième boucle) :



Ce tracé est répété quatre fois (première boucle), on obtient :



Boucles du programme 2



Si on s'intéresse aux actions à l'intérieur de la deuxième boucle, le lutin pivote d'un quart de tour vers la gauche, avance de 20 pixels, pivote d'un quart de tour vers la gauche et avance de 20 pixels. Ces actions sont répétées deux fois.

Première occurrence de la boucle

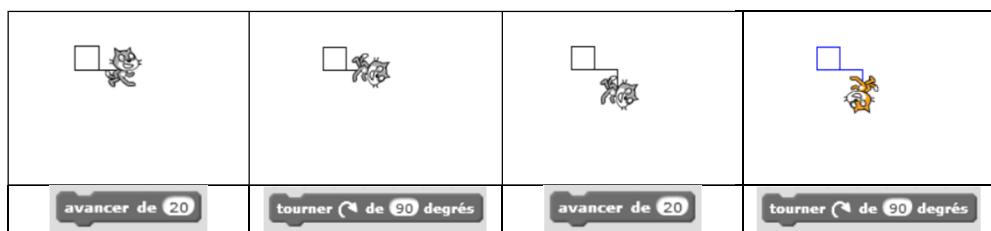


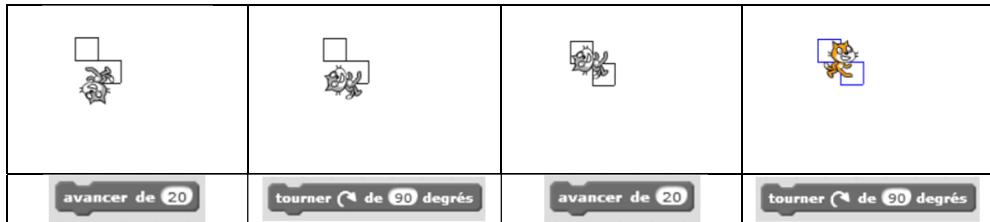
Deuxième occurrence de la boucle



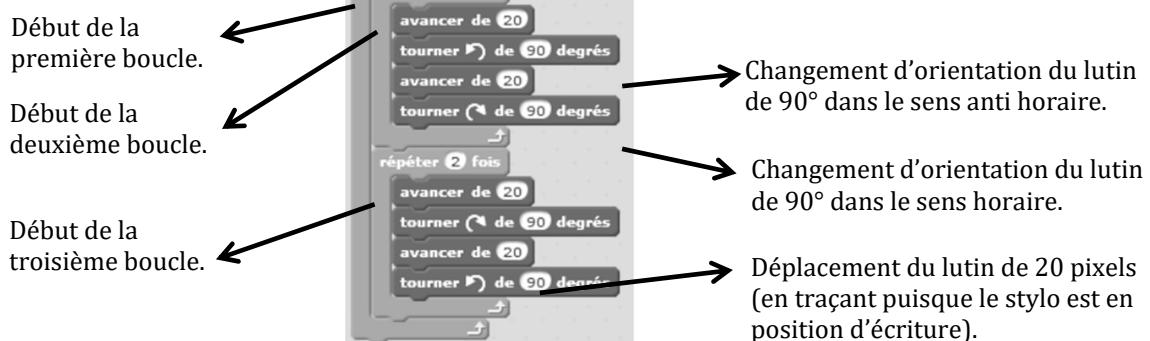
Si on s'intéresse aux actions à l'intérieur de la troisième boucle, le lutin avance de 20 pixels, pivote d'un quart de tour vers la droite, avance de 20 pixels et pivote d'un quart de tour vers la droite. Ces actions sont répétées deux fois.

Première occurrence de la boucle

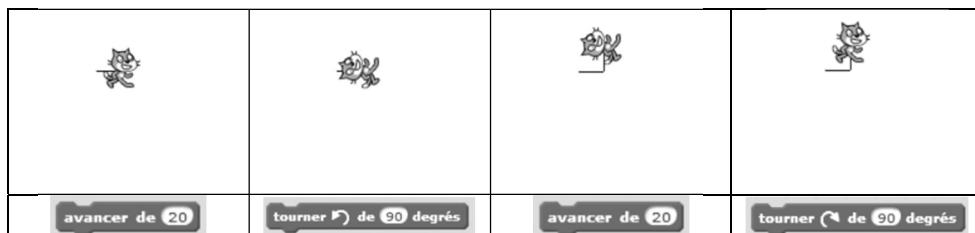
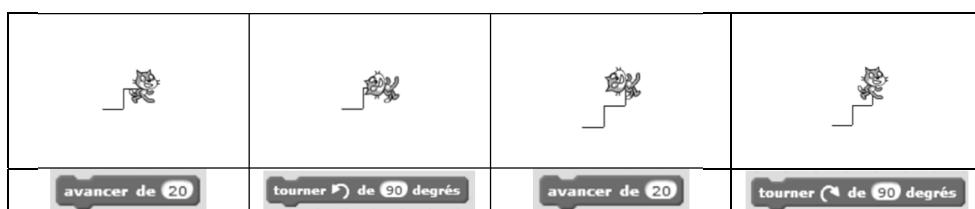


Deuxième occurrence de la boucle

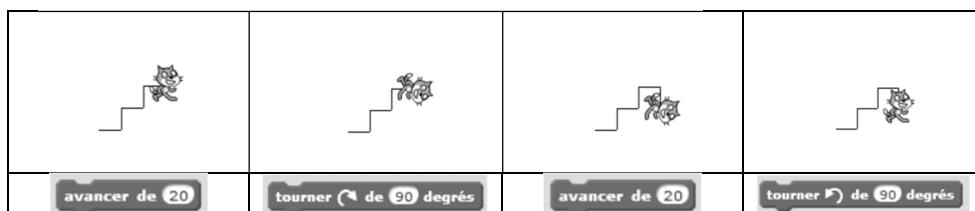
Ces deux boucles sont répétées quatre fois dans la première boucle. Ainsi, le lutin repasse quatre fois sur des éléments déjà tracés.

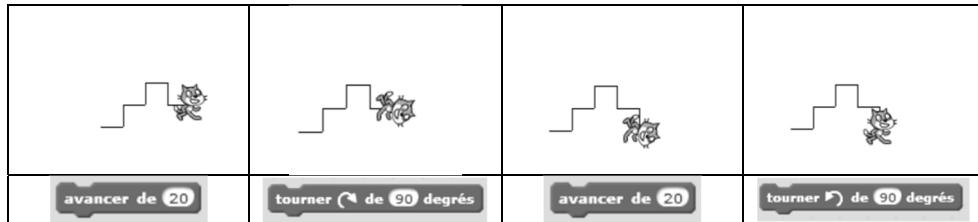
Boucles du programme 3

Si on s'intéresse aux actions à l'intérieur de la deuxième boucle, le lutin avance de 20 pixels, pivote d'un quart de tour vers la gauche, avance de 20 pixels et pivote d'un quart de tour vers la droite. Ces actions sont répétées deux fois.

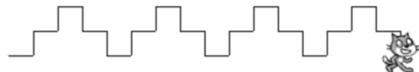
Première occurrence de la boucle**Deuxième occurrence de la boucle**

Si on s'intéresse aux actions à l'intérieur de la troisième boucle, le lutin avance de 20 pixels, pivote d'un quart de tour vers la droite, avance de 20 pixels et pivote d'un quart de tour vers la gauche. Ces actions sont répétées deux fois.

Première occurrence de la boucle

Deuxième occurrence de la boucle

Ce tracé est répété quatre fois (première boucle), on obtient :

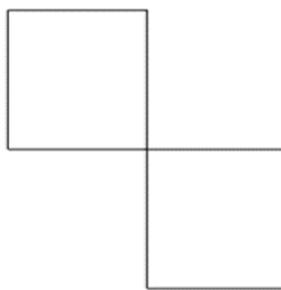


Le tracé 1 est le résultat du programme 3. Le tracé 2 est le résultat du programme 1.

2) Représentation du tracé obtenu par le programme ne correspondant à aucun des tracés

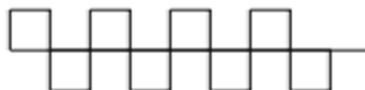
On s'intéresse donc au programme 2.

Le résultat du tracé obtenu, en respectant l'unité graphique (un millimètre par pixel) apparaît ci-dessous.



Remarque

Il convient de souligner que la boucle « répéter 4 fois » est inutile ici, le lutin repasse quatre fois sur le même tracé. Si on avait voulu répéter quatre fois ce motif, il aurait fallu insérer « avancer de 40 pas » à la fin de la deuxième boucle (résultat ci-dessous).

**EXERCICE 4****1) Hauteur totale de l'objet**

Chaque plaque est un parallélépipède rectangle dont deux faces au moins sont des carrés. Les longueurs des côtés des différents carrés sont : 0,5 cm ; 1 cm ; 1,5 cm ; 2 cm ; 2,5 cm ; 3 cm ; 3,5 cm ; 4 cm ; 4,5 cm ; 5 cm ; 5,5 cm ; 6 cm ; 6,5 cm ; 7 cm ; 7,5 cm ; 8 cm ; 8,5 cm ; 9 cm ; 9,5 cm ; 10 cm ; 10,5 cm ; 11 cm ; 11,5 cm ; 12 cm.

Remarque

Il n'est pas indispensable de les énumérer, on peut aussi observer qu'il est possible d'enlever 23 fois 5 mm dans 12 cm ($12 - 23 \times 0,5 = 0,5$).

Il y a donc 24 plaques de carton de 5 mm d'épaisseur (5 mm = 0,5 cm) en tout dans cet objet pyramidal, sa hauteur est alors $24 \times 0,5 \text{ cm} = 12 \text{ cm}$.

La hauteur totale de l'objet est 12 cm.

2) a) Intitulés des colonnes

Les intitulés pourraient être :

- pour la **colonne A, numéro d'ordre de la plaque**, en considérant celle du bas comme la première ;
- pour la **colonne B, mesure de la longueur (en cm) du côté du carré de base de la plaque** ;
- pour la **colonne D, mesure des volumes cumulés croissants des plaques (en cm³)**.

Remarque

Pour la colonne A, on ne peut considérer que ce sont des nombres de plaques. Il n'y a pas de calcul sur ces nombres, ils doivent être considérés comme des numéros pour désigner les plaques. De plus, l'intitulé proposé pour la colonne C réfère à une plaque donnée.

2) b) Formule saisie en C2

Le volume de chaque plaque est le produit du carré (au sens du calcul) de la longueur du côté du carré (au sens géométrique) de la base (donnée en colonne B) par la hauteur de la plaque (0,5 cm).

De ce fait, **une formule qui a pu être saisie dans la cellule C2 est : = B2^2*0,5.**

On peut aussi avoir saisi : = B2*B2*0,5.

2) c) Formule en D3

La proposition 3 est la seule qui a pu être saisie dans la cellule D3 et étirée jusqu'en D25.

Remarques

Les trois autres formules donnent la bonne valeur en D3 mais pas lorsqu'elles sont recopiées vers le bas.

La proposition 1 n'ajouterait les volumes que de deux plaques : celle de la ligne en cours et celle de la ligne au-dessus.

La proposition 2 n'ajouterait également les volumes que de deux plaques : celle de la ligne en cours et celle de la première ligne (C3).

La proposition 3 n'ajouterait également les volumes que de deux plaques : celle de la ligne en cours et celle de la première ligne (72).

2) d) Valeur située dans la cellule D25

Dans la cellule D25, on peut lire la valeur de la somme des cellules C2 à C25.

La valeur 612,5 située dans la cellule D25 correspond à la somme des mesures en cm³ des volumes de chacune des 24 plaques donc la mesure en cm³ du volume de l'objet pyramidal.

3) Masse volumique du carton

La masse volumique exprimée en kilogrammes par mètre cube (kg/m³) est la masse exprimée en kilogrammes (kg) d'une plaque de carton de volume un mètre cube (1 m³).

Selon les données, une plaque d'un mètre carré de ce carton pèse 850 g. Son épaisseur est 5 mm.

Or 5 mm = 0,005 m.

Le volume de la plaque d'1 m² d'un mètre carré de ce carton est : $V = 1 \text{ m}^2 \times \frac{5}{1000} \text{ m} = \frac{5}{1000} \text{ m}^3$.

$$850 \text{ g} = \frac{850}{1000} \text{ kg} = 0,85 \text{ kg.}$$

La masse volumique de ce carton est donc $\frac{\frac{850}{1000} \text{ kg}}{\frac{5}{1000} \text{ m}^3} = \frac{850}{1000} \times \frac{1000}{5} \text{ kg/m}^3 = \frac{850}{5} \text{ kg/m}^3 = 170 \text{ kg/m}^3$.

(ou $\frac{0,85}{0,005} \text{ kg/m}^3 = \frac{850}{5} \text{ kg/m}^3 = 170 \text{ kg/m}^3$).

La masse volumique de ce carton est 170 kg/m³.

La mesure en cm³ du volume de l'objet pyramidal est 612,5 (question2.d).

La masse de l'objet pyramidal est le produit de son volume par sa masse volumique soit :

$$\frac{612,5}{1000000} \text{ m}^3 \times 170 \text{ kg/m}^3 = \frac{612,5 \times 170}{1000000} \text{ kg} = \frac{104125}{1000000} \text{ kg} = \frac{104125 \times 1000}{1000000} \text{ g} = 104,125 \text{ g.}$$

La masse de l'objet pyramidal est 104, 125 g.

TROISIÈME PARTIE

SITUATION 1

1) Analyse des productions : procédure, réussite et erreur éventuelles

Ce problème relève des **structures multiplicatives**, plus précisément de la division avec recherche du nombre de parts (division quotient). Cependant, pour répondre à la question, il faut prendre en compte le reste de la division euclidienne : s'il est différent de « 0 », la réponse sera le quotient augmenté de un. En CE1, les élèves ne disposent pas d'une méthode experte. Ainsi, on peut dire que ce problème relève de la classe des problèmes atypiques (au sens de Catherine Houdement¹).

Production de Jeanne : soustractions itérées

Cette élève pose les soustractions successives de « 23 » à partir de « 100 ». Cette procédure peut traduire l'action de remplir successivement les bus et de considérer à chaque fois le reste obtenu pour décider de répéter ou non cette action. Elle met donc en œuvre une procédure adaptée.

Elle commet deux types d'erreur.

Erreur de calcul

Dans la technique opératoire de la soustraction, lorsqu'il est nécessaire d'introduire une retenue (« 100 – 23 » et « 41 – 23 »), elle ne le fait pas, ce qui conduit à des résultats erronés.

Pour « 100 – 23 », elle « oublie » la retenue et calcule : « $10 - 3 = 7$ » et « $10 - 2 = 8$ », d'où « $100 - 23 = 87$ ».

Pour « 41 – 23 », elle calcule les écarts : « $3 - 1 = 2$ » et « $4 - 2 = 2$ », d'où « $41 - 23 = 22$ ».

Elle ne semble pas disposer de moyens de contrôle de ses résultats (utilisation de l'ordre de grandeur ou calcul de la somme, par exemple).

Erreur dans l'interprétation de ses calculs

Dans la réponse qu'elle propose : « 4 bus », elle dénombre probablement les « 23 » utilisés, soit quatre, sans prendre en compte le dernier reste qu'elle obtient : « 22 ». Celui-ci étant différent de « 0 », dans le contexte du problème, un cinquième bus serait nécessaire.

Production de Noah : soustractions itérées

Cet élève pose les soustractions successives de « 23 » à partir de « 100 ». Il explicite sa procédure car il associe une phrase à chaque calcul effectué en donnant du sens au reste obtenu après l'action de remplir successivement un bus (« Il reste ... élèves après le ... bus »). Il prend en compte le dernier reste « 8 » et conclut « il faudra 5 bus ».

Les calculs sont corrects. Il pose les soustractions en recopiant à chaque fois le reste de la soustraction précédente. Il maîtrise une technique opératoire de la soustraction (ici la « technique par compensation »).

Production de Victoria : additions itérées

Cette élève écrit des additions successives de « 23 ». Cette procédure qui consiste à trouver une décomposition additive de 100 comportant le plus possible de termes « 23 » peut traduire l'action de remplir successivement les bus et de considérer la somme obtenue (se rapprocher de « 100 » sans le dépasser) pour décider de répéter ou non cette action. Elle met donc en œuvre une procédure adaptée.

Elle commet deux types d'erreur.

Erreur dans l'interprétation de ses calculs

Dans la réponse qu'elle propose : « 4 bus », elle dénombre les « 23 » utilisés (nombres entourés figurant en dessous de chaque « 23 »), soit quatre, sans prendre en compte le dernier terme « 8 » qu'elle obtient pour atteindre « 100 ». Celui-ci correspondrait, dans le contexte du problème, à la nécessité d'utiliser un cinquième bus contenant 8 élèves pour transporter tous les élèves de l'école.

¹ HOUDEMENT, C. (2017) Résolution de problèmes arithmétiques à l'école. Grand N, 100, 59-78 téléchargeable à l'adresse <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01902810/document>.

Erreur dans les écritures : statut du signe « = »

Ici la suite d'égalités « raconte » la suite des calculs, mais mathématiquement, ces écritures ne sont pas correctes (par exemple « $23 + 23 = 46 + 23$ »)

Production de Pierrick : représentation organisée de cent petits ronds

Il est très difficile d'analyser la procédure de Pierrick à partir de son seul écrit final : « quatre ensembles de 23 ronds entourés (disposés en deux lignes de 11 ronds et un rond isolé, vu comme une disposition dans un bus ?) et 8 ronds (disposés en deux lignes de 4 ronds) non entourés. Il serait ici nécessaire d'observer l'élève qui réalise la tâche, de disposer du déroulement de ses actions successives.

Nous pouvons formuler des hypothèses.

- Si on imagine qu'il énonce la suite des nombres jusqu'à « cent » en-dessinant les ronds et en entourant les groupes de 23 au fur et à mesure, il est difficile de contrôler chaque changement de groupe (sauf pour le premier) sans calculer (comptage de 23 en 23).
- Il peut :
 - dessiner un premier groupe de 23 ronds organisés en énonçant « un, deux, trois, ... vingt-deux, vingt-trois », puis un deuxième en énonçant « un, deux, trois, ... vingt-deux, vingt-trois », puis vérifier le nombre obtenu en recomptant le tout (un, deux, trois, ... quarante-cinq, quarante-six) ou en calculant mentalement ($23 + 23 = 46$) ;
 - puis dessiner un troisième groupe en énonçant « un, deux, trois, ... vingt-deux, vingt-trois » puis vérifier le nombre obtenu en recomptant le tout (un, deux, trois, ... soixante-huit, soixante-neuf) ou en surcomptant si « quarante-six » a été mémorisé (quarante-sept ... soixante-huit, soixante-neuf) ou en calculant mentalement ($46 + 23 = 69$) ;
 - puis continuer pour un quatrième groupe en énonçant (un, deux, trois, ... vingt-deux, vingt-trois) puis vérifier le nombre obtenu en recomptant le tout (un, deux, trois, ... quatre-vingt-onze, quatre-vingt-douze) ou en surcomptant si « soixante-neuf » a été mémorisé (soixante-dix ... quatre-vingt-onze, quatre-vingt-douze) ou en calculant mentalement ($69 + 23 = 92$) ;
 - considérer alors qu'il est proche de cent (ou qu'il dépassera cent, s'il dessine un nouveau groupe de vingt-trois) et dessiner les huit derniers ronds (quatre-vingt-treize, ... quatre-vingt-dix-neuf, cent).

L'organisation obtenue est correcte et devrait lui permettre de répondre mais, comme Jeanne et Victoria, il commet une erreur dans l'interprétation de cette collection organisée et ne considère que les « bus complets » sans prendre en compte les huit ronds non entourés.

2) Autres procédures possibles*Remarque*

Dans une optique de formation, nous proposons ci-dessous plusieurs procédures possibles. On rappelle au candidat que si l'énoncé demande deux procédures, il est important de se conformer à cette demande en se limitant au nombre de procédures demandées.

Procédure basée sur la recherche d'un encadrement de 100 entre deux multiples consécutifs de 23

- Soit en écrivant la liste des multiples de 23 : $23 - 46 - 69 - 92 - 115$ et en constatant que 100 est compris entre 92 et 115 pour conclure que 5 bus seront nécessaires ($5 \times 23 = 115$) pour transporter tous les enfants de l'école.
- Soit en calculant directement quelques produits : $3 \times 21 = 69$ puis $4 \times 23 = 92$ puis $5 \times 23 = 115$ (calcul mental ou calcul en ligne ou calcul posé) pour encadrer 100 : $4 \times 23 < 100 < 5 \times 23$ et conclure que 5 bus seront nécessaires pour transporter tous les enfants de l'école.
- Soit en s'appuyant sur des décompositions multiplicatives connues de 100 comme : $100 = 4 \times 25$ donc $4 \times 23 < 100$.

Procédure basée sur la recherche du quotient et du reste de la division euclidienne de 100 par 23

- Soit en retranchant des multiples de 23 comme : $100 - 46 = 54$ et $54 - 46 = 8$ donc $100 = 4 \times 23 + 8$ puis conclure que 5 bus seront nécessaires pour transporter tous les enfants de l'école.
- Soit en posant la division, donc en mettant en œuvre une technique opératoire de la division puis en concluant, en se référant au contexte du problème, qu'il faut ajouter un au quotient obtenu « 4 » car

le reste « 8 » est différent de zéro, pour trouver le nombre de bus nécessaires pour transporter tous les enfants de l'école.

Remarque :

Le reste 8 peut être difficile à interpréter, il amène à conclure qu'il faut un bus de plus que le quotient trouvé. D'autre part, la répartition suggérée pourrait être 4 bus de 23 enfants et un bus de 8 enfants.

Ordre de grandeur et décompositions multiplicatives connues :

On sait que $100 = 5 \times 20$ et on peut conclure directement que les enfants peuvent être répartis dans 5 bus de 20 (car il ne reste que 3 places dans les quatre premiers bus et $4 \times 3 < 20$).

SITUATION 2

1) Hypothèses pouvant expliquer les erreurs des élèves A et B

Ce problème, proposé dans le cadre d'une évaluation pour des élèves de CE2, relève des **structures additives**, plus précisément de la recherche d'un écart entre deux nombres (« 9 pour aller à 15 » ou « 15 moins 9 »). Cependant, le contexte de l'énoncé, lecture de la longueur d'un segment (d'une bande) sur les graduations d'un double décimètre cassé (les extrémités se situant aux repères « 9 » et « 15 »), peut amener l'élève à une lecture « directe » de la réponse par un dénombrement par comptage (sans calculer).

Réponse de l'élève A : 15 cm

Cet élève ne prend pas en compte que le fait que le double décimètre utilisé est cassé. Il « lit » la réponse « 15 », repère correspondant à la graduation située en face d'une des extrémités de la bande noire (extrémité droite). On peut formuler l'hypothèse que, pour lui, mesurer un segment à l'aide du double décimètre consiste à lire le nombre se situant au niveau de l'extrémité droite du segment mesuré.

Réponse de l'élève B : 7 cm

Cet élève dénombre les nombres : 9 (un) ; 10 (deux) ; 11 (trois) ; 12 (quatre) ; 13 (cinq) ; 14 (six) ; 15 (sept), et pas les intervalles de longueur 1 cm. On peut formuler l'hypothèse que, pour lui, mesurer un segment à l'aide du double décimètre consiste à dénombrer les graduations entières d'une extrémité à l'autre du segment (ce qui ne serait peut-être pas le cas si l'extrémité gauche du segment correspondait à la graduation 0).

2) a) Intérêt des instruments pour mesurer des bandes de papier

Remarque

On peut faire ici l'hypothèse qu'il s'agit de trouver la longueur d'une bande de papier de mesure (en centimètres) un nombre entier, inférieur à 18.

Description de l'instrument A

C'est une bande de 20 cm, partagée en 20 morceaux de 1 cm (alternance blanc/gris). Pour les deux premiers, « 1 cm » est inscrit sur l'instrument.

Il n'y a pas de nombres « perturbateurs » associés aux graduations. Son utilisation rappelle le report de segments unités.

Utilisation

Il n'y a pas « d'origine » à respecter, il faut placer l'instrument en faisant coïncider son extrémité (ou une des graduations) avec une des extrémités de la bande à mesurer puis dénombrer les « morceaux de 1 cm » pour atteindre l'autre extrémité de la bande. La mesure de la longueur de la bande de papier correspond au nombre trouvé.

Description de l'instrument B

C'est une bande de longueur comprise entre 18 cm et 19 cm, sur laquelle apparaissent 19 graduations espacées de 1 cm et numérotées de 0 à 18 ; les longueurs entre deux graduations successives « 1 cm » sont toutes notées (elles apparaissent donc 18 fois).

Utilisations possibles

- placer une des extrémités de la bande de papier à mesurer en face d'une graduation, dénombrer les « morceaux de 1 cm » pour atteindre l'autre extrémité de la bande.
- placer une des extrémités de la bande de papier à mesurer en face de la graduation « 0 » et lire le repère de la graduation coïncidant avec l'autre extrémité de la bande.

L'intérêt de l'instrument A est de renforcer l'action de mesurage par juxtaposition de bandes unités.

L'intérêt de l'instrument B est de se rapprocher de l'instrument usuel en introduisant les graduations entières qui permettent la lecture directe de la mesure. Le rappel de la longueur unité correspondant à l'intervalle entre deux graduations successives renforce également l'action de mesurage par juxtaposition de bandes unités.

2) b) Difficulté pouvant être rencontrée

En passant de l'instrument A à l'instrument B, les élèves devront distinguer les deux types d'informations présentées dans le deuxième instrument : la longueur entre deux graduations successives (1 cm) et les repères correspondant à chaque graduation (par exemple, lire « 3 » sur l'instrument B indique qu'il y a « 3 cm » entre les graduations « 0 » et « 3 »). De plus, l'instrument B nécessite une attention particulière dans son placement par rapport à la bande à mesurer puisque la graduation 0 ne correspond pas à l'extrémité de l'instrument.

SITUATION 3

1) Description et analyse des procédures de résolution

Ce problème, proposé à des élèves de CM2, relève des **structures multiplicatives**, et plus particulièrement de la proportionnalité : le prix à payer est proportionnel au nombre de cahiers achetés (implicitement, ce sont les mêmes cahiers, tous au même prix). Il s'agit de trouver le prix de 20 cahiers et de comparer la somme trouvée à 40 € pour répondre à la question posée.

Élève	Description et analyse de la procédure	Réussite(s)	Erreur(s)
Ambre	<p>En comparant 15 et 20, elle observe qu'il faut 5 cahiers de plus. Elle en déduit qu'il faudra payer 5 euros de plus. Elle pose l'addition : 30,60 euros + 5 euros. Elle conclut qu'il devra payer 35,60 euros et qu'il a assez d'argent. Elle veut utiliser la propriété d'additivité de la fonction linéaire : le prix de 20 cahiers est le prix de 15 cahiers augmenté du prix de 5 cahiers.</p>	<p>Calculs 15 pour aller à 20 Elle pose l'addition $15 + 5 = 20$ pour vérifier. $30,60 + 5$ Elle pose l'addition et hésite par rapport à la place du « 5 » (alignement par la droite puis dans la « colonne des unités »).</p> <p>Raisonnement Comparaison de la somme trouvée à 40 euros et conclusion.</p>	<p>Erreur de procédure Mauvaise utilisation de la propriété d'additivité de la fonction linéaire. L'ajout d'un cahier correspond pour elle à un ajout de un euro ; ainsi le prix de 20 cahiers est pour elle celui de 15 cahiers augmenté de 5 euros.</p>
Anaé	<p>Elle identifie une relation de proportionnalité. Elle reconnaît 15 et 20 comme des multiples de 5 ($3 \times 5 = 15$ et $5 \times 4 = 20$ écrits en ligne). Elle cherche le prix de cinq cahiers.</p>	<p>La procédure utilisée est correcte ; les techniques de calcul aussi.</p> <p>Technique opératoire de la</p>	<p>Erreur dans le choix des nombres intervenant dans la division posée 30,60 : 5 et pas 30,60 : 3 pour trouver le prix de 5 cahiers...</p>

	<p>Elle utilise la division posée pour trouver le résultat. Elle donne du sens au quotient trouvé : « 5 ça coûte... ». Elle multiplie cette somme par quatre pour trouver le prix de 20 cahiers. Elle compare la somme trouvée à 40 et conclut. Elle utilise à deux reprises la propriété multiplicativa de la fonction linéaire : trois fois moins de cahiers coûtent trois fois moins cher et quatre fois plus de cahiers coûtent quatre fois plus cher.</p>	<p>division d'un nombre décimal non entier par un nombre entier Elle écrit les soustractions et met les nombres au « même format » (deux chiffres après la virgule).</p> <p>Technique opératoire de la multiplication d'un décimal par un entier.</p>	<p>Donc en multipliant le quotient trouvé (6,12) par 4, elle trouve le prix de 12 cahiers et non celui de 20 cahiers.</p> <p>Pas de moyen de contrôle Le prix trouvé pour 20 cahiers est inférieur au prix donné de 15 cahiers...</p>
Mahé	<p>Elle identifie une relation de proportionnalité. Elle cherche le prix d'un cahier. Elle utilise une division en ligne pour trouver le résultat. Elle multiplie cette somme par vingt pour trouver le prix de 20 cahiers. Elle compare la somme trouvée à 40 et conclut « il lui manque 80 centimes ». Elle utilise la procédure dite « de la règle de trois » : quinze fois moins de cahiers coûtent quinze fois moins cher et vingt fois plus de cahiers coûtent vingt fois plus cher.</p>	Procédure correcte.	<p>Erreur dans le calcul en ligne</p> <p><i>Division</i> $30 = 2 \times 15$ et $60 = 4 \times 15$. Elle conclut que : $30,60 : 15 = 2,4$ (car pour elle $2,4 \times 15 = 30,60$)</p> <p><i>Multiplication</i> $2,4 \times 20 = 40,80$ ($2 \times 20 = 40$ et $4 \times 20 = 80$) Elle interprète l'écriture à virgule des nombres décimaux désignant des prix comme deux nombres rattachés aux euros et centimes comme le confirment ses calculs et sa réponse.</p> <p>Double erreur qui « se compense ».</p>

2) Description d'une autre procédure

Remarque

Dans une optique de formation, nous proposons ci-dessous plusieurs procédures possibles. On rappelle au candidat que si l'énoncé demande une procédure, il est important de se conformer à cette demande en se limitant au nombre de procédures demandées.

Recherche du prix d'un cahier par un calcul approché

15 cahiers pour 30,60 euros donc le prix d'un cahier est supérieur à 2 euros. Le prix de 20 cahiers est supérieur à 40 euros (2×20 euros).

Recherche du prix de cinq cahiers par un calcul approché

15 cahiers pour 30,60 euros donc le prix de 5 cahiers est supérieur à 10 euros. Le prix de 20 cahiers est supérieur à 40 euros (4×10 euros).

Recherche du prix de 20 cahiers par un calcul exact

$30,60 \text{ euros} \times 4 = 122,40 \text{ euros}$ puis le prix de 20 cahiers ($122,40 \text{ euros} : 3 = 40,80 \text{ euros}$).

ou

recherche du prix de cinq cahiers ($30,60 \text{ euros} : 3 = 10,20 \text{ euros}$) puis, comme $15 + 5 = 20$, $30,60 \text{ euros} + 10,20 \text{ euros} = 40,80 \text{ euros}$ pour obtenir le prix de 20 cahiers.

SITUATION 4

1) Savoirs mathématiques mobilisés

En l'absence de consigne, on peut supposer qu'il s'agit de désigner l'abscisse de points sur une droite graduée par une écriture fractionnaire.

Cette tâche convoque des savoirs relatifs au repérage sur le support « droite graduée » ainsi qu'aux fractions.

Complément : description et analyse de la tâche proposée par anticipation des réponses

Il s'agit de déterminer les abscisses de chacun des cinq points désignés par des lettres : A, B, C, D et E en prenant en compte les trois nombres consécutifs (6, 7 et 8) déjà placés « en face » de certaines graduations.

L'élève doit identifier la mesure de l'intervalle entre deux graduations consécutives : l'unité est ici partagée en 5 parties égales, chaque intervalle représente un cinquième de l'unité.

Il doit identifier l'abscisse de chaque graduation : éventuellement en prolongeant le segment et en plaçant d'autres valeurs entières, en particulier 5, puis associer une abscisse à chaque graduation ou seulement à celles qui sont désignées par une lettre. Ce nombre (abscisse) peut être écrit sous différentes formes :

$$A : 5 + \frac{2}{5} \text{ ou } 6 - \frac{3}{5}.$$

$$B : 6 + \frac{2}{5}.$$

$$C : 6 + \frac{4}{5}.$$

$$D : 7 + \frac{2}{5}.$$

$$E : 8 + \frac{3}{5}.$$

Il peut aussi tout graduer en cinquièmes : $6 = \frac{30}{5}$; $7 = \frac{35}{5}$; $8 = \frac{40}{5}$.

$$A : \frac{27}{5} \quad B : \frac{32}{5} \quad C : \frac{34}{5} \quad D : \frac{37}{5} \quad E : \frac{43}{5}.$$

2) Analyse des erreurs

Agnès

Elle ne sait pas identifier la mesure de l'intervalle entre deux graduations consécutives : pour elle, l'unité est partagée en 4 puisqu'elle évoque les quarts. Elle a probablement dénombré les graduations : par exemple, de 6 pour aller à 7, 4 petits traits entre les deux.

Elle écrit un point d'interrogation pour A, probablement parce que le nombre entier qui précède n'est pas indiqué.

Pour les autres repères, elle note le nombre entier immédiatement à sa gauche puis utilise le signe « + » et indique n quarts (écriture en lettres) en dénombrant les intervalles (ou les graduations) à partir de ce nombre jusqu'au repère indiqué.

Nassim

Il ne sait pas identifier la mesure de l'intervalle entre deux graduations consécutives : pour lui, l'unité est partagée en 10 puisqu'il évoque les dixièmes. Il donne des réponses sous une écriture à virgule (qui désignerait un nombre décimal avec un seul chiffre à droite de la virgule) mais qui ici désigne la graduation entière et le nombre d'intervalles.

Cela aurait été possible en considérant que les graduations allaient de deux dixièmes (0,2) en deux dixièmes.

**EXERCICES ÉLABORÉS
À PARTIR
DES CONCOURS BLANCS
ET EXAMENS
PROPOSÉS DANS LES ESPE**

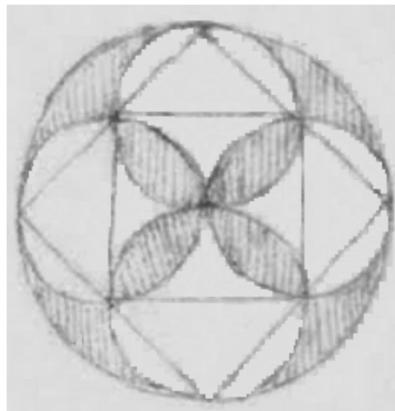
SUJETS

EXERCICES d'après divers sujets d'examens

EXERCICE 1

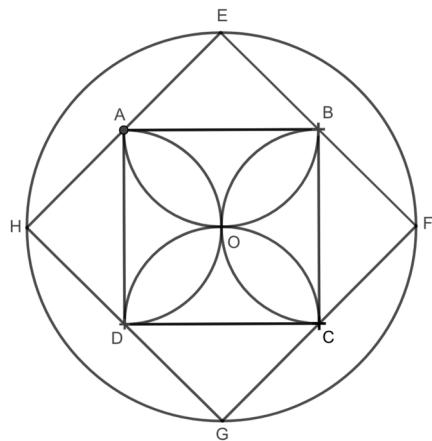
Aires de surfaces planes d'après un sujet d'Aix-Marseille

Dans la bibliothèque Ambrosienne de Milan se trouve un livre de travaux de Léonard de Vinci, appelé le « Codex Atlanticus », dans lequel apparaissent de nombreuses constructions géométriques parmi lesquelles la « Rosace » présentée ci-dessous.

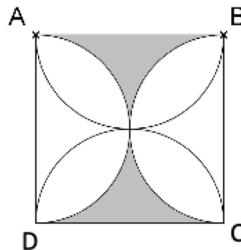


Rosace de Léonard de Vinci

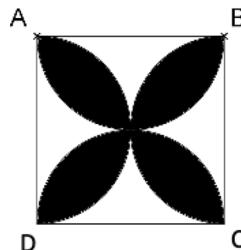
Cette rosace a été reproduite avec un logiciel de géométrie (voir ci-dessous), ainsi que deux figures qui en ont été extraites et qui seront étudiées par la suite.



Rosace réalisée avec GeoGebra



Extrait 1 de la rosace



Extrait 2 de la rosace

On considère que le segment [AB] mesure 6 cm et on admet que :

- le quadrilatère EFGH est un carré de centre O dont les milieux des côtés notés A, B, C et D comme indiqués sur la figure sont les sommets d'un carré ;
- les quatre cercles qui se coupent au point O ont pour diamètre les côtés du carré ABDC ;
- AEBO, OBFC, CGDO et DHAO sont des carrés.

- 1) On s'intéresse à la partie grisée de la figure « Extrait 1 de la rosace ». Calculer l'aire de cette partie grisée et vérifier que sa valeur approchée au dixième de cm^2 est 7,7 cm^2 .
- 2) En déduire la valeur exacte puis une valeur approchée, au dixième, de l'aire en cm^2 de la figure formée par les quatre « pétales » noirs (« Extrait 2 de la rosace »).
- 3) Calculer l'aire totale de la surface hachurée sur la rosace de Léonard de Vinci.

EXERCICE 2

Recherche d'une grandeur inconnue par différentes méthodes d'après un sujet de Besançon

Les deux questions de cet exercice sont indépendantes.

- 1) Voici un énoncé de problème :

*Après avoir dépensé la moitié de mon argent, puis 100 €, puis le tiers de ce qui me restait, j'ai encore 73 €.
Quelle somme avais-je au départ ?*

Résoudre ce problème par la méthode de votre choix, en explicitant votre procédure.

- 2) Voici un énoncé de problème :

Comment partager une somme de 280 € entre 3 frères de la façon suivante ?

- La part du cadet doit être la moitié de celle de l'aîné.
- La part du plus jeune doit être la moitié de celle du cadet.

- a) En représentant par des surfaces les parts de chaque frère, proposer une procédure de résolution de ce problème utilisant un raisonnement envisageable au cycle 3 de l'école élémentaire.
- b) À votre niveau, résoudre ce problème par une méthode algébrique (à l'aide d'une équation, d'un système d'équations, ...).

EXERCICE 3

Arithmétique d'après un sujet de Rennes

- 1) Une entreprise utilise des cartons en forme de pavé droit de dimensions (en cm) : $60 \times 45 \times 36$. Ces cartons servent à ranger des boîtes de forme cubique toutes identiques. La mesure en centimètres de la longueur de l'arête des boîtes cubiques est un nombre entier strictement supérieur à 1 et les cartons sont remplis sans laisser de vide.

- a) Déterminer la (ou les) longueur(s) possible(s) des arêtes des boîtes cubiques.
- b) Déterminer alors le nombre de boîtes qu'il est possible de ranger dans un carton.

- 2) Une autre entreprise possède des boîtes cubiques de 2 cm d'arête et a besoin de cartons en forme de pavé droit pour les ranger. Il faut au moins deux boîtes cubiques sur chaque arête et au plus 1 500 boîtes dans le carton qui doit être rempli sans laisser de vide.

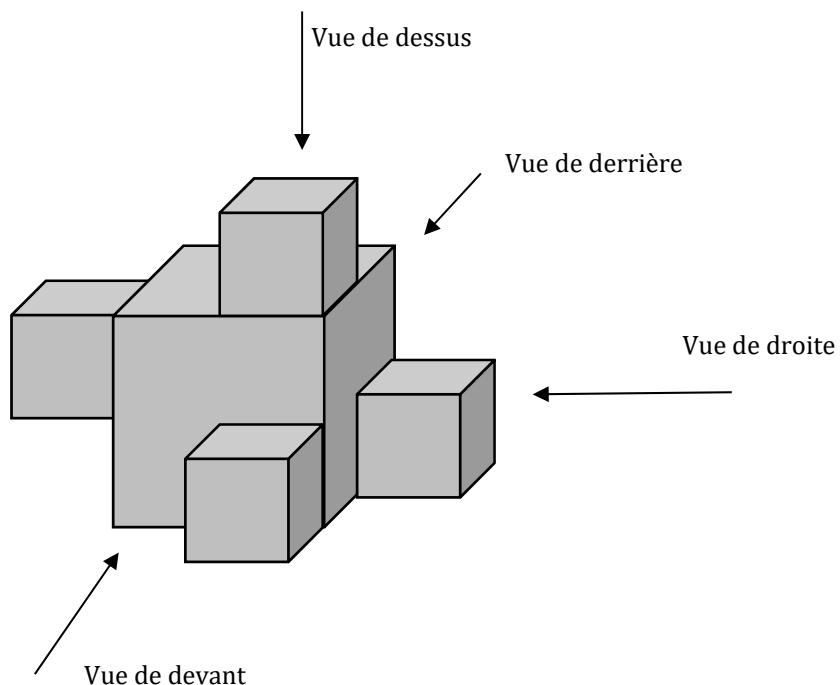
- a) Parmi les dimensions de cartons suivantes (en cm), quelles sont celles qui pourraient convenir ?
 $28 \times 15 \times 4$ $10 \times 32 \times 28$ $28 \times 30 \times 2$ $16 \times 32 \times 24$
- b) L'entreprise préfèrerait utiliser des cartons cubiques pour ranger ses boîtes : quelle est la longueur de l'arête du plus grand carton cubique pouvant convenir ?

EXERCICE 4

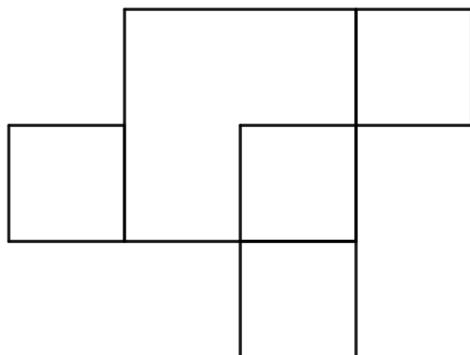
Assemblage de solides d'après un sujet de Dijon

La figure ci-dessous représente un solide constitué de l'assemblage de 5 cubes :

- quatre cubes d'arête 2 cm ;
- un cube d'arête 4 cm.



Voici la vue de dessus de ce solide (l'échelle n'est pas respectée) :



Tracer en vraie grandeur la vue de droite ainsi que la vue de derrière de ce solide.

EXERCICE 5

Utilisation d'un tableur d'après un sujet de Clermont-Ferrand

- 1) On considère la feuille de calcul ci-dessous, dans laquelle on souhaite déterminer le prix total des stylos pour chaque classe (selon un calcul ordinaire).

Quelle formule doit-on saisir en C6 ? (formule qui pourra donc être copiée-glissée vers le bas)

	A	B	C
1	Prix d'un stylo	1,23	
2			
3			
4			
5		Nombre	Prix total pour l'équipe
6	Nombre de stylos dans la classe 1	12	
7	Nombre de stylos dans la classe 2	25	
8	Nombre de stylos dans la classe 3	30	
9	Nombre de stylos dans la classe 4	17	

Recopier sur votre copie la ou les bonnes réponses qui vous semblent convenir.

- A) =B1*B6 B) =\$B\$1*B6 C) =\$B1*B6 D) =B\$1* B6 E) =\\$B1*B\\$6

- 2) Il s'agit d'élaborer une table de multiplication, avec un minimum de formules. On peut même remplir la table avec une seule formule (et un copier-glisser suivant les lignes et suivant les colonnes) en utilisant le symbole \$ judicieusement !

Quelle est la bonne formule à taper dans la cellule C3 ?

	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1										
2	x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3	1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4	2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
5	3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
6	4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
7	5	5	10	15	20	25	30	35	40	45
8	6	6	12	18	24	30	36	42	48	54
9	7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
10	8	8	16	24	32	40	48	56	64	72
11	9	9	18	27	36	45	54	63	72	81

Recopier sur votre copie la seule bonne réponse qui vous semble convenir.

- A) =B3*C2 B) =\$B3*C\$2 C) =\\$B3*C2 D) =B3*\$C\$2 E) =\\$B3*\\$C2

PROBLEME DE GÉOMÉTRIE AVEC TABLEUR ET SCRATCH

d'après un sujet de Besançon

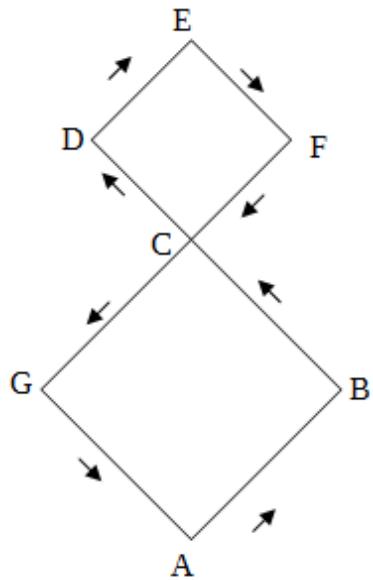
Un circuit d'entraînement de course à pied est constitué de deux parties parcourues « en huit ». **Le départ et l'arrivée sont en A.**

PARTIE A : circuit « carré »

Dans la figure ci-contre, qui n'est pas à l'échelle :

- ABCG et CDEF sont des carrés, les points ;
- B, C et D sont alignés ;
- AB = 105 m et DE = 75 m.

- 1) Le coureur effectue un tour de circuit. Où se situe la mi-parcours ? Justifier.
- 2) Le coureur effectue dix tours de circuit. Où se situe la mi-parcours ? Justifier.
- 3) Montrer que les points F, C et G sont alignés.
- 4) Un coureur fait un tour de circuit en progressant à une vitesse constante en ligne droite égale à 6 m/s et « perdant » une seconde à chaque changement de direction (virage à angle droit).
 - a) Quelle est la durée, exprimée en secondes, d'un tour de circuit ?
 - b) En déduire la vitesse moyenne, exprimée en m/s, de ce coureur sur un tour de circuit.



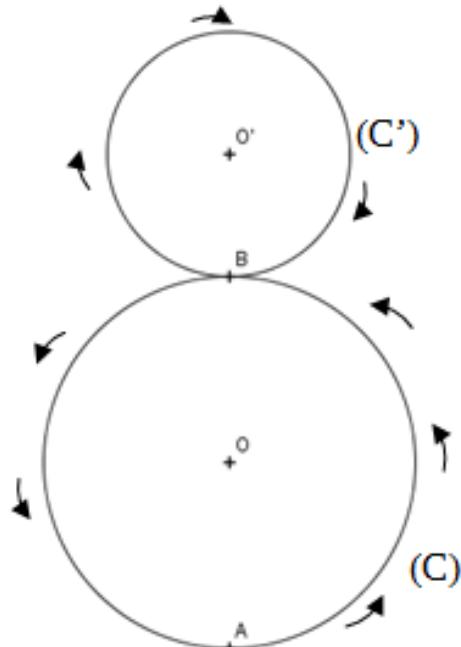
PARTIE B : circuit « circulaire »

Dans la figure ci-contre, qui n'est pas à l'échelle :

- les cercles (C) et (C') de centres respectifs O et O' sont tangents extérieurement en B ;
- OB = 50 m et OB = 2 × O'B ;
- [AB] est un diamètre de (C).

Un coureur effectue un tour de ce circuit en partant de A dans le sens de la flèche (le parcours décrit un « 8 »).

- 1) Exprimer, en mètres, la mesure d'un tour complet de circuit en fonction de π .
- 2) Montrer que le demi périmètre du cercle C vaut le périmètre du cercle C'.
- 3) À quelle fraction de la longueur d'un tour de circuit correspond la boucle C ?
- 4) Lors de son premier passage en B, quelle fraction de la longueur d'un tour de circuit le coureur a-t-il effectuée ?

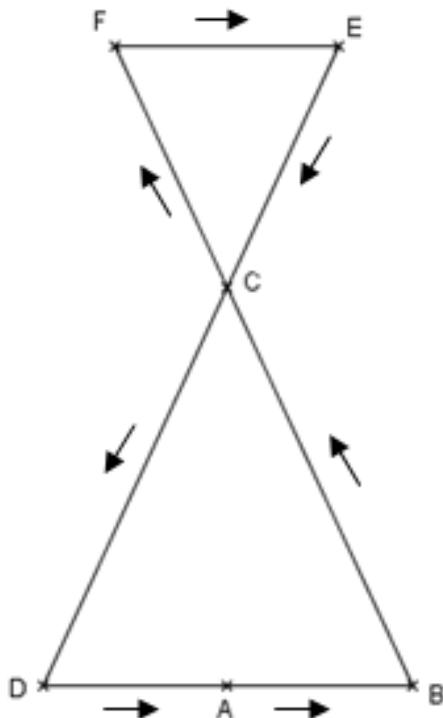


PARTIE C : circuit « triangulaire »

Dans la figure ci-contre, qui n'est pas à l'échelle :

- le point A est le milieu du segment [BD] ;
- les triangles BCD et CEF sont isocèles de sommet principal C ;
- les droites (BF) et (DE) se coupent en C ;
- $CD = 3 CE$ et $BD = 90 \text{ m}$.

Dans cette partie, on cherche à déterminer la longueur AC pour que la longueur L du circuit soit égale à 400 m.



1) Démontrer que la longueur L du parcours dépend de la mesure AC de la façon suivante :

$$L = 120 + \frac{8}{3} \sqrt{2025 + AC^2}$$

2) La page de calcul ci-dessous est obtenue à l'aide d'un tableur.

	A	B
1	Longueur AC	Longueur L
2	90	388,328
3	91	390,716
4	92	393,109
5	93	395,507
6	94	397,910
7	95	400,317
8	96	402,730
9	97	405,146
10	98	407,568
11	99	409,993

Les longueurs AC et L sont exprimées en mètres. Parmi les formules suivantes :

- formule 1 : « = 120 + 8/3 * RACINE(2025 + \$A2^2) »,
- formule 2 : « = 120 + 8/3 * (45 + A2) »,
- formule 3 : « = 120 + 8/3 * RACINE(2025 + A\$2^2) »,
- formule 4 : « = 120 + 8/3 * RACINE(2025 + A2 * A2) »,

quelle(s) formule(s), écrite(s) dans la cellule B2 et tirée(s) vers le bas permet(tent) d'obtenir la colonne B ?

- 3) Si la formule « = 120 + 8/3 * RACINE(2025 + \$A\$2^2) » était inscrite en B2, quel serait la valeur obtenue en case B8 en étirant la formule vers le bas ?
- 4) Comment peut-on utiliser cette feuille de calcul pour obtenir une valeur approchée de la solution du problème posé ?
- 5) Le script SCRATCH ci-après permet de tracer le parcours en triangle d'un coureur (partant de A et arrivant en A). Les mesures des angles \widehat{ABC} , \widehat{CFE} , \widehat{FEC} et \widehat{CDA} sont identiques et valent 65° .



Remplacer les « ? » du script par des valeurs numériques pour obtenir le tracé du parcours en triangle.

PROBLÈME D'ÉCLUSES d'après un sujet de Clermont

PARTIE A

Le canal du midi s'étend sur 240 km de Toulouse à l'Étang de Thau. Il est ouvert à la circulation depuis 1681 et comprend 63 écluses avec plusieurs sas pour certaines.

La vitesse de navigation y est limitée à 8 km/h et le temps de passage d'une écluse est estimé à 35 min. Certaines écluses sont automatiques mais pour les autres, ce sont les éclusiers qui dirigent les manœuvres et les horaires sont différents selon la période de l'année.

Mois	Début	Pause	Fin	Mois	Début	Pause	Fin
Janvier	8 h	12 h 30 – 13 h 30	17 h 30	Juillet	8 h	12 h 30 – 13 h 30	19 h 30
Février	8 h	12 h 30 – 13 h 30	17 h 30	Août	8 h	12 h 30 – 13 h 30	19 h 30
Mars	8 h	12 h 30 – 13 h 30	17 h 30	Septembre	8 h	12 h 30 – 13 h 30	18 h 30
Avril	8 h	12 h 30 – 13 h 30	18 h 30	Octobre	8 h	12 h 30 – 13 h 30	18 h
Mai	8 h	12 h 30 – 13 h 30	19 h	Novembre	8 h	12 h 30 – 13 h 30	17 h 30
Juin	8 h	12 h 30 – 13 h 30	19 h 30	Décembre	8 h	12 h 30 – 13 h 30	17 h 30

Une famille prépare son voyage.

- 1) En ne tenant compte que du temps de navigation et du passage des écluses, quelle durée faut-il prévoir au minimum pour effectuer ce trajet en bateau ?
- 2) Ils pensent embarquer le 27 juillet 2019 à Toulouse à 8 h et prévoient l'équivalent de 2 jours de visite. Pour être sûre de ne pas se retrouver devant une écluse fermée, ils prévoient de ne naviguer que pendant les heures de présence des éclusiers. Quel jour peuvent-ils espérer revenir, au minimum ?
- 3) Le prix hebdomadaire de la location d'un bateau à moteur dépend aussi de la période. Il est de 882 € du 03/11/2018 au 26/04/2019. Il augmente de 27 % pour la période du 27/04/2019 au 30/10/2019. Calculer le prix de la location pour leur croisière.

PARTIE B

Durant un parcours sur le Canal du midi, les écluses dont les sas sont numérotés de 1 à 18 sont montantes et de 19 à 86 sont descendantes. Elles se trouvent à des altitudes différentes répertoriées dans le tableau donné en annexe.

- 1) Quelle est l'étendue de cette série statistique ? A quoi correspond cette valeur ?
- 2) On a regroupé ces différentes altitudes par classe d'amplitude 20 m sur une feuille de tableur dont l'extrait est donné ci-dessous :

G21															
		A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	Altitudes	[0 ; 20[[20 ; 40[[40 ; 60[[60 ; 80[[80 ; 100[[100 ; 120[[120 ; 140[[140 ; 160[[160 ; 180[[180 ; 200[Total			
2	Effectifs	8	3	5	3	5	5	10	10	8	6	63			
3															
4															
5															

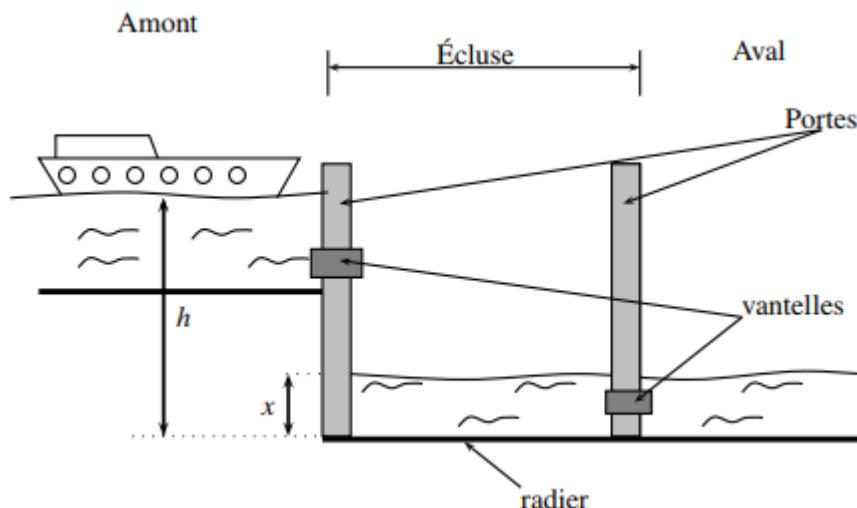
- a) Quelle formule peut-on saisir dans la cellule L2 pour obtenir la valeur de l'effectif total et vérifier ainsi qu'aucune altitude n'ait été oubliée ?
- b) Calculer l'altitude moyenne du parcours.
- 3) Une personne de l'office de tourisme de Bram affirme que si on se place sur leur écluse, on a autant d'écluses au-dessus qu'en dessous, en altitude. A-t-elle raison ? Pourquoi ?

UNE ÉCLUSE, COMMENT ÇA MARCHE ?

Principe :

Il s'agit de faire monter le niveau de l'eau dans l'écluse jusqu'au niveau du canal en amont afin que l'on puisse ensuite faire passer le bateau dans l'écluse.

Dans un deuxième temps, l'écluse se vide et le niveau descend à celui du canal en aval. Le bateau peut sortir de l'écluse et poursuivre dans le canal en aval.



Les parties qui suivent utilisent le schéma précédent mais pourront être traitées indépendamment les unes des autres.

PARTIE C

Toutes les mesures de longueurs sont exprimées en mètres.

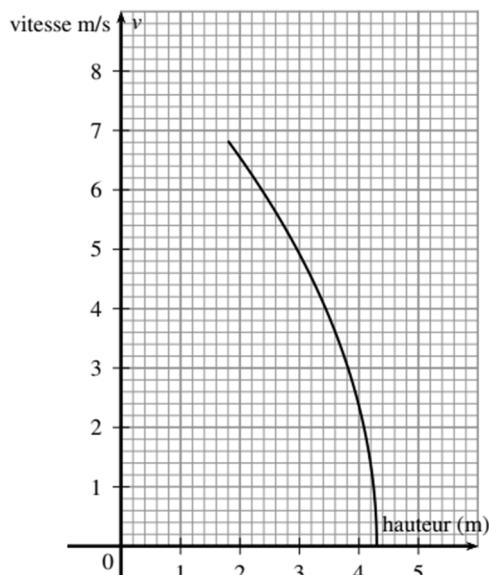
On note h la hauteur du niveau de l'eau en amont et x la hauteur du niveau de l'eau dans l'écluse.

Ces hauteurs sont mesurées à partir du radier (fond) de l'écluse. Lorsque le bateau se présente à l'écluse, on a :

$$h = 4,3 \text{ m} \text{ et } x = 1,8 \text{ m}$$

La vitesse de l'eau s'écoulant par la vantelle (vanne) est donnée par la formule suivante : $v = \sqrt{2g(h - x)}$ où $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ et v est la vitesse en mètre par seconde (noté m/s).

- 1) Calculer l'arrondi à l'unité de la vitesse de l'eau s'écoulant par la vantelle à l'instant de son ouverture : on considère l'ouverture comme instantanée.
- 2) Pour quelle valeur de x , la vitesse d'écoulement de l'eau sera-t-elle nulle ? Qu'en déduit-on pour le niveau de l'eau dans l'écluse dans ce cas ?
- 3) Le graphique donné représente la vitesse d'écoulement de l'eau par la vantelle en fonction du niveau x de l'eau dans l'écluse.
Déterminer graphiquement la vitesse d'écoulement lorsque la hauteur de l'eau dans l'écluse est de 3,4 m.
Déterminer graphiquement la hauteur d'eau dans l'écluse lorsque la vitesse d'écoulement est 6,2 m/s.



PARTIE D

Le débit q d'un fluide dépend de la vitesse moyenne v du fluide et de l'aire S de la section d'écoulement. Il est donné par la formule suivante : $q = S \times v$ où q est exprimé en m^3/s , S est exprimé en m^2 et v est exprimé en m/s .

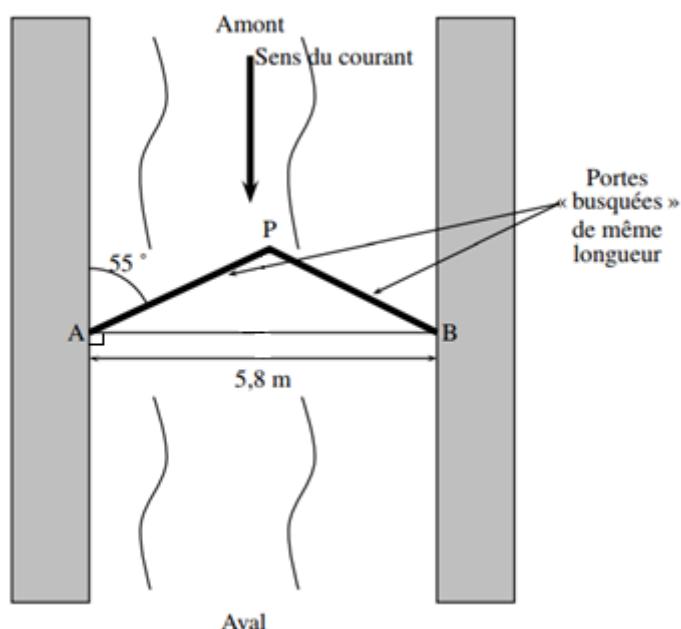
Pour cette partie, on considérera que la vitesse moyenne d'écoulement de l'eau à travers la vantelle durant le remplissage est $v = 2,8 \text{ m/s}$.

La vantelle a la forme d'un disque de rayon $R = 30 \text{ cm}$.

- 1) Quelle est l'aire exacte, en m^2 de la vantelle ?
- 2) Déterminer le débit moyen arrondi au millième de cette vantelle durant le remplissage.
- 3) On assimile une écluse à un pavé droit de 8,4 m de large, de 30 m de long et de 3 m de haut. Pendant combien de secondes, faudra-t-il patienter pour le remplissage complet d'une écluse de ce type ? Est-ce qu'on attendra plus de 15 minutes ?

PARTIE E

Certaines écluses ont des portes dites « busquées » qui forment un angle pointé vers l'amont de manière à résister à la pression de l'eau.



En s'appuyant sur le schéma ci-dessus, déterminer la longueur des portes au cm près.

ANNEXE

N° SAS	NOM de l'écluse	Alt	N° SAS	NOM de l'écluse	Alt	N° SAS	NOM de l'écluse	Alt
1	Du Béarnais	135	31-32	De Gay	159	57	De Villedubert	86
2	Des Minimes	139	33-35	Du Vivier	154	58-60	De Trèbes	84
3	Bayard	145	36	De Guillermin	147	61	De Marseillette	79
4	De Castanet	148	37	De Saint-Sernin	145	62-64	De Fontfile	76
5	De Vic	151	38	De Guerre	141	65-66	De Saint-Martin	67
6	De Montgiscard	159	39	De la Peyruque	139	67-68	De l'Aiguille	59
7	De Ayguesvives	159	40	De la Criminelle	137	69-70	De Puichéric	57
8-9	Du Sanglier	163	41	De Tréboul	134	71	De Jouarres	49
10	De Négra	166	42	De Villepinte	130	72	D'Homps	46
11-12	De Laval	170	43	De Sauzens	127	73-74	D'Ognon	41
13	De Gardouch	173	44	De Bram	126	75-76	De Pechlaurier	38
14	De Renneville	176	45	De Béteille	123	77	D'Argens	32
15-16	D'Encassan	185	46	De Villeséque	122	78	De Fonserannes	32
17	D'Emborrel	189	47-48	De Lalande	116	79	De l'Orb	12
18	De l'Océan	193	49	D'Herminis	114	80	De Béziers	11
19	De la Méditerranée	193	50	De la Douce	109	81	D'Arièges	9
20-21	Du Roc	189	51	De Carcassonne	106	82	De Villeneuve	6
22-24	De Laurens	180	52	De Saint-Jean	102	83	De Portiragnes	5
25	De la Domergue	175	53-54	Double de Fresquel	97	84	Ronde d'Agde	4
26	De la Planque	173	55	Simple de Fresquel	92	85	De Prades	3
27-30	De Saint-Roch	170	56	De l'Evêque	91	86	De Bagnas	2

PROBLÈME DE DÉNOMBREMENT ET MESURE DE GRANDEURS d'après un sujet de Toulouse

PARTIE A : système d'immatriculation

La plaque d'immatriculation française est l'un des éléments du dispositif permettant l'identification d'un véhicule du parc automobile français. Elle existe depuis 1901. La grande majorité des véhicules à moteur doivent en posséder une pour rouler sur les voies publiques.

Le système actuel est entré en vigueur le 15 avril 2009. Les plaques délivrées depuis cette date utilisent le format AA-001-AA, composé de sept caractères alphanumériques : deux lettres, trois chiffres (sauf la combinaison 000) et deux lettres, les trois parties étant séparées par des tirets (source Wikipedia).

- 1) Dénombrer les immatriculations théoriques possibles.
- 2) Dénombrer les immatriculations théoriques possibles dont tous les caractères (lettres et chiffres) sont différents.

PARTIE B : alcoolémie

L'alcoolémie est le taux d'alcool dans le sang, qui peut s'exprimer en grammes par litre de sang.

Une approximation peut être obtenue par la formule :

$$A = \frac{V \times p \times 0,8}{K \times m}$$

où V est le volume en mL et p le degré de l'alcool consommé (par exemple pour un vin à 12 % d'alcool par volume, on prendra 0,12), K le coefficient de diffusion (0,6 pour les femmes et 0,7 pour les hommes) et m la masse en kg de l'individu.

La vitesse d'absorption dépend de plusieurs facteurs : présence d'aliments dans l'estomac, concentration d'alcool de la boisson ingérée, vitesse de consommation.

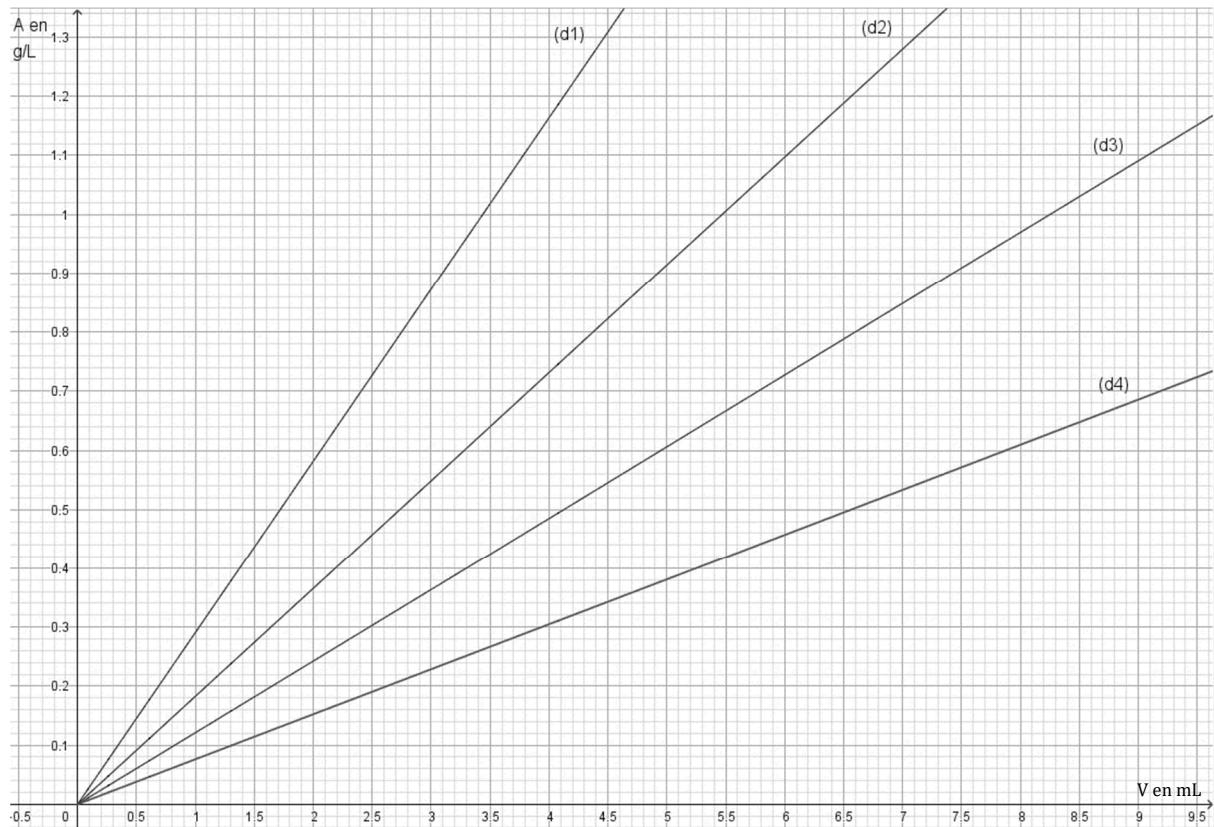
La formule précédente permet une estimation de l'alcoolémie d'une personne à jeun, 30 minutes après la consommation.

- 1) Calculer l'alcoolémie, arrondie au centième de g/L, 30 minutes après la consommation (à jeun) de 2 verres (1 dL chacun) de vin à 12 % d'alcool par volume :
 - a) d'une femme de 55 kg ;
 - b) d'un homme de 75 kg.
- 2) On utilise un tableur pour calculer l'alcoolémie en fonction de plusieurs paramètres.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
Calcul de l'alcoolémie approchée pour un individu à jeun, une demi-heure après l'absorption											
<hr/>											
1	Volume (en mL)	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
2	Alcoolémie (en g/L)	0,12	0,24	0,36	0,48	0,61	0,73	0,85	0,97	1,09	1,21
3	Coef diffusion (0,6 F ou 0,7 H)	0,6									
4	Masse (en Kg)	55									
5	Degré d'alcool	0,05									

- a) Un exemple est présenté ci-dessus pour une femme de 55 kg ayant consommé une certaine quantité de bière à 5 % d'alcool par volume.
Donner une formule qui, saisie en cellule C3 et recopiée vers la droite, permet de compléter la ligne 3 de ce tableau.

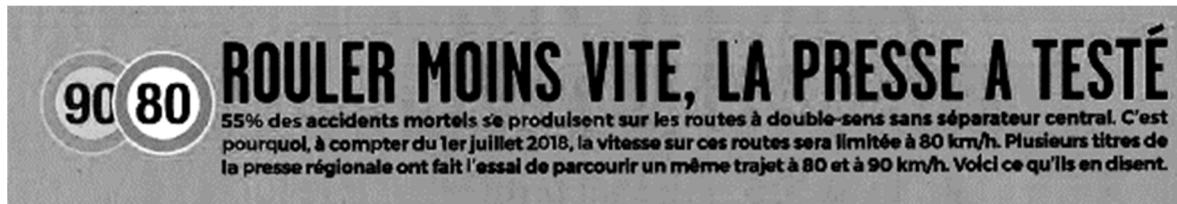
- b) Si on modifie les contenus des cellules C5, C6 et C7, la formule donnée à la question précédente permet-elle de prendre en compte ces nouvelles valeurs ?
 Dans le cas contraire, donner une formule qui le permette.
- 3) Voici les représentations graphiques des alcoolémies (en g/L) en fonction des volumes d'alcool consommés (en mL) pour de la bière à 5 % d'alcool par volume ou du vin à 12 % d'alcool par volume, pour un homme de 75 kg ou une femme de 55 kg.



- a) Retrouver les représentations des différents cas. Justifier.
- b) En France, il est interdit de conduire avec une alcoolémie supérieure à 0,5 g d'alcool par litre de sang (hors permis probatoires). Pour les quatre cas présentés ci-dessus (hors permis probatoire) et en utilisant le graphique, indiquer le volume maximum que les personnes peuvent consommer avant de prendre le volant pour ne pas risquer d'être verbalisées ? Justifier.
- c) On a analysé le sang d'une personne ayant arrêté de consommer de l'alcool depuis plus de 30 minutes, elle a une alcoolémie de 0,65 g/L. Son alcoolémie baisse à la vitesse de 18 mg par L par heure. Quelle est la durée nécessaire (sans nouvelle consommation d'alcool) avant de prendre le volant sans risque de verbalisation ?

PARTIE C : vitesses

- 1) Depuis le premier juillet 2018, la vitesse est limitée à 80 km/h sur une route extra-urbaine à une voie sans séparateur central. Dans son édition du 14 avril 2018, le journal « La Dépêche » proposait un article dont voici quelques extraits :



"Une minute de différence"

« Bilan : jusqu'à **une minute** de différence sur un trajet de 20 kilomètres. »

LE PROGRÈS

"Une différence presque insignifiante"

« Chronomètre lancé, nous sommes partis pour 19,8 kilomètres, dans une voiture contrainte à la vitesse maximum de 80 km/h et l'autre à 90 km/h. Mercredi 10 janvier, à 15 h, nous avons traversé les départementales 100, 4, et la 773. À l'arrivée, un temps de différence d'une minute et trente-six secondes.

La différence est presque... insignifiante. »

**ouest
france**

"Insignifiant"

« En conditions réelles, le second véhicule, à 80 km/h maximum, aura roulé précisément 20'30. Soit **une trentaine de secondes de plus que la première auto. Insignifiant.** »

Midi Libre

"Quatre secondes de perdues"

« On a testé : passer de 90 à 80 km/h ne change pas grand chose à vos déplacements en Auvergne.

Quatre secondes de perdues en roulant à 80 km/h. Au final, la différence est bien minime. »

LA MONTAGNE

- a) Sur un trajet de 20 km parcourus à la vitesse constante de 80 km/h, quelle est la perte de temps par rapport au même trajet parcouru à une vitesse constante de 90 km/h ? Exprimer le résultat en minutes, secondes.
- b) Proposer une explication aux données différentes fournies par les journalistes de « Ouest-France » et « Le Progrès » dans les articles ci-dessus.
- c) En supposant que le journaliste de « La Montagne » ait, lors des deux phases de son expérimentation, roulé d'abord à la vitesse constante de 90 km/h puis à la vitesse constante de 80 km/h, montrer qu'il a parcouru une distance de 800 m.
Quelle interprétation pouvez-vous faire de sa conclusion ?
- 2) On effectue un trajet aller de 30 km à une vitesse moyenne de 70 km/h. Au retour, sur le même trajet, un embouteillage fait baisser la vitesse moyenne à 30 km/h. Quelle est la vitesse moyenne sur l'ensemble du trajet ?

PROBLÈME DE GÉOMÉTRIE, ÉQUATIONS ET ARITHMÉTIQUE d'après un sujet de Versailles

Les trois parties A, B et C sont indépendantes.

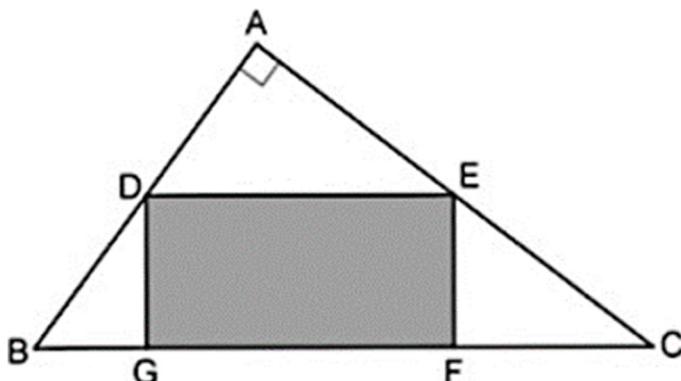
PARTIE A : un espace de jeu aménagé

Dans un centre de loisirs, la municipalité a aménagé, conformément au plan ci-dessous, un bac à sable rectangulaire DEFG dans une zone qui a la forme d'un triangle ABC rectangle en A.

Les dimensions du bac à sable ont été choisies de telle sorte que son aire soit la plus grande possible.

$AB = 6 \text{ m}$ et $AC = 8 \text{ m}$.

Les points D, E, F et G sont des points des côtés du triangle ABC.



La figure ne respecte pas les longueurs.

- 1) Calculer la longueur BC en mètres.
- 2) On appelle H le pied de la hauteur issue de A du triangle ABC.
Démontrer que $AH = 4,8 \text{ m}$.
- 3) On appelle x la distance AD exprimée en mètres.
Démontrer que $DE = \frac{10}{6}x$ et que $DG = 4,8 - 0,8x$.
- 4) Exprimer l'aire du rectangle DEFG en fonction de x .
- 5) Vérifier que l'aire du rectangle DEFG est égale à $\frac{4}{3}(9 - (x - 3)^2)$.
- 6) Déduire de ce qui précède la valeur de x pour laquelle l'aire DEFG est maximale et donner la valeur de cette aire.

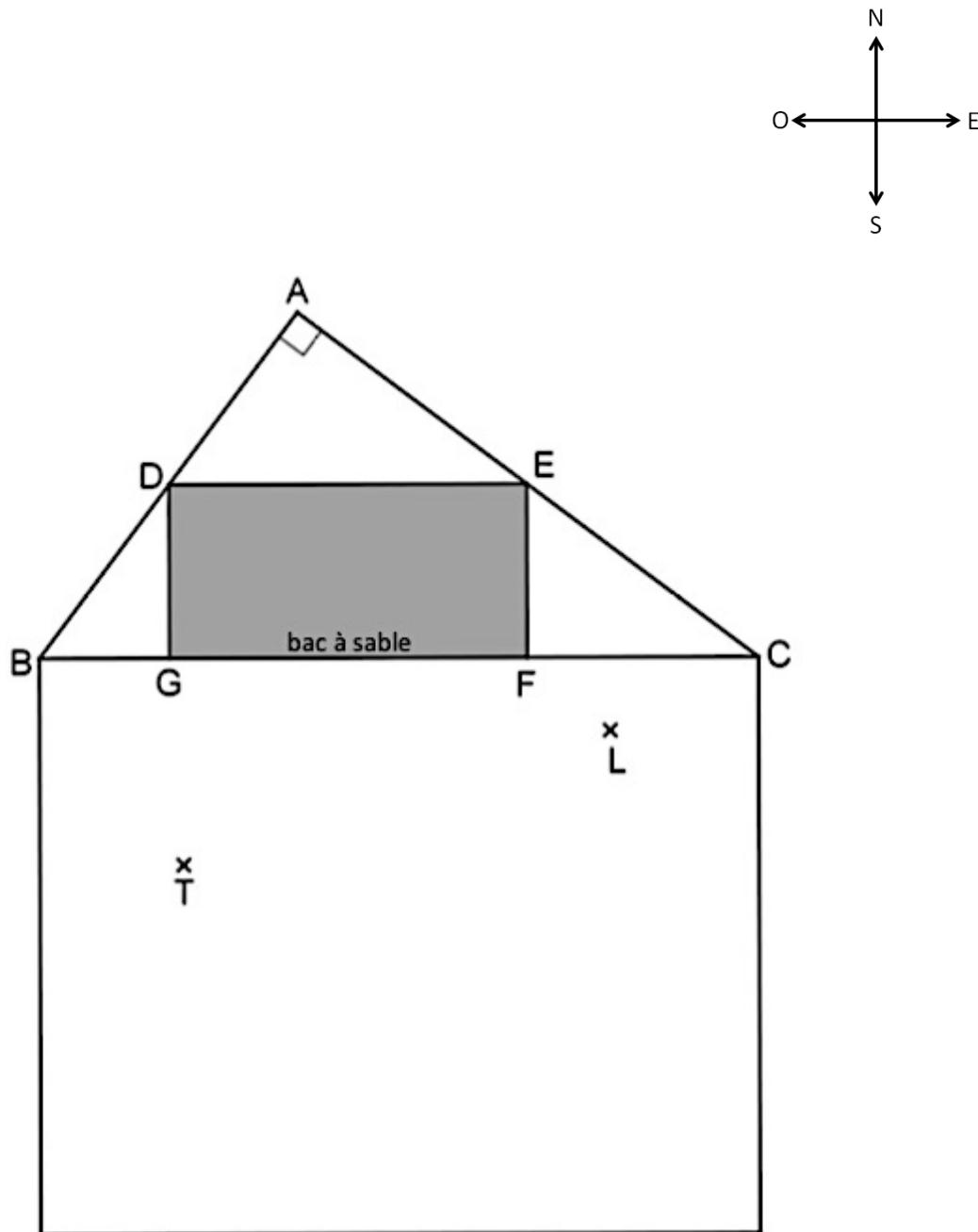
PARTIE B : une course au trésor

Les animateurs du centre de loisirs ont organisé une course au trésor sur le terrain de jeu dont le plan est ci-dessous.

On rappelle que $AB = 6 \text{ m}$ et $AC = 8 \text{ m}$.

Pour localiser le trésor, les enfants disposent des indications suivantes :

- **indication 1** : le trésor est à moins de 3 m de la clôture sud du terrain de jeu ;
- **indication 2** : le trésor est à moins de 8 m du centre du bac à sable ;
- **indication 3** : le trésor est à égale distance de la balançoire L et du toboggan T.



Sur ce plan à l'échelle $\frac{1}{100}$, déterminer la zone dans laquelle peut se trouver le trésor.

Décrire brièvement les constructions effectuées relativement à chaque indication et ce qu'il en résulte sur l'emplacement du trésor.

Les constructions seront effectuées à la règle graduée et au compas, et les traits de construction seront laissés apparents.

PARTIE C : le goûter au centre de loisirs

Après la course au trésor, le directeur du centre de loisirs a prévu un goûter.

Il a acheté 24 sachets de 35 bonbons et 20 paquets de 30 biscuits.

Il a prévu que 72 enfants participeront au goûter.

- 1) Combien le directeur devra-t-il ouvrir de sachets de bonbons pour que chaque enfant ait 4 bonbons, le directeur n'ouvrant un paquet que si le précédent est vide ?
Combien restera-t-il de bonbons dans le dernier sachet ouvert ?
- 2) Quel est le nombre de paquets de biscuits que l'enseignant devra ouvrir s'il souhaite que tous les enfants aient le même nombre de biscuits et qu'il ne reste aucun paquet entamé ?
- 3) Le directeur souhaite, en fait, fabriquer des pochettes-goûter, toutes identiques, contenant des bonbons et des biscuits.
Il souhaite utiliser tout le stock acheté (il ne doit rester aucun bonbon et aucun biscuit).
Pourra-t-il préparer suffisamment de pochettes-goûter pour que chaque enfant en ait une ?

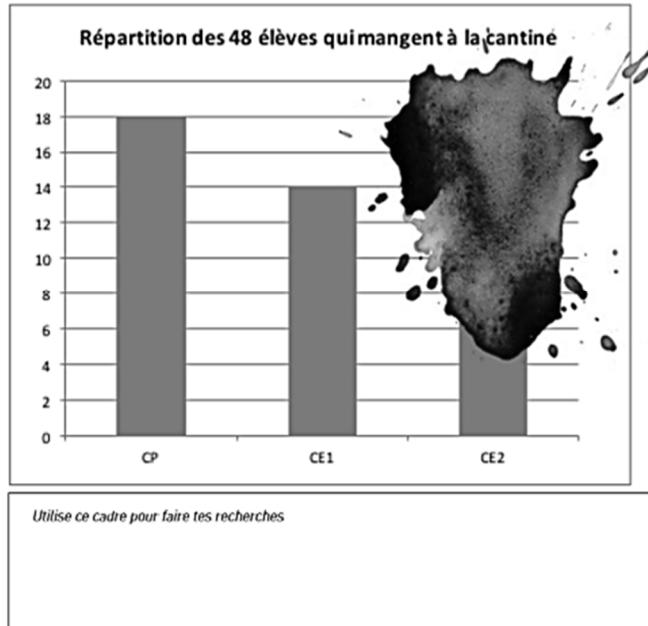
ANALYSE DE PRODUCTIONS D'ÉLÈVES (GESTION DE DONNÉES) d'après un sujet de Dijon

L'exercice ci-dessous fait partie de ceux proposés sur le site Eduscol comme points d'appui pour évaluer les niveaux de maîtrise du socle commun en mathématiques par des élèves de cycle 2.

Il figure sous l'intitulé « Opérations sur les nombres : Problème - Gestion de données - la directrice »¹.

Exercice

La directrice a renversé son café sur son graphique. Retrouve le nombre d'élèves de CE2 qui mangent à la cantine.



Réponse : élèves de CE2 mangent à la cantine.

Par ailleurs sont données en annexe les productions de deux élèves A et B.

1) Les travaux de G. Vergnaud sur le champ additif ont permis d'identifier quatre catégories de problèmes :

- Les problèmes où un état initial subit une transformation pour aboutir à un état final ;
- Les problèmes dans lesquels deux états sont combinés (ou composés) pour obtenir un troisième état ;
- Les problèmes de comparaison, dans lesquels on est amené à quantifier l'écart entre deux états ;
- Les problèmes où deux transformations sont composées pour en former une troisième.

En utilisant cette typologie, préciser la catégorie à laquelle se rattache cet énoncé (on ne demande aucune justification).

2) Expliciter les différentes étapes de la procédure suivie par l'élève A (cf. Annexe).

3) a) Quelle difficulté de cet exercice est à l'origine de l'erreur de l'élève B ?

b) Détailler la procédure suivie par cet élève en mettant en avant ses réussites.

¹ Lien de téléchargement :

https://cache.media.eduscol.education.fr/file/Calcul_mental/83/2/EV16_C2_Maths_27_Probleme_Gestion_de donnees La directrice 747832.pdf

ANNEXE : les productions de deux élèves

	<p>Répartition des 48 élèves qui mangent à la cantine</p> <table border="1"><thead><tr><th>Classe</th><th>Nombre d'élèves</th></tr></thead><tbody><tr><td>CP</td><td>18</td></tr><tr><td>CE1</td><td>14</td></tr><tr><td>CE2</td><td>6</td></tr></tbody></table>	Classe	Nombre d'élèves	CP	18	CE1	14	CE2	6
Classe	Nombre d'élèves								
CP	18								
CE1	14								
CE2	6								
Elève A	<p>Utilise ce cadre pour faire tes recherches</p> $10 + 10 + 12 = 32$ $32 + 16 = 48$ <p>Réponse : 16 élèves de CE2 mangent à la cantine.</p>								
Elève B	<p>Utilise ce cadre pour faire tes recherches</p> $18 + 14 + 6 = 38$ $18 + 20 = 38$ <p>Réponse : 38 élèves de CE2 mangent à la cantine.</p>								

ANALYSE DE PRODUCTIONS D'ÉLÈVES (MULTIPLICATION)

d'après un sujet de Dijon

- 1) L'exercice suivant fait partie de ceux proposés sur le site Eduscol comme points d'appui pour évaluer les niveaux de maîtrise du socle commun en mathématiques par des élèves de cycle 2. Il figure sous l'intitulé « Opérations sur les nombres : Problème - les Œufs »¹.

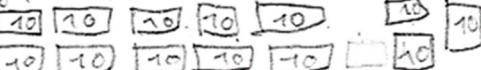
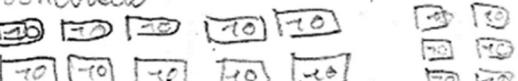
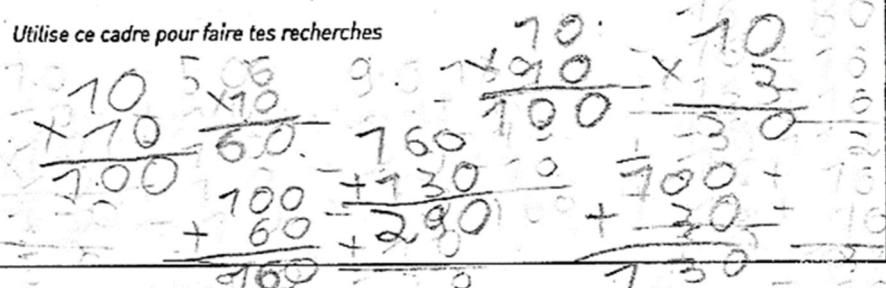
Exercice

Le fermier, monsieur Toufrépondu, range les œufs de ses poules dans des boîtes. Chaque boîte contient 10 œufs.

Le jeudi, il vend 13 boîtes au marché. Le vendredi, il vend 16 boîtes.

Combien d'œufs a-t-il vendu en tout ?

Voici les productions de deux élèves, le premier de CE1, le second de CE2.

Elève 1 (CE1)	<p><i>Utilise ce cadre pour faire tes recherches</i></p> <p>jeudi</p>  <p>vendredi</p>  <p>Réponse : Monsieur Toufrépondu a vendu 209 œufs en tout.</p>
Elève 2 (CE2)	<p><i>Utilise ce cadre pour faire tes recherches</i></p>  <p>Réponse : Monsieur Toufrépondu a vendu 209 œufs en tout.</p>

- a) Décrire la procédure utilisée par l'élève 1, puis formuler une hypothèse sur l'origine de son erreur.
 - b) Traduire par un calcul en ligne la procédure utilisée par l'élève 2 puis expliciter les propriétés et les connaissances que cet élève a mobilisé dans sa résolution du problème.

¹ Lien de téléchargement :

https://cache.media.eduscol.education.fr/file/Calcul%20mental/85/9/EV16_C2_Maths_38_Probleme_Les_oeufs_747859.pdf

- 2) a) On s'intéresse à l'exercice ci-contre, extrait du manuel « Cap Maths CE2 », p. 84.
Explicitier la procédure attendue pour répondre à la question c.

Utilise l'ardoise pour calculer :

a. 107×30	c. 107×37
b. 107×70	d. 107×73

- b) À la page suivante de ce même manuel, toujours consacrée au calcul de produits, on trouve un exercice dont la consigne est « Calcule avec la méthode de ton choix ». Pour chacun des deux calculs suivants, proposer une procédure de calcul mental réfléchi permettant d'obtenir le résultat attendu que vous mettriez en avant lors d'une mise en commun. Vous présenterez chaque procédure sous la forme d'un calcul en ligne.

i) 975×8

ii) 84×25

ANALYSE D'UNE ÉVALUATION SUR LE NOMBRE (DÉBUT DE CP) d'après un sujet de l'ESPE de Bretagne

Des évaluations diagnostiques nationales ont été menées en classe de CP en mathématiques, en septembre 2017.

Cette partie propose l'analyse de quelques questions posées aux élèves, ainsi que de travaux d'élèves concernant la construction du nombre, recueillis dans le cadre de ces évaluations.

Ces évaluations sont présentées de la manière suivante sur le site Eduscol : « Dans le courant du mois de septembre, les acquis des élèves entrant en CP sont évalués dans le cadre d'une **évaluation diagnostique nationale**. Il s'agit d'une évaluation passée **par tous les élèves qui entrent au CP, dans toutes les écoles de France**. Cette évaluation souple et rapide permet à chaque professeur de CP d'affiner les **éléments diagnostiques** qui lui sont **fournis par la synthèse des acquis scolaires de chaque élève établie en fin de grande section de maternelle**. Cette évaluation diagnostique répond principalement à **deux objectifs** : fournir aux professeurs des outils pour adapter leurs pratiques pédagogiques à leurs élèves et doter les inspecteurs d'indicateurs permettant de mieux appréhender la situation pédagogique des écoles de leur circonscription et ainsi de mieux accompagner leurs enseignants. » [...] « En **mathématiques**, des situations d'évaluation portent sur **les premières compétences relatives à la construction du nombre**. Sont spécifiquement ciblés le dénombrement et la décomposition/recomposition d'un nombre, la lecture et l'écriture chiffrée des nombres jusqu'à dix. ». <http://eduscol.education.fr/cid119562/evaluation-diagnostique-en-cp.html>, consulté en juin 2018.

1) Étude de l'exercice 3, item 4 (annexe 1)

Nous présentons ci-dessous les réponses de deux élèves : Anna et Moudri.

Le maître veut distribuer un ballon à chaque élève. Tous les élèves auront-ils un ballon ?
Entoure la bonne réponse.

OUI
NON

Réponse d'Anna

Le maître veut distribuer un ballon à chaque élève. Tous les élèves auront-ils un ballon ?
Entoure la bonne réponse.

OUI
NON

Réponse de Moudri

- a) Quel est le nom de la procédure utilisée par Anna pour répondre à la question ?
- b) Analyser la réponse de Moudri en indiquant deux procédures différentes qu'il est susceptible d'avoir utilisées.

2) Étude de l'exercice 4 (annexe 2)

Pour chacun des trois items, nommer la représentation du nombre principalement travaillée.

3) Étude de l'exercice 5 (annexe 3)

- a) Quelles compétences sont évaluées ici, en plus du dénombrement d'une quantité ?
- b) Pour les élèves qui en auraient besoin, proposer :
 - une aide pour dénombrer les quantités ;
 - une aide pour les élèves qui ne maîtrisent pas les compétences citées en a.

4) Étude de l'exercice 6 (annexe 4)

La tâche identifiée dans le livret de l'enseignant est :

« Identifier les informations spatiales pour situer des objets les uns par rapport aux autres dans un contexte donné. Connaitre des marqueurs spatiaux ».

D'après l'énoncé du problème, quel aspect du nombre est également travaillé ici ?

5) Étude de l'exercice 8 (annexe 5)

Nommer et décrire deux procédures d'élèves correctes pour résoudre l'exercice 8 et qui sont envisageables à ce niveau.

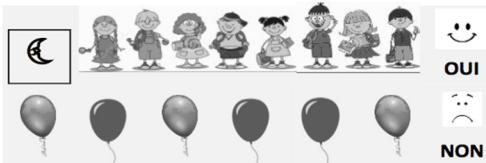
ANNEXE 1 : extrait du livret de l'enseignant pour l'exercice 3

Exercice 3 : Passation collective - 2 min

Tâche : Comparer des quantités

Situation proposée

Le maître veut distribuer un ballon à chaque élève. Tous les élèves auront-ils un ballon ? Entourez la bonne réponse.



Le maître veut distribuer un ballon à chaque élève.
Barre les ballons en trop.



Le maître veut distribuer un ballon à chaque élève.
Écris dans la case sous l'étoile le nombre de ballons qu'il manque.



Codage

Item 4 :

- Code 1 : le petit bonhomme triste est entouré.
- Code 9 : le petit bonhomme qui sourit est entouré.
- Code 0 : pas de réponse

Item 5 :

- Code 1 : bonne réponse : 3 ballons barrés
- Code 9 : autre réponse
- Code 0 : pas de réponse

Item 6 :

- Code 1 : bonne réponse : 1
- Code 9 : autre réponse
- Code 0 : pas de réponse

Consigne de passation

Regardez la première image où il y a la lune. Vous voyez des enfants et des ballons.

Chaque élève aura-t-il un ballon ?

Entourez le petit bonhomme qui sourit si vous pensez que tous les élèves auront un ballon. Sinon entourez le petit bonhomme qui est triste s'il manque des ballons.

Regardez la seconde image où il y a le cœur.

Vous voyez encore des enfants et des ballons.

Barrez les ballons qui ne seront pas distribués.

Regardez la troisième image où il y a l'étoile. Vous voyez encore des enfants et des ballons.

Écrivez dans la case sous l'étoile le nombre de ballons qui manquent.

ANNEXE 2 : extrait du livret de l'enseignant pour l'exercice 4

Exercice 4 : Passation collective - 6 min

Tâche : dénombrer les quantités en associant différentes représentations du nombre

Situation proposée

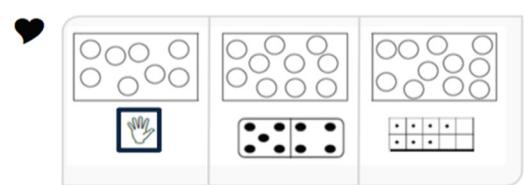
Barre le nombre de jetons demandés.

item 7



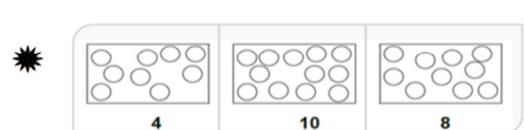
Barre le nombre de jetons indiqué sur les cartes en dessous des collections.

item 8



Barre le nombre de jetons indiqué par le nombre sous les collections.

item 9



Consigne de passation

Montrer au tableau la façon de barrer un jeton.

Partie 1 : Dans les trois cases de la première ligne où il y a l'étoile, barrez le nombre de jetons que je vais vous dire. Mettez votre doigt sur la première case. Barrez 3 jetons. Mettez votre doigt sur la seconde case, barrez 6 jetons. Mettez votre doigt sur la troisième case, barrez 8 jetons.

Partie 2 : Dans les trois cases de la ligne 2 où il y a le cœur, vous allez barrer aussi des jetons. Pour savoir combien vous devez en barrer, regardez sous chaque case. Sous la première case une main vous indique le nombre de jetons que vous devez barrer. Sous la seconde case, un domino vous indique le nombre de jetons que vous devez barrer. Sous la troisième case un tableau vous indique le nombre de jetons que vous devez barrer.

Partie 3 : Dans les trois cases de la dernière ligne où il y a le soleil, le nombre de jetons à barrer est indiqué en dessous de chacune des cases.

Codage

Item 7 : partie 1

- Code 1 : aucune erreur
- Code 2 : 1 erreur
- Code 9 : 2 ou 3 erreurs
- Code 0 : pas de réponse

Item 8 : partie 2

- Code 1 : aucune erreur
- Code 2 : 1 erreur
- Code 9 : 2 ou 3 erreurs
- Code 0 : pas de réponse

Item 9 : partie 3

- Code 1 : aucune erreur
- Code 2 : 1 erreur
- Code 9 : 2 ou 3 erreurs
- Code 0 : pas de réponse

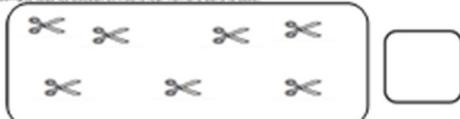
ANNEXE 3 : extrait du livret de l'enseignant pour l'exercice 5

Exercice 5 : Passation collective - 4 min

Tâche : Dénombrer une quantité

Situation proposée

Compte tous les ciseaux et inscris leur nombre dans la case.



Consigne de passation

Vous comptez tous les ciseaux et vous inscrivez leur nombre dans la case à côté.

Vous comptez tous les chats et vous inscrivez leur nombre dans la case à côté.

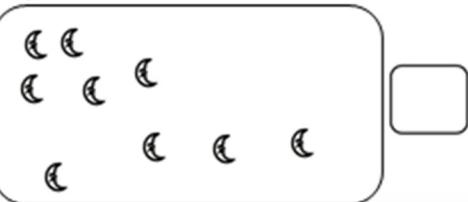
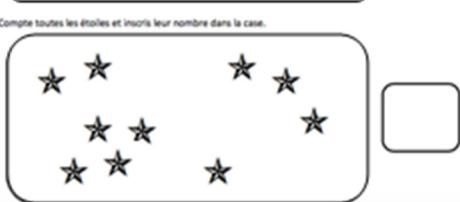
Vous comptez toutes les étoiles et vous inscrivez leur nombre dans la case à côté.

Vous comptez toutes les lunes et vous inscrivez leur nombre dans la case à côté.

Compte tous les chats et inscris leur nombre dans la case.



Compte toutes les étoiles et inscris leur nombre dans la case.



Codage

Item 10 :

Code 1 : aucune erreur

Code 2 : une erreur

Code 9 : 2 erreurs et plus

Code 0 : pas de réponse

ANNEXE 4 : extrait du livret de l'enseignant pour l'exercice 6

Exercice 6 : Passation collective - 3 min

Tâche : Identifier les informations spatiales pour situer des objets les uns par rapport aux autres dans un contexte donné. Connaitre des marqueurs spatiaux

Situation proposée

Barre en rouge le cycliste qui est le premier de la course

Entourez en vert le sixième cycliste.

Barre en bleu le dernier cycliste.

Fais une croix rouge au-dessus du troisième cycliste.

Fais une croix bleue sous le quatrième cycliste.



Consigne de passation

Regardez l'image. Il y a 7 coureurs cyclistes. Mettez votre doigt sur le panneau qui indique l'arrivée de la course.

Bien insister sur ce panneau pour faire comprendre le sens dans lequel se déroule la course.

Barrez en rouge le cycliste qui est le premier de la course. Laisser 20 secondes.

Entourez en vert le sixième cycliste. Laisser 20 s.

Barrez en bleu le dernier cycliste. Laisser 20 s.

Faites une croix rouge au-dessus du troisième cycliste. Laisser 20 s.

Faites une croix bleue sous le quatrième cycliste. Laisser 20 s.

Codage

Item 11 : premier rouge

Code 1 : aucune erreur

Code 9 : autre réponse

Code 0 : pas de réponse

Item 12 : sixième vert

Code 1 : aucune erreur

Code 9 : autre réponse

Code 0 : pas de réponse

Item 13 : dernier bleu

Code 1 : aucune erreur

Code 9 : autre réponse

Code 0 : pas de réponse

Item 14 : troisième croix rouge

Code 1 : aucune erreur

Code 9 : autre réponse

Code 0 : pas de réponse

Item 15 : quatrième croix bleue

Code 1 : aucune erreur

Code 9 : autre réponse

Code 0 : pas de réponse

ANNEXE 5 : extrait du livret de l'enseignant pour l'exercice 8 (item 20)

Exercice 8 : Passation collective - 4 min

Tâche : Recomposer mentalement (par composition ou décomposition) des petites quantités pour résoudre un problème

Situation proposée

Pierre a 5 bonbons, on lui en donne encore 3. Combien Pierre a-t-il de bonbons maintenant ?

5	6	7	8	9	10
---	---	---	---	---	----

Consigne de passation

Ecoutez-moi. Pierre a 5 bonbons, on lui en donne encore 3. Combien Pierre a-t-il de bonbons maintenant ?

Entourez la case du résultat.

Codage

Item 20 :

Code 1 : 8 entouré

Code 9 : autre réponse

Code 0 : pas de réponse

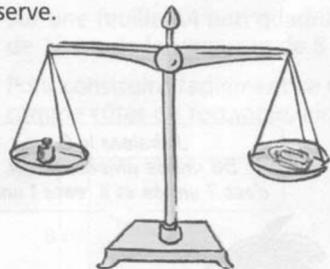
ANALYSE D'UNE SITUATION SUR LES MASSES d'après un sujet de Clermont-Ferrand

*Le document présenté en annexe A est tiré de « J'apprends les maths – CE2 », Éditions Retz.
L'annexe B présente la production d'un élève pour l'exercice 2.*

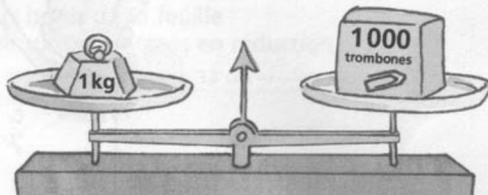
- 1) Pour cette question, se reporter au document reproduit en annexe A.
 - a) Citer une difficulté que les élèves peuvent rencontrer pour barrer les masses impossibles de l'exercice 1.
 - b) Quel peut être l'objectif de cet exercice 1 ?
 - c) Citer deux difficultés que les élèves peuvent rencontrer pour répondre correctement à la question a de l'exercice 2.
- 2) Pour cette question, se reporter au document reproduit en annexe B.
 - a) Dans cette question on s'intéresse aux réponses de l'élève aux questions a, b et c de l'exercice 2. Quelle semble être la règle implicitement utilisée par cet élève ?
 - b) Dans cette question on s'intéresse aux réponses de l'élève à la question d de l'exercice 2. Lorsqu'il s'agit de transformer une écriture en grammes en une écriture complexe en kilogrammes-grammes, on peut supposer que l'élève utilise la règle implicite suivante : « le premier chiffre correspond au nombre de kilogrammes, le reste des chiffres correspond au nombre de grammes. » Proposer un exercice (dans le même contexte) qui permettrait de vérifier si l'élève utilise cette règle qui donne en général un résultat faux.
- 3) Pour cette question, se reporter au document reproduit en annexe B.
 - a) Comment utiliser des masses marquées et une balance à affichage digital pour faire prendre conscience à l'élève de son erreur lors de l'écriture de l'égalité : « $2 \text{ kg } 40 \text{ g} = 240 \text{ g}$ »?
 - b) Donner une aide possible que l'enseignant peut apporter à cet élève.

ANNEXE A

① Observe.



1 gramme (1 g),
c'est lourd comme 1 trombone.



1 kilogramme (1 kg),
c'est lourd comme 1 000 trombones.

1 kilogramme = grammes

Imagine les pesées et barre les masses impossibles.

Une pièce de 1 centime



2 g
200 g
2 kg

Un stylo



1 g
5 g
50 g

Une pile



5 g
25 g
250 g

Une bille



1 g
5 g
50 g

Un citron



1 g
10 g
100 g

Ton fichier de maths



100 g
500 g
1 kg

Une boîte de conserve



50 g
100 g
1 kg

Une bouteille d'eau



150 g
1 kg et 500 g
15 kg

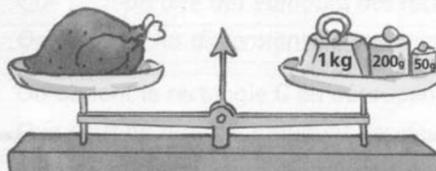
Un bébé



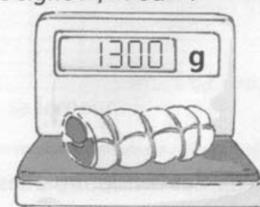
500 g
5 kg
15 kg

②

a On a pesé un poulet et un rôti. Lequel est le plus lourd? Réponds avec le signe >, < ou =.



1 kg 250 g 1300 g



b Compare ces différentes masses. Utilise les signes >, < ou =.

2 kg 60 g 2 600 g 2 kg 300 g 3 200 g 3 008 g 3 kg 8 g

1 500 g 1 kg 5 g 1 kg 70 g 975 g 1 kg 450 g 1 520 g

c Écris ces masses en grammes.

1 kg 350 g = g 2 kg 40 g = g 4 kg 7 g = g

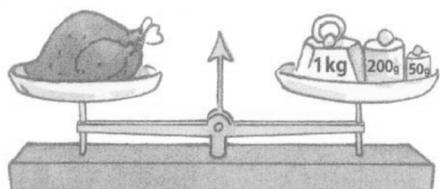
d Écris ces masses en kg et g.

3 200 g = kg g 5 003 g = kg g 2 040 g = kg g

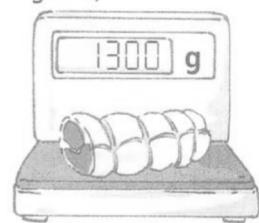
ANNEXE B

②

- a On a pesé un poulet et un rôti. Lequel est le plus lourd? Réponds avec le signe $>$, $<$ ou $=$.



$$1 \text{ kg } 250 \text{ g} < 1300 \text{ g}$$



- b Compare ces différentes masses. Utilise les signes $>$, $<$ ou $=$.

$$2 \text{ kg } 60 \text{ g} < 2600 \text{ g}$$

$$2 \text{ kg } 300 \text{ g} < 3200 \text{ g}$$

$$3008 \text{ g} > 3 \text{ kg } 8 \text{ g}$$

$$1500 \text{ g} > 1 \text{ kg } 5 \text{ g}$$

$$1 \text{ kg } 70 \text{ g} < 975 \text{ g}$$

$$1 \text{ kg } 450 \text{ g} < 1520 \text{ g}$$

- c Écris ces masses en grammes.

$$1 \text{ kg } 350 \text{ g} = 1350 \text{ g}$$

$$2 \text{ kg } 40 \text{ g} = 240 \text{ g}$$

$$4 \text{ kg } 7 \text{ g} = 407 \text{ g}$$

- d Écris ces masses en kg et g.

$$3200 \text{ g} = 3 \text{ kg } 200 \text{ g}$$

$$5003 \text{ g} = 5 \text{ kg } 3 \text{ g}$$

$$2040 \text{ g} = 2 \text{ kg } 40 \text{ g}$$

ANALYSE D'UNE SITUATION SUR LES DÉCIMAUX d'après un sujet de l'ESPE de DIJON

L'activité de recherche ci-dessous est un extrait de la page 106 du manuel *Cap Maths CM2*, Éditions Hatier, 2017.

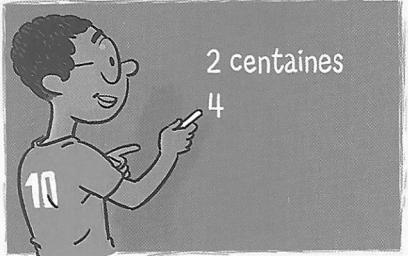
Je cherche **CALCULER** **AVEC UNE VIRGULE**

Pour les questions A et B, la calculatrice est interdite.

<p>a.</p> <table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr> <td style="padding: 5px; vertical-align: top;"> 1^{er} nombre 2 centaines 4 unités 7 dixièmes 8 millièmes </td> <td style="padding: 5px; vertical-align: top;"> 2^e nombre 3 unités 9 dixièmes </td> </tr> </table>	1 ^{er} nombre 2 centaines 4 unités 7 dixièmes 8 millièmes	2 ^e nombre 3 unités 9 dixièmes	<p>b.</p> <table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr> <td style="padding: 5px; vertical-align: top;"> 1^{er} nombre 1 millier 3 centaines 5 dixièmes 2 centièmes </td> <td style="padding: 5px; vertical-align: top;"> 2^e nombre 5 dizaines 7 unités 3 dixièmes 5 centièmes </td> </tr> </table>	1 ^{er} nombre 1 millier 3 centaines 5 dixièmes 2 centièmes	2 ^e nombre 5 dizaines 7 unités 3 dixièmes 5 centièmes
1 ^{er} nombre 2 centaines 4 unités 7 dixièmes 8 millièmes	2 ^e nombre 3 unités 9 dixièmes				
1 ^{er} nombre 1 millier 3 centaines 5 dixièmes 2 centièmes	2 ^e nombre 5 dizaines 7 unités 3 dixièmes 5 centièmes				

A Dans chaque cas (**a** et **b**), quelle est la somme des deux nombres ? Explique la méthode que tu as utilisée.

B Dans chaque cas (**a** et **b**), quelle est la différence des deux nombres ? Explique la méthode que tu as utilisée.



Le livre du maître associé rappelle que l'addition et la soustraction de nombres décimaux ont, en général, été travaillées au CM1.

Pour cette activité de recherche, il suggère de :

- mettre à disposition des élèves qui le souhaitent du matériel (par exemple des étiquettes centaine, dizaine, unité, dixième, ...);
- préciser « Toutes les méthodes sont admises et l'usage du matériel n'est pas une obligation. » ;
- ne donner aucune indication sur la méthode à utiliser.

Il préconise ensuite au cours des phases de mise en commun, de faire expliciter :

- d'abord les procédures qui n'ont pas consisté à poser l'opération (premier temps) ;
- seulement ensuite la ou les procédures avec calcul posé (second temps).

Au sujet de ces calculs posés, le livre du maître indique : « De plus, pour la soustraction, la difficulté se trouve encore accrue du fait qu'il existe plusieurs techniques possibles, comme pour les nombres entiers. Chaque élève doit donc adapter aux nombres décimaux celle qu'il utilise pour les entiers, les justifications étant identiques ».

- 1) Cette question porte sur le premier temps des mises en commun.
 - a) Proposer une procédure ne consistant pas à poser l'opération et permettant dans le cas **a** de l'exercice de déterminer la somme des deux nombres.
 - b) Proposer une procédure ne consistant pas à poser l'opération et permettant dans le cas **b** de l'exercice de déterminer la différence des deux nombres.
- 2) Cette question porte, dans le cas de la soustraction, sur le second temps de la mise en commun.
Poser la soustraction permettant dans le cas **a** de l'exercice de déterminer la différence des deux nombres.
 - a) En utilisant la méthode dite « par emprunt ».
 - b) En utilisant la méthode par « conservation des écarts » (dite aussi méthode « usuelle »). Vous expliciterez dans ce dernier cas le sens des différentes « retenues ».

ANALYSE D'UNE SITUATION SUR LES POLYGONES EN CYCLE 3 d'après un sujet de l'ESPE d'Aix-Marseille

PREMIÈRE PARTIE

Un manuel de cycle 3, de la collection *J'apprends les maths* (Editions Retz), propose le problème reproduit en **annexe 1**.

- 1) Résoudre cet exercice.
- 2) Énoncer une définition d'un polygone que l'on pourrait donner à des élèves de cycle 3.
- 3) a) Un élève n'a trouvé qu'un seul rectangle et qu'un seul losange. Expliquer pourquoi.
b) Donner une aide que l'on peut proposer à cet élève pour qu'il trouve un second losange.

DEUXIÈME PARTIE

L'**annexe 2** reproduit un extrait d'un manuel de cycle 3, de la collection *Optimath* (Hachette), ancienne édition.

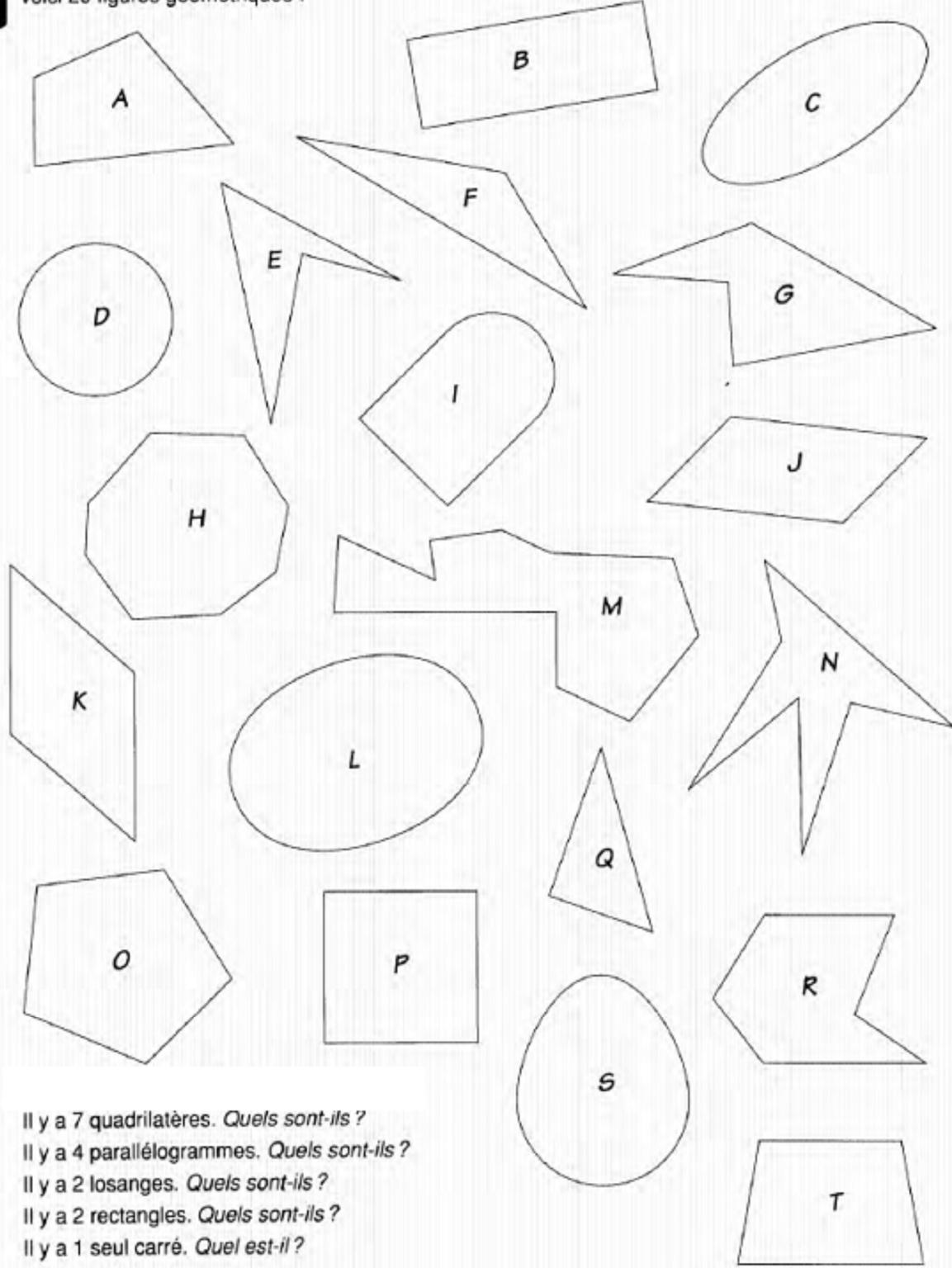
- 1) Donner la propriété mathématique qui permet de justifier la construction de deux droites parallèles proposée par le manuel.
- 2) Donner une définition de deux droites parallèles que l'on pourrait donner à des élèves de cycle 3 et qui permet de les construire avec une autre procédure.
- 3) Un enseignant propose à la suite de cette activité, le travail suivant :

Réalise le programme de construction suivant sur une feuille blanche.	
1	<i>Trace deux droites d_1 et d_2 qui se coupent. Appelle A le point où elles se coupent.</i>
2	<i>Place un point B sur la droite d_1 et un point D sur la droite d_2.</i>
3	<i>Avec ton compas, trace un arc de cercle de centre B et de rayon AD.</i>
4	<i>Avec ton compas, trace un arc de cercle de centre D et de rayon AB.</i>
5	<i>Appelle C le point où se coupent les deux arcs de cercle. Trace les segments [BC] et [CD].</i>

- a) Réaliser ce programme de construction.
- b) Relever ce qui est implicite dans l'étape 5.
- c) Sur quelle propriété caractéristique du parallélogramme repose cette construction ?
- 4) À votre niveau de connaissance, citer deux caractérisations (différentes de celle explicitée à la question 3) c) et de la définition donnée) permettant de vérifier qu'un quadrilatère est un parallélogramme.

ANNEXE 1

1 Voici 20 figures géométriques :



Il y a 7 quadrilatères. Quels sont-ils ?

Il y a 4 parallélogrammes. Quels sont-ils ?

Il y a 2 losanges. Quels sont-ils ?

Il y a 2 rectangles. Quels sont-ils ?

Il y a 1 seul carré. Quel est-il ?

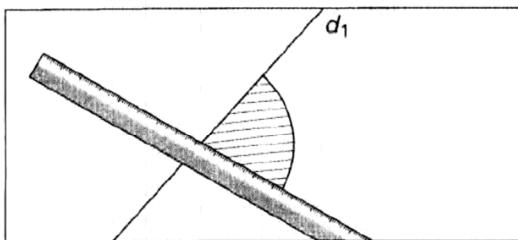
ANNEXE 2

Découvrir

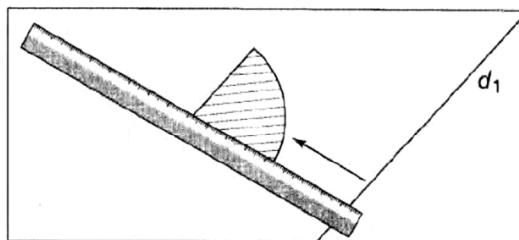
Tu vas apprendre à tracer des parallèles et découvrir un quadrilatère particulier.

1

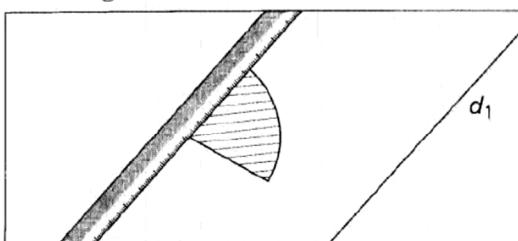
Il te faut une règle, un gabarit d'angle (n'importe lequel) et une feuille blanche.
Trace une droite d_1 sur une feuille blanche.



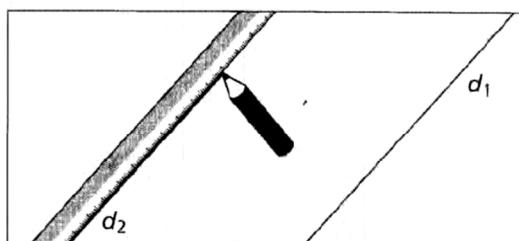
a) Place un côté du gabarit d'angle le long de cette droite, et la règle le long de l'autre côté du gabarit.



b) Fais glisser le gabarit le long de la règle (dans le sens que tu veux).



c) Immobilise le gabarit. Place ta règle le long de l'autre côté du gabarit.



d) Sans bouger ta règle, retire le gabarit et trace une droite d_2 parallèle à d_1 .

2

a) Trace une droite d_3 qui coupe les droites d_1 et d_2 .

b) Trace maintenant une droite d_4 parallèle à la droite d_3 (tu peux t'aider du programme et des illustrations ci-dessus).

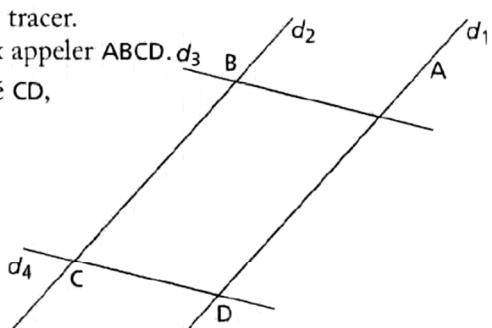
3

Regarde les quatre droites que tu viens de tracer.

Elles forment un quadrilatère que tu peux appeler ABCD.

Par construction, le côté AB est parallèle au côté CD,
et le côté AD est parallèle au côté BC.

Ce quadrilatère s'appelle un **parallélogramme**.



M
É
M
O

1. Pour vérifier que des droites sont parallèles, ou pour construire des droites parallèles, on peut utiliser un gabarit d'angle que l'on fait glisser le long d'une règle.

2. Si on coupe deux droites parallèles par deux autres droites parallèles, on obtient un parallélogramme.

ANALYSE D'UNE SITUATION SUR LES FRACTIONS EN CM1 d'après un sujet de l'ESPE d'Aix-Marseille

Un enseignant de CM1 s'appuie sur une séance du manuel « Cap Maths » (Hatier 2016), unité 2, séance 2, pour construire une nouvelle séance d'apprentissage.

Vous trouverez ci-dessous, la situation décrite, ainsi qu'une production d'un groupe d'élèves.

- 1) Quel est le type de tâche en jeu dans cette situation ?
- 2) Citer deux compétences préalables nécessaires à cette activité.
- 3) Identifier deux difficultés dans ce problème de recherche.
- 4) Analyser le travail du groupe A et s'appuyer sur le même raisonnement pour décrire la technique permettant d'aboutir au rangement correct.
- 5) À la fin de l'activité, comment les élèves peuvent-ils valider le rangement ?

Phase 1 : ranger les positions des enfants par le raisonnement

Demander aux élèves de prendre connaissance de la situation proposée dans leur manuel (situation décrite ci-dessous).

RÈGLEMENT : Chaque participant court en ligne droite, sur sa piste.

	0	1	2	3	4
Idriss	■	■	■	■	■
Kriss	■	■	■	■	■
Ulysse	■	■	■	■	■
Alice	■	■	■	■	■
Zoé	■	■	■	■	■
Arthur	■	■	■	■	■



A Tous les coureurs s'arrêtent au coup de sifflet final et notent leur position d'arrivée :

$$\text{Idriss : } \frac{7}{2} \quad \text{Ulysse : } 2 + \frac{2}{3} \quad \text{Zoé : } 2 + \frac{4}{6} \quad \text{Kriss : } \frac{16}{5} \quad \text{Alice : } \frac{15}{4} \quad \text{Arthur : } 3 + \frac{1}{2}$$

Sans utiliser les pistes graduées, range les enfants de celui qui est allé le moins loin à celui qui est allé le plus loin.

Puis il précise :

- Vous devez d'abord essayer de trouver l'ordre d'arrivée des enfants, **sans vous servir des pistes graduées** : qui est allé le plus loin ? qui est arrivé juste derrière ?...
Je recopie au tableau les informations concernant chaque coureur et vous fermez votre manuel.
Pour les équipes qui le souhaitent, une unité de longueur peut leur être donnée.
 - Demander aux élèves de fermer leur manuel et afficher au tableau ou projeter la fiche 13 qui montre les pistes des coureurs.
- Travail par groupe de deux, mise en commun et relance de la recherche.

Travail partiel du groupe A

Ulysse et Zoé c'est pareil. $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$
 $\frac{7}{2} = 3 + \frac{1}{2}$ dans 3 il y a 6 demi



Idriss c'est comme Arthur

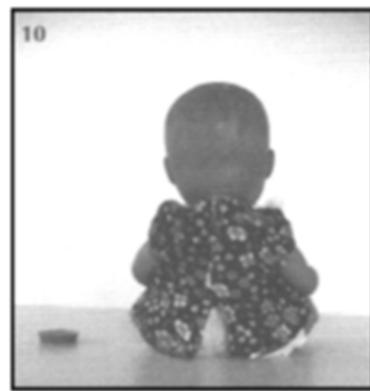
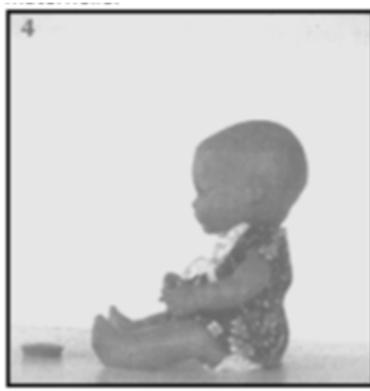
ANALYSE D'UNE SITUATION SUR L'ESPACE EN MATERNELLE d'après un sujet de l'ESPE d'Aix-Marseille

Extrait du manuel « *Donner du sens aux mathématiques, T2, Espace et géométrie* », pages 71 à 76, M. Fénichel, M. Pauvert, N. Pfaff.

Cette situation s'adresse à des élèves de Grande Section de maternelle.

Matériel (pour un groupe de 3 élèves)

- Une poupée installée en position assise sur une table ;
- 8 jetons et 8 étiquettes « 1 point »
- 12 cartes photos numérotées de 1 à 12, avec 12 positions différentes représentant la poupée avec un jeton placé autour de la poupée (exemple ci-dessous)



Tâche

Elle se déroule sous forme de jeu par groupe de trois : deux joueurs et un arbitre. Chaque joueur dispose de 4 jetons. Deux élèves tirent à tour de rôle une carte-photo et doivent placer le jeton par rapport à la poupée « comme sur la photo », l'arbitre contrôle la validité et distribue une étiquette « 1 point » lorsque la position est correcte. Le gagnant est le joueur ayant obtenu le plus de points.

Phase 1

L'arbitre est situé en face de la poupée, mais les deux joueurs peuvent se déplacer autour de la table sur laquelle est posée la poupée avant de placer leur jeton.

Phase 2

Les deux joueurs sont assis de chaque côté de l'arbitre, en face de la poupée et ne peuvent se déplacer.

Phase 3

Les joueurs jouent par équipe de deux. L'un des joueurs est chargé de tirer une carte photo sans la montrer à son co-équipier (l'arbitre contrôle) puis il indique à son co-équipier où celui-ci doit placer le jeton.

Voici un extrait du programme de l'école maternelle publié au bulletin officiel n°2 du 26 mars 2015.

L'espace

5.1.2. Ce qui est attendu des enfants en fin d'école maternelle

- Situer des événements vécus les uns par rapport aux autres et en les repérant dans la journée, la semaine, le mois ou une saison.
- Ordonner une suite de photographies ou d'images, pour rendre compte d'une situation vécue ou d'un récit fictif entendu, en marquant de manière exacte succession et simultanéité.
- Utiliser des marqueurs temporels adaptés (puis, pendant, avant, après...) dans des récits, descriptions ou explications.
- Situer des objets par rapport à soi, entre eux, par rapport à des objets repères.
- Se situer par rapport à d'autres, par rapport à des objets repères.
- Dans un environnement bien connu, réaliser un trajet, un parcours à partir de sa représentation (dessin ou codage).
- Élaborer des premiers essais de représentation plane, communicables (construction d'un code commun).
- Orienter et utiliser correctement une feuille de papier, un livre ou un autre support d'écrit, en fonction de consignes, d'un but ou d'un projet précis.
- Utiliser des marqueurs spatiaux adaptés (devant, derrière, droite, gauche, dessus, dessous...) dans des récits, descriptions ou explications.

- 1) En vous appuyant sur cet extrait, relever les compétences travaillées lors de cette situation.
- 2) Quel est le rôle de la phase 1 ?
- 3) Un élève a tiré la carte photo n°10 lors de la phase 2. Quelle est la principale difficulté pour le joueur ?
- 4) Préciser la tâche des élèves lors de la phase 3 et l'objectif principal visé par l'enseignant.

ANALYSE D'UNE SITUATION DE PARTAGE ÉQUITABLE d'après un sujet de Clermont-Ferrand

Dans une classe de CE1, l'exercice suivant a été proposé (les mots soulignés l'étaient dans le texte d'origine).

Une mère décide de partager équitablement entre ses trois enfants les 20 biscuits d'un paquet.
Combien de biscuits va-t-elle donner à chaque enfant ?

1) Analyse du texte du problème

- Donner les difficultés que comporte la présentation de cet énoncé de problème et expliquer une conséquence possible.
- Citer deux incidences sur la résolution du problème que le choix des nombres 3 et 20 va engendrer.

2) Analyse de quatre productions d'élèves

Vous trouverez ci-dessous, les productions de quatre élèves à analyser.

Présenter dans un tableau :

- la démarche probable de chaque élève ;
- les éventuelles erreurs de chacun ;
- une origine possible de chacune de ces erreurs ;
- les connaissances mathématiques illustrées par ces démarches.

Léon
1 1 1 1 1 1
2 1 1 1 1 1
3 1 1 1 1 1
Chaque enfant aura ... 6 biscuits

Amy
6 6 6 6 6 6
6 6 6 6 6 6
Chaque enfant aura ... 7 biscuits

TOM
 $20 = 10 + 10$
Chaque enfant aura 10 biscuits

MARION
 $3/3 / 3 / 3 / 3 / 3 / 2$
Chaque enfant aura 6 biscuits

**EXERCICES ÉLABORÉS
À PARTIR
DES CONCOURS BLANCS
ET EXAMENS
PROPOSÉS DANS LES ESPE**

CORRIGÉS

EXERCICES d'après divers sujets d'examens

EXERCICE 1

1) Valeur approchée au dixième de l'aire de la partie grisée sur l'extrait 1

L'aire de la partie grisée sur l'extrait 1 peut être obtenue en enlevant à l'aire du carré ABCD les aires de deux demi-disques (représentés en noir) ayant pour diamètre le côté du carré.

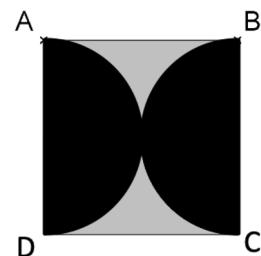
Or l'aire de ces deux demi-disques est égale à l'aire du disque ayant pour diamètre le côté du carré, soit :

$$\pi \times \left(\frac{6 \text{ cm}}{2}\right)^2 = 9\pi \text{ cm}^2.$$

$$\begin{aligned} \text{Aire (partie grisée)} &= \text{Aire (carré ABCD)} - \text{Aire (disque de diamètre [AB])} \\ &= (6 \text{ cm})^2 - 9\pi \text{ cm}^2 \\ &= (36 - 9\pi) \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

soit Aire (partie grisée) $\approx 7,7 \text{ cm}^2$.

La valeur approchée arrondie au dixième près de l'aire de la partie grisée est de $7,7 \text{ cm}^2$.



2) Valeur approchée au dixième de l'aire de la surface noire de l'extrait 2

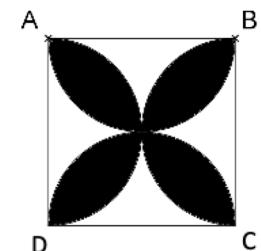
L'aire de la partie noire sur l'extrait 2 peut être obtenue en enlevant à l'aire du carré ABCD le double de l'aire de la surface grisée de l'extrait 1 qui a été calculée à la question précédente :

$$\text{Aire (partie noire)} = \text{Aire (carré ABCD)} - 2 \times \text{Aire (partie grisée)}$$

$$\text{d'où Aire (partie noire)} = (6 \text{ cm})^2 - 2 \times ((36 - 9\pi) \text{ cm}^2)$$

$$\text{soit Aire (partie noire)} = (18\pi - 36) \text{ cm}^2$$

$$\text{ou encore Aire (partie noire)} \approx 20,55 \text{ cm}^2.$$



La valeur approchée, au dixième de cm^2 près, de l'aire de la surface noire est donc de $20,6 \text{ cm}^2$.

3) Aire de la surface hachurée sur la rosace de Léonard de Vinci

L'aire de la surface H hachurée sur la rosace de Léonard de Vinci est constituée de la somme des aires de la figure H1 (partie hachurée à l'intérieur du carré ABCD) et de la figure H2 (partie hachurée à l'extérieur du carré ABCD).

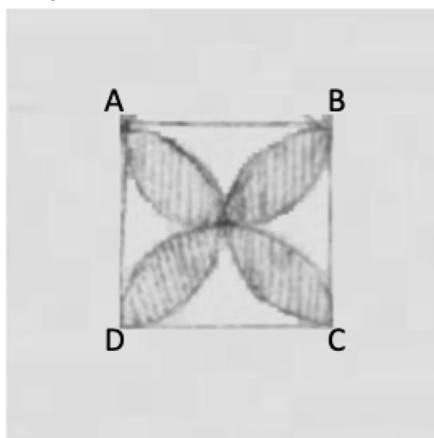


Figure H1

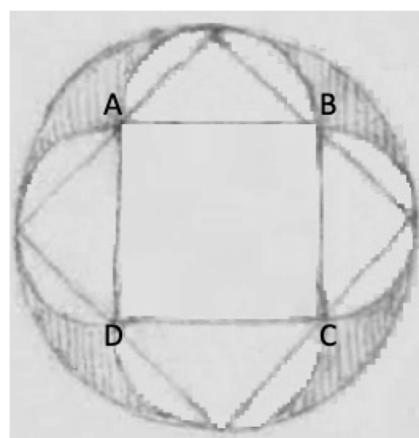


Figure H2

L'aire de la figure H1 a été calculée à la question 1) b) : Aire (H1) = $(18\pi - 36)$ cm².

Méthode 1 : calcul de l'aire de la figure H2 à l'aide de l'aire du grand disque, de l'aire des demi-disques et de l'aire du carré ABCD

Pour calculer l'aire de la figure H2, on peut calculer l'aire du grand disque et lui enlever l'aire des 4 demi-disques D1 de diamètre [AB], D2 de diamètre [BC], D3 de diamètre [DC] et D4 de diamètre [DA], ainsi que l'aire du carré ABCD.

Le grand disque a pour rayon [EO], diagonale du carré AEBO. Or les diagonales [EO] et [AB] sont de même longueur donc EO = AB = 6 cm.

L'aire du grand disque est donc : $\pi \times (6 \text{ cm})^2 = 36\pi \text{ cm}^2$.

Les quatre demi-disques D1, D2, D3 et D4 ont la même aire car ils ont pour diamètre la longueur du côté du carré ABCD, soit 3 cm.

$$\begin{aligned} \text{Aire (demi-disque D1 de diamètre [AB])} &= \frac{1}{2} \times \pi \times (3 \text{ cm})^2 \\ &= 4,5\pi \text{ cm}^2. \end{aligned}$$

Donc l'aire des 4 demi-disques est égale à $4 \times 4,5\pi \text{ cm}^2 = 18\pi \text{ cm}^2$.

Le carré ABCD a pour aire : $(6 \text{ cm})^2 = 36 \text{ cm}^2$.

L'aire de la figure H2 est donc :

$$\begin{aligned} \text{Aire (H2)} &= \text{Aire (grand disque de diamètre [EG])} - 4 \times \text{Aire (D1)} - \text{Aire (carré ABCD)} \\ &= 36\pi \text{ cm}^2 - 18\pi \text{ cm}^2 - 36 \text{ cm}^2 \\ &= (18\pi - 36) \text{ cm}^2. \end{aligned}$$

Finalement l'aire de la figure hachurée H est donc :

$$\text{Aire (H)} = \text{Aire (H1)} + \text{Aire (H2)} = (18\pi - 36) \text{ cm}^2 + (18\pi - 36) \text{ cm}^2 = (36\pi - 72) \text{ cm}^2.$$

L'aire de la partie hachurée est : $(36\pi - 72) \text{ cm}^2$.

Méthode 2 : calcul de l'aire de la figure H2 à l'aide d'une homothétie de rapport 2 et d'une comparaison à la figure H1

Nous allons raisonner sur un quart de la figure H2, par exemple celui inclus dans le segment circulaire¹ du grand disque délimité par la corde [EH], et montrer que dans ce segment circulaire, noté S₂, la partie hachurée, notée T, et la partie non hachurée, notée T', ont même aire.

T' est constitué de S₁, le segment du cercle de diamètre [AB] délimité par la corde [EA] et de S'₁, le segment du cercle de diamètre [HO] délimité par la corde [AH].

Considérons l'homothétie de centre E qui transforme le cercle de diamètre [AB] en le cercle de diamètre [HF].

Le diamètre du grand cercle étant le double de celui des petits cercles, le rapport de cette homothétie est de 2.

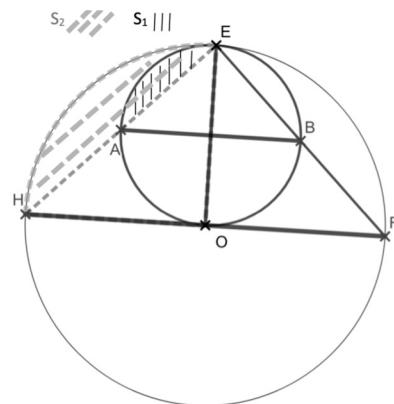
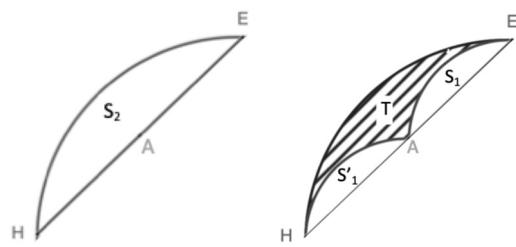
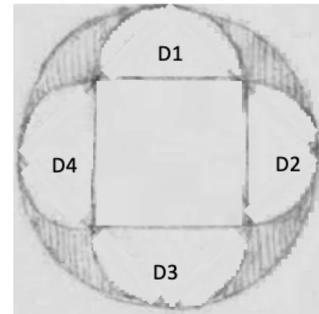
Notons h cette homothétie.

Le segment circulaire S₂ est l'image de S₁ par h.

On sait que le rapport entre l'aire d'une surface et celle de son image dans une homothétie de rapport k est de k².

L'homothétie h ayant pour rapport 2, on a :

$$\text{Aire}(S_2) = 2^2 \times \text{Aire}(S_1) = 4 \times \text{Aire}(S_1).$$



¹ Un segment circulaire est une partie d'un disque est défini comme un domaine qui est « coupé » du reste du disque par une corde. Le segment circulaire constitue donc la partie entre la droite sécante et un arc.

La partie T' est constituée du segment S_1 et du second S'_1 qui lui est superposable par translation ou par symétrie axiale. On a donc $\text{Aire}(T') = 2 \times \text{Aire}(S_1)$.

Par différence, la partie hachurée T a pour aire :

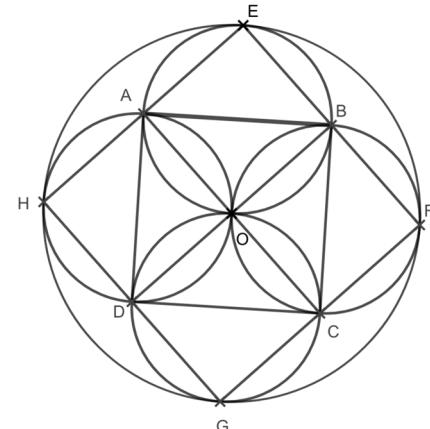
$$\text{Aire}(T) = \text{Aire}(S_2) - \text{Aire}(T') = 4 \times \text{Aire}(S_1) - 2 \times \text{Aire}(S_1) = 2 \times \text{Aire}(S_1).$$

Ainsi les parties hachurée T et non hachurée T' de S_2 ont même aire.

Par ailleurs, en traçant les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ du carré $ABCD$, chacun des quatre « pétales » de la partie hachurée $H1$ est décomposé en deux segments circulaires, deux de bord $[OA]$, deux de bord $[OB]$, deux de bord $[OC]$ et deux de bord $[OD]$.

Parmi eux, les deux segments circulaires bord $[OA]$, sont superposables à l'aide d'une rotation d'un quart de tour, l'un à S_1 , l'autre à S'_1 , les deux segments circulaires composant T' .

L'aire de la partie T' est donc égale à celle d'un « pétale » de la partie $H1$, c'est-à-dire à un quart de celle de la partie hachurée $H1$.



En résumé, on a les égalités suivantes :

$$\text{Aire}(T) = \text{Aire}(T') ; \quad \text{Aire}(T') = \frac{1}{4} \text{Aire}(H1) \quad \text{et} \quad \text{Aire}(T) = \frac{1}{4} \text{Aire}(H2), (\text{par définition de la partie } T).$$

On en déduit que $\text{Aire}(H2) = \text{Aire}(H1)$.

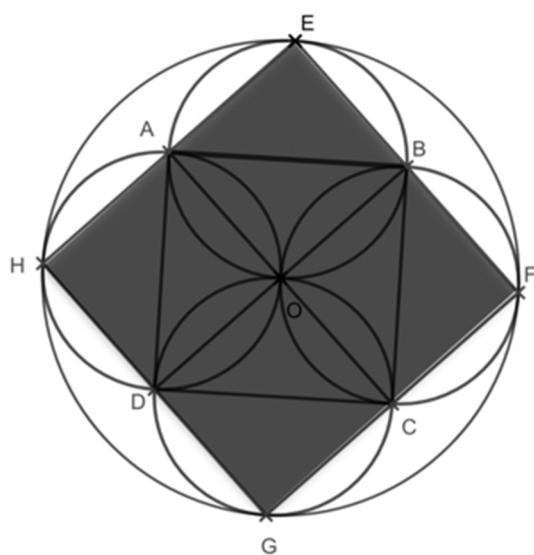
L'aire totale de la surface hachurée H est donc égale au double de l'aire de la partie $H1$.

D'où $\text{Aire}(H) = 2 \times \text{Aire}(H1) = 2 \times (18\pi - 36) \text{ cm}^2 = (36\pi - 72) \text{ cm}^2$.

Méthode 3 : à l'aide d'une procédure par décomposition-recomposition puis du calcul d'aires classiques

En traçant comme précédemment les diagonales du carré $ABCD$, on décompose les 4 « pétales » de la figure $H1$ en huit segments circulaires qui sont chacun superposables, par translation ou rotation, à l'un des huit segments circulaires délimités respectivement par $[EA]$, $[AH]$, $[HD]$, $[DG]$, $[GC]$, $[CF]$, $[FB]$, $[BE]$.

Ainsi par recomposition, l'aire de la figure H est égale à celle de la figure constituée par la partie du disque extérieur au carré $EFGH$. Elle correspond à la partie non grisée de la figure suivante.



L'aire de la figure H est donc égale à la différence entre l'aire du disque de diamètre $[HF]$ et celle du Carré $EFGH$.

Le grand disque a pour rayon $[EO]$, diagonale du Carré $AEBO$. Or les diagonales $[EO]$ et $[AB]$ sont de même longueur donc $EO = AB = 6 \text{ cm}$.

L'aire du grand disque est donc : $\text{Aire}(\text{disque de diamètre HF}) = \pi \times (6 \text{ cm})^2 = 36\pi \text{ cm}^2$.

Le carré EFGH a pour côté la longueur EH égale à celle de sa médiane DB, qui est aussi une diagonale du carré ABCD de côté 6 cm.

On en déduit que $EH = 6\sqrt{2}$ cm, soit à l'aide du théorème de Pythagore, soit en utilisant directement la propriété suivante : « la diagonale d'un carré de côté a pour diagonale $a\sqrt{2}$ ».

D'où $\text{Aire}(EFGH) = (6\sqrt{2} \text{ cm})^2 = 36 \times 2 \text{ cm}^2 = 72 \text{ cm}^2$.

D'où finalement :

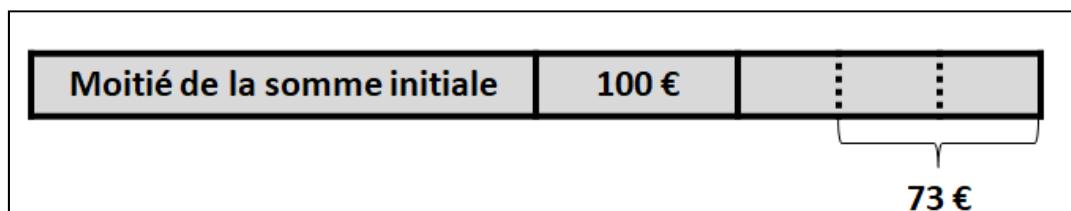
$$\text{Aire}(H) = \text{Aire}(\text{disque de diamètre HF}) - \text{Aire}(EFGH) = 36\pi \text{ cm}^2 - 72 \text{ cm}^2 = 36(\pi - 2) \text{ cm}^2.$$

EXERCICE 2

1) Résolution du premier problème

Méthode 1 : raisonnement arithmétique, accessible en fin de cycle 3

On peut commencer par représenter la situation par un diagramme :



On peut calculer progressivement les sommes restantes au fil des étapes, **en remontant ces étapes**.

Ainsi, à la dernière étape, j'ai dépensé un tiers de ce que j'avais à ce moment-là et il est alors resté 73 €. Donc 73 € correspondent aux deux tiers de ce que j'avais avant ma dernière dépense, et donc un tiers de ce que j'avais alors représente la moitié de 73 € donc 36,50 €.

J'avais donc $3 \times 36,50$ € soit 109,50 € avant ma dernière dépense.

À l'étape précédente, j'avais donc 109,50 € + 100 €, soit 209,50 €.

Or au départ j'avais le double de cette somme : j'avais donc $2 \times 209,50$ € soit 419 €).

Conclusion : j'avais 419 € au départ.

Remarque

Dans ce type de démarche, le traitement des informations se fait dans l'ordre inverse de leur apparition dans l'énoncé.

Méthode 2 : résolution d'une équation

Soit x la somme d'argent, en euros, que j'avais au départ.

On peut exprimer en fonction de x les informations données dans l'énoncé :

- j'ai d'abord dépensé la moitié de mon argent, puis 100 € ; ceci correspond, en euros, à une dépense égale à $\frac{x}{2} + 100$;
- j'ai ensuite dépensé le tiers de ce qui me restait : en euros, cette dépense est égale à

$$\frac{1}{3} \times \left(x - \left(\frac{x}{2} + 100 \right) \right) = \frac{1}{3} \times \left(x - \frac{x}{2} - 100 \right) = \frac{1}{3} \times \left(\frac{x}{2} - 100 \right);$$

- il me restait alors 73 € ; or à ce stade ma dépense était, en euros, égale à :

$$\frac{x}{2} + 100 + \frac{1}{3} \times \left(\frac{x}{2} - 100 \right) = \frac{x}{2} + 100 + \frac{x}{6} - \frac{100}{3} = \frac{3x}{6} + \frac{x}{6} + \frac{2}{3} \times 100 = \frac{4x}{6} + \frac{200}{3} = \frac{2x}{3} + \frac{200}{3},$$

ce qui signifie qu'il me restait :

$$x - \left(\frac{2x}{3} + \frac{200}{3} \right) = x - \frac{2x}{3} - \frac{200}{3} = \frac{x}{3} - \frac{200}{3}.$$

On en déduit que x est solution de l'équation : $\frac{x}{3} - \frac{200}{3} = 73$.

Pour la résoudre, on peut commencer par multiplier par 3 chacun des membres : $x - 200 = 3 \times 73 = 219$. Il suffit alors d'ajouter 200 à chacun des membres : $x = 219 + 200 = 419$.

On obtient ainsi 419 € comme somme initiale.

On peut vérifier :

- si je dépense la moitié de 419 €, il me reste la moitié de cette somme, soit 209,50 € ;
- si je dépense ensuite 100 €, il me reste 109,50 € ;
- le tiers de cette somme est égal à 36,50 € ;
- il me reste alors la différence 109,50 € – 36,50 € = 73 €, qui est bien la somme voulue.

Conclusion : j'avais 419 € au départ.

2) Résolution du deuxième problème

a) Résolution de ce problème par un raisonnement envisageable au cycle 3 de l'école élémentaire

Remarque

Ce problème nécessite de savoir que dans une fratrie de trois frères, on peut désigner chacun d'entre eux par l'une des expressions suivantes : le cadet, l'aîné et le plus jeune.

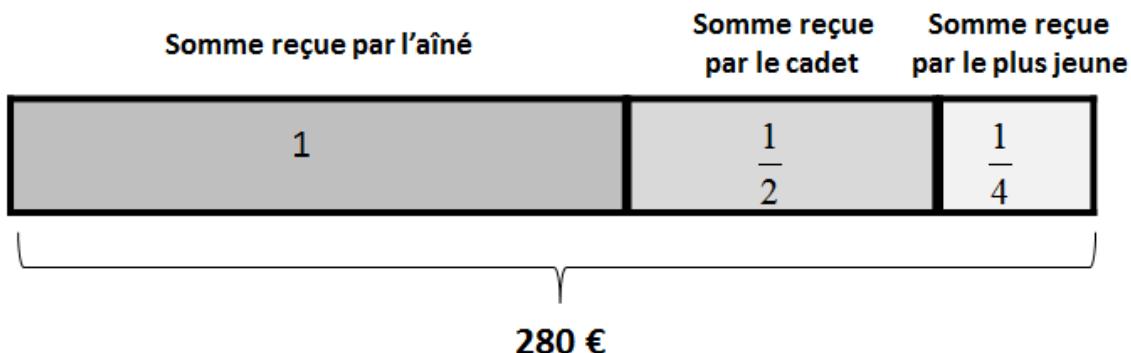
Méthode 1 : choix de la somme reçue par l'aîné comme somme unité

On représente alors la part de l'aîné par un rectangle d'aire de mesure 1 (en unité d'aire).

On représente ensuite les parts des deux autres frères de la manière suivante :

- la part du cadet doit être la moitié de celle de l'aîné, par un rectangle d'aire de mesure $\frac{1}{2}$ (en u.a.) ;
- la part du plus jeune doit être la moitié de celle du cadet, par un rectangle d'aire égale à la moitié de l'aire du rectangle précédent, soit une aire de mesure $\frac{1}{4}$ (en u.a.).

On obtient le diagramme suivant :

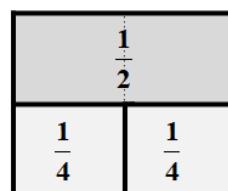


Remarque

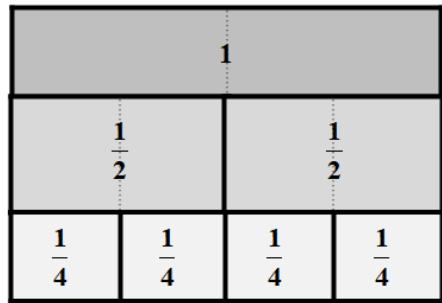
Sur les représentations, on a inscrit les mesures des aires.

On peut alors chercher combien de fois la part du plus jeune est contenue dans la somme totale. Pour cela, on peut utiliser les égalités suivantes :

$$\frac{1}{2} = 2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$



$$1 = 2 \times \frac{1}{2} = 4 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$



On en déduit que : $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 4 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 7 \times \frac{1}{4}$.

Autrement dit, la somme totale est égale à 7 fois la part du plus jeune.

La part du plus jeune peut donc être obtenue en divisant la somme totale par 7 :

$$\frac{280 \text{ €}}{7} = 40 \text{ €}.$$

On en déduit alors :

- la somme reçue par le cadet, soit le double de la somme reçue par le plus jeune, donc 80 € ;
- la somme reçue par l'aîné soit le double de la somme reçue par le cadet, donc 160 €.

La part du plus jeune est donc de 40 €, celle du cadet est donc de 80 € et celle de l'aîné de 160 €.

Méthode 2 : choix de la somme reçue par le plus jeune comme somme unité

On peut représenter cette somme (qui sera la plus petite reçue) par une surface arbitraire.

La part du plus jeune doit-être la moitié de celle du cadet. La part du cadet est donc le double de celle du plus jeune, et on peut la représenter comme ci-contre.

La part du cadet doit être la moitié de celle de l'aîné. La part de l'aîné est donc le double de celle du cadet, et on peut la représenter comme ci-contre.

Au total, la somme de 280 € peut donc être représentée selon 7 parts identiques.

Pour trouver la part du plus jeune, il suffit donc de diviser la somme totale par 7.

Comme $\frac{280 \text{ €}}{7} = 40 \text{ €}$, on peut donc dire que **la part du plus jeune est de 40 €**.

On en déduit que la part du cadet est de 80 € et celle de l'aîné est de 160 €.

On a bien $40 \text{ €} + 80 \text{ €} + 160 \text{ €} = 280 \text{ €}$.

Remarque

Le choix de l'unité a une influence sur la nature des nombres avec lesquels on fait des calculs : on a utilisé des fractions pour la méthode 1, et uniquement des entiers pour la méthode 2.

b) Résolution du problème par une méthode algébrique

Soit x la part en euros, reçue par l'aîné.

D'après l'énoncé :

- la part du cadet est égale à la moitié de celle de l'aîné, soit, en euros : $\frac{1}{2} \times x$;
- la part du plus jeune est égale à la moitié de celle reçue par le cadet, soit, en euros :

$$\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2} \times x \right) = \frac{1}{4} \times x.$$

Or la somme de leurs parts est égale à 280 €.

Cela se traduit par l'équation $x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x = 280$.

Cela donne $\frac{7}{4}x = 280$ ou encore $x = \frac{280 \times 4}{7} = 160$.

La part de l'aîné est donc de 160 €. On en déduit celle du cadet, 80 €, et la part du plus jeune, 40 €.

Remarque

En choisissant comme inconnue la part du plus jeune, on aurait obtenu l'équation $x + 2x + 4x = 280$ ou encore $7x = 280$, et donc $x = \frac{280}{7} = 40$. La part du plus jeune est donc de 40 €, puis on en déduit la part du cadet, 80 €, et la part de l'aîné, 160 €.

EXERCICE 3

1) Remplissage du carton par des boîtes cubiques identiques

a) Recherche des longueurs possibles de l'arête des boîtes cubiques

Les longueurs possibles de l'arête doivent être telles que leur mesure divise chacune des mesures des dimensions du carton, soit 60, 45 et 36. On cherche donc les diviseurs communs à 60, 45 et 36.

Une méthode pour déterminer les diviseurs communs à 60, 45 et 36

On recherche les diviseurs de chacun des trois nombres.

Pour cela, on essaie de diviser chacun d'eux par chacun des entiers compris entre 1 et sa racine carrée.

$60 = 1 \times 60 = 2 \times 30 = 3 \times 20 = 4 \times 15 = 5 \times 12 = 6 \times 10$ (en revanche 7 n'est pas un diviseur de 60)

$45 = 1 \times 45 = 3 \times 15 = 5 \times 9$ (en revanche, ni 6 ni 7 ne sont des diviseurs de 45)

$36 = 1 \times 36 = 2 \times 18 = 3 \times 12 = 4 \times 9 = 6 \times 6$.

On considère alors par exemple les diviseurs de 45 : 1 ; 3 ; 5 ; 9 ; 15 ; 45. On regarde pour chacun d'eux s'il est aussi diviseur de 36, puis de 60 : on conserve alors 1 et 3, et on exclut 5 (pas diviseur de 36), 9 (pas diviseur de 60), 15 (pas diviseur de 36) et 45 (pas diviseur de 36).

On en déduit que les diviseurs communs de 60, 45 et 36 sont 1 et 3.

Une autre méthode pour déterminer les diviseurs communs à 60, 45 et 36

La décomposition de ces trois nombres en facteurs premiers donne :

$$60 = 2^2 \times 3 \times 5 \quad 45 = 3^2 \times 5 \quad 36 = 2^2 \times 3^2$$

On cherche alors les nombres premiers communs aux 3 décompositions, en les affectant de la puissance la plus grande présente dans les trois décompositions : on en déduit que la décomposition en facteurs premiers de leur plus grand diviseur commun est 3, et donc que les seuls diviseurs communs à 60, 45 et 36 sont 1 et 3 (ce sont les seuls diviseurs de 3).

Conclusion

La mesure de la longueur de l'arête (en cm) étant strictement supérieure à 1, **la seule longueur possible pour l'arête d'une boîte cubique est 3 cm.**

b) Nombre de boîtes cubiques d'arête 3 cm dans le carton

On détermine le nombre de boîtes cubiques pour remplir, sans laisser de vide, respectivement une rangée dans la longueur, une rangée dans la largeur et une rangée dans la hauteur, en effectuant une division :

$$60 \text{ cm} = 20 \times 3 \text{ cm} ; \quad 45 \text{ cm} = 15 \times 3 \text{ cm} ; \quad 36 \text{ cm} = 12 \times 3 \text{ cm}.$$

Par multiplication, on en déduit le nombre maximal de boîtes cubiques qui peuvent être contenues dans le carton : $20 \times 15 \times 12 = 3600$.

Si on ne laisse pas vide, on peut donc ranger 3 600 boîtes cubiques de longueur d'arête 3 cm dans le carton.

2) Recherche des dimensions d'un carton permettant de ranger les boîtes cubiques

a) Dimensions possibles d'un carton parmi les propositions de l'énoncé

Pour que le carton soit rempli, sans laisser de vide, par des boîtes cubiques d'arête 2 cm, il faut et il suffit que 2 divise chacune des mesures en cm des dimensions du carton, donc que ces trois mesures soient des nombres pairs. 15 étant un nombre impair, la proposition $28 \times 15 \times 4$ ne convient pas.

Sachant que l'on veut au moins deux boîtes cubiques sur chaque arête du carton, chacune des dimensions du carton doit être supérieure à 2×2 cm, soit à 4 cm. Comme $2 \text{ cm} < 4 \text{ cm}$, la proposition $28 \times 30 \times 2$ ne convient pas.

Les deux derniers cartons ont des dimensions dont les mesures en cm sont paires et strictement supérieures à 2. Il reste à vérifier la troisième condition, à savoir que le nombre de boîtes dans le carton rempli, sans vide, doit être inférieur à 1 500.

Pour la proposition $10 \times 32 \times 28$:

$$10 \text{ cm} = 5 \times 2 \text{ cm}; 32 \text{ cm} = 16 \times 2 \text{ cm}; 28 \text{ cm} = 14 \times 2 \text{ cm}.$$

$$\text{On a: } 5 \times 16 \times 14 = 1\,120 \quad \text{et} \quad 1\,120 < 1\,500.$$

Le carton de dimensions $10 \text{ cm} \times 32 \text{ cm} \times 28 \text{ cm}$ peut donc être rempli sans vide par 1 120 boîtes cubiques : il convient.

Pour la proposition $16 \times 32 \times 24$:

$$16 \text{ cm} = 8 \times 2 \text{ cm}; 32 \text{ cm} = 16 \times 2 \text{ cm}; 24 \text{ cm} = 12 \times 2 \text{ cm}.$$

$$\text{On a: } 8 \times 16 \times 12 = 1\,536 \quad \text{et} \quad 1\,536 > 1\,500.$$

On a donc besoin de 1 536 boîtes pour remplir sans vide le carton de dimensions $16 \text{ cm} \times 32 \text{ cm} \times 24 \text{ cm}$: c'est trop.

Ainsi, seul le carton de dimensions $10 \text{ cm} \times 32 \text{ cm} \times 28 \text{ cm}$ convient.

b) Longueur de l'arête du plus grand carton cubique possible

On cherche la longueur de l'arête du plus grand carton cubique pouvant contenir des boîtes cubiques de 2 cm, de telle sorte qu'il y ait plus de 2 boîtes le long de chacune des arêtes, sans dépasser 1 500 boîtes au total dans le carton.

Méthode 1 : par essais et ajustements

On essaie avec une boîte dont l'arête a pour longueur 20 cm.

$20 \text{ cm} = 10 \times 2 \text{ cm}$; le nombre de boîtes contenues dans le carton est alors $10 \times 10 \times 10$, soit 1 000.

$1\,000 < 1\,500$, donc on peut essayer avec une arête plus longue.

On consigne les tentatives suivantes dans un tableau (sachant qu'on recherche une mesure en cm paire, pour avoir un nombre entier de boîtes d'arête 2 cm le long de chaque arête).

Longueur de l'arête	Nombre de boîtes le long d'une arête	Nombre de boîtes dans le carton	Décision
20 cm	10	$1\,000 < 1\,500$	On essaie une longueur plus grande.
30 cm	15	$15^3 = 3\,375 > 1\,500$	On essaie une longueur plus petite.
26 cm	13	$13^3 = 2\,197 > 1\,500$	On essaie une longueur plus petite.
22 cm	11	$11^3 = 1\,331 < 1\,500$	On essaie une longueur plus petite.

Cependant, on a déjà testé avec une arête égale à 20 cm. Comme il n'y a pas de nombre entier pair strictement compris entre 20 et 22, on a testé toutes les possibilités.

La plus grande arête possible pour le carton contenant les boîtes est donc 22 cm.

Méthode 2 : par résolution d'une inéquation

Soit a cm la longueur de l'arête du plus grand carton cubique répondant aux contraintes de l'énoncé. a doit être un nombre entier.

Par ailleurs on veut qu'il y ait au moins 2 boîtes d'arête 2 cm le long de chaque arête, donc il faut que : $a \text{ cm} \geq 2 \times 2 \text{ cm}$; il faut donc que $a \geq 4$.

On veut aussi qu'il ne rentre pas plus de 1500 boîtes cubiques d'arête 2 cm dans le carton ; or le long d'une arête de longueur a cm, le nombre de fois où il rentre 2 cm est égal à $\frac{a}{2}$ car a cm = $\frac{a}{2} \times 2$ cm.

Le nombre de boîtes d'arêtes 2 cm contenues dans le cube est alors égal à $\frac{a}{2} \times \frac{a}{2} \times \frac{a}{2} = \left(\frac{a}{2}\right)^3$.

Le nombre a doit donc être le plus grand entier supérieur à 4 solution de l'inéquation $\left(\frac{a}{2}\right)^3 \leq 1500$.

Méthode 2.1 : recherche à l'aide de la calculatrice de la racine cubique de 1 500 (c'est-à-dire le nombre dont le cube est égal à 1 500)

On utilise la touche $\sqrt[3]{}$ (ou la combinaison de touches permettant d'élever un nombre à la puissance $\frac{1}{3}$: $\boxed{\wedge 1/3}$ ou $\boxed{^{\wedge}(1\div 3)}$)

$\sqrt[3]{1500} \approx 11,4$ à 0,1 près, donc la plus grande valeur de a qui convient est telle que $\frac{a}{2} = 11$: on obtient $a = 22$, qui est bien un nombre pair, supérieur à 4.

La plus grande boîte cubique possible a donc 22 cm de longueur d'arête.

Méthode 2.2 : encadrement de 1 500 par les cubes de deux entiers pairs successifs

$12^3 = 1\ 728$ et $1\ 728 > 1\ 500$: un carton de longueur d'arête 24 cm (12×2 cm) contient 1 728 boîtes cubiques, ce qui ne convient pas puisqu'il y en a plus de 1 500.

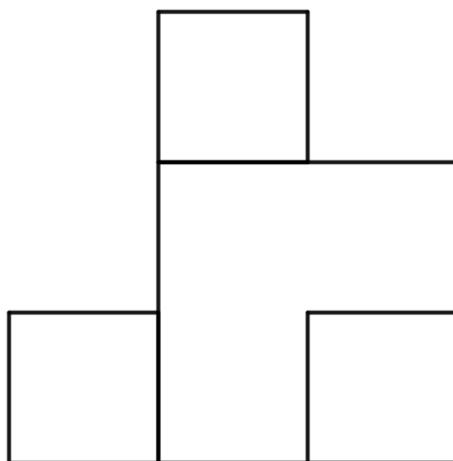
$11^3 = 1\ 331$ et $1\ 331 < 1\ 500$: un carton de longueur d'arête 22 cm (11×2 cm) contient 1 331 boîtes cubiques, donc moins de 1 500.

De plus 22 est bien un nombre pair strictement plus grand que 2.

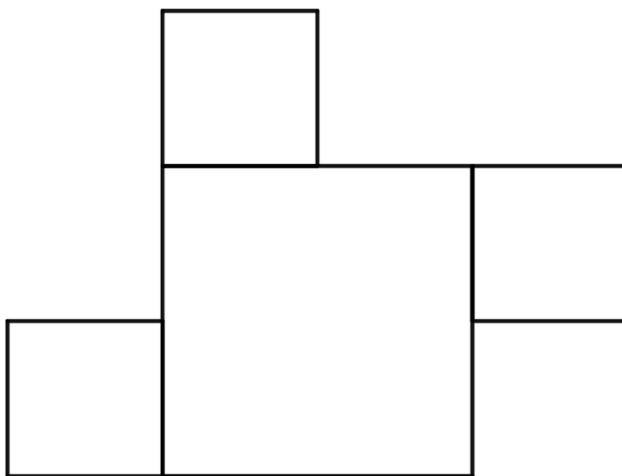
Donc **le plus grand carton cubique possible répondant aux contraintes de l'énoncé a 22 cm de longueur d'arête.**

EXERCICE 4

Tracé de la vue de droite en vraie grandeur



Tracé de la vue de derrière en vraie grandeur



Remarque

La principale difficulté pour le tracé de la vue de derrière provient du fait que, lors du changement de point de vue, les cubes qui étaient placés à la gauche de l'observateur sur la vue de devant deviennent situés à la droite de l'observateur sur la vue de derrière.

EXERCICE 5

1) Formules à choisir pour calculer différents prix

Les formules proposées diffèrent par l'utilisation ou non du signe « \$ ». Ce signe signifie que la ligne ou la colonne ne changera pas lors du copier-glisser, quand ce signe est placé devant la lettre ou le nombre indiquant respectivement colonne ou ligne. Ici le prix des stylos est fixe et donc la cellule où est indiqué ce prix doit être bloquée. La ligne seule peut aussi être bloquée quand on « étire la formule vers le bas », car on reste dans la même colonne « B ». Les réponses A), C) et E) ne conviennent pas car en « étirant vers le bas », la valeur de la ligne changera aussi pour la cellule B1 (ou \$B1).

Les formules B) $=\$B\$1*B6$ et D) $=B\$1*B6$, bloquent bien la cellule où est indiqué le prix.

Les réponses B) et D) sont les seules qui conviennent.

Remarque

D'autres possibilités comme $=\$B\$1*\$B6$ ou $=B\$1*\$B6$ conviennent aussi.

2) Formule pour construire une table de multiplication

Pour construire une table de multiplication, il faut par exemple multiplier les valeurs de la colonne B avec celles de la ligne 2 et placer ce produit dans la cellule correspondante. Pour le produit de 4 par 5, il faut le placer dans la cellule G6 et faire faire le produit du nombre placé en B6 par celui placé en G2. On voit donc qu'il faut bloquer la colonne B et la ligne 2.

En plaçant en G6 et en « tirant vers le bas et vers la droite » la formule $=$B3*C\2 , on permet de changer de ligne pour le premier facteur et de changer de colonne pour le deuxième.

La bonne réponse est la réponse B), soit : $=$B3*C\2 .

PROBLEME DE GÉOMÉTRIE AVEC TABLEUR ET SCRATCH

d'après un sujet de Besançon

A - Circuit « carré »

1) La mi-parcours

Méthode 1 : raisonnement numérique

Le circuit est composé de deux carrés de mesure de côté respectivement 105 m et 75 m donc un tour de circuit complet a une longueur de $4 \times 105\text{ m} + 4 \times 75\text{ m}$, soit 720 m. La mi-parcours se situe à 360 m du départ.

Or $360 = 105 + 105 + 75 + 75$, donc **la mi-parcours de situe au point E**.

Méthode 2 : raisonnement géométrique

Le parcours est constitué de deux carrés ABCG et CDEF. On sait que les diagonales sont des axes de symétries d'un carré. Ainsi, la mi-parcours sur un carré vaut deux côtés de ce carré. On peut donc en conclure que la mi-parcours se situe après avoir réalisé deux côtés du carré ABCG et deux côtés du carré CDEF.

Ainsi **la mi-parcours se situe au point E**.

2) La mi-parcours sur 10 tours de circuit

10 est un nombre pair. Si le coureur effectue 10 tours de circuit, la mi-parcours se situe alors au bout de 5 tours complets.

Ainsi **la mi-parcours se situe au point A**.

3) Les points F, C et G sont alignés

Méthode 1 : angle plat

On peut démontrer que les points F, C et G sont alignés en montrant que l'angle \widehat{FCG} est un angle plat.
Comme CDEF est un carré on a :

$$\widehat{FCG} = \widehat{FCD} + \widehat{DCG} = 90^\circ + \widehat{DCG}$$

D'après l'énoncé, on sait que les points B, C et D sont alignés dans cet ordre, donc $\widehat{DCB} = 180^\circ$.

Comme ABCG est un carré, on a :

$$\widehat{DCB} = \widehat{DCG} + \widehat{GCB} = \widehat{DCG} + 90^\circ$$

Donc $\widehat{DCG} + 90^\circ = 180^\circ$, on en déduit que $\widehat{DCG} = 90^\circ$.

Finalement $\widehat{FCG} = 90^\circ + \widehat{DCG} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$.

Les points F, C et G sont donc alignés.

Méthode 2 : droites confondues

D'après l'énoncé les points B, C et D sont alignés donc les droites (CD), (CB) et (BD) sont confondues.
Puisque CDEF est un carré, la droite (FC) est perpendiculaire à la droite (CD) et donc aussi perpendiculaire à la droite (BD).

Puisque ABCG est un carré, la droite (GC) est perpendiculaire à la droite (CB) donc perpendiculaire à la droite (BD).

Les droites (FC) et (GC) sont perpendiculaires à (BD) donc elles sont parallèles.

Or les droites (FC) et (GC) ont un point commun, le point C, donc ces deux droites sont confondues.

On en déduit que **les points F, C et G sont alignés**.

4) a) Durée, en secondes, d'un tour de circuit

Un tour de circuit a une longueur équivalente en ligne droite de 720 m et comporte 5 changements de direction (virages à angle droit).

Méthode 1 : utilisation de la propriété multiplicative de linéarité

Le coureur parcourt, en ligne droite, 6 m en 1 s, donc pour parcourir 720 m (c'est-à-dire 120 fois plus), il met 120 s.

Méthode 2 : utilisation du produit en croix

Distance en m	Durée en s
6	1
720	$\frac{720 \times 1}{6} = 120$

Il faut ajouter 5 s pour les changements de direction.

La durée, pour ce coureur, d'un tour de circuit est donc de 125 s.

4) b) Vitesse moyenne du coureur sur un tour de circuit

Méthode 1 : raisonnement direct

Ce coureur effectue donc un tour de circuit (de longueur 720 m) en 125 s, donc sa vitesse moyenne sur un tour de circuit est de :

$$\frac{720 \text{ m}}{125 \text{ s}} = 5,76 \text{ m/s.}$$

Méthode 2 : produit en croix

Distance en m	Durée en s
720	125
$\frac{720 \times 1}{125} = 5,76$	1

La vitesse moyenne du coureur sur un tour de circuit est de $\frac{720 \text{ m}}{125 \text{ s}} = 5,76 \text{ m/s.}$

B - Circuit « circulaire »

1) Mesure d'un tour complet de circuit en fonction de π

Un tour de circuit complet a une longueur de $2\pi \times OB + 2\pi \times O'B$.

Or $OB = 2 O'B$, donc $2\pi \times OB + 2\pi \times O'B = 2\pi \times 50 + 2\pi \times 25 = 150\pi$.

Un tour de circuit a une longueur de 150π m.

2) Demi périmètre du cercle C

Le périmètre du cercle C' vaut $2\pi \times O'B$.

Le périmètre du cercle C vaut $2\pi \times OB$.

Ainsi le demi périmètre du cercle C vaut $\frac{1}{2} \times (2\pi \times OB) = \pi \times OB$.

Or $OB = 2 O'B$ donc $\pi \times OB = \pi \times 2O'B = 2\pi \times O'B$ qui est le périmètre du cercle C'.

On en déduit que **le demi-périmètre du cercle C vaut le périmètre du cercle C'**.

3) Fraction de la longueur d'un tour de circuit

Méthode 1 : passage à la mesure

La boucle C à une longueur de $2\pi \times OB = 100\pi$ m.

Ainsi la boucle C représente $\frac{100\pi}{150\pi} = \frac{2}{3}$ d'un tour de circuit complet.

Méthode 2 : relation algébrique

La boucle C à une longueur de $2\pi \times OB = 2\pi \times 20'B = 4\pi \times O'B$. Le circuit à une longueur de $2\pi \times OB + 2\pi \times O'B = 2\pi \times 20'B + 2\pi \times O'B = 6\pi \times O'B$.

Ainsi la boucle C représente $\frac{4\pi \times O'B}{6\pi \times O'B} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ **d'un tour de circuit complet.**

4) Premier passage en B

Méthode 1 : calcul fractionnaire

La boucle C représente $\frac{2}{3}$ d'un tour de circuit complet.

Or le premier passage en B correspond à la moitié de la boucle C.,

Donc, au premier passage en B, le coureur a effectué $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ d'un tour de circuit complet.

Méthode 2 : méthode algébrique

Lorsque le coureur passe pour la première fois en B, il a parcouru une longueur de $\pi \times OB$, or le parcours total a une longueur de $2\pi \times OB + 2\pi \times O'B = 2\pi \times OB + 2\pi \times \frac{1}{2}OB = 3\pi \times OB$. Or

$$\frac{\pi \times OB}{3\pi \times OB} = \frac{1}{3}$$

Lors de son premier passage en B, le coureur a donc effectué $\frac{1}{3}$ du parcours.

Méthode 3 : passage à la mesure

Lorsque le coureur passe pour la première fois en B, il a parcouru une longueur de $\pi \times OB = 50\pi$ m, or le parcours total a une longueur de 150π m.

On a $\frac{50\pi}{150\pi} = \frac{1}{3}$.

Lors de son premier passage en B, le coureur a donc effectué $\frac{1}{3}$ du parcours.

Méthode 4 : raisonnement géométrique

On sait que le périmètre du cercle (C') est égal à la moitié du périmètre du cercle (C).

Le circuit se décompose alors en trois parties de même longueur : demi-périmètre de (C), périmètre de (C'), demi-périmètre de (C). Le demi-périmètre de (C) correspond alors au tiers du parcours.

Lors de son premier passage en B, le coureur a donc effectué $\frac{1}{3}$ du parcours.

C - Circuit « triangulaire »

1) Longueur L du parcours en fonction de AC

On a $L = 2BC + BD + 2CE + EF$.

Calcul de BC

Le triangle CBD est isocèle de sommet principal C, donc la hauteur issue de C est également la médiatrice de [BD], donc cette hauteur passe par A.

Le triangle CAB est donc rectangle en A.

Dans CAB le théorème de Pythagore donne $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

Or $AB = \frac{1}{2} \times 90$ m donc $BC = \sqrt{45^2 + AC^2} = \sqrt{2025 + AC^2}$.

Calcul de CE en fonction de BC

On a $CD = 3CE$ donc $CE = \frac{CD}{3} = \frac{BC}{3}$.

Calcul de EF

Les triangles BCD et CEF sont isocèles de sommet principal C et les angles en C sont de même mesure (car BCF et ECD sont alignés). Ainsi les triangles BCD et CEF sont semblables.

Or on sait que $CD = 3 CE$. Cette relation de proportionnalité reste valable pour les deux autres paires de côtés donc $BD = 3 EF$.

$$\text{On en déduit que } EF = \frac{BD}{3} = \frac{90}{3} = 30 \text{ m.}$$

Calcul de L en fonction de AC

$$\text{On a } L = 2BC + BD + 2CE + EF = 2BC + 90 + 2 \times \frac{BC}{3} + 30.$$

$$\text{On en déduit : } L = 120 + \frac{8}{3}BC = 120 + \frac{8}{3}\sqrt{2\ 025 + AC^2}.$$

2) Formule de cellule B2

Les formules 1 et 4 peuvent convenir.

Remarque

Dans la formule 1 « = 120 + 8/3 * RACINE(2 025 + \$A2^2) » le « \$ » ne change rien à la formule utilisée.

Dans la formule 2 : « = 120 + 8/3 * (45 + A2) » le nombre 45 vient de $\sqrt{2\ 025} = 45$ or la racine d'une somme n'est pas la somme des racines.

Dans la formule 3 : « = 120 + 8/3 * RACINE(2 025 + A\$2^2) » le « \$ » fixe la ligne, ainsi l'adresse de la cellule est fixée et le résultat sera constant.

3) Valeur obtenue en B8 avec la formule « = 120 + 8/3 * RACINE(2 025 + \$A\$2^2) » en B2

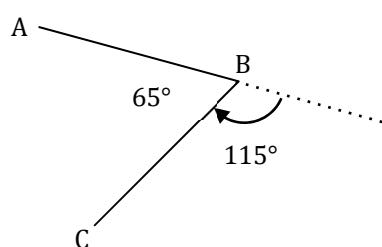
La cellule A2 est bloquée dans la formule donc toutes les cases apportent le même résultat 388,328.

4) Valeur approchée de la solution du problème posé

Il suffit de lire que pour $AC = 95$ on obtient une valeur proche de 400 pour L. Cette valeur est la plus proche de 400 dans le tableau.

5) Script SCRATCH

Attention, les angles à inscrire sont les supplémentaires des angles des triangles. Si l'on veut tracer la ligne brisée ABC ci-dessous avec scratch, il faut mentionner un angle de 115° car $180 - 65 = 115$ à la place du « ? » dans le morceau de script scratch suivant :



Ainsi toutes les valeurs en degré des angles dans le script doivent être de 115.

PROBLÈME D'ÉCLUSES d'après un sujet de Clermont

PARTIE A

1) Durée du voyage

La longueur du Canal du Midi est de 240 km de Toulouse à l'étang de Thau et la vitesse des embarcations y est limitée à 8 km/h, donc il faut au moins :

$$t_1 = \frac{240 \text{ km}}{8 \text{ km/h}} = 30 \text{ h.}$$

Sachant qu'il faut compter 35 min par écluse, pour passer les 63, il faut au moins :

$$t_2 = 63 \times 35 \text{ min} = 2205 \text{ min} = 36 \text{ h } 45 \text{ min.}$$

Pour effectuer ce trajet en bateau sans faire de pause, il faut au moins :

$$t_1 + t_2 = 30 \text{ h} + 36 \text{ h } 45 \text{ min} = 66 \text{ h } 45 \text{ min.}$$

2) Date de retour

S'ils ne veulent naviguer que pendant les heures de présence des éclusiers, ils ne devront pas naviguer plus de 8 h 30min par jour, correspondant aux 8 h 30min de présence journalière des éclusiers (on remarquera que même pour les écluses automatiques, on applique les heures d'ouverture).

$$8 \text{ h } 30\text{min} = 8,5 \text{ h}; 66 \text{ h } 45 \text{ min} = 66,75 \text{ h} \quad \text{et} \quad \frac{66,75}{8,5} \approx 7,85 \quad \text{soit} \quad \frac{66,75}{8,5} < 8.$$

Il faudra donc compter au maximum 8 jours de navigation pour l'aller soit environ 16 jours au total. Comme ils gardent 2 jours pour les visites, le voyage dure 18 jours.

S'ils partent le 27 juillet à 8 h, ils peuvent prévoir de revenir le 13 août.

3) Prix de la location

18 jours couvrent 3 semaines. Pour cette période, le prix est majoré de 27 %, ce qui revient à le multiplier par le coefficient d'augmentation 1,27.

Le prix de la location est : $3 \times 882 \text{ €} \times 1,27 = 3360,42 \text{ €.}$

PARTIE B

1) Étendue de la série

L'étendue de cette série est la différence entre l'altitude la plus haute et la plus basse soit :

$$193 \text{ m} - 2 \text{ m} = 191 \text{ m.}$$

Cette valeur permet d'obtenir le dénivelé du Canal.

2) Formule tableur et moyenne

a) Dans la cellule L2 on peut saisir la formule : « =B2+C2+D2+E2+F2+G2+H2+I2+J2+K2 » ou plus simplement, utiliser la fonction somme, « =SOMME(B2:K2) ».

b) La moyenne de cette série est obtenue en calculant :

$$\frac{(8 \times 10 + 3 \times 30 + 5 \times 50 + 3 \times 70 + 5 \times 90 + 5 \times 110 + 10 \times 130 + 10 \times 150 + 8 \times 170 + 6 \times 190)}{63} = \frac{6930}{63}$$

soit 110.

L'altitude moyenne du parcours est donc 110 m.

3) Altitude de l'écluse de Bram

Méthode 1 : avec la médiane de la série

S'il y a autant d'écluses dont l'altitude dépasse celle de Bram que d'écluses dont l'altitude est en dessous, c'est que son altitude est la médiane de la série. L'effectif étant 63, la médiane est la 32^e altitude lorsque les valeurs sont classées par ordre croissant.

Altitude	2	3	4	5	6	9	11	12	32	38	41	46	49	57	59	67	76	79	84
Effectif	1	1	1	1	1	1	1	1	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Altitude	86	91	92	97	102	106	109	114	116	122	123	126	127	130	134	137	139	141	145
Effectif	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	1	2
Altitude	147	148	151	154	159	163	166	170	173	175	176	180	185	189	193	TOTAL			
Effectif	1	1	1	1	3	1	1	2	2	1	1	1	1	2	2	63			

Cette 32^e valeur est 126 donc l'altitude médiane est 126 m et c'est bien l'altitude de l'écluse de Bram. La personne de l'office du tourisme a raison.

Méthode 2

L'écluse de Bram est à 126 m d'altitude. On compte toutes les écluses dont l'altitude est strictement inférieure à 126 : on trouve 31. Il y a donc 31 écluses dont l'altitude est strictement supérieure à 126 m, et la personne de l'office de tourisme a raison.

PARTIE C

1) Vitesse de l'eau à l'ouverture

L'arrondi à l'unité près de la vitesse de l'eau s'écoulant par la vantelle à l'instant de son ouverture :

$$v = \sqrt{2 \times 9,81 \text{ m/s}^2 \times (4,3 \text{ m} - 1,8 \text{ m})} = \sqrt{49,05 \text{ m}^2/\text{s}^2}$$

soit $v \approx 7 \text{ m/s}$.

2) Vitesse nulle

$$v = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2g(h-x)} = 0 \Leftrightarrow 2g(h-x) = 0 \Leftrightarrow h-x = 0 \Leftrightarrow h = x$$

La vitesse d'écoulement de l'eau sera nulle lorsque $x = h$.

Dans ce cas, le niveau de l'eau dans l'écluse est le même qu'en amont.

3) Lectures graphiques

On lit sur le graphique l'ordonnée du point de la courbe d'abscisse 3,4 m : 4 m/s.

Par lecture graphique, la vitesse d'écoulement est de 4 m/s lorsque la hauteur d'eau dans l'écluse est 3,4 m.

On lit sur le graphique l'abscisse du point de la courbe d'ordonnée 6,2 m/s : 2,2 m.

Par lecture graphique, la hauteur de l'eau dans l'écluse est de 2,2 m lorsque la vitesse de l'eau est 6,2 m/s.

PARTIE D

1) Calcul d'aire

L'aire exacte S , en m^2 , de la vantelle est :

$$S = \pi \times (30 \text{ cm})^2 = 900\pi \text{ cm}^2 = 0,09\pi \text{ m}^2$$

2) Débit moyen

Le débit moyen de cette vantelle durant le remplissage vaut :

$$q = 0,09\pi \text{ m}^2 \times 2,8 \text{ m/s} = 0,252\pi \text{ m}^3/\text{s}$$

soit $q \approx 0,792 \text{ m}^3/\text{s}$, arrondi au millième.

3) Durée de remplissage

Le volume de cette écluse est : $8,4 \text{ m} \times 30 \text{ m} \times 3 \text{ m} = 756 \text{ m}^3$.

La durée de remplissage s'obtient en divisant le volume par le débit :

$$\frac{756 \text{ m}^3}{0,252\pi \text{ m}^3/\text{s}} \approx 955 \text{ s.}$$

$$\text{Or } \frac{955}{60} \approx 15,9 \text{ donc } \frac{955}{60} > 15.$$

Il faudra donc patienter plus de 15 minutes pour le remplissage d'une écluse de capacité 756 m³.

PARTIE E

On sait que la droite (AB) est perpendiculaire aux bords grisés de l'écluse. L'angle \widehat{PAB} est donc complémentaire de l'angle de 55° entre le bord et la porte.

$$\widehat{PAB} = 90^\circ - 55^\circ = 35^\circ.$$

On appelle H le pied de la hauteur issue de P dans le triangle APB.

Comme le triangle APB est isocèle en P, la hauteur (PH) est aussi médiane. H est donc milieu de [AB].

Comme le triangle AHP est rectangle en H, on a :

$$\cos(35^\circ) = \frac{5,8 \text{ m} \div 2}{AP}$$

$$\text{donc } AP = \frac{2,9 \text{ m}}{\cos(35^\circ)} \approx 3,54 \text{ m.}$$

La longueur des portes au cm près est 3,54 m.

PROBLÈME DE DÉNOMBREMENT ET MESURE DE GRANDEURS d'après un sujet de Toulouse

A - Système d'immatriculation

1) Nombre d'immatriculations théoriques possibles

Soit A l'ensemble des couples de deux lettres formant les deux premières lettres d'une plaque d'immatriculation. Comme il y a 26 lettres dans l'alphabet français, le nombre d'éléments de A, appelé cardinal de A et noté $\text{card}(A)$, vaut : $\text{card}(A) = 26^2$.

Soit B l'ensemble des triplets de 3 chiffres formant les 3 chiffres d'une plaque d'immatriculation. Comme il y a 10 chiffres et qu'on élimine le triplet (0 ; 0 ; 0), $\text{card}(B) = 10^3 - 1$.

Soit C l'ensemble des couples de deux lettres formant les deux dernières lettres d'une plaque d'immatriculation. Comme il y a 26 lettres dans l'alphabet français, $\text{card}(C) = 26^2$.

Une plaque d'immatriculation peut être représentée par un triplet (a ; b ; c) où a appartient à A, b à B et c à C.

Le nombre N de plaques d'immatriculations vaut donc :

$$N = \text{card}(A) \times \text{card}(B) \times \text{card}(C) = 26^2 \times (10^3 - 1) \times 26^2 = 456\,519\,024.$$

Remarque

On utilise la propriété multiplicative suivante :

l'ensemble des couples (a ; b) formés avec a un élément de A et b un élément de B se note $A \times B$ et $\text{card}(A \times B) = \text{card}(A) \times \text{card}(B)$ avec comme cas particulier : $\text{card}(A \times A) = (\text{card}(A))^2$.

2) Nombre d'immatriculations dont tous les caractères sont différents

Soit A' l'ensemble des couples de deux lettres **différentes** formant les deux premières lettres d'une plaque d'immatriculation.

Il y a 26 choix possibles pour la première lettre, et il ne reste plus que 25 choix possibles pour la seconde lettre, différents du choix de la première lettre, soit 26×25 couples de lettres distinctes, soit $\text{card}(A') = 26 \times 25$.

Soit B' l'ensemble des triplets de 3 chiffres **différents** formant les 3 chiffres d'une plaque d'immatriculation. Comme il y a 10 chiffres, on a 10 choix possibles pour le premier chiffre ; il ne reste plus que 9 choix possibles pour le second (car il faut enlever le choix fait pour le 1^{er} chiffre) et 8 choix possibles pour le 3^{ème} (car il faut enlever les 2 premiers nombres choisis). Donc $\text{card}(B') = 10 \times 9 \times 8$.

Soit C' l'ensemble des couples de deux lettres **différentes** entre elles et des lettres utilisées pour les deux premières lettres de l'immatriculation formant les deux dernières lettres d'une plaque d'immatriculation. Pour le choix de la première de ces lettres il ne reste plus que 24 choix possibles (car il faut éliminer les 2 lettres choisies au début de la plaque) et pour la seconde lettre il ne reste plus que 23 choix possibles car il faut éliminer encore le choix de l'avant-dernière lettre de la plaque. Donc $\text{card}(C') = 24 \times 23$.

Le nombre N' de plaques composées d'éléments distincts entre eux vaut :

$$N' = \text{card}(A' \times B' \times C') = \text{card}(A') \times \text{card}(B') \times \text{card}(C')$$

$$\text{soit } N' = 26 \times 25 \times 10 \times 9 \times 8 \times 24 \times 23 = 258\,336\,000.$$

Remarque

On pourrait utiliser des arbres de dénombrements pour reformuler les solutions précédentes.

B - Alcoolémie

1) Alcoolémie 30 minutes après deux verres de vin à 12 %

a) d'une femme de 55 kg

On convertit le volume de deux verres en mL.

$$V = 2 \times 1 \text{ dL} = 2 \times 0,1 \text{ L} = 2 \times 0,1 \times 1000 \text{ mL} = 200 \text{ mL.}$$

On calcule A avec la formule donnée et les données suivantes :

$$p = 12 \% = 0,12 ;$$

K = 0,6 car il s'agit d'une femme ;

$$m = 55 \text{ kg} ;$$

$$\text{donc } A = \frac{V \times p \times 0,8}{K \times m} = \frac{200 \times 0,12 \times 0,8}{0,6 \times 55} \text{ g/L} \quad \text{soit } A \approx 0,58 \text{ g/L.}$$

L'alcoolémie arrondie au centième, 30 minutes après la consommation (à jeun) de 2 verres (1 dL chacun) de vin à 12 % d'alcool par volume d'une femme de 55 kg est d'environ 0,58 g/L.

b) d'un homme de 75 kg

On a toujours V = 200 mL.

On calcule A avec la formule donnée et les données suivantes :

$$p = 12 \% = 0,12 ;$$

K = 0,7 car il s'agit d'un homme ;

$$m = 75 \text{ kg} ;$$

$$\text{donc } A = \frac{V \times p \times 0,8}{K \times m} = \frac{200 \times 0,12 \times 0,8}{0,7 \times 75} \text{ g/L} \quad \text{soit } A \approx 0,37 \text{ g/L.}$$

L'alcoolémie arrondie au centième, 30 minutes après la consommation (à jeun) de 2 verres (1 dL chacun) de vin à 12 % d'alcool par volume d'un homme de 75 kg est d'environ 0,37 g/L.

2) Étude de la feuille de calcul de l'alcoolémie

a) Formule à saisir en C3

On prend la formule du taux d'alcoolémie $A = \frac{V \times p \times 0,8}{K \times m}$.

Dans un tableur, quand on recopie vers la droite en restant ici sur la ligne 3, on change le nom de colonne (exprimée par une lettre). Par conséquent si on ne veut pas qu'il y ait changement pour les cellules fixes (où sont données les informations), il faut utiliser le signe « \$ » qui bloque la ligne ou la colonne ou les deux (ici il faut bloquer toute la cellule pour C5, C6 et C7 ou seulement la colonne).

On a alors trois solutions possibles.

Solution 1

En identifiant les cases correspondant aux différentes valeurs des variables en jeu, on obtient la formule suivante à saisir en C3 : « =C2*\$C\$7*0,8/(\$C\$5*\$C\$6) ».

Solution 2

On identifie les cases correspondant aux différentes valeurs des variables en jeu, on obtient la formule suivante à saisir en C3 : « =C2*\$C7*0,8/(\$C5*\$C6) ».

Solution 3

On peut aussi utiliser les valeurs des cellules, ce qui donnera une formule valable seulement pour une femme de 55 kg ayant bu de la bière à 5 % d'alcool. On obtient la formule suivante à saisir en C3 : « =C2*0,05*0,8/(0,6*55) ».

b) Formule à saisir si on change les valeurs des cellules C5, C6, C7

Pour la formule des solutions 1 et 2, si on change les valeurs des cellules C5, C6 et C7, cela ne changera rien car la formule fait référence au contenu des cellules C5, C6 et C7.

Cependant, la formule de la solution 3, ne sera plus valable et il faudra la changer en une de celle des solutions 1 ou 2.

3) Association représentations graphiques et différents cas

a) Représentations des différents cas avec justifications

D'après la question 1) a), pour une femme de 55 kg ayant consommé 2 dL à 12 % d'alcool, l'alcoolémie est environ 0,6 g/L. La seule courbe qui donne, pour l'abscisse 2, une ordonnée d'environ 0,6, est (d_1).

D'après la question 1) b), pour un homme de 75 kg ayant consommé 2 dL à 12 % d'alcool, l'alcoolémie est environ 0,4 g/L. La seule courbe qui donne, pour l'abscisse 2, une ordonnée d'environ 0,4, est (d₂).

D'après la première colonne du tableau de 2), pour une femme de 55 kg ayant consommé 1 dL à 5 %, l'alcoolémie est environ 0,12 g/L. La seule courbe qui donne, pour l'abscisse 2, une ordonnée d'environ 0,12, est (d₃).

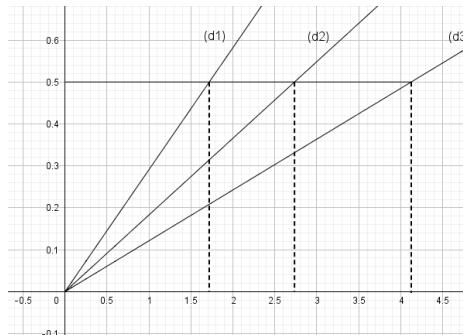
La dernière courbe (d₄) correspond au dernier cas, un homme de 75 kg ayant consommé 1 dL à 5 % d'alcool.

b) Volume maximum sans être verbalisé

On trace la droite d'équation $y = 0,5$, droite parallèle à l'axe des abscisses passant par le point de coordonnées (0 ; 0,5) et on lit les abscisses des points d'intersection de cette droite et des droites (d₁), (d₂), (d₃) (et (d₄)).

Par lecture graphique, pour une ordonnée de 0,5 (l'alcoolémie maximum autorisée), l'abscisse correspondant à la consommation maximum autorisée en dL est :

- pour (d₁) : 1,7 dL pour une femme de 55 kg ayant consommé du vin à 12 % d'alcool ;
- pour (d₂) : 2,7 dL pour un homme de 75 kg ayant consommé du vin à 12 % d'alcool ;
- pour (d₃) : 4,1 dL pour une femme de 55 kg ayant consommé de la bière à 5 % d'alcool ;
- pour (d₄) : 6,5 dL pour un homme de 75 kg ayant consommé de la bière à 5 % d'alcool.



Résumé dans le tableau suivant :

	Bière à 5% d'alcool par volume	Vin à 12% d'alcool par volume
Femme	Représentation (d ₃) : 4,1 dL	Représentation (d ₁) : 1,7 dL
Homme	Représentation (d ₄) : 6,5 dL	Représentation (d ₂) : 2,7 dL

Remarque

On aurait aussi pu exprimer dans chaque cas la fonction qui au volume absorbé v (en dL) associe l'alcoolémie calculée. Par exemple, pour du vin à 12% d'alcool par volume pour une femme de 55 kg, la fonction A_1 a pour expression :

$$A_1(v) = \frac{0,12 \times 0,8}{0,6 \times 55} v \times 100 = \frac{16}{55}v$$

Il suffit ensuite de lire l'image obtenue pour une valeur de v . Pour $v = 1$ (dL), on obtient une alcoolémie de $\frac{16}{55}$ g/L soit environ 0,3 g/L ce qu'on peut lire sur la représentation (d₁).

c) Durée d'attente pour une baisse de l'alcoolémie

L'alcoolémie doit passer de 0,65 g/L à 0,5 g/L soit une baisse de 150 mg/L dans une durée de t min. La vitesse d'alcoolémie baisse de 18 mg/L par heure soit une vitesse de $\frac{18}{60}$ mg/L par minute.

On obtient l'équation $\frac{150}{t} = \frac{18}{60}$ donc $t = 150 \times \frac{60}{18} = 500$.

Il faut attendre au moins 500 minutes soit au moins 8 h 20 min.

C - Vitesses

1) Etude dans différents cas du changement de vitesse à 80 km/h

a) Perte de temps sur 20 km

La durée du trajet de 20 km effectué à 80 km/h est de 15 min (ou $\frac{1}{4}$ h).

La durée du même trajet effectué à 90 km/h est de $\frac{20 \text{ km}}{90 \text{ km/h}}$, soit $\frac{2}{9}$ h

ou encore $\frac{2}{9} \times 60 \text{ min}$ donc 13 min + $\frac{1}{3}$ min c'est-à-dire 13 min 20 s.

La perte de temps dans le cas cité est donc de 1 min 40 s (15 min - 13 min 20 s).

b) Données différentes dans deux journaux

Le même calcul pour 19,8 km donne une différence de durée du trajet de 1 min 39,5 s.

Ces résultats sont proches de celui d'Ouest-France. La faible différence est-elle liée au temps d'accélération pour arriver à la vitesse maximum et le temps de décélération pour l'arrêt pour lesquels la vitesse n'est pas constante ?

Le journaliste du Progrès ne précise pas les conditions du trajet mais son résultat ("jusqu'à une minute de différence") n'est pas tout à fait celui trouvé par le calcul (1 min 40 s). Est-ce que dans les 20 km du trajet, le journaliste tient compte du démarrage et de la montée en puissance de la voiture, des parties du trajet avec limitation inférieure à 80 km (par exemple lors de la traversée d'agglomérations limitée à 50 km/h). Finalement le journaliste n'appliquerait le différentiel entre 80 km/h et 90 km/h que sur les seules parties du trajet où la vitesse est limitée à 90 km/h. Ceci n'est pas précisé.

Les trajets n'ont pas été réalisés dans les conditions de vitesse moyenne 80 km/h et 90 km/h.

Pour les journalistes du Midi Libre ou de La Montagne, la longueur du parcours n'étant pas précisée, l'indication de durée de parcours n'a donc aucun sens.

L'intention qui semble commune aux quatre journalistes est d'indiquer que la perte de temps est très faible.

c) Distance parcourue par le journaliste de la Montagne

Méthode 1

Notons d la mesure en km de la distance parcourue par le journaliste.

La mesure en h de la durée du parcours à 80 km/h est donnée par : $t_1 = \frac{d}{80}$.

À 90 km/h, la mesure en h de la durée du parcours est donnée par : $t_2 = \frac{d}{90}$.

On calcule la différence des deux temps que l'on sait être de 4 s soit $\frac{4}{3600}$ h.

On a donc d'une part $t_1 - t_2 = \frac{d}{80} - \frac{d}{90} = \frac{10d}{7200} = \frac{d}{720}$

et d'autre part $t_1 - t_2 = \frac{4}{3600} = \frac{1}{900}$ soit $\frac{d}{720} = \frac{1}{900}$ d'où $d = \frac{72}{90} = 0,8$.

La distance parcourue par le journaliste est donc de 0,8 km soit 800 m.

Méthode 2

D'après la question 1) a), sur un trajet de 20 km, la perte de temps est de 1 min 40 s soit 100 s. À vitesses constantes, la différence de temps est proportionnelle à la distance parcourue.

4 s représente une distance de $\frac{20 \text{ km}}{100 \text{ s}} \times 4 \text{ s}$, soit 0,8 km ou **800 m**.

Sur 800 m parcourus, le journaliste a sans doute peu roulé à la vitesse maximum autorisée.

Le journaliste tire une conclusion générale d'une expérimentation où la différence de vitesse maximale s'est faite sur quelques centaines de mètres.

Sa conclusion est donc orientée et pas objectivement généralisable sur des distances plus longues.

2) Vitesse moyenne sur un trajet aller-retour

La durée du trajet est donnée par la formule : $\frac{\text{distance}}{\text{vitesse}}$

soit pour le trajet aller : $\frac{30 \text{ km}}{70 \text{ km/h}} = \frac{30}{70} \text{ h}$ et pour le trajet retour : $\frac{30 \text{ km}}{30 \text{ km/h}} = 1 \text{ h}$.

La vitesse moyenne V sur le trajet aller-retour est donc égale à : $V = \frac{\text{distance totale}}{\text{durée totale}}$;

soit $V = \frac{2 \times 30 \text{ km}}{\left(\frac{30}{70} + 1\right) \text{ h}} = \frac{60}{\frac{3}{7} + \frac{7}{7}} \text{ km/h} = \frac{60}{\frac{10}{7}} \text{ km/h} = \frac{60 \times 7}{10} \text{ km/h} = 42 \text{ km/h}$.

La vitesse moyenne sur l'ensemble du trajet est égale à 42 km/h.

PROBLÈME DE GÉOMÉTRIE, ÉQUATIONS ET ARITHMÉTIQUE d'après un sujet de Versailles

A - Un espace de jeu aménagé

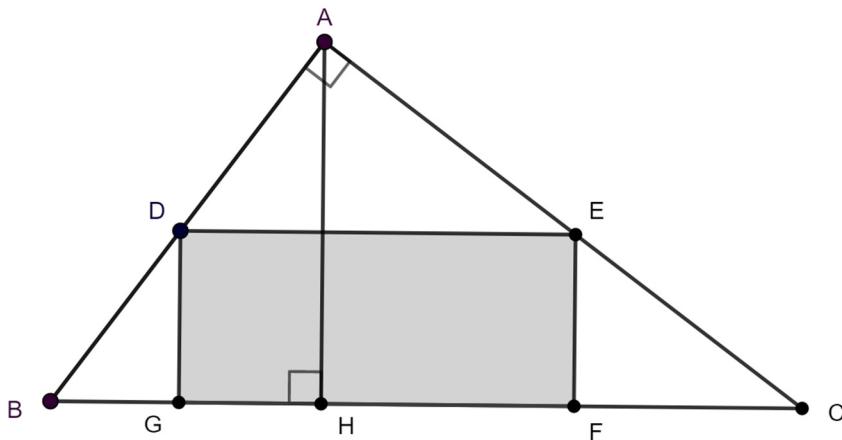
1) Calcul de la longueur BC en mètres

Le théorème de Pythagore dans le triangle ABC, rectangle en A, donne :
 $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

Ainsi : $BC^2 = (6 \text{ m})^2 + (8 \text{ m})^2 = 36 \text{ m}^2 + 64 \text{ m}^2 = 100 \text{ m}^2$.

On en déduit : **BC = 10 m.**

2) Calcul de la longueur AH



Méthode 1

On calcule l'aire du triangle ABC de deux manières différentes.

$$\text{Aire (ABC)} = \frac{AB \times AC}{2} = \frac{6 \text{ m} \times 8 \text{ m}}{2} = \frac{48 \text{ m}^2}{2} = 24 \text{ m}^2$$

$$\text{Aire (ABC)} = \frac{AH \times BC}{2} = \frac{10 \text{ m} \times AH}{2} = 5 \text{ m} \times AH.$$

$$\text{D'où } 5 \text{ m} \times AH = 24 \text{ m}^2, \quad \text{et donc } AH = \frac{24 \text{ m}^2}{5 \text{ m}} = 4,8 \text{ m.}$$

Donc **AH = 4,8 m.**

Méthode 2

On utilise des relations trigonométriques dans les triangles rectangles ABH et ABC.

Dans le triangle rectangle ABH rectangle en H, $AH = AB \times \sin \widehat{ABH}$.

$$\text{Or } \widehat{ABH} = \widehat{ABC}, \text{ et, dans le triangle rectangle ABC rectangle en A, } \sin \widehat{ABC} = \frac{AC}{BC} = \frac{8 \text{ m}}{10 \text{ m}} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}.$$

$$\text{Par conséquent, } AH = AB \times \sin \widehat{ABC} = 6 \text{ m} \times \frac{4}{5} = \frac{24}{5} \text{ m} = 4,8 \text{ m.} \quad \text{D'où } \mathbf{AH = 4,8 m.}$$

3) Expression de DE et DG en fonction de x

Remarque

Pour alléger la rédaction, on assimile dans la suite la longueur AD et sa mesure x exprimée en mètres. On s'autorisera donc à écrire $AD = x$, au lieu de $AD = x \text{ m.}$ On fera de même pour les autres longueurs intervenant dans l'exercice.

DEFG est un rectangle, donc ses côtés opposés sont parallèles : la droite (DE) est parallèle à la droite (GF), donc à la droite (BC).

Les points A, D et B sont alignés, les points A, E et C sont alignés, et les droites (DE) et (BC) sont parallèles.

Ainsi d'après le théorème de Thalès, appliqué aux triangles ADE et ABC, on a l'égalité suivante : $\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC}$.

Ainsi, quelle que soit la valeur de x entre 0 et 6, $\frac{x}{6} = \frac{DE}{10}$, et on en déduit que $DE = \frac{10 \times x}{6} = \frac{10}{6}x$.

DEFG est un rectangle donc ses côtés consécutifs sont perpendiculaires, donc (DG) est perpendiculaire à (GF), et donc à (BC).

Les droites (DG) et (AH) sont perpendiculaires à la droite (BC), elles sont donc parallèles entre elles.

Les points B, D et A sont alignés, les points B, G et H sont alignés, et les droites (DG) et (AH) sont parallèles.

Ainsi d'après le théorème de Thalès, appliqué aux triangles BDG et BAH, on a l'égalité suivante : $\frac{BD}{BA} = \frac{DG}{AH}$,

et donc, quelle que soit la valeur de x comprise entre 0 et 6, $\frac{6-x}{6} = \frac{DG}{4,8}$.

Ainsi $6 \cdot DG = 4,8 \times (6 - x)$ d'où $6 \cdot DG = 4,8 \times 6 - 4,8x$.

On en déduit que, quel que soit le nombre x compris entre 0 et 6, $DG = 4,8 - 0,8x$

4) Aire du rectangle DEFG en fonction de x

Aire (DEFG) = $DE \times DG$.

Ainsi, en utilisant les expressions calculées à la question 3), on obtient, quel que soit le nombre x compris

entre 0 et 6, Aire (DEFG) = $\frac{10}{6}x \times (4,8 - 0,8x)$.

En développant cette expression on obtient :

$$\text{Aire (DEFG)} = \frac{10}{6}x \times (4,8 - 0,8x) = \frac{48}{6}x - \frac{8}{6}x^2 = 8x - \frac{4}{3}x^2.$$

Quel que soit le nombre x compris entre 0 et 6, Aire (DEFG) = $8x - \frac{4}{3}x^2$.

5) Autre expression de l'aire du rectangle DEFG : $\frac{4}{3}(9 - (x - 3)^2)$

En développant l'expression visée, on obtient, quel que soit x compris entre 0 et 6,

$$\begin{aligned} \frac{4}{3}(9 - (x - 3)^2) &= \frac{4}{3}(9 - (x^2 - 2 \times 3 \times x + 3^2)) = \frac{4}{3}(9 - (x^2 - 6x + 9)) \\ &= \frac{4}{3}(9 - x^2 + 6x - 9) = \frac{4}{3}(6x - x^2) = \frac{4 \times 6}{3}x - \frac{4}{3}x^2 = \frac{24}{3}x - \frac{4}{3}x^2 = 8x - \frac{4}{3}x^2. \end{aligned}$$

Ainsi on retrouve bien l'expression calculée à la question 4) : Aire (DEFG) = $8x - \frac{4}{3}x^2$.

Donc, quel que soit x compris entre 0 et 6, Aire (DEFG) = $\frac{4}{3}(9 - (x - 3)^2)$.

6) Valeur de x pour laquelle l'aire de DEFG est maximale et valeur de cette aire

Quel que soit le nombre x compris entre 0 et 6, $(x - 3)^2$ est toujours un nombre positif.

La valeur de $9 - (x - 3)^2$, et donc celle de l'aire de DEFG, est donc maximale lorsque $(x - 3)^2$ est le plus petit possible, c'est-à-dire quand $(x - 3)^2 = 0$.

Ceci est vérifié lorsque $x - 3 = 0$, donc l'aire est maximale pour $x = 3$.

Alors Aire(DEFG) = $\frac{4}{3} \times (9 - 0) = 12$. Donc l'aire de DEFG est égale à **12 m²**.

B - Une course au trésor

Le plan est à l'échelle $\frac{1}{100}$ donc 1 cm sur le plan représente 100 cm soit 1m dans la réalité.

Indication 1

Le trésor est à moins de 3 m de la clôture sud du terrain de jeu qu'on représente par la droite (IJ). On sait aussi qu'il est à l'intérieur du terrain de jeu.

On trace la parallèle (KM) à (IJ), telles que les droites soient distantes de 3 cm (3 m dans la réalité).

La zone est alors comprise entre ces deux droites parallèles, (KM) étant exclue.

Indication 2

Le trésor est à moins de 8 m du centre du bac à sable.

Le centre du rectangle DEFG est le point d'intersection de ses diagonales. On l'appelle N.

La zone concernée est alors à l'intérieur du cercle de centre N et de rayon 8 cm (8 m dans la réalité).

Indication 3

Le trésor est à égale distance de la balançoire L et du toboggan T.

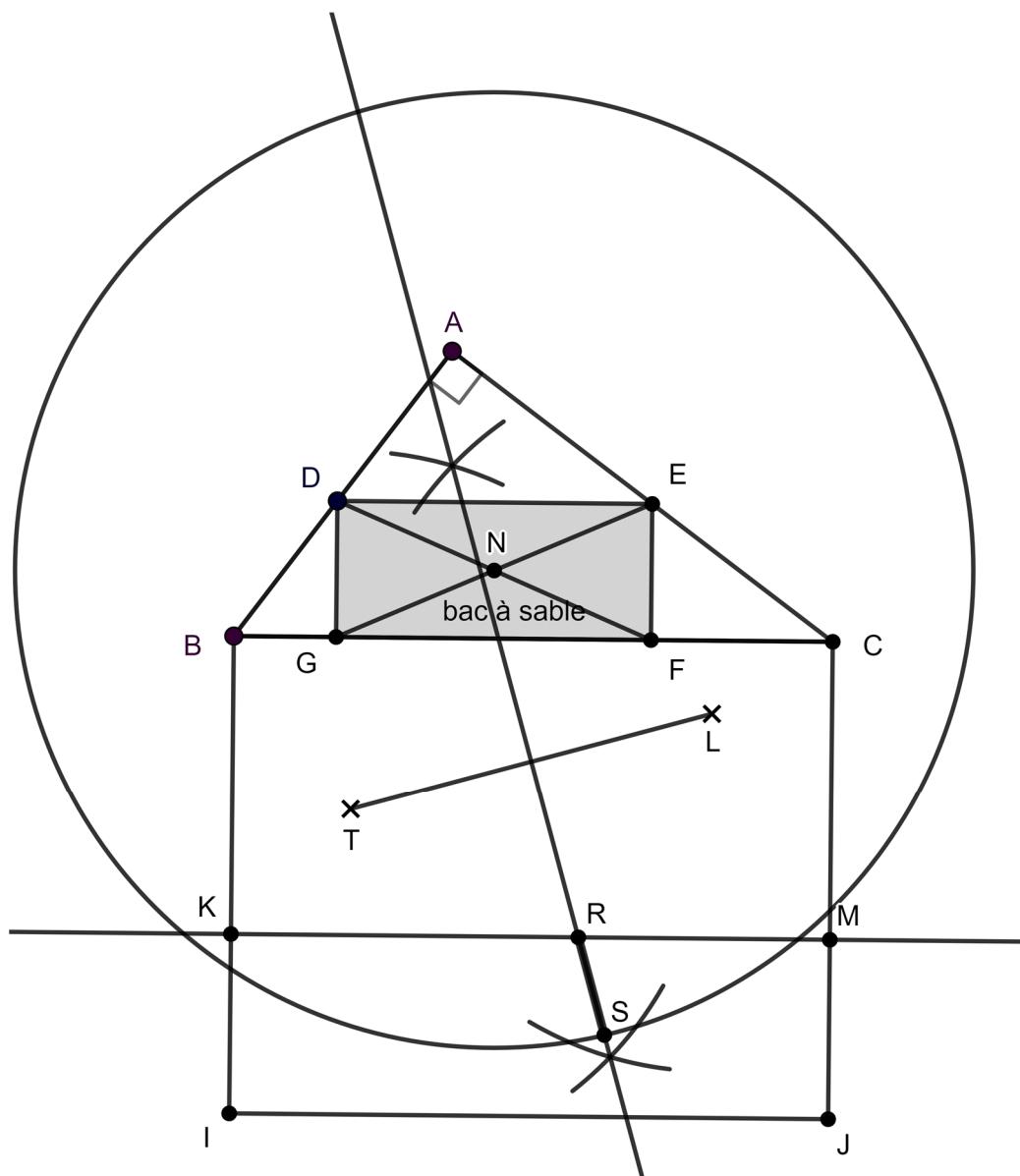
On en déduit que le trésor appartient à la médiatrice du segment [LT].

On appelle R et S les intersections de cette médiatrice avec respectivement (KM) et (IJ).

Le trésor se trouve sur le segment [RS] privé de ses extrémités.

Remarques

- On a exclu les extrémités du segment [RS], car on a interprété « moins de 8 m » et « moins de 3 m » comme des relations strictes. Si on les interprète au sens large, alors on conserve les points R et S.
- L'échelle de la figure ci-dessous a été réduite pour des raisons de mise en page ($\frac{1}{125}$ au lieu de $\frac{1}{100}$).



C - Le goûter au centre de loisirs

1) Nombre de sachets à ouvrir et nombre de bonbons restant dans le dernier sachet

Il faudra $72 \times 4 = 288$ bonbons pour que chaque enfant ait 4 bonbons.

Pour connaître le nombre de sachets de 35 bonbons à ouvrir, on effectue la division euclidienne de 288 par $35 : 288 = 35 \times 8 + 8$, avec $8 < 35$.

On aura donc besoin de 8 sachets complets et un supplémentaire où on ne prendra que 8 bonbons.

Ainsi le directeur doit ouvrir **9 sachets de bonbons**.

$$35 - 8 = 27.$$

Donc **il restera 27 bonbons dans le 9^{ème} sachet**.

2) Nombre de paquets de biscuits

Méthode 1

Pour que le directeur puisse distribuer le même nombre de biscuits à tous les élèves, sans qu'il ne reste aucun paquet entamé, il faut que :

- le nombre de biscuits distribués soit un multiple de 72 (nombre d'élèves) ;
- le nombre de biscuits distribués soit un multiple de 30 (il ne reste pas de paquets entamés).

Le nombre de biscuits distribués doit donc être un multiple commun à 72 et 30.

Calculons le plus petit commun multiple (PPCM) de 72 et 30.

Pour cela, décomposons 72 et 30 en produit de facteurs premiers.

$$72 = 2^3 \times 3^2$$

$$30 = 2 \times 3 \times 5$$

$$\text{d'où PPCM } (72, 30) = 2^3 \times 3^2 \times 5 = 360.$$

Le nombre minimum de biscuits à utiliser est donc 360.

Cela correspond à 5 biscuits par enfant ($360 : 72 = 5$) et **12 paquets à ouvrir** ($360 : 30 = 12$).

Remarque

Il n'y a pas d'autre possibilité puisque tout multiple commun à 72 et 30 est multiple de 360.

720 serait le multiple suivant, mais le directeur a acheté seulement 600 biscuits ($20 \times 30 = 600$).

Méthode 2

On écrit la suite des multiples de 30 (qui correspond aux paquets de biscuits) jusqu'à 30×20 et la suite des multiples de 72 (qui correspond aux biscuits donnés à chaque enfant).

$$30, 60, 90, 120, 150, 180, 210, 240, 270, 300, 330, \mathbf{360}, 390, 420, 450, 480, 510, 540, 570, 600.$$

$$72, 144, 216, 288, \mathbf{360}, 432, 504, 576.$$

Seul 360 apparaît dans ces deux listes de nombres.

$$360 : 30 = 12.$$

L'enseignant devrait ouvrir **12 paquets**.

3) Nombre de pochettes-goûter possible

Calculons le nombre total de biscuits : $24 \times 35 = 840$.

Calculons le nombre total de bonbons : $20 \times 30 = 600$.

Pour qu'il n'y ait pas de reste, il faut que le nombre de pochettes soit un diviseur à la fois du nombre total de biscuits, 840, et du nombre total de bonbons, 600.

Pour que chaque enfant puisse avoir une pochette, il faut donc trouver un diviseur commun à 840 et 600 qui soit plus grand que 72.

Calculons le plus grand diviseur commun (PGCD) à 640 et 800.

Pour cela, décomposons 840 et 600 en produit de facteurs premiers.

$$840 = 2^3 \times 3 \times 5 \times 7.$$

$$600 = 2^3 \times 3 \times 5^2.$$

Ainsi PGCD (840, 600) = $2^3 \times 3 \times 5 = 120$. 120 est donc le plus grand diviseur commun à 840 et 600.

Les diviseurs communs à 840 et 600 sont les diviseurs de 120, mais, parmi eux, seul 120 est plus grand que 72.

Le directeur pourra donc préparer 120 pochettes-goûter, ce qui est suffisant pour que chaque enfant en ait une.

ANALYSE DE PRODUCTIONS D'ÉLÈVES (GESTION DE DONNÉES) d'après un sujet de Dijon

1) Catégorie à laquelle se rattache cet énoncé (on ne demande aucune justification)

Ce problème se rattache à la seconde catégorie soit une combinaison de deux états (ou une réunion de deux états). Ici la somme des effectifs des élèves de CP et CE1 forme le premier état, l'effectif des élèves de CE2 le second. Ces deux états sont combinés pour donner l'effectif total des élèves qui mangent à la cantine. On connaît le tout et l'un des états et il faut trouver l'autre.

2) Différentes étapes de la procédure suivie par l'élève A

L'élève A interprète correctement sur l'histogramme les effectifs des classes de CP et de CE1.

Il cherche ensuite à effectuer la somme des effectifs de ces deux classes. A partir des valeurs lues 18 et 14, ou éventuellement par comptage direct sur les bâtons, il décompose mentalement chacun des deux effectifs en mettant en évidence la présence d'une dizaine d'élèves.

L'effectif de la classe de CP apparaît alors comme la somme de 10 élèves (une dizaine) et de 8 élèves (8 unités).

L'effectif de la classe de CE1 apparaît alors comme la somme de 10 élèves (une dizaine) et de 4 élèves (4 unités).

Il effectue alors un calcul posé en ligne en raisonnant sur les nombres de gauche à droite, d'abord les dizaines et ensuite les unités. Il commence donc par écrire chacune des deux dizaines.

D'où l'écriture $10 + 10$, qu'il complète par le nombre total d'unités, résultat obtenu mentalement (8 élèves et 4 élèves donnent 12 élèves).

La procédure suivie conduit donc, pour déterminer l'effectif total des classes de CP et de CE1 réunies, à un calcul aisément effectué mentalement : $10 + 10 + 12$.

L'élève A trouve le résultat correct : 32 élèves.

Pour déterminer l'effectif de la classe de CE2, l'élève s'appuie sur son résultat précédent et sur le nombre total d'élèves qui mangent à la cantine, information qu'il a repérée dans le texte. Pour calculer la différence, il procède par une addition à trou posée en ligne.

Cette opération ne comportant pas de retenue, il obtient mentalement le résultat.

Pour finir, il complète la phrase réponse.

L'ensemble de cette procédure ainsi que le résultat sont corrects.

3) a) Origine de l'erreur de l'élève B

Cet exercice se situe dans le domaine « Gestion de données ». Il s'agit d'un énoncé complexe pour lequel la prise d'indices demande une lecture attentive, voire experte. En effet les informations utiles étaient à prendre à plusieurs endroits : lecture de l'histogramme pour les effectifs des classes de CE1 et de CE2, titre de cet histogramme pour connaître le nombre total d'élèves mangeant à la cantine, sans oublier la question qui se situe hors du cadre.

L'élève B n'a pas réussi à repérer l'information : il y a au total 48 élèves mangeant la cantine.

Il est parti sur l'idée qu'il fallait trouver le nombre d'élèves total mangeant à la cantine. Sa lecture incomplète (rapide ?) de l'énoncé l'a amené à penser que l'enjeu de l'exercice était donc de lire les valeurs de l'histogramme puis de les ajouter.

Cela l'a conduit à ignorer la tâche et faire comme si l'effectif des CE2 se limitait à la partie visible du bâton correspondant de l'histogramme, soit 6.

3) b) Procédure suivie par cet élève en mettant en avant ses réussites

Deux réussites sont principalement à mettre en avant :

- la lecture correcte de l'histogramme, qui conduit aux valeurs 18, 14 et 6 ;
- la capacité à effectuer des calculs « malins » : face à la somme $18 + 14 + 6$, l'élève repère que 6 est le complément à la dizaine supérieure de 14. Il choisit donc de commencer par effectuer la seconde addition (il utilise pour cela l'associativité de l'addition). La dernière addition $18 + 20$ est alors aisée à effectuer mentalement, il suffit d'ajouter deux dizaines à 18, donc d'ajouter 2 à son chiffre 1 des dizaines.

Il ne lui reste alors qu'à renseigner la phrase réponse, qui est erronée puisque son calcul correspond au nombre total d'élèves mangeant à la cantine et non seulement aux CE2.

ANALYSE DE PRODUCTIONS D'ÉLÈVES (MULTIPLICATION) d'après un sujet de Dijon

1) a) Description et hypothèse sur l'origine des erreurs pour l'élève 1

L'élève 1 schématise la situation en représentant séparément pour chacune des deux journées les boîtes d'œufs vendues.

Il les dispose de façon à faire apparaître :

- à gauche (comme dans une colonne) une dizaine de boîtes de 10 œufs, chaque dizaine de boîtes étant répartie en deux lignes de cinq comme sur les cartes à points ;
- et à droite (comme dans une autre colonne) le nombre de boîtes de 10 œufs restant : trois pour le jeudi (ce qui correspond au 3, chiffre des unités de 13) et six pour le vendredi (ce qui correspond au 6, chiffre des unités de 16).

L'élève 1 s'appuie donc sur les unités de numération.

Il repère que dans la partie gauche de son schéma sont représentées 20 dizaines d'œufs.

Dans la partie droite, il compte le nombre de boîtes, il en obtient 9.

En juxtaposant les deux désignations « 20 dizaines et encore 9 » il obtient, en passant à l'écriture chiffrée 209 œufs.

Cette écriture est erronée, puisqu'elle conduit à interpréter le chiffre 9, comme 9 œufs et non comme 9 dizaines d'œufs.

On peut formuler l'hypothèse que l'élève a encore une maîtrise fragile de la numération de position, en particulier en ce qui concerne la compréhension et l'utilisation du 0 de position.

1) b) Explication des propriétés et des connaissances mobilisées par l'élève 2

L'élève met en œuvre des savoirs de numération pour décomposer 16 et 13 respectivement en $10 + 6$ (une dizaine et six unités) et $10 + 3$ (une dizaine et trois unités).

Il utilise la distributivité de la multiplication sur l'addition pour remplacer les deux produits à effectuer 16×10 et 13×10 , par respectivement la somme 10×10 et de 6×10 pour le premier et la somme 10×10 et de 3×10 pour le second.

Il mobilise sa connaissance du répertoire multiplicatif du 10 pour donner les résultats des produits 10×10 ; (deux fois), 6×10 et 3×10 . Pour le dire autrement, il s'appuie sur sa connaissance de la table du 10. La disposition en colonnes est trompeuse ; c'est simplement une façon de présenter ces résultats, en aucune façon il n'utilise l'algorithme de la multiplication posée.

Ensuite pour trouver les résultats des produits 16×10 et 13×10 , il effectue des additions posées en colonnes. Il procède de même pour donner la réponse finale au problème.

2) a) Explication de la procédure attendue pour répondre à la question c.

La procédure attendue pour répondre à la question c consiste à

- s'appuyer sur le résultat obtenu à la question a : $107 \times 30 = 3\,210$
- puis utiliser la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition pour décomposer le produit demandé 107×37 en la somme des produits 107×30 et 107×7 .

Cette procédure présentée sous la forme d'un calcul en ligne donne :

$$107 \times 37 = 107 \times (30 + 7) = 107 \times 30 + 107 \times 7 = 3\,210 + 749 = 3\,959.$$

Remarquons que l'addition finale ne comporte pas de retenue et peut aisément être effectuée de gauche à droite par un calcul en ligne.

Remarque

Ce n'était pas demandé mais on pouvait aussi expliciter l'obtention du résultat de la question a.

Le produit 107×30 peut se reformuler en un nombre de dizaines : il y a 107×3 dizaines.

Le résultat est donc de 321 dizaines, quantité qui s'écrit 3 210.

Le produit 107×30 peut aussi se décomposer en $107 \times 3 \times 10$ soit 321×10 et donc 3 210.

2) b) Présentation des procédures sous la forme d'un calcul en ligne

Procédures possibles pour 975×8

Procédure s'appuyant sur la proximité de 975 et de 1000

$$975 \times 8 = 8 \times 975 = 8 \times (1000 - 25) = 8 \times 1000 - 8 \times 25 = 8000 - 200 = 7800.$$

Procédures s'appuyant sur les doubles et la décomposition de 8 en $2 \times 2 \times 2$

$$2 \times 975 = 2 \times (1000 - 25) = 2 \times 1000 - 2 \times 25 = 2000 - 50 = 1950$$

puis $2 \times 1950 = 3900$ et $2 \times 3900 = 7800$.

Procédure utilisant la distributivité en décomposant 975 en $900 + 75$, puis 8 en 2×4

$$975 \times 8 = (900 + 75) \times 8 = 900 \times 8 + 75 \times 8 = 7200 + 75 \times 2 \times 4$$

soit $975 \times 8 = 7200 + 150 \times 4 = 7200 + 600 = 7800$.

Procédure possible pour 84×25

Procédure s'appuyant sur le fait numérique $4 \times 25 = 100$ et sur les propriétés de la multiplication

$$84 \times 25 = (4 \times 21) \times 25 = (21 \times 4) \times 25 = 21 \times (4 \times 25) = 21 \times 100 = 2100.$$

Cette procédure utilise le fait numérique $4 \times 25 = 100$ étudié au CE ainsi que les propriétés de commutativité et d'associativité de la multiplication.

Procédure utilisant le fait que multiplier par 25 revient à multiplier par 100 puis diviser par 4

$$84 \times 25 = 84 \times 100 : 4 = 8400 : 4 = 2100.$$

Procédure utilisant la distributivité avec les décompositions $25 = 20 + 5$, $20 = 2 \times 10$ et 5 moitié de 10

$$84 \times 25 = 84 \times (20 + 5) = 84 \times 20 + 84 \times 5 = 84 \times 2 \times 10 + 84 \times 10 : 2 = 1680 + 420 = 2100.$$

ANALYSE D'UNE ÉVALUATION SUR LE NOMBRE (DÉBUT DE CP) d'après un sujet de l'ESPE de Bretagne

1) Étude de l'exercice 3, item 4

a) Procédure utilisée par Anna pour répondre à la question

Anna effectue une **correspondance terme à terme** entre les éléments de la collection de personnages et les éléments de la collection de ballons, en matérialisant la correspondance par des traits reliant un personnage à un ballon. À l'issue de cet appariement, deux personnages restent sans ballon.

b) Analyse de la réponse de Moudri

Moudri a entouré chacun des deux personnages situés à droite de la file. Il ne donne pas de conclusion au problème sous la forme attendue, mais on peut penser que ces deux personnages correspondent aux deux personnages pour lesquels il manque un ballon.

Il est possible que Moudri ait réalisé une correspondance terme à terme avec les doigts, ou mentalement. Il est également possible qu'il ait eu recours au nombre, en dénombrant 6 ballons, puis 6 personnages, et en entourant les personnages restants.

Il peut également avoir décomposé les collections sans avoir totalisé (trois et trois ballons, trois et trois personnages, et deux de plus qu'il a entourés).

2) Étude de l'exercice 4 : représentations du nombre utilisées dans chacun des items

Pour l'item 7, le nombre de jetons à barrer est donné par sa désignation orale.

Pour l'item 8, le nombre de jetons à barrer est donné par une représentation analogique de la quantité (appelée aussi collection témoin de cette quantité) : doigts de la main, constellations du dé, ou cartes à points organisée en deux lignes de cinq cases.

Pour l'item 9, le nombre de jetons à barrer est donné par l'écriture chiffrée.

3) Étude de l'exercice 5

a) Compétences évaluées dans cet item, en plus du dénombrement d'une quantité.

Pour fournir les réponses au format attendu, les élèves doivent savoir associer aux désignations orales des nombres (« sept » ; « cinq », « dix » ; « neuf », mots énoncés) leurs écritures chiffrées (« 7 » ; « 5 » ; « 10 » ; « 9 »), et doivent savoir tracer les chiffres correspondants.

b) Des aides possibles

Une aide pour dénombrer

Dans un dénombrement par comptage (procédure de dénombrement la plus probable ici par rapport à la disposition des éléments de chaque collection), des difficultés de divers ordres peuvent intervenir, comme par exemple :

- une mauvaise synchronisation entre le pointage et la comptine : dans ce cas, l'enseignant (ou un élève qui sait) peut aider l'élève en découplant les tâches : l'élève récite la comptine, et la personne qui l'aide lui tient la main et pointe les objets, ou l'élève pointe les objets, et la personne qui l'aide récite la comptine ;
- des difficultés de récitation de la comptine numérique : l'enseignant peut ici aussi prendre en charge une partie de la tâche de l'élève en récitant la comptine à voix haute à partir du moment où l'élève ne la connaît plus correctement ;
- des difficultés d'énumération (en particulier pour la troisième collection) : après s'être assuré que l'élève dispose d'une stratégie pour énumérer une collection d'objets déplaçables (l'élève sait, en séparant les objets déjà pris en compte des autres, tous les prendre en compte une et une seule fois), l'enseignant peut demander explicitement à l'élève d'expliquer comment il peut faire pour ne pas oublier une étoile, et ne pas en compter une deux fois. En cas de non réponse, l'enseignant peut l'inciter à marquer les objets (barrer, entourer, relier par un chemin...) au fur et à mesure (par l'observation d'un autre élève ou, à défaut, en lui montrant).

Une aide pour les élèves qui ne connaissent pas l'écriture chiffrée d'un nombre donné oralement

L'enseignant peut fournir à l'élève une bande numérique individuelle. L'élève peut alors dénombrer les cases de gauche à droite, en comptant, jusqu'au nombre visé, et repérer ainsi son écriture chiffrée.

Une aide pour les élèves qui ne savent pas tracer les chiffres

Les programmes de 2015 indiquent que « l'apprentissage du tracé des chiffres se fait avec la même rigueur que celui des lettres ».

Plusieurs aides sont suggérées dans cet extrait de [Réussir l'oral de français, Nathalie Betton, éditions Atlante 2012].

« Les élèves découvrent la forme des lettres en les observant, en les touchant, en voyant l'enseignant les tracer et verbaliser ce tracé, en ayant la main et le bras guidés par l'enseignant, en s'exerçant sur des supports grand-format, puis sur des formats plus réduits, en copiant des modèles. Mais ils apprennent avant tout à écrire en écrivant « pour de bon », c'est-à-dire en ayant une bonne raison d'écrire. »

Compléments de formation

Pour aider l'élève en dénombrement, si l'on sait que l'élève a des connaissances sur les constellations de doigts, on pourrait l'inciter à construire une collection de doigts équivalente, en posant un doigt sur chacun des objets. Ainsi, il peut retrouver directement qu'il y a cinq chats par exemple dans l'item 2.

Pour aider l'élève en dénombrement-calcul, on pourrait l'inciter (et en activité décrochées l'entrainer) à utiliser le subitzing pour repérer des groupes (de deux ou trois objets) et à utiliser ses connaissances sur la recomposition (et notamment les doubles) pour calculer. Par exemple :

- *pour les stylos : on voit trois, trois et une paire de ciseaux. On sait que trois et trois ça fait six, six et un font sept. Il y a sept paires de ciseaux ;*
- *pour les chats : il y a deux, et deux et encore un chat, ça fait quatre chat et un chat, donc cinq chats. Ou encore « on voit deux et trois chats ; deux et trois ça fait cinq, il y a cinq chats.*

Ces procédures sont plus facilement envisageables pour les deux premiers items que pour les deux suivants.

4) Étude de l'exercice 6 : aspect du nombre travaillé dans cette question

Les élèves doivent identifier des positions (ici le rang d'arrivée d'un coureur cycliste : premier, sixième, dernier, troisième) dans une file orientée (ici de droite à gauche) d'objets : c'est l'aspect ordinal du nombre qui est mobilisé.

Remarque

Le positionnement de l'arrivée peut constituer un obstacle pour les élèves car il induit un numérotage de droite à gauche, contraire au sens de l'écriture et de la lecture. Cette situation spatiale peut alors induire certains élèves en erreur si cette information n'est pas comprise ou même gardée en mémoire pendant toute l'activité.

5) Étude de l'exercice 8 : deux procédures correctes, envisageables en grande section

Il s'agit ici de déterminer le cardinal d'une collection obtenue en ajoutant 3 objets à 5 objets. Plusieurs procédures sont possibles pour résoudre ce problème additif en grande section et donc en début de CP :

- en utilisant des collections témoins : l'élève peut afficher 5 doigts sur une main, 3 doigts sur une autre. Il peut alors dénombrer cette collection de doigts levés par comptage « un, deux, trois, ..., huit », surcomptage (« six, sept, huit »), ou reconnaissance immédiate de la quantité, avant d'associer à la désignation orale obtenue l'écriture chiffrée. L'élève peut aussi associer directement la représentation analogique (avec les doigts) et l'écriture chiffrée sans passer par le mot-nombre ;
- en connaissant des décompositions-recompositions du nombre cinq : « cinq bonbons et trois bonbons ça fait huit bonbons car cinq et trois ça fait huit » ;
- en utilisant la bande numérique fournie, et en surcomptant : l'élève peut repérer « 5 », puis avancer de trois cases sur la bande numérique, et entourer le nombre ainsi atteint ;
- en surcomptant : l'élève peut « mettre cinq dans sa tête », montrer trois doigts, puis réciter la comptine à partir du nombre suivant, en énumérant les doigts levés (« six, sept, huit »).

Remarque

Il est fréquent que des élèves qui utilisent cette procédure se trompent d'une unité, car au lieu de « mettre cinq dans la tête » et de démarrer à six, ils disent « cinq » en partant du premier des trois doigts.

ANALYSE D'UNE SITUATION SUR LES MASSES d'après un sujet de Clermont-Ferrand

1) Étude du document sur les masses en CE2 (annexe A)

a) Une difficulté prévisible pour barrer les masses impossibles de l'exercice 1

On peut citer une difficulté d'ordre culturel : les élèves **ne connaissent pas nécessairement un ordre de grandeur des masses** de certains objets.

Remarque

Dans certains cas, toutes les masses sont a priori possibles ; il sera peut-être difficile pour certains élèves d'accepter qu'il est possible d'associer à une même représentation plusieurs objets réels, et donc plusieurs masses. Par exemple il existe des boîtes de conserve de collectivité, et des boîtes de conserve de très petite contenance.

b) Objectif possible de l'exercice 1

Un objectif possible est de faire travailler les élèves **sur l'ordre de grandeur** des masses de différents objets, comme les programmes officiels le préconisent : « Travail sur l'estimation participe à la validation de résultats et permet de donner un sens concret aux grandeurs étudiées et à leur mesure. » (B.O 2018).

c) Deux difficultés prévisibles pour la question a) de l'exercice 2

Une difficulté peut survenir **dans la comparaison** des deux masses qui ne sont pas exprimées dans la même unité (1 kg 250 g et 1 300 g).

Une autre difficulté est liée à **l'utilisation des symboles de comparaison**. Les élèves peuvent confondre > et <, et produire un résultat faux alors que leur raisonnement peut être correct.

2) Analyse d'une production d'un élève (annexe B)

a) Règle probablement utilisée par l'élève pour répondre aux questions a, b et c

Il semble que pour convertir en grammes des masses formulées en kg et g, cet élève enlève le symbole « kg » et « colle » les nombres ensemble. Cette règle donne des résultats incorrects par exemple quand le chiffre de centaines des grammes est nul (par exemple : « 2 kg 40 g = 240 g »), même si, en apparence, elle fonctionne bien dans beaucoup de cas présents dans l'exercice.

b) Proposition d'un exercice permettant de vérifier que l'élève utilise implicitement une règle fausse pour la conversion en grammes d'une masse exprimée en grammes-kilogrammes

L'élève semble utiliser la règle fausse « le premier chiffre correspond au nombre de kilogrammes, le reste des chiffres correspondent au nombre de grammes. ».

Pour conforter cette hypothèse, on peut proposer à cet élève de convertir des nombres ayant un nombre de kilogrammes supérieurs à 10, comme par exemple un nombre à 5 chiffres du type 13 560 g. On pourra alors observer si la réponse est 1 kg 3 560 g, ce qui conforterait l'idée que l'élève utilise cette règle.

Cela montrerait aussi que l'élève n'a pas recours à l'équivalence 1 000 g = 1 kg.

Remarque

On pourrait aussi demander à l'élève de formuler oralement sa procédure.

3) Contrôle et aide pour un type d'erreur

a) Utilisation de masses marquées et d'une balance à affichage digital

Pour faire prendre conscience à l'élève de son erreur lors de l'écriture de l'égalité « $2 \text{ kg } 40 \text{ g} = 240 \text{ g}$ », on peut utiliser des masses marquées et une balance à affichage digital en procédant ainsi :

- lui faire réunir des masses marquées pour atteindre $2 \text{ kg } 40 \text{ g}$ en prenant deux masses de 1 kg et 4 fois 10 g ;
- les disposer sur la balance à affichage digital ;
- lire l'affichage $2\,040\text{g}$, ce qui invalidera sa réponse.

On provoque ainsi une rétroaction qui obligera l'élève à reconsidérer sa réponse spontanée.

b) Aide possible de l'enseignant

Une aide possible consiste à rappeler (ou faire rappeler) l'équivalence $1 \text{ kg} = 1\,000 \text{ g}$.

Pour cela, l'enseignant peut demander à l'élève de déposer sur la balance à affichage digital une masse marquée « 1 kg », et faire constater que la balance affiche $1\,000 \text{ g}$.

Le travail portera ensuite sur l'écriture chiffrée des nombres en lien avec la décomposition canonique :

$$2 \text{ kg } 40 \text{ g} = 1\,000 \text{ g} + 1\,000 \text{ g} + 10 \text{ g} + 10 \text{ g} + 10 \text{ g} = 2\,040 \text{ g}.$$

$$\text{ou } 2 \text{ kg} = 2 \times 1\,000 \text{ g} = 2\,000 \text{ g} \quad \text{et } 2 \text{ kg } 40 \text{ g} = 2\,000 \text{ g} + 40 \text{ g} = 2\,040 \text{ g}.$$

Remarque

Si une balance à plateaux est disponible, l'enseignant peut aussi déposer une masse marquée « 1 kg » sur l'un des plateaux, et demander à l'élève d'équilibrer la balance à l'aide de masses marquées « 100 g ».

ANALYSE D'UNE SITUATION SUR LES DÉCIMAUX d'après un sujet de l'ESPE de DIJON

1) a) Proposition d'une procédure ne consistant pas à poser l'addition dans le cas a

En ajoutant ensemble les unités de même nature, on obtient dans un premier temps :

2 centaines, 7 unités, 16 dixièmes et 8 millièmes.

Comme 16 dixièmes est égal à 1 unité et 6 dixièmes, on obtient finalement :

2 centaines, 8 unités, 6 dixièmes et 8 millièmes.

L'écriture à virgule de cette somme est donc 208,608.

1) b) Proposition d'une procédure ne consistant pas à poser l'addition dans le cas b

Procédure 1 : en procédant d'abord à tous les échanges nécessaires

Pour pouvoir enlever 5 dizaines au premier nombre, il faut échanger l'une des 3 centaines en 10 dizaines.

Le premier nombre est donc maintenant décomposé en :

1 millier, 2 centaines, 10 dizaines, 5 dixièmes et 2 centièmes.

Pour pouvoir enlever 7 unités à ce premier nombre, il faut échanger l'une des 10 dizaines en 10 unités. Le premier nombre est donc maintenant décomposé en :

1 millier, 2 centaines, 9 dizaines, 10 unités, 5 dixièmes et 2 centièmes.

Pour pouvoir enlever 5 centièmes à ce premier nombre, il faut échanger l'un des 5 dixièmes en 10 centièmes.

Le premier nombre est donc maintenant décomposé en :

1 millier, 2 centaines, 9 dizaines, 10 unités, 4 dixièmes et 12 centièmes.

On peut maintenant procéder unité par unité pour effectuer la soustraction, l'ordre n'ayant pas d'importance.

En enlevant 5 dizaines, 7 unités, 3 dixièmes et 5 centièmes, il reste :

1 millier, 2 centaines, 4 dizaines, 3 unités, 1 dixième et 7 centièmes.

L'écriture à virgule de cette différence est donc 1243,17.

Procédure 2 : en effectuant les échanges et les soustractions au fur et à mesure

Pour pouvoir enlever 5 dizaines au premier nombre, il faut échanger l'une des 3 centaines en 10 dizaines.

Le premier nombre est donc maintenant décomposé en :

1 millier, 2 centaines, 10 dizaines, 5 dixièmes et 2 centièmes.

En enlevant 5 dizaines, il reste alors :

1 millier, 2 centaines, 5 dizaines, 5 dixièmes et 2 centièmes.

Pour pouvoir enlever 7 unités à ce nombre, il faut échanger l'une des 5 dizaines en 10 unités. Ce nombre est donc maintenant décomposé en :

1 millier, 2 centaines, 4 dizaines, 10 unités, 5 dixièmes et 2 centièmes.

En enlevant 7 unités, il reste alors :

1 millier, 2 centaines, 4 dizaines, 3 unités, 5 dixièmes et 2 centièmes.

Il n'y a pas besoin de faire d'échange pour enlever 3 dixièmes et l'on obtient :

1 millier, 2 centaines, 4 dizaines, 3 unités, 2 dixièmes et 2 centièmes.

Pour pouvoir enlever 5 centièmes à ce nombre, il faut échanger l'un des 2 dixièmes en 10 centièmes. Ce nombre est donc maintenant décomposé en :

1 millier, 2 centaines, 4 dizaines, 3 unités, 1 dixième et 12 centièmes.

En enlevant 5 centièmes, il reste alors :

1 millier, 2 centaines, 4 dizaines, 3 unités, 1 dixième et 7 centièmes.

L'écriture à virgule de cette différence est donc 1243,17.

Procédure 2 bis : variante de la procédure précédente,

On pouvait effectuer les échanges et les soustractions dans un autre ordre, par exemple l'ordre croissant des ordres de grandeurs des unités (donc commencer par les centièmes et finir par les dizaines (de droite à gauche comme dans l'opération posée).

2) a) Méthode dite « par emprunt »

$$\begin{array}{r}
 & & 3 \\
 & 2 & 0 & \cancel{4} & , & 17 & 0 & 8 \\
 - & & & 3 & , & 9 \\
 \hline
 & 2 & 0 & 0 & , & 8 & 0 & 8
 \end{array}$$

2) b) Méthode par « conservation des écarts » (dite aussi méthode « usuelle »)

Il y a usuellement deux façons de marquer les retenues dans cette méthode.

Proposition 1

$$\begin{array}{r}
 & 2 & 0 & 4 & , & 10+7 & 0 & 8 \\
 - & & & 1+3 & , & 9 \\
 \hline
 & 2 & 0 & 0 & , & 8 & 0 & 8
 \end{array}$$

La retenue « 10+ » devant les 7 dixièmes revient à ajouter 10 dixièmes au nombre du haut (il y a donc 17 dixièmes). Pour compenser, et conserver le même écart, il faut ajouter la même quantité au nombre du bas, mais on l'ajoute sous la forme « une unité », en utilisant l'égalité entre 10 dixièmes et 1 unité.

La méthode de technique de conservation des écarts revient à transformer la différence initialement à calculer « 204,708 – 3,9 » par une autre qui est égale « 205,708 – 4,9 » et dans laquelle le nombre du haut est décomposé de façon canonique (il y a 17 dixièmes).

Proposition 2 :

$$\begin{array}{r}
 & 2 & 0 & 4 & , & 17 & 0 \\
 - & & & 1+3 & , & 9 \\
 \hline
 & 2 & 0 & 0 & , & 8 & 0
 \end{array}$$

Dans ce cas la retenue « 1 » placée devant les 7 dixièmes, fait apparaître explicitement les 17 dixièmes, ce qui correspond comme précédemment à l'ajout de 10 dixièmes. De même pour compenser, et conserver le même écart, il faut ajouter la même quantité au nombre du bas, mais on l'ajoute sous la forme « une unité », en utilisant l'égalité entre 10 dixièmes et 1 unité.

ANALYSE D'UNE SITUATION SUR LES POLYGONES EN CYCLE 3 d'après un sujet de l'ESPE d'Aix-Marseille

PREMIÈRE PARTIE

1) Résolution de l'exercice du manuel

Les 7 quadrilatères sont : A ; B ; E ; J ; K ; P ; T.

Les 4 parallélogrammes sont : B ; J ; K ; P.

Les 2 losanges sont : K ; P.

Les 2 rectangles sont : B ; P.

Le carré est : P.

2) Définition d'un polygone que l'on pourrait donner à des élèves de cycle 3

Un polygone est une surface délimitée par une ligne brisée fermée constituée de segments de droites (Définition Eduscol 2016).

Autre définition possible

Figure plane limitée par des segments de droite appelés côtés.

3) Erreurs d'un élève

a) Raison pour laquelle un élève n'a trouvé qu'un rectangle et un losange

Il est possible que cet élève n'ait trouvé qu'un seul rectangle car il ne considère pas le carré comme un rectangle ayant des propriétés supplémentaires (côtés tous les quatre de même longueur, diagonales perpendiculaires), donc **ne considère pas le carré comme un rectangle particulier**. Il en est de même pour le losange si l'élève ne considère pas le carré comme un losange.

Pour cet élève, les classes respectives des losanges, carrés et rectangles sont disjointes.

b) Une aide que l'on peut proposer à cet élève pour qu'il trouve un second losange

Pour aider l'élève il est important de lui faire utiliser les propriétés du losange pour le reconnaître, afin de dépasser la reconnaissance perceptive. On pourrait par exemple demander à l'élève de **vérifier à l'aide des instruments quelles sont les propriétés du losange qu'il a reconnues, puis de vérifier si d'autres figures ont aussi ces mêmes propriétés**.

DEUXIÈME PARTIE

1) Propriété mathématique justifiant la construction de deux droites parallèles proposée par le manuel

La construction proposée dans le manuel consiste à construire les deux droites en construisant deux angles correspondants égaux avec le gabarit d'angle.

La propriété qui permet de justifier cette construction est donc la suivante : **lorsque deux angles correspondants formés par deux droites sont égaux alors ces droites sont parallèles**.

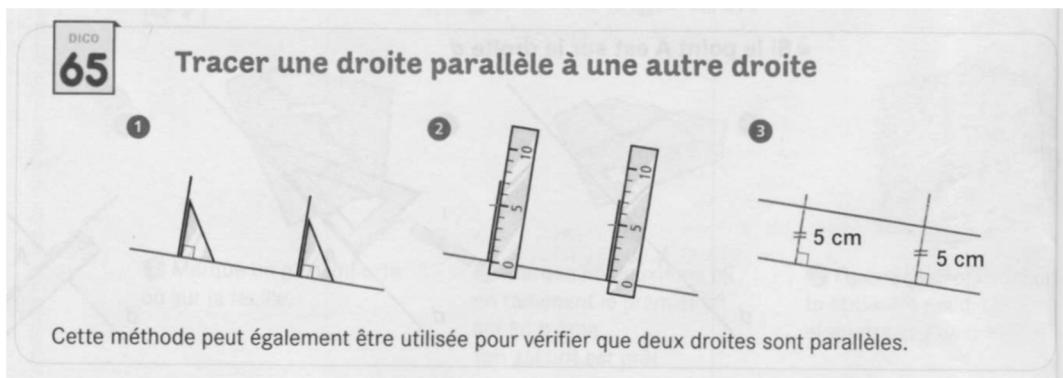
2) Définition de deux droites parallèles permettant à des élèves de cycle 3 de les construire avec une autre procédure

Une *définition* de deux droites parallèles que l'on pourrait donner à des élèves de cycle 3 est : **deux droites sont parallèles si l'écart entre ces deux droites est constant**.

Remarque 1

Cette définition suppose que la notion d'écart, donc de distance entre un point et une droite ait été préalablement travaillée avec les élèves.

Cette définition permet de construire des droites parallèles à l'aide de l'équerre et de la règle, comme cela est proposé dans cet extrait du manuel CapMaths :



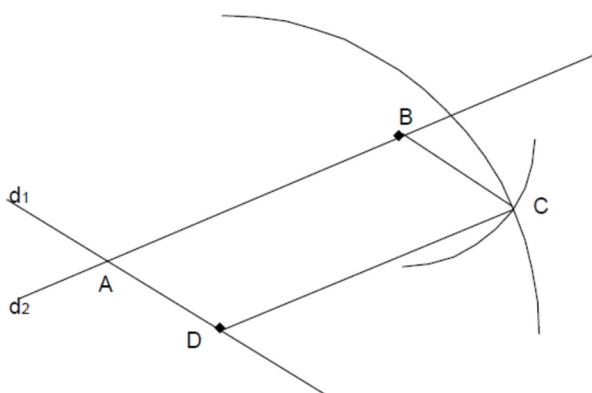
Remarque 2

La propriété : « si deux droites sont perpendiculaires à une même droite alors elles sont parallèles entre elles » permet une autre construction de deux droites parallèles qui peut être proposée à des élèves de fin de cycle 3 mais elle ne constitue pas une définition du parallélisme.

Remarque 3

La définition « deux droites sont parallèles si elles ne se coupent jamais », quant à elle, ne fournit pas de méthode de construction.

3) a) Exécution du programme de construction



3) b) Implicité dans l'étape 5

L'ambiguité de l'étape 5 vient du fait que **les cercles entiers se coupent en deux points C et C'** symétriques par rapport à la droite (BD) et un seul de ces points convient.

Le texte demande aux élèves de tracer des arcs et non des cercles entiers, ce qui ne résout pas la question, parce qu'il faut choisir le bon demi-plan de frontière (BD) pour les deux arcs.

Ils peuvent aussi ne pas se couper si l'un est dans un des demi-plans et l'autre dans l'autre demi-plan.

3) c) Propriété caractéristique du parallélogramme sur laquelle repose la construction

La propriété caractéristique du parallélogramme sur laquelle repose cette construction est la suivante : un quadrilatère qui a ses côtés opposés de même longueur est un parallélogramme.

4) Caractérisations permettant de vérifier qu'un quadrilatère est un parallélogramme

On peut citer plusieurs propriétés caractéristiques du parallélogramme :

- Un quadrilatère qui a deux côtés de même longueur et parallèles est un parallélogramme.
- Un quadrilatère qui ses diagonales qui se coupent en leur milieu est un parallélogramme.
- Un quadrilatère qui a ses côtés opposés parallèles deux à deux est un parallélogramme.
- Un quadrilatère qui a ses angles opposés égaux est un parallélogramme.

ANALYSE D'UNE SITUATION SUR LES FRACTIONS EN CM1 d'après un sujet de l'ESPE d'Aix-Marseille

1) Type de tâche

Il s'agit de ranger (ou comparer) des nombres écrits sous forme fractionnaire.

2) Compétences préalables

Parmi les compétences liées aux fractions à l'école, on peut citer :

- * connaître les fractions simples : $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$;
- * savoir que $\frac{a}{b}$ c'est « a fois $\frac{1}{b}$ » ;
- * savoir décomposer une fraction en la somme d'un entier et d'une fraction de l'unité et pour cela, savoir que « b » fois $\frac{1}{b}$ est égal à 1 ;
- * savoir comparer des fractions simples : $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$.

Remarque

Dans une optique de formation, nous proposons ci-dessus plusieurs compétences possibles. On rappelle au candidat que si l'énoncé demande deux compétences, il est important de se conformer à cette demande en se limitant au nombre de compétences demandées.

3) Difficultés du problème

Parmi les difficultés présentes dans ce problème de recherche, on peut citer (avec la même remarque qu'à la question 2) :

- les nombres à comparer sont des nombres écrits de différentes façons ;
- certaines fractions sont plus grandes que 1 ;
- les dénominateurs sont différents ;
- il y a beaucoup de nombres à comparer ;
- l'interdiction de se reporter aux pistes graduées (pourtant présentes !) qui permettraient de représenter les nombres et de visualiser la solution.

4) Travail du groupe A

Dans un premier temps, le groupe A a comparé les nombres écrits sous forme d'une somme d'un même entier (2) et d'une fraction inférieure à 1 (Ulysse et Zoé). Pour comparer ces deux nombres, ils ont comparé les fractions inférieures à 1 en relevant que $\frac{4}{6}$ c'est pareil que $\frac{2}{3}$ (comparaison des « rompus »). Le dessin prouve cette égalité : un segment est divisé en 6 parts égales et gradué en sixièmes (le segment représente alors une unité) mais ce segment fait également apparaître une graduation en tiers en plus gras. Les élèves ont placé deux repères correspondant aux nombres $\frac{4}{6}$ et $\frac{2}{3}$. Comme ces repères coïncident, les deux nombres sont égaux.

Dans un second temps le groupe A a probablement décomposé 7 demis en 6 demis plus 1 demi et ce groupe sait que « dans 3 il y a 6 demis » et donc que 7 demis c'est 3 plus 1 demi : $\frac{7}{2} = 3 + \frac{1}{2}$.

La technique sur laquelle s'appuie le groupe A est la **décomposition des fractions en somme d'un nombre entier et d'une fraction inférieure à 1 suivie d'une comparaison des fractions inférieures à 1**.

Ainsi, pour Kriss, on peut décomposer 16 cinquièmes de la même façon : 16 cinquièmes c'est 15 cinquièmes plus 1 cinquième. Or 15 cinquièmes c'est 3 fois 5 cinquièmes et 5 cinquièmes c'est 1. Donc $\frac{16}{5} = 3 + \frac{1}{5}$.

Enfin, pour Alice : 15 quarts c'est 12 quarts plus 3 quarts.

Or 12 quarts c'est 3 fois 4 quarts et 4 quarts c'est 1, donc $\frac{15}{4} = 3 + \frac{3}{4}$.

On obtient donc une nouvelle écriture fractionnaire pour les concurrents :

Idriss : $3 + \frac{1}{2}$ Ulysse : $2 + \frac{2}{3}$ Zoé : $2 + \frac{2}{3}$ Kriss : $3 + \frac{1}{5}$ Alice : $3 + \frac{3}{4}$ Arthur : $3 + \frac{1}{2}$.

Ulysse et Zoé ont le même résultat. Pour les trois autres nombres, les parties entières étant égales, il suffit de comparer les fractions $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{4}$.

Pour comparer $\frac{1}{5}$ et $\frac{1}{2}$, on peut s'appuyer sur une grandeur et dire que lorsqu'on partage une unité en 5 parts égales, la part obtenue est plus petite que lorsqu'on partage l'unité en 2 donc $\frac{1}{5} < \frac{1}{2}$.

Par ailleurs, $\frac{1}{2}$ c'est aussi $\frac{2}{4}$ (on peut le visualiser comme le propose le groupe A) et $\frac{2}{4}$ est inférieur à $\frac{3}{4}$.

Le rangement des nombres est alors :

$$2 + \frac{2}{3} = 2 + \frac{4}{6} < 3 + \frac{1}{5} < \frac{7}{2} = 3 + \frac{1}{2} < 3 + \frac{3}{4}.$$

Il reste à ranger les participants dans l'ordre imposé par l'énoncé, de celui qui est allé le moins loin à celui qui est allé le plus loin. En reprenant l'ordre établi sur les nombres, on obtient :

Ulysse et Zoé (ex-aequo) puis Kriss, Idriss et Arthur (ex-aequo) et enfin Alice qui a gagné.

5) Validation

Pour valider son rangement obtenu en A, l'élève pourra **repérer les positions d'arrivée des coureurs sur les lignes graduées** puis obtenir le rangement attendu des enfants en rangeant les segments par ordre de longueur croissante (ce qui est aisément vérifiable car les origines des segments étant alignées, il suffit de comparer la position de leurs extrémités).

Remarque

L'élève pourra valider le résultat obtenu en A à l'aide des pistes à condition qu'il ait repéré correctement les positions d'arrivée. Ceci n'a rien d'évident car il y a une difficulté certaine à positionner les écritures fractionnaires sur les pistes graduées.

ANALYSE D'UNE SITUATION SUR L'ESPACE EN MATERNELLE d'après un sujet de l'ESPE d'Aix-Marseille

1) Compétences travaillées

Les compétences travaillées issues des programmes sont principalement les suivantes :

- **situer des objets** entre eux et par rapport à des objets repères ;
- utiliser des **marqueurs spatiaux** adaptés (devant, derrière, droite, gauche, dessus, dessous...) dans des récits, descriptions ou explications.

2) Rôle de la phase 1

Il s'agit d'une phase d'**appropriation** de la situation. Les élèves manipulent et s'approprient le matériel et s'investissent dans une tâche relativement simple. L'idée est de mettre les élèves en position de réussite (ils peuvent se déplacer) pour cette phase de prise en main.

3) Principale difficulté de la carte n°10

La difficulté n'est pas uniquement due à la carte n°10, en effet la principale difficulté est liée à la consigne de la phase 2 : **le joueur ne peut pas se déplacer**. La difficulté de cette carte en lien avec la consigne « interdiction de se déplacer » réside dans le fait que le joueur est face à la poupée et la carte présente la **poupée de dos**, le jeton à la gauche de la poupée.

Pour réussir à placer le jeton correctement, l'élève doit se mettre à la place de la poupée, dans la même orientation. Ceci suppose une **décentration** pour adopter un autre point de vue que le sien propre.

4) Tâche et objectif de la phase 3

La phase 3 est principalement axée sur la **communication**. En référence aux compétences citées en question 1, il s'agira pour l'élève d'utiliser des **marqueurs spatiaux** adaptés (devant, derrière, à droite de, à gauche de) dans des descriptions ou des explications ici afin qu'un autre élève puisse placer un objet par rapport à un objet repère.

L'objectif pour l'enseignant est que l'élève verbalise et par conséquent utilise le langage spatial décrit ci-dessus pour résoudre un problème (faire placer un objet par rapport à un objet repère).

ANALYSE D'UNE SITUATION DE PARTAGE ÉQUITABLE d'après un sujet de Clermont-Ferrand

1) Analyse du texte du problème en CE1 sur des partages équitables

1) a) Deux difficultés liées à la présentation de cet énoncé et une conséquence possible

Une seule des deux données numériques utiles pour résoudre ce problème de partage est écrite en chiffres (20 biscuits, qui représente la quantité à partager), l'autre est écrite en lettres (trois enfants, qui représentent le nombre de parts).

Une des données numériques utiles est soulignée (20 biscuits), l'autre ne l'est pas.

La donnée sur le nombre de parts n'est pas mise en évidence dans l'énoncé (ni sous forme chiffrée, ni soulignée). Par conséquent, les élèves peuvent être en difficulté pour repérer le nombre de parts.

1) b) Deux incidences sur la résolution du problème du choix des nombres 3 et 20

Le nombre 20 n'est pas un multiple de 3, ce qui va poser des difficultés pour mettre en œuvre la procédure de partage :

- certains élèves vont chercher à répartir tous les biscuits, le partage ne sera donc pas équitable ;
- certains élèves, remarquant qu'on ne peut pas partager tous les biscuits entre les 3 enfants, vont penser que ce problème ne peut pas être résolu.

2) Analyse de productions de quatre élèves

Élève	Démarche probable	Éventuelle erreur	Origine possible de l'erreur	Connaissance mathématique illustrée
Léo	Les 20 biscuits sont distribués successivement sur 3 lignes, d'où la présence d'un 7 ^{ème} bâton sur les lignes 1 et 2. Les biscuits sont représentés par des « bâtons » alignés en colonne. Il interprète correctement sa distribution en concluant que chaque enfant aura 6 biscuits.	Pas d'erreur dans la réponse Dans la représentation, les enfants 1 et 2 ont reçu 7 biscuits et l'enfant 3 en reçoit 6.		Représentation (graphique) d'un partage (probablement distribution de 1 à chaque tour). Notion de partage équitable.
Amy	Elle dessine d'abord 20 biscuits sur deux lignes. Elle simule ensuite la distribution : tout d'abord 3 biscuits à chaque enfant (numérotés 1, 2 et 3), puis un 4 ^{ème} à chaque enfant, puis un 5 ^{ème} , puis un 6 ^{ème} et un 7 ^{ème} (qui n'est distribué qu'à deux enfants). Elle conclut que chaque enfant aura 7 biscuits, 7 étant le dernier nombre qu'elle a écrit.	Elle ne tient pas compte du fait que 7 n'est écrit que sur 2 biscuits, et que, donc, le 7 ^{ème} biscuit n'a pas été distribué à tous les enfants. Sa démarche est correcte mais sa conclusion est fausse.	Elle perd très certainement la question de vue en cours de résolution. Elle se contente de répondre avec le dernier nombre obtenu/écrit (comme c'est souvent le cas...).	Représentation d'un partage (distribution de 3 à chaque tour puis de 1, en numérotant les biscuits distribués de la même manière). Connaissance de $20 = 10 + 10$ dans sa représentation en deux lignes des biscuits.

Tom	Il décompose 20 en $10 + 10$ et conclut que chaque enfant aura 10 biscuits.	Erreur dans la réponse et dans la représentation. Le partage se fait en deux parts et non trois.	Plusieurs possibilités : - trois écrit en lettres, non repéré ; - terme « équitablement » mal interprété ; - notion de partage associée de manière privilégié à un partage en deux.	$20 = 10 + 10$. Notion de moitié.
Marin	Il écrit successivement six 3 puis un 2. On peut supposer qu'il simule ainsi la distribution de 1 à chaque tour pour les trois enfants. Il contrôle probablement, au fur et à mesure, le nombre total de biscuits distribués (ce que confirme le 2 final).	Pas d'erreur.		Notion de partage équitable. Distribution de 1 à chaque tour (donc de 3 biscuits) représentée par une suite de 3. Contrôle au fur et à mesure de la quantité totale.