Chapitre

9

Probabilités

1. Généralités

Définition 1.9

Une **expérience aléatoire** est un processus qui peut être répété, dont le résultat n'est pas connu à l'avance, mais dont l'ensemble des résultats possibles est connu.
L'ensemble de résultats possibles, appelé **univers**, est souvent noté Ω parfois U et on appelle **issue** un résultat possible.

Exemples.

1. On lance un dé et on regarde le résultat. L'univers est alors l'ensemble $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.
2. On lance deux dés et on fait la somme. L'univers est alors l'ensemble $\{2; 3; \ldots; 12\}$.

Définition 2.9

On appelle **événement** tout sous-ensemble (ou encore sous-partie) de l'univers Ω et un **événement élémentaire** est un événement composé d'une seule issue. On décrit souvent un événement à l'aide d'une phrase.

Exemple. Dans l'expérience aléatoire du jet d'un dé, on peut considérer :

- l'événement « obtenir un 2 ». Il correspond à l'ensemble $\{2\}$.
- l'événement « obtenir un nombre pair ». Il correspond à l'ensemble $A = \{2; 4; 6\}$.

Définition 3.9

Soit A un événement.
L'événement contraire de A, noté $\overline{A}$ et lu « non A » (ou « A barre ») est l'ensemble des issues de Ω qui ne sont pas dans A.

Exemples.

1. L'événement contraire de « obtenir un 2 » est « ne pas obtenir de 2 »et correspond à l'ensemble $\{1; 3; 4; 5; 6\}$.
2. L'événement contraire de « obtenir un nombre pair » est « obtenir un nombre impair » et correspond à l'ensemble $\overline{A} = \{1; 3; 5\}$.

Définition 4.9

On dit de deux événements qu'ils sont **incompatibles** s'ils n'ont pas d'issue en commun. En particulier, deux événements contraires sont incompatibles.

Exemple. Les événements « obtenir un 2 » et « obtenir un nombre impair » sont incompatibles.

2. Loi de probabilité

Sur l'ensemble $E = \{e_1; \dots ; e_n\}$, univers de l'expérience aléatoire, on veut pouvoir exprimer la fréquence d'apparition théorique de chaque issue.

On définit alors sur E une fonction de probabilité, notée $\mathbf{P}$, de sorte que :

Pour tout élément e_i de E, $\mathbf{P}(e_i) \geq 0$ et la somme des $\mathbf{P}(e_i)$ vaut 1 :

$$\boxed{\mathbf{P}(e_1) + \cdots + \mathbf{P}(e_n) = 1}.$$

Déterminer la fonction $\mathbf{P}$, c'est donner la **loi de probabilité** sur Ω. Elle est souvent donnée sous forme de tableau, associant à chaque issue sa probabilité.

Définition 5.9

Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire et A un événement de Ω.
La probabilité d'un événement A de Ω est la somme des probabilités des issues de A.

Exemple. La probabilité d'obtenir un nombre pair avec un jet de dé à six faces est :

$$\mathbf{P}(\text{« obtenir un nombre pair »}) = \mathbf{P}(2) + \mathbf{P}(4) + \mathbf{P}(6)$$

Propriété 1.9. Soit A un événement de Ω. Alors :

$$\boxed{\mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(\overline{A}) = 1 \text{ soit } \mathbf{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbf{P}(A)}.$$

Cas particulier : l'équiprobabilité.

Dans certains cas, on estime que les probabilités de toutes les issues sont les mêmes. On dit que les issues sont **équiprobables**. C'est le cas lorsque l'on considère que le dé est « **équilibré** », ou bien que l'on tire (une carte, une boule dans une urne) « **au hasard** ».

On dit alors que la loi est **équirépartie**.

Si l'univers Ω contient n éléments, on a toute issue e a la probabilité $\mathbb{P}(e) = \dfrac{1}{n}$.

Exemple. Pour revenir à l'exemple précédent, si le dé est équilibré, la loi est équirépartie. Donc :

$$\mathbf{P}(\text{« obtenir un nombre pair »}) = \mathbf{P}(2) + \mathbf{P}(4) + \mathbf{P}(6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

Propriété 2.9. On peut simplifier le calcul des probabilités dans le cas d'équiprobabilité. Soit A un événement de E dont la loi est équirépartie. Alors :

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = \frac{\text{nombre d'éléments de } A}{\text{nombre d'éléments de } \Omega}}.$$

Exemple. Dans notre exemple, l'événement « obtenir un nombre pair »représente l'ensemble $\{2; 4; 6\}$ qui contient 3 éléments. L'ensemble Ω contient lui 6 éléments.

On a donc $\mathbf{P}(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Pour les expériences qui consistent à obtenir successivement plusieurs éléments (tirer au hasard plusieurs cartes, lancer plusieurs fois un dé, etc.), on peut utiliser un arbre des possibilités pour visualiser et compter les issues possibles, qui sont alors des listes d'issues.

Exemple. On lance une pièce deux fois.

Pour les expériences où l'on fait un tirage (choisir une carte, prendre une boule dans une urne, etc.), on distingue :

- le tirage **sans remise**, où l'on ne remet pas l'élément qui a été tiré ;
- le tirage **avec remise**, où l'on remet l'élément qui a été tiré.

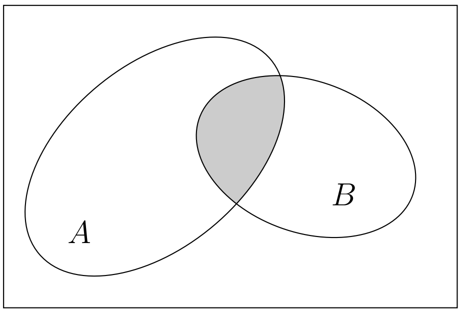
3. Lien entre union et intersection

Définition 6.9

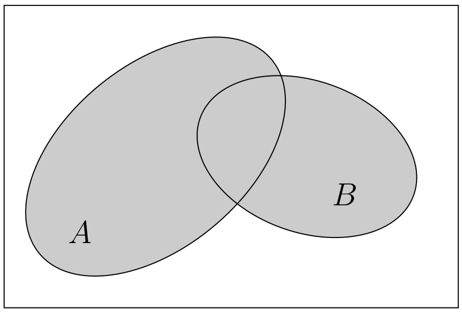
Soit A et B deux événements. On définit les événements :

1. « A et B » , noté $A \cap B$ et prononcé aussi A inter(section) B, l'événement contenant les issues qui sont à la fois dans A et dans B.
2. « A ou B », noté $A \cup B$ et prononcé aussi A union B, l'événement contenant les issues qui sont dans A ou dans B (**éventuellement les deux**).

Illustration. À l'aide d'un diagramme (dit de Venn), on peut visualiser ces deux événements :



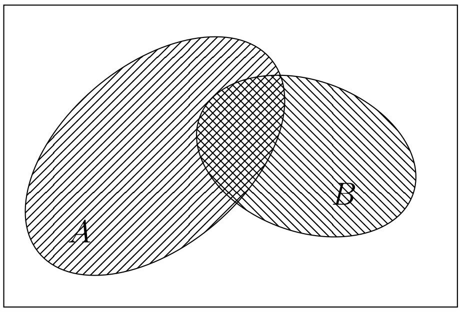
$A \cap B$



$A \cup B$

Propriété 3.9. Quels que soient les événements A et B, on a :

$$\boxed{\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)}.$$



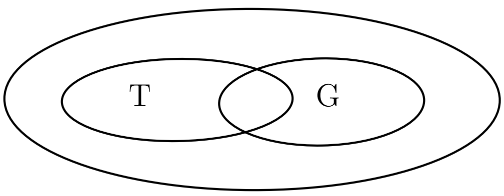
Application 1.9.

Un centre de loisir propose de nombreuses activités mais seulement deux activités sportives : le tennis et le golf.
Sur 240 personnes inscrites dans ce centre :

- 145 sont inscrites au tennis ;
- 107 sont inscrites au golf ;
- 48 sont inscrites au tennis et au golf.

On choisit une personne au hasard parmi les personnes inscrites dans ce centre. On donnera les résultats sous forme de fraction irréductible.

1. Compléter le diagramme de Venn qui suit :



2. Calculer les probabilités des événements suivants :
   - T : « la personne est inscrite au tennis » ;
   - G : « la personne est inscrite au golf ».
3. Décrire les événements suivants par une courte phrase puis calculer leur probabilité :
   - $T \cap G$;
   - $T \cup G$;
   - $\overline{T}$.