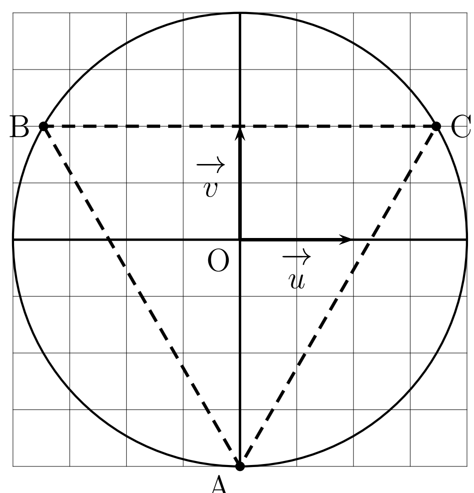
Exercice 1.

1. On a facilement :
   - $z_A = 2\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\right]$;
   - $z_B = 2\left[\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)\right]$;
   - $z_C = 2\left[\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\right]$;
2. $|z_A| = |z_B| = |z_C| = 2$ donc $OA = OB = OC = 2$ donc les points A, B et C appartiennent au cercle de centre O et de rayon 2.
3. Voici la figure attendue :



4. Il semble que le triangle ABC soit équilatéral. Prouvons-le.
5. On a facilement : $AB = |z_B - z_A|$ donc $AB = |-\sqrt{3} + 3\mathrm{i}| = \sqrt{3+9} = 2\sqrt{3}$.
   Faire de même pour AC et BC et trouver $2\sqrt{3}$ et la conjecture émise est prouvée.
6. (a) Soit $D(-\sqrt{3} - \mathrm{i})$. $|z| = |z + \sqrt{3} + \mathrm{i}| \iff |z - z_O| = |z - z_D| \iff OM = MD$.
   L'ensemble recherché est donc la médiatrice (Δ) du segment $[OD]$ où $D(-\sqrt{3} - \mathrm{i})$.

   (b) $A \in (\Delta) \iff |z_A| = |z_A + \sqrt{3} + \mathrm{i}|$.
   Or $|z_A| = 2$ et $|z_A + \sqrt{3} + \mathrm{i}| = |\sqrt{3} - \mathrm{i}| = 2$ donc $A \in (\Delta)$.
   Faire de même pour B : la droite (Δ) est donc la droite (AB).

Exercice 2.

1. $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{array}{rcl}
u_{n+1} & = & z_{n+1} - \mathrm{i} \\
 & = & \dfrac{1}{3}z_n + \dfrac{2}{3}\mathrm{i} - \mathrm{i} \\
 & = & \dfrac{1}{3}\left(u_n + \mathrm{i}\right) - \dfrac{1}{3}\mathrm{i} \\
 & = & \dfrac{1}{3}u_n + \dfrac{1}{3}\mathrm{i} - \dfrac{1}{3}\mathrm{i} \\
 & = & \dfrac{1}{3}u_n
\end{array}$$

2. La suite (u_n) est géométrique de raison $q = \dfrac{1}{3}$ et de premier terme $u_0 = v_0 - \mathrm{i} = 1 -$ ß.

   On a donc, pour tout n, $u_n = u_0 \times q^n = \left(1 - \mathrm{i}\right)\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.

3. (a) Pour tout entier naturel n,
   $\left|u_n\right| = \left|\left(\dfrac{1}{3}\right)^n (1-\mathrm{i})\right| = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n \left|1-\mathrm{i}\right| = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.

   (b) $\left|z_n - \mathrm{i}\right| = \left|u_n\right| = \sqrt{2}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$

   Or $-1 < \dfrac{1}{3} < \dfrac{1}{3} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\left|z_n - \mathrm{i}\right| = 0$.

   (c) z_n est l'affixe du point A_n, et i est l'affixe du point C ; donc $\left|z_n - \mathrm{i}\right| = \mathrm{A}_n\mathrm{C}$.
   $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|z_n - \mathrm{i}\right| = 0$ signifie que $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathrm{A}_n\mathrm{C} = 0$ ce qui veut dire que, lorsque n tend vers $+\infty$, le point A_n tend vers le point C.

Exercice 3.

Soient a, b et c trois nombres complexes de module 1 : ainsi $|a| = |a|^2 = |b| = |b|^2 = |c| = |c|^2 = 1$.

On a alors sachant que $|z|^2 = z\overline{z}$:

$$\begin{array}{rcl}
|a+b+c|^2 & = & (a+b+c)(\overline{a+b+c}) \\
 & = & (a+b+c)(\overline{a+b+c}) \\
 & = & (a+b+c)(\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}) \\
 & = & a\overline{a}+a\overline{b}+a\overline{c}+b\overline{a}+b\overline{b}+b\overline{c}+c\overline{a}+c\overline{b}+c\overline{c} \\
 & = & 3+a\overline{b}+a\overline{c}+b\overline{a}+b\overline{c}+c\overline{a}+c\overline{b}
\end{array}$$

De même $(ab \times \overline{ab} = |a|^2|b|^2 = 1)$:

$$\begin{array}{rcl}
|ab+ac+bc|^2 & = & (ab+ac+bc)(\overline{ab+ac+bc}) \\
 & = & (ab+ac+bc)(\overline{a}\times\overline{b}+\overline{a}\times\overline{c}+\overline{b}\times\overline{c}) \\
 & = & 3+a\overline{b}+a\overline{c}+b\overline{a}+b\overline{c}+c\overline{a}+c\overline{b}
\end{array}$$

il vient alors $|a+b+c|^2 = |ab+ac+bc|^2$ et donc $|a+b+c| = |ab+ac+bc|$ car $|a+b+c|$ et $|ab+ac+bc|$ positifs.