☆☆☆☆☆ **Exercice 1** **/3**

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 5 & -9 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & -1 \\ -14 & -1 \end{pmatrix}$

Justifier que l'on peut effectuer le produit AB puis effectuer ce produit.

★★☆☆☆ **Exercice 2** **/4**

Soit la matrice : $A = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2.
2. En déduire qu'il existe un unique réel x tel que $A^2 = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}$

★★★☆☆ **Exercice 3** **/6**

Soit la matrice : $M = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $6M - M^2$.
2. En déduire que la matrice M est inversible et que sa matrice inverse, M^{-1} peut s'écrire sous la forme $M^{-1} = \alpha I_2 + \beta M$ où α et β sont deux réels que l'on précisera.

★★★☆☆ **Exercice 4** **/3**

Soit M une matrice carrée d'ordre n. On dit que M est *nilpotente* d'indice $p \in \mathbb{N}$ si p est le plus petit entier naturel tel que $M^p = 0_n$ où 0_n est la matrice carrée d'ordre n composée uniquement de 0.

Soit M une matrice carrée d'ordre n nilpotente d'indice 3.

1. Développer puis simplifier le produit $(I_n - M)(I_n + M + M^2)$.
2. En déduire que la matrice $I_n - M$ est inversible et préciser son inverse.

★★★★☆ **Exercice 5** **/4**

1. Soit la matrice A carrée d'ordre 3 telle que :

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j, \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

   Écrire la matrice A avec ses coefficients.
2. Soit B la matrice définie par $B = A + I_3$.
   (a) Écrire la matrice B avec ses coefficients puis calculer B^2.
   (b) La matrice B est inversible ? Justifier.
   (c) Démontrer que la matrice A est inversible et préciser A^{-1} avec ses coefficients.