75 Compléter les ... par **multiple** ou **diviseur :**

1. 25 est un ____________ de 5.
2. 2 020 est un ____________ de 0.
3. 21 est un ____________ de $-2\,100$.
4. 0 est un ____________ de 4.
5. -1 est un ____________ de 4.
6. 64 est un ____________ de 64.

76 Déterminer l'ensemble des diviseurs positifs des nombres 37, -42, -13 et 20.

77 Déterminer les entiers relatifs n tels que $3n-5$ divise 4.

78 Déterminer les entiers naturels n tels que $n+7$ soit un multiple de 5.

79 Montrer que $51n+4$ n'est jamais divisible par 17.

80 Montrer que la somme de quatre entiers consécutifs est paire.

81 Démontrer qu'un multiple de 36 est aussi multiple de 9.
La réciproque est-elle vraie ?

82 Soit a et n deux entiers relatifs.
Démontrer que si a divise $2n+5$ et a divise $3n-1$ alors a divise 17.

83 Soit n un entier naturel. Montrer que $n(n^2+5)$ est pair en raisonnant par disjonction des cas.

84

1. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Démontrer que $A = \dfrac{n(n+1)}{2}$ est un entier.
2. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Déterminer, en utilisant la disjonction des cas, les valeurs de n pour lesquelles $A = n^2+5$ est divisible par 3.
3. (a) Déterminer les restes possibles dans la division euclidienne d'un nombre impair par 4.
   (b) Montrer que, si n est un nombre impair, alors n^2-1 est divisible par 8.

85 On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_n = (3n-1)^2 - 2 + (-2)^n.$$

1. Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} + 2u_n$ est un multiple de 27.
2. Démontrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \text{ est un multiple de } 27.$$

86 Un nombre s'écrit en base 10 sous la forme $\Delta5\Delta5\Delta5\Delta5\Delta5\Delta$.
Quelle valeur donner à Δ pour que la somme des chiffres de ce nombre soit un multiple de 7 ?

87 Écrire la division euclidienne de a par b dans les cas suivants :

1. $a = 327$ et $b = 8$.
2. $a = -89$ et $b = 6$.
3. $a = -17$ et $b = 25$.
4. $a = -5\,020$ et $b = 12$.

88 Si on divise un entier naturel n par 105, le reste est 21, mais si on divise ce même entier naturel n par 103, le quotient augmente de 2 et le reste diminue de 6.
Quel est cet entier naturel n ?

89 Dans une division, le quotient et le reste ne changent pas quand on augmente le dividende de 168 et le diviseur de 4. Quel est le quotient ?

90 Par quel entier faut-il diviser 1 088 pour obtenir 37 pour quotient et 15 pour reste ?

91 Dire pour chaque proposition si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse :

1. $18 \equiv 0\ [9]$
2. $127 \equiv 5\ [2]$
3. $-47 \equiv -3\ [5]$
4. $-117 \equiv 0\ [3]$

92 Compléter :

1. $12 \equiv$ ______ $[5]$
2. $10 \equiv$ ______ $[11]$
3. $77 \equiv$ ______ $[4]$
4. $66 \equiv$ ______ $[9]$
5. $-2 \equiv$ ______ $[8]$
6. $-18 \equiv$ ______ $[7]$

93 Résoudre dans $\mathbb{Z}$ les équations suivantes :

1. $x+5 \equiv 2$ [3]
2. $3x \equiv 7$ [4]
3. $(x-3)(x+7) \equiv 0$ [5]

94 Résoudre dans $\mathbb{Z}$ les équations suivantes :

1. $327 \equiv x$ [11] et $0 \leqslant x < 11$.
2. $5x \equiv 2$ [7] et $-3 < x < 12$.
3. $17 - x \equiv 2$ [13] et $-25 < x < 5$.

95 Déterminer le reste de la division euclidienne de $2\,020 \times 2\,022 \times 2\,023$ par 11.

96

1. Étudier les congruences des puissance de 2 modulo 5.
2. En déduire le reste de la division euclidienne de $2\,022^{2\,023}$ par 5.

97

1. Vérifier que $5^3 \equiv 1$ [31].
2. Quel est le reste de la division euclidienne de $7 \times 5^{15} - 6$ par 31 ?

98 Démontrer que $1^{2\,023} + 2^{2\,023} + 3^{2\,023} + 4^{2\,023}$ est un multiple de 5.

99 Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $A = n(n^2+5)$.
Montrer, en utilisant la congruence modulo 3, que $3 \mid A$.

100

1. À l'aide de la calculatrice, calculer les 30 premières valeurs de $(n^2-1)(n^2-4)$.
2. Conjecturer pour quelles valeurs de n ce nombre est divisible par 5.
3. Démontrer cette conjecture.

101 Démontrer que $n \equiv 5$ [7] $\iff n^2 - 3n + 4 \equiv 0$ [7].
Pour la condition suffisante, on complétera le tableau de congruence ci-dessous :

$n \equiv \ldots$ [7]	0	1	2	3	4	5	6
$n^2 \equiv \ldots$ [7]							
$3n \equiv \ldots$ [7]							
$n^2 - 3n + 4 \equiv \ldots$ [7]							

102 Montrer, en utilisant la congruence modulo 6, que pour tout entier naturel n, $n(n+1)(2n+1)$ est multiple de 6.

103 Soit n un entier naturel non nul.
On note $n! = n(n-1) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1$.

1. L'entier naturel $(n-1)! + 1$ est-il pair ?
2. Prouver que $(15-1)! + 1$ n'est pas divisible par 15.
3. L'entier $(11-1)! + 1$ est-il divisible par 11 ?

104 On considère la suite (u_n) d'entiers naturels définie par :

$$(u_n) \begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 8u_n + 1 \end{cases}$$

1. Calculer les 5 premiers termes.
   Quelle conjecture peut-on émettre concernant le dernier chiffre de u_n pour $n \geqslant 1$?
2. Valider cette conjecture à l'aide d'une démonstration par récurrence.

105 On considère l'équation (F) : $11x^2 - 7y^2 = 5$, où x et y sont des entiers relatifs.

1. Démontrer que si le couple $(x\ ;\ y)$ est solution de (F), alors $x^2 \equiv 2y^2$ [5].
2. Soient x et y des entiers relatifs. Recopier et compléter les deux tableaux suivants :

Modulo 5, x est congru à	0	1	2	3	4
Modulo 5, x^2 est congru à					

Modulo 5, y est congru à	0	1	2	3	4
Modulo 5, $2y^2$ est congru à					

   Quelles sont les valeurs possibles du reste de la division euclidienne de x^2 et de $2y^2$ par 5 ?
3. En déduire que si le couple $(x\ ;\ y)$ est solution de (F), alors x et y sont des multiples de 5.
4. Démontrer que si x et y sont des multiples de 5, alors le couple $(x\ ;\ y)$ n'est pas solution de (F). Que peut-on en déduire pour l'équation (F) ?