CHAPITRE

8

Variation globale

8.1 Fonction dérivée

8.1.1 Dérivée des fonctions de référence

Définition 1.8.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I qui admet un *nombre dérivé* en tout réel x de I.
On appelle *fonction dérivée* de f sur I, notée f', la fonction définie sur I par $f' \; : \; x \mapsto f'(x)$.

Propriété 1.8. *Dérivée des fonctions usuelles*
Toutes les fonctions décrites ici sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$.

Fonction		Fonction dérivée
Fonction constante	$f(x) = k$	$f'(x) = 0$
Fonction identité	$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
Fonction carrée	$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$
Fonction cube	$f(x) = x^3$	$f'(x) = 3x^2$

8.1.2 Dérivée d'une somme et d'un produit par un réel

Propriété 2.8.
Soient u et v deux fonctions qui admettent une fonction dérivée sur un même intervalle I.

— La fonction $u + v$ admet une fonction dérivée sur I et :

$$(u+v)' = u' + v'$$

— Soit k un réel.
La fonction $k \times u$ admet une fonction dérivée sur I et :

$$(k \times u)' = k \times u'$$

Exemple 1.8.
Calculer la fonction dérivée des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

1. $f(x) = 5x + 7$
2. $g(x) = x^3 + 8x^2 + 6x$

8.1.3 Dérivées de quelques polynômes

▶ Note 1.8.
Un *polynôme* est constitué d'une *somme* de termes, chaque terme étant l'expression d'une fonction de référence ou du produit d'une fonction de référence par un réel.
Pour calculer la fonction dérivée d'un polynôme, il suffit de dériver « chaque terme » et d'en faire *la somme.*

Propriété 3.8. *Dérivée des fonctions usuelles*

Fonction		Fonction dérivée
Fonction affine	$f(x) = ax + b$	$f'(x) = a$
Fonction du second degré	$f(x) = ax^2 + bx + c$	$f'(x) = 2ax + b$
Fonction de degré 3	$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + f$	$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

Exemple 2.8.
Calculer la fonction dérivée sur $\mathbb{R}$ de chacune des fonctions suivantes :

1. $f(x) = 7x^3 - 5x$
2. $g(x) = 8x^3 - x^2$
3. $h(x) = 2x^3 - 5x^2 + 5$

8.2 Application de la dérivation

8.2.1 Signe de la dérivée et sens de variation

▶ Note 2.8.
Le *signe* de la fonction dérivée f' sur I nous permet de connaître les *variations* de la fonction f sur I.

Propriété 4.8.
Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. Alors :

— si la fonction dérivée f' est strictement positive, alors la fonction f est croissante ;
— si la fonction dérivée f' est strictement négative, alors la fonction f est décroissante.
— si la fonction dérivée f' est nulle, alors la fonction f est constante.

Exemple 3.8.
Soit f une fonction. On connait le tableau de signes de la dérivée, donné dans le tableau suivant. Compléter le tableau de variations de f.

x	0		2		10
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f					

8.2.2 Extremum d'une fonction (maximum ou minimum

Théorème.
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et α un réel appartenant à I.

- Si f admet un *extremum local* en α, alors $f'(\alpha) = 0$.
- Si la dérivée f' s'annule en α *en changeant de signe*, alors f admet un extremum local en α.

Exemple 4.8.

1. *Cas d'un minimum* :

x	a		α		b
signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variation de f	$f(a)$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$f(b)$

2. *Cas d'un maximum* :

x	a		α		b
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variation de f	$f(a)$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$f(b)$