

James Sylvester
1814/1897

Ce premier chapitre va nous permettre un nouveau retour en arrière avec les systèmes d'équations étudiés en classe de seconde. La résolution d'un système linéaire de deux équations à deux inconnues est facile à mettre en œuvre, mais lorsque le nombre d'inconnues et d'équations augmente, la résolution devient fastidieuse. Peut-on concevoir un objet mathématique permettant de diminuer la longueur et la complexité des calculs en les regroupant ?

Une **matrice**, c'est-à-dire un tableau de nombres, répond à cet objectif. C'est James Sylvester (1814-1897) qui a utilisé pour la première fois, en 1850, le mot matrice (matrix) dans un article. Les opérations sur les matrices forment **l'algèbre linéaire**.

1. Notion de matrice et vocabulaire

1.1 Matrice

Définition 1.1

Soit m et n deux entiers naturels **non nuls**.

On appelle **matrice** de **dimension** $m \times n$, ou d'ordre $m \times n$ voire de format $m \times n$, un tableau de m lignes et n colonnes de nombres réels.

On note $a_{i,j}$ l'élément de la matrice situé à l'intersection de la i -ième ligne et de la j -ième colonne.

Une matrice A est représentée entre deux parenthèses ou deux crochets :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,j} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \text{ ou } A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,j} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

Exemple. La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & -4 \\ 6 & 1 & 0 & e^2 \\ \sqrt{2} & 1 & \frac{1}{2} & 8 \end{pmatrix}$ est une matrice d'ordre _____.

Le coefficient $a_{2,4}$, coefficient situé à la _____ de la _____, de la matrice A est :

$$a_{2,4} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

1.2 Quelques cas particuliers

1.2.1 Matrice carrée

Définition 2.1

Une matrice ayant le **même nombre** n de lignes et de colonnes est une matrice _____ d'ordre _____.

Exemple. La matrice $M = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ est une matrice carrée _____.

1.2.2 Matrice ligne

Définition 3.1

Une matrice formée **d'une seule ligne** et de n (avec $n \in \mathbb{N}^*$) colonnes est **une matrice ligne ou vecteur ligne**.

Exemple. La matrice $A = \begin{pmatrix} -7 & 9 & 8 & 5 \end{pmatrix}$ est une **matrice ligne** de dimension _____.

1.2.3 Matrice colonne


Définition 4.1

Une matrice formée de m (avec $m \in \mathbb{N}^*$) **lignes et d'une seule colonne** est une **matrice colonne ou vecteur colonne**.

Exemple. La matrice $C = \begin{pmatrix} 25 \\ 28 \\ 16 \end{pmatrix}$ est une **matrice colonne** de dimension _____.

1.3 Égalité de deux matrices

Propriété 1.1. Deux matrices A et B sont **égales** si, et seulement si, elles ont **même dimension** et que tous leurs éléments situés à la **même place sont égaux**.

 **Application 1.1.** On considère $A = \begin{pmatrix} 5 & 2-a & -3 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & b+2 \end{pmatrix}$

Déterminer les valeurs de a et b pour que les matrices A et B soient égales.

2. Opérations sur les matrices

2.1 Addition de matrices

Définition 5.1

La **somme** de deux matrices A et B de **même dimension** est la matrice notée $A + B$ obtenue en ajoutant les éléments de A et ceux de B situés à la même place.

Si $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ sont deux matrices d'ordre $m \times n$ alors :

$$A + B = (a_{i,j} + b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$$

Exemple. Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 10 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$:

$$A + B = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$$

Propriété 2.1.

Si A , B et C sont des matrices de _____, alors :

1. $A + B = B + A$.
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$

2.2 Multiplication par un réel

Définition 6.1

Le **produit** d'une matrice A par un réel k est la matrice $k \times A$ obtenue en multipliant chaque élément de A par le réel k .

Si $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ est une matrice d'ordre $m \times n$ alors pour tout réel k :

$$kA = (ka_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$$

Exemple. Soit $A = \begin{pmatrix} 2,3 & 4 & 2 \\ -2 & 0 & -0,5 \end{pmatrix}$ alors : $10 \times A = \begin{pmatrix} & & \\ & & \end{pmatrix}$.

2.3 Produit de matrices

2.3.1 Multiplication d'une matrice ligne par une matrice colonne

Définition 7.1

Soit n un entier naturel non nul, A une matrice ligne de dimension $1 \times n$ et B une matrice colonne de dimension $n \times 1$.

Le **produit** $A \times B$ de ces deux matrices est :

$$\begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_i & \cdots & a_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = (a_1 \times b_1 + \cdots + a_i \times b_i + \cdots + a_n \times b_n).$$

Le produit $A \times B$ de ces deux matrices est la matrice de dimension 1×1 qui n'a qu'un seul élément.

Exemple.

$$\begin{pmatrix} 60 & 50 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 25 \\ 28 \\ 30 \end{pmatrix} =$$

2.3.2 Produit de deux matrices



Le produit AB de deux matrices A et B est défini si et seulement si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B .

Définition 8.1

Soient $A = (a_{ij})$ une matrice $n \times p$ et $B = (b_{ij})$ une matrice $p \times q$. Alors le produit $C = AB$ est une matrice $n \times q$ dont les coefficients c_{ij} sont définis par :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj}$$


On peut écrire le coefficient de façon plus développée, à savoir :

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ik}b_{kj} + \cdots + a_{ip}b_{pj}.$$

Remarque. Il peut être **utile** de disposer les calculs de la façon suivante :

$$A \rightarrow \begin{pmatrix} & & & \\ \times & \times & \times & \times \\ & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & \times \\ & & \times \\ & & \times \\ & & \times \\ & & \vdots \\ - & - & - & c_{ij} \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow B \\ \\ \leftarrow AB \end{matrix}$$

Avec cette disposition, on considère d'abord la ligne de la matrice A située à gauche du coefficient que l'on veut calculer (ligne représentée par des \times dans A) et aussi la colonne de la matrice B située au-dessus du coefficient que l'on veut calculer (colonne représentée par des \times dans B). On calcule le produit du premier coefficient de la ligne par le premier coefficient de la colonne ($a_{i1} \times b_{1j}$), que l'on ajoute au produit du deuxième coefficient de la ligne par le deuxième coefficient de la colonne ($a_{i2} \times b_{2j}$), que l'on ajoute au produit du troisième...

 **Application 2.1.** On donne les matrices $A = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Peut-on calculer le produit $A \times B$? Si oui, calculer ce produit.

2. Peut-on calculer le produit $B \times A$? Si oui, calculer ce produit.

2.4 Propriétés

Propriété 3.1. Soient A , B et C trois matrices telles que les sommes et les produits ci-dessous sont définis.

- $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$.
- $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$.
- $(A + B) \times C = A \times C + B \times C$.



En général $A \times B \neq B \times A$, on dit que la multiplication n'est pas **commutative** et il faut faire attention à l'ordre dans lequel on effectue les calculs.

Exemple.

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

Et

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$



$A \times C = B \times C$ ne signifie pas que $A = B$. De même $A \times B = 0$ ne signifie pas que $A = 0$ ou $B = 0$.

Exemple.

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 3 & -6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -6 & 3 & -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & -3 \\ 5 & -6 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

3. Matrices carrées

3.1 Matrice identité

3.1.1 Matrice diagonale

Définition 9.1

Une matrice carrée dont tous les coefficients sont nuls, sauf éventuellement les coefficients de la diagonale, est appelée **matrice diagonale**.

Exemple. La matrice $A = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$ est une matrice diagonale mais en revanche, la matrice $B = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{pmatrix}$ n'est pas une matrice diagonale.

3.1.2 Matrice identité

Définition 10.1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La matrice diagonale d'ordre n dont tous les coefficients sur la diagonale sont égaux à 1 est appelée **matrice identité** d'ordre n , on la note I_n .

Exemples.

$$I_2 = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{pmatrix} \quad I_3 = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \quad I_4 = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}.$$

Propriété 4.1. Soit A une matrice carrée d'ordre n alors $A \times I_n = I_n \times A = A$, où I_n est la matrice identité d'ordre n .

Exemple.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

3.2 Puissances d'une matrice carré

Définition 11.1

Soit A une matrice carré d'ordre n et p un entier supérieur ou égal à 1.

La **puissance** p -ième de la matrice A est la matrice carrée d'ordre n obtenue en effectuant le produit de p matrices égales à A .

$$A^p = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{p \text{ fois}}.$$

Par convention $A^0 = I_n$.

Exemple. Soit $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -5 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$:

$$A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -5 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -5 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$


$$A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -5 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

3.3 Inverse d'une matrice carrée

Définition 12.1

Une matrice **carrée** A d'ordre n est **inversible**, s'il existe une matrice carrée B d'ordre n telle que $A \times B = B \times A = I_n$, où I_n est la matrice identité d'ordre n .

La matrice inverse de A si elle existe, est unique et est notée : A^{-1} .

 **Application 3.1.** On donne les matrices $\begin{pmatrix} 1 & -0,5 \\ -2 & 1,5 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$.

Montrer que ces matrices sont inverses l'une de l'autre.

Propriété 5.1. Soit A une matrice carrée d'ordre 2, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

La matrice A est **inversible** si et seulement si $ad - bc \neq 0$.

Le réel $ad - bc$ est appelé **déterminant** de la matrice A et est noté Δ .

Si $ad - bc \neq 0$ alors,

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

 **Application 4.1.** Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$. Montrer que A est inversible et préciser A^{-1} .
