Chapitre

0

Raisonner par récurrence

1. Préambule

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + 2n + 3. \end{cases}$$

1. Calculer les trois premiers termes de cette suite.

2. Quelle conjecture peut-on émettre sur l'expression de u_n en fonction de n ?

3. À quelle difficulté est-on confrontés ?

2. Principe de récurrence

Le raisonnement par récurrence peut se comparer à la théorie des dominos : on considère une suite de dominos rangés de telle sorte que si un domino tombe alors le suivant tombera. Si on fait tomber le premier domino alors le second tombera, puis le troisième, ...etc.. Conclusion : si le premier domino tombe alors tous tomberont. Tout repose en fait sur le principe de propagation "si l'un tombe alors le suivant aussi"

Le raisonnement par récurrence repose sur le principe suivant :

Le principe

Si $\underbrace{\mathscr{P}_0 \text{ est vraie}}_{\text{Initialisation}}$ et si : $\underbrace{\forall n \in \mathbb{N},\ (\mathscr{P}_n \Longrightarrow \mathscr{P}_{n+1})}_{\text{Hérédité}}$, alors : $\forall n,\ \mathscr{P}_n$.

Ⓡ

- La proposition $\mathscr{P}_n$ peut se traduire par une égalité, une inégalité, une affirmation ...
- Les conditions d'initialisation et d'hérédité sont **indispensables** (voir contre-exemples en exercices).
- La condition d'hérédité est une **implication**, on suppose que $\mathscr{P}_n$ est vraie puis on montre que $\mathscr{P}_{n+1}$ l'est également.

⚠ Toute autre rédaction est **exclue**. Commencer l'hérédité par « supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}_n$ est vraie » est une erreur GRAVISSIME. En effet, si on suppose la proposition vraie pour TOUS les rangs, que reste-t-il à prouver ? On ne peut jamais montrer ce qu'on prend comme hypothèse.

Application 1.o. Cas d'une égalité.

Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite géométrique de raison q et de premier terme v_0.
Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = v_0 q^n$.

Application 2.o. Cas d'une inégalité.

Soit a un réel strictement positif.
Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ (1+a)^n \geqslant 1 + na$ *(Inégalité de Bernoulli)*.

Application 3.o. Cas d'une phrase.

Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 7^n - 1$ est multiple de 6.

Application 4.o. Cas d'une somme.

Soit $q \neq 1$ un réel.
Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.