Chapitre

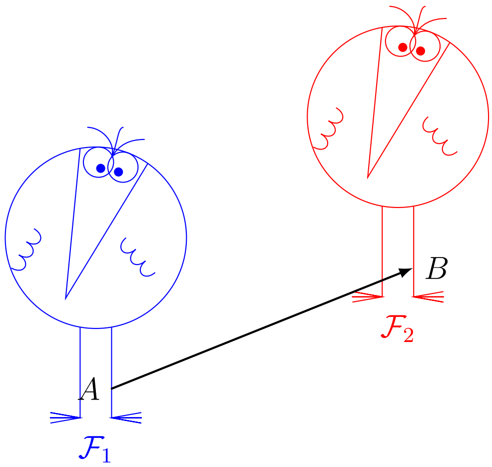
7

Les vecteurs

1. Translation et vecteurs

1.1 Translation de vecteur

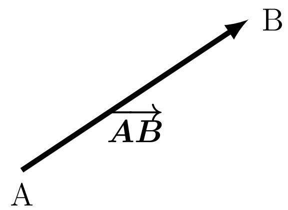
Sur la figure ci-dessous, on a construit l'image $\mathcal{F}_2$ de la figure $\mathcal{F}_1$ par la **translation** qui transforme A en B. La flèche que l'on a tracée allant de A jusqu'à B indique **la direction**, **le sens** et **la longueur** du déplacement que l'on doit effectuer pour construire l'image d'un point :



Définition 1.7

Soient A et B deux points du plan.
La **translation** qui transforme A en B est appelée **translation de vecteur** $\overrightarrow{AB}$.

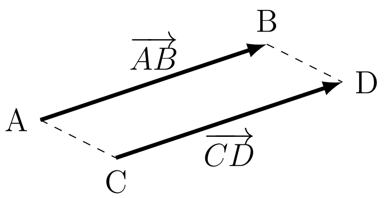
Lorsque A et B sont **distincts**, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est représenté par une flèche allant du point A jusqu'au point B :



1.2 Égalité de vecteurs

Définition 2.7

Soient quatre points A, B, C et D du plan.
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont **égaux** signifie que D est ______________ de C par la translation de vecteur ______________ .



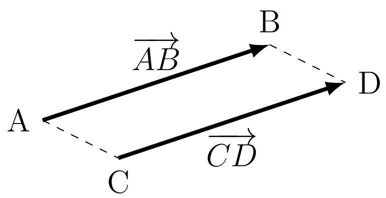
Définition 3.7

On dit que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont **égaux** si les trois propriétés suivantes sont satisfaites :

1. les __________________ sont les mêmes, c'est à dire $(AB)//(CD)$;
2. _________ sont les mêmes (le sens de A vers B est le même que le sens de C vers D) ;
3. les __________________ sont les mêmes, c'est à dire $AB = CD$.

De manière équivalente :

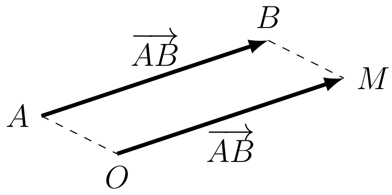
Propriété 1.7. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \iff ABDC$ est ________________________________ .



ATTENTION ! L'ordre des points est très important !

Remarque. Quand on a un parallélogramme, on peut alors en déduire plusieurs égalités de vecteurs.
Dans le cas de $ABDC$, comme sur la figure ci-dessus, on a en particulier aussi $\overrightarrow{AC} =$ ______________.

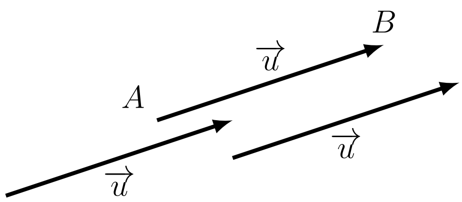
Propriété 2.7. Soit $\overrightarrow{AB}$ un vecteur et O un point du plan. Il existe **un unique** point M tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OM}$. C'est le point M de telle sorte que le quadrilatère $ABMO$ est un parallélogramme :



On dit aussi que M est l'image de O par la **translation** de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Remarques. Il est important de noter que si on a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ alors l'objet $\overrightarrow{AB}$ est le même objet que $\overrightarrow{CD}$, bien que les points A et B ne soient pas les points C et D.
Par ailleurs, on peut nommer un vecteur par une seule lettre (minuscule) surmontée d'une flèche comme par exemple $\overrightarrow{v}$ voire $\overrightarrow{u}$.

On peut alors représenter un vecteur à plusieurs endroits du plan, cependant, il s'agit toujours du même objet.



Définition 4.7

Le vecteur $\overrightarrow{BA}$ est appelé **vecteur opposé** du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
On le note aussi $-\overrightarrow{AB}$. Il est de **même direction** et **de même longueur** que le vecteur $\overrightarrow{AB}$, mais de **sens contraire**.

Propriété 3.7. Soit A et B deux points du plan.

$$\boxed{\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB} \iff M \text{ milieu de } [AB]}$$

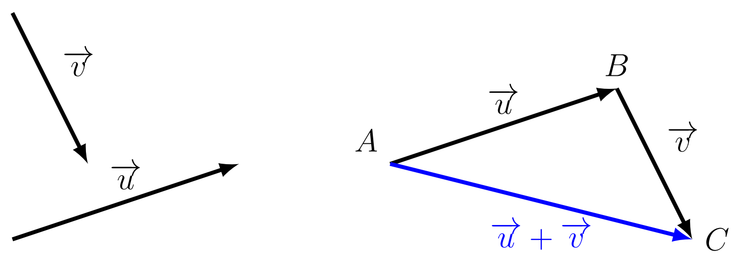
2. Somme de vecteurs

Pour faire la somme de deux vecteurs, on représente ces deux vecteurs de manière que l'origine de l'un soit l'extrémité de l'autre. La **somme** est alors le vecteur dont l'origine est l'origine du premier et l'extrémité est l'extrémité du second.

Méthode

Pour faire la somme de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$:

1. On choisit un point A.
2. On construit le point B tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$.
3. On construit ensuite le point C tel que $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{v}$.
4. On a alors $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.



Propriété 4.7. Soit A, B et C trois points du plan. Alors :

$$\boxed{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}}.$$

Cette relation est appelée **relation de Chasles**.

Remarques.

Bien faire attention à avoir le même point entourant un signe $+$ pour appliquer cette relation. Ça ne fonctionne en particulier pas avec un signe $-$.

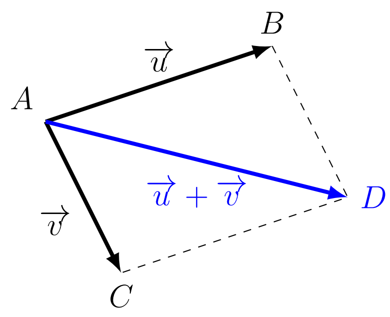
Parfois, on souhaite faire la somme de deux vecteurs qui ont la même origine, c'est à dire $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

Il s'agit alors d'une autre propriété.

Propriété 5.7. Pour tous points A, B et C du plan,

$$\boxed{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}}.$$

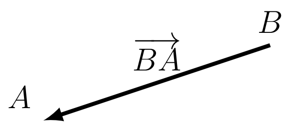
où D est le point tel que $ABDC$ est un parallélogramme.



Remarque. Pour tous points A et B,

$$\boxed{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}}.$$

Cela explique pourquoi $\overrightarrow{BA}$ est l'opposé de $\overrightarrow{AB}$.
On note $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AB} + (-\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$.



Remarque. Avec la règle du parallélogramme, on peut remarquer que l'on a :

$$\boxed{\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}}.$$

Théorème. Soient quatre points A, B, C et D du plan.
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont **égaux** signifie que D est ________________ de C par la translation de vecteur ________________ .