Un exemple pour montrer l'objectif

Un exemple pour montrer l'objectif

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et tout entier naturel n par

Un exemple pour montrer l'objectif

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et tout entier naturel n par

$$u_{n+1} = u_n + 2n + 3.$$

Un exemple pour montrer l'objectif

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et tout entier naturel n par

$$u_{n+1} = u_n + 2n + 3.$$

$u_0 = 1$, $u_1 =$

Un exemple pour montrer l'objectif

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et tout entier naturel n par

$$u_{n+1} = u_n + 2n + 3.$$

$u_0 = 1$, $u_1 = 4$,

Un exemple pour montrer l'objectif

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et tout entier naturel n par

$$u_{n+1} = u_n + 2n + 3.$$

$u_0 = 1$, $u_1 = 4$, $u_2 =$

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et tout entier naturel n par

$$u_{n+1} = u_n + 2n + 3.$$

$u_0 = 1$, $u_1 = 4$, $u_2 = 9$.

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et tout entier naturel n par

$$u_{n+1} = u_n + 2n + 3.$$

$u_0 = 1$, $u_1 = 4$, $u_2 = 9$.
Il semble que pour tout entier naturel n on ait

Un exemple pour montrer l'objectif

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et tout entier naturel n par

$$u_{n+1} = u_n + 2n + 3.$$

$u_0 = 1$, $u_1 = 4$, $u_2 = 9$.
Il semble que pour tout entier naturel n on ait

$$u_n = (n+1)^2.$$

Un exemple pour montrer l'objectif

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et tout entier naturel n par

$$u_{n+1} = u_n + 2n + 3.$$

$u_0 = 1$, $u_1 = 4$, $u_2 = 9$.
Il semble que pour tout entier naturel n on ait

$$u_n = (n+1)^2.$$

À quelle difficulté est-on confronté ?

Un exemple pour montrer l'objectif

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et tout entier naturel n par

$$u_{n+1} = u_n + 2n + 3.$$

$u_0 = 1$, $u_1 = 4$, $u_2 = 9$.
Il semble que pour tout entier naturel n on ait

$$u_n = (n+1)^2.$$

À quelle difficulté est-on confronté ?

Le principe

Le principe

Le principe

Le principe

Le raisonnement par récurrence peut se comparer à la théorie des dominos : on considère une suite de dominos rangés de telle sorte que si un domino tombe alors le suivant tombera. Si on fait tomber le premier domino alors le second tombera, puis le troisième, ...etc.. Conclusion : si le premier domino tombe alors tous tomberont. Tout repose en fait sur le principe de propagation ”si l’un tombe alors le suivant aussi”

Axiome de récurrence

Soit P_n une proposition relative à l'entier n et n_0 un entier.

Soit P_n une proposition relative à l'entier n et n_0 un entier.

Initialisation : si la proposition P_{n_0} est vraie,

Axiome de récurrence

Soit P_n une proposition relative à l'entier n et n_0 un entier.

Initialisation : si la proposition P_{n_0} est vraie,

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$.

Axiome de récurrence

Soit P_n une proposition relative à l'entier n et n_0 un entier.

Initialisation : si la proposition P_{n_0} est vraie,

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Si la véracité de la proposition P_n avec $n \geq n_0$ implique que la proposition P_{n+1} soit vraie

Axiome de récurrence

Soit P_n une proposition relative à l'entier n et n_0 un entier.

Initialisation : si la proposition P_{n_0} est vraie,

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Si la véracité de la proposition P_n avec $n \geq n_0$ implique que la proposition P_{n+1} soit vraie

alors **pour tout entier** naturel $n \geqslant n_0$ la proposition P_n **est vraie.**

Remarques importantes

1. Dans les exercices, on pourra toujours modéliser le raisonnement par récurrence par l'illustration des dominos qui tombent.

Remarques importantes

1. Dans les exercices, on pourra toujours modéliser le raisonnement par récurrence par l'illustration des dominos qui tombent.

Remarques importantes

1. Dans les exercices, on pourra toujours modéliser le raisonnement par récurrence par l'illustration des dominos qui tombent.
2. Si le premier domino ne tombe pas, il ne peut donc pas faire tomber les autres.

Remarques importantes

1. Dans les exercices, on pourra toujours modéliser le raisonnement par récurrence par l'illustration des dominos qui tombent.
2. Si le premier domino ne tombe pas, il ne peut donc pas faire tomber les autres.

Remarques importantes

1. Dans les exercices, on pourra toujours modéliser le raisonnement par récurrence par l'illustration des dominos qui tombent.
2. Si le premier domino ne tombe pas, il ne peut donc pas faire tomber les autres.
   La propriété ne peut donc pas être vraie pour tout $n \geqslant n_0$.

Remarques importantes

1. Dans les exercices, on pourra toujours modéliser le raisonnement par récurrence par l'illustration des dominos qui tombent.
2. Si le premier domino ne tombe pas, il ne peut donc pas faire tomber les autres.
   La propriété ne peut donc pas être vraie pour tout $n \geqslant n_0$.
3. De même si l'un domino tombe mais ne fait pas tomber le suivant alors tous les dominos ne tombent pas et la propriété ne peut être vraie pour tout $n \geqslant n_0$.

Remarques importantes

1. Dans les exercices, on pourra toujours modéliser le raisonnement par récurrence par l'illustration des dominos qui tombent.
2. Si le premier domino ne tombe pas, il ne peut donc pas faire tomber les autres.
   La propriété ne peut donc pas être vraie pour tout $n \geqslant n_0$.
3. De même si l'un domino tombe mais ne fait pas tomber le suivant alors tous les dominos ne tombent pas et la propriété ne peut être vraie pour tout $n \geqslant n_0$.

Remarques importantes

1. Dans les exercices, on pourra toujours modéliser le raisonnement par récurrence par l'illustration des dominos qui tombent.
2. Si le premier domino ne tombe pas, il ne peut donc pas faire tomber les autres.
   La propriété ne peut donc pas être vraie pour tout $n \geqslant n_0$.
3. De même si l'un domino tombe mais ne fait pas tomber le suivant alors tous les dominos ne tombent pas et la propriété ne peut être vraie pour tout $n \geqslant n_0$.
4. *L'initialisation* et *l'hérédité* sont donc indispensables pour prouver une proposition pour TOUT

Un exemple

Reprenons l’exemple initial.

Un exemple

Reprenons l'exemple initial.
On pose P_n : "$u_n = (n+1)^2$".

Un exemple

Reprenons l'exemple initial.
On pose P_n : "$u_n = (n+1)^2$".

Initialisation :

Reprenons l'exemple initial.
On pose P_n : "$u_n = (n+1)^2$".

Initialisation : si $n = 0$ on a d'une part dans le membre de gauche

Un exemple

Reprenons l'exemple initial.
On pose P_n : "$u_n = (n+1)^2$".

Initialisation : si $n = 0$ on a d'une part dans le membre de gauche $u_0 = 1$ d'après l'énoncé et

Un exemple

Reprenons l'exemple initial.
On pose P_n : "$u_n = (n+1)^2$".

Initialisation : si $n = 0$ on a d'une part dans le membre de gauche $u_0 = 1$ d'après l'énoncé et dans le membre de droite

Un exemple

Reprenons l'exemple initial.
On pose P_n : "$u_n = (n+1)^2$".

Initialisation : si $n = 0$ on a d'une part dans le membre de gauche $u_0 = 1$ d'après l'énoncé et dans le membre de droite $(0+1)^2 = 1$ donc P_0 **est vraie.**

Hérédité :

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons P_n vraie(

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons P_n vraie($\quad u_n = (n+1)^2$).

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons P_n vraie($\quad u_n = (n+1)^2$).
Montrons que P_{n+1} est vraie (

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons P_n vraie($u_n = (n+1)^2$).
Montrons que P_{n+1} est vraie ($u_{n+1} = (n+2)^2$).

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons P_n vraie($u_n = (n+1)^2$).
Montrons que P_{n+1} est vraie ($u_{n+1} = (n+2)^2$).

$$u_{n+1} =$$

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons P_n vraie($u_n = (n+1)^2$).
Montrons que P_{n+1} est vraie ($u_{n+1} = (n+2)^2$).

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + 2n + 3 \quad \text{d'après l'énoncé.} \\ &= \end{aligned}$$

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons P_n vraie($\quad u_n = (n+1)^2$).
Montrons que P_{n+1} est vraie ($u_{n+1} = (n+2)^2$).

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + 2n + 3 \quad \text{d'après l'énoncé.} \\ &= (n+1)^2 + 2n + 3 \quad \text{d'après l'hypothèse de récurrence.} \\ &= \end{aligned}$$

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons P_n vraie($\quad u_n = (n+1)^2$).
Montrons que P_{n+1} est vraie $(u_{n+1} = (n+2)^2)$.

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= u_n + 2n + 3 \quad \text{d'après l'énoncé.} \\
&= (n+1)^2 + 2n + 3 \quad \text{d'après l'hypothèse de récurrence.} \\
&= n^2 + 4n + 4 \quad \text{en développant.} \\
&=
\end{aligned}$$

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons P_n vraie($u_n = (n+1)^2$).
Montrons que P_{n+1} est vraie ($u_{n+1} = (n+2)^2$).

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + 2n + 3 \quad \text{d'après l'énoncé.} \\ &= (n+1)^2 + 2n + 3 \quad \text{d'après l'hypothèse de récurrence.} \\ &= n^2 + 4n + 4 \quad \text{en développant.} \\ &= (n+2)^2 \quad \text{identité remarquable} \end{aligned}$$

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons P_n vraie($u_n = (n+1)^2$).
Montrons que P_{n+1} est vraie ($u_{n+1} = (n+2)^2$).

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= u_n + 2n + 3 \quad \text{d'après l'énoncé.} \\
&= (n+1)^2 + 2n + 3 \quad \text{d'après l'hypothèse de récurrence.} \\
&= n^2 + 4n + 4 \quad \text{en développant.} \\
&= (n+2)^2 \quad \text{identité remarquable}
\end{aligned}$$

On en déduit donc que P_{n+1} est vraie.

Conclusion

Conclusion

P_0 est vraie et P_n est héréditaire à partir du rang $n = 0$.

Conclusion

P_0 est vraie et P_n est héréditaire à partir du rang $n = 0$.
On en déduit que P_n est vraie pour tout entier naturel n soit :

Conclusion

P_0 est vraie et P_n est héréditaire à partir du rang $n = 0$.
On en déduit que P_n est vraie pour tout entier naturel n soit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (n+1)^2.$$