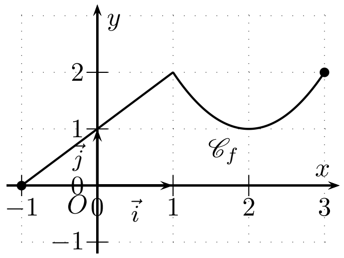
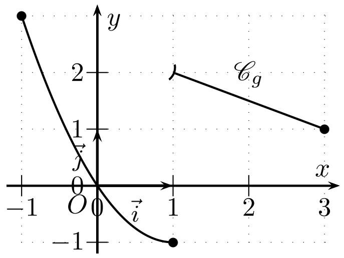
○○○ Exercice 52.
Les fonctions f et g sont représentées sur la figure ci-après :





1. Lesquelles de ces fonctions sont continues sur $[-1\,;\,3]$?
2. Préciser sur quel(s) intervalles(s) la fonction semble dérivable.

●○○ Exercice 53.
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 1 & \text{si} \quad x \leqslant -1 \\ 3 - x & \text{si} \quad x > -1 \end{cases}$$

1. Représenter graphiquement f.
2. f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

●○○ Exercice 54.

On considère la suite (u_n) définie par son premier terme $u_0 =$ et par la relation de récurrence, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est la fonction définie sur $]-\infty\,;\,12]$
par $f(x) = \sqrt{12 - x}$. On admet que la suite (u_n) converge et que f est continue sur $]-\infty\,;\,12]$. On note ℓ la limite de la suite (u_n).

1. À l'aide de la calculatrice, conjecturer la valeur de ℓ.
2. Démontrer qu'il existe un unique réel α tel que $f(\alpha) = \alpha$.
3. Démontrer la conjecture en utilisant la continuité de f.

●○○ Exercice 55.
Reprendre les questions de l'exercice précédent avec (u_n), définie par $u_0 = -10$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^x - 1$$

.

●○○ Exercice 56.
Une fonction f admet pour tableau de variations :

x	-3		0		4
Variation de f	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0

1. Déterminer le nombre de solutions de l'équation :
   (a) $f(x) = 0$
   (b) $f(x) = 3$
   (c) $f(x) = -\dfrac{1}{2}$
2. (a) Donner l'allure d'une courbe pouvant représenter la fonction f.
   (b) Discuter selon les valeurs de m, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.

●○○ Exercice 57.
1. À l'aide de la calculatrice, conjecturer le nombre de solutions de l'équation :
$$x^3 - 6x + 2 = 0.$$
2. Montrer que l'intervalle $[-1\,;\,2]$ contient une des solutions précédentes.

●●○ Exercice 58.
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 + x^2 + x.$$

1. Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Étudier les variations de f.
3. Démontrer que l'équation $f(x) = 2$ a une solution unique α dans $\mathbb{R}$ puis vérifier que α appartient à l'intervalle $[0\,;\,2]$.
4. Déterminer une valeur approchée à 10^{-1} près de α.

●●○ Exercice 59.
Soit $f\ :\ [0\,;\,1] \mapsto [0\,;\,1]$ une fonction continue.
Montrer que f admet un point fixe, c'est-à-dire que l'équation $f(x) = x$ admet une solution sur $[0\,;\,1]$.

●●○ Exercice 60.
Démontrer que l'équation $x^2\mathrm{e}^x = 1$ admet une solution unique dans $\mathbb{R}$ et que cette solution appartient à l'intervalle $[0\,;\,1]$.

●○○ Exercice 61.
Montrer que les courbes représentatives des fonctions suivantes admettent la même tangente au point d'abscisse 1 :

1. $f \ : \ x \longmapsto -x^2 + x + 3.$
2. $g \ : \ x \longmapsto \dfrac{1}{x} + 2.$
3. $h \ : \ x \longmapsto -5x + 8\sqrt{x}.$

●●○ Exercice 62.
Soit f la fonction définie sur $]-1\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \sqrt{x+1}.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1. Démontrer que f est concave sur $[-1\,;+\infty[$.
2. Tracer sur l'écran d'une calculatrice $\mathscr{C}$ et la droite d'équation $y = \dfrac{1}{2}x + 1$.
3. Démontrer que pour tout réel x appartenant à $]-1\,;+\infty[$,
$$\sqrt{1+x} \leqslant \frac{1}{2}x + 1.$$

●●○ Exercice 63.
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x\mathrm{e}^x + 1.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1. Étudier la convexité de f.
2. Déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.
3. En déduire que, pour tout réel x appartenant à $[-2\,;+\infty[$, $f(x) \geqslant x + 1$.

●○○ Exercice 64.

Soit f une fonction convexe dérivable et définie sur un intervalle I.
Démontrer que, pour tous réels a et b de I, on a :

$$f(b) - f(a) \geqslant f'(a)(b-a).$$

●○○ Exercice 65.
Déterminer les éventuels points d'inflexion de la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 - 21x^2 + 19.$$

●○○ Exercice 66.
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

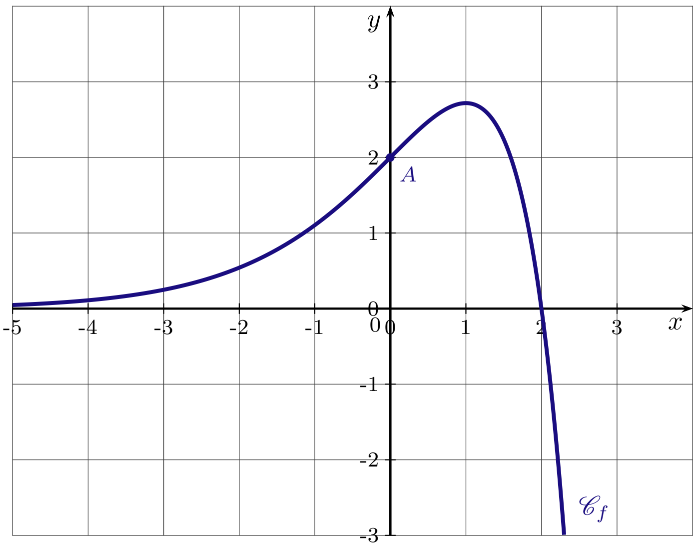
$$f(x) = x^4 - 2x^3 - 120x^2 + 3.$$

Soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.
Étudier la convexité de f et l'existence d'éventuels points d'inflexion pour $\mathscr{C}_f$.

●●○ Exercice 67.
Soit f la fonction définie pour tout réel x par :

$$f(x) = (2-x)\mathrm{e}^x.$$

Sa courbe représentative notée $\mathscr{C}_f$ est tracée ci-dessous dans le plan muni d'un repère orthonormé.



1. Déterminer une équation de la tangente $\mathscr{D}$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse 0 puis tracer la droite $\mathscr{D}$ dans le repère précédent.
2. Quelle conjecture peut-on émettre quant au point A pour $\mathscr{C}_f$?
3. On note f'' la dérivée seconde de la fonction f. Calculer $f''(x)$.
4. Étudier la convexité de la fonction f.
5. Démontrer la conjecture de la question **2.**