CHAPITRE

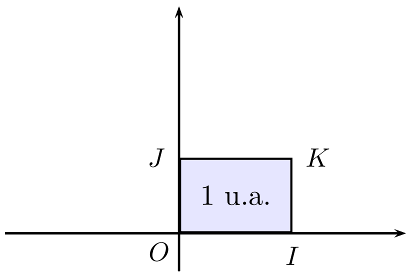
9

Calcul intégral

9.1 Intégrale d'une fonction positive

Définition 1.9.

Soit $\mathscr{P}$ un plan muni d'un repère orthogonal .
Soient I, J et K les points tels que $\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{\imath}$, $\overrightarrow{OJ} = \overrightarrow{\jmath}$ et $\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{\imath} + \overrightarrow{\jmath}$.
On appelle unité d'aire (notée u.a.) l'unité de mesure des aires telle que Aire$(OIKJ) = 1$ u.a.

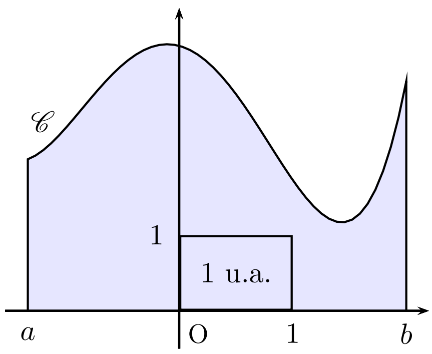


Exemple 1.9.

Si $OI = 2$ cm et $OJ = 5$ cm alors 1u.a $= 2 \times 5 = 10$ cm^2.

Définition 2.9.

Soit f une fonction *continue et positive* sur un intervalle $[a\,;\,b]$.
L'intégrale de f sur $[a\,;\,b]$, notée $\int_a^b f(x)dx$, est l'aire du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe représentative de f et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.
Les nombres a et b sont les *bornes* de l'intégrale.



▶ **Note 1.9.**

- le symbole $\int$ représente une somme (il ressemble à un S), $f(x)d(x)$ représente l'aire d'un rectangle de largeur (très petite) dx et de hauteur $f(x)$.
- La variable x est muette, c'est à dire que l'on peut noter aussi :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \dots$$

autrement dit, le nombre ne dépend pas de x, mais uniquement de f, a et b.

Application 1.9. Soit $f : x \longmapsto x+1$. Calculer $\int_{-1}^{5} f(x)dx$, autrement dit l'aire située entre l'axe des abscisses, la courbe représentative de f et les droites d'équation $x=-1$ et $x=5$.

9.1.1 Théorème fondamental

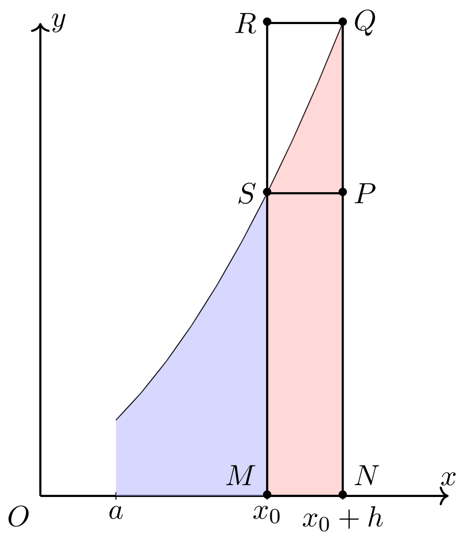
Théorème 1.9.
Soit f une fonction *continue* et *positive* sur un intervalle $[a\,;\,b]$.
On définit, pour tout $x \in [a\,;\,b]$, $F(x) = \int_a^x f(t)dt$.
La fonction F est la primitive de f qui s'annule en a.

Démonstration.

On ne fait la démonstration que dans le cas où la fonction est *strictement croissante*.
On a donc un cas similaire à celui représenté ci-contre.
Soit $x_0 \in [a;b]$ et $h>0$ tel que $x_0+h \in [a;b]$. On a :

$$F(x_0) = \int_a^{x_0} f(t)dt \quad \text{et} \quad F(x_0+h) = \int_a^{x_0+h} f(t)dt$$

Puisque f est positive,
la différence $F(x_0+h)-F(x_0)$ est l'aire coloriée en rouge sur la figure.
Cette aire est comprise entre l'aire du rectangle $MNPS$ qui vaut $hf(x)$ et celle de $MNQR$ qui vaut $hf(x+h)$.



Comme f est *croissante*, on a :

$$hf(x_0) \leqslant F(x_0+h)-F(x_0) \leqslant hf(x_0+h)$$

Puis, comme $h>0$,

$$f(x_0) \leqslant \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} \leqslant f(x_0+h)$$

Comme f est continue sur $[a;b]$, $\lim\limits_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$.
Par suite, d'après le théorème d'encadrement des limites :

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} = f(x_0)$$

On peut tenir le même type de raisonnement avec $h<0$.
Finalement, F est dérivable en x_0 et $F'(x_0)=f(x_0)$, cela quelque soit $x_0 \in [a\,;\,b]$.
Donc F est dérivable sur $[a\,;\,b]$ et $F'=f$.. □

Théorème 2.9. *Corollaire*
Soit f une fonction *continue et positive* sur $[a\,;\,b]$ et soit F une primitive de f sur $[a\,;\,b]$.
Alors :

$$\boxed{\int_a^b f(t)\,dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)}$$

Application 2.9. Soit la fonction f définie sur $[-4\,;\,1]$ par $f(x) = -x^2 - 3x + 4$.

1. Démontrer que f est positive sur $[-4\,;\,1]$.
2. Calculer l'aire sous la courbe représentative de la fonction f entre -4 et 1 en unité d'aire puis en cm^2 si on se place dans un repère orthonormé d'unité $0,5$ cm.

9.2 Intégrale d'une fonction continue

9.2.1 Fonction de signe quelconque

Définition 3.9.
Soient f une fonction *continue* sur un intervalle I et a et b deux réels de I et F une primitive de f sur I.
On définit l'*intégrale de f de a à b* par :

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= [F(x)]_a^b \\ &= F(b) - F(a)\end{aligned}$$

▶ **Note 2.9.**
Le réel $F(b) - F(a)$ ne *dépend pas* de la primitive choisie pour f.
En effet, si G est une autre primitive de f alors $G = F + k$ avec k réel donc :

$$\begin{aligned}G(b) - G(a) &= F(b) + k - (F(a) + k) \\ &= F(b) - F(a)\end{aligned}$$

9.2.2 Propriétés des intégrales

Propriétés 1.9.
Soient f et g deux fonctions *continues* sur un intervalle I.
On considère trois réels a, b et c appartenant à I et λ un réel.

- $\displaystyle\int_a^a f(x)dx = 0$ et $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.
- *Relation de Chasles* : $\displaystyle\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.
- *Linéarité de l'intégrale* : $\displaystyle\int_a^b \lambda f(x) + g(x)dx = \lambda\int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.

Application 3.9. On souhaite calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\mathrm{e}^x + 2}\,dx$.

1. On pose $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 2}\,dx$.
   Calculer J.
2. Calculer $2I + J$.
3. En déduire la valeur de I.

Propriétés 2.9. *Intégrales et inégalités*
Soient deux réels a et b tels que $a \leqslant b$ et f et g deux fonctions *continues* sur $[a\,;\,b]$.

- *Positivité* : si f est *positive* sur $[a\,;\,b]$ alors : $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \geqslant 0$.
  Attention ; réciproque fausse !
- *Ordre* : si $f \geqslant g$ sur $[a\,;\,b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \geqslant \int_a^b g(x)dx$.

Propriétés 3.9. *Fonction paire ou impaire*
Soient f une fonction *continue* un intervalle I centré en 0 et a un réel de I.

- *Paire* : si f est *paire* alors $\displaystyle\int_{-a}^0 f(x)dx = \int_0^a f(x)dx$.
- *Impaire* : si f est *impaire* alors $\displaystyle\int_{-a}^0 f(x)dx = -\int_0^a f(x)dx$.

9.2.3 Intégration par parties

Propriété 1.9.
Soient u et v deux fonctions *dérivables* sur un intervalle I à dérivées u' et v' *continues* sur I et a et b deux réels de I.
On a :

$$\boxed{\int_a^b u(t)v'(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)dt}$$

Application 4.9. À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \ln(x)\,dx$.

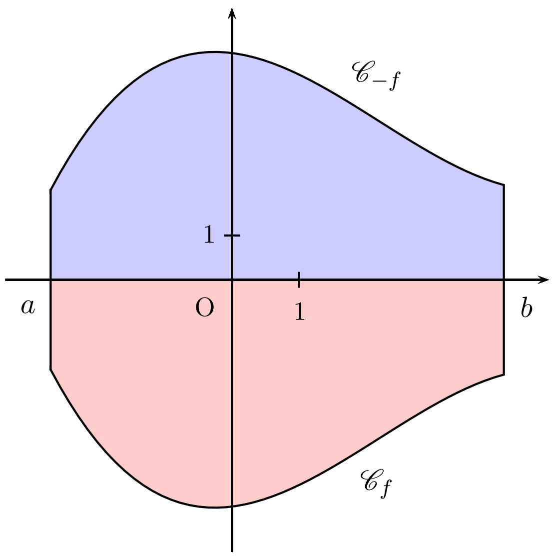
9.3 Applications du calcul intégral

9.3.1 Calcul d'aire

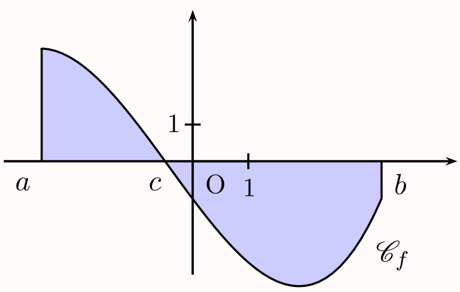
Propriété 2.9.
Soient f une fonction *continue* et *négative* sur un intervalle $[a\,;\,b]$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.
L'aire du domaine $\mathscr{D}$ délimité par la courbe $\mathscr{C}_f$ et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$, exprimée en unité d'aire est égale à :

$$\boxed{-\int_a^b f(x)dx}$$

Illustration.

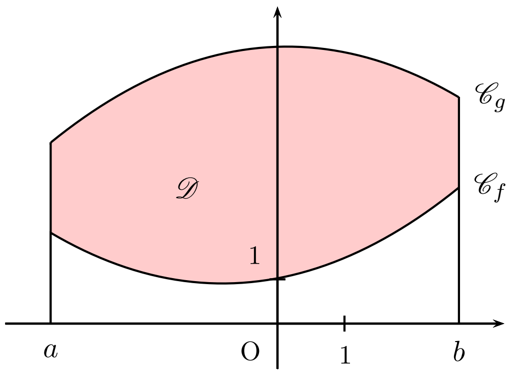


► **Note 3.9.**
Dans le cas d'une fonction f *continue* et de *signe quelconque* sur $[a\,;\,b]$, l'aire de $\mathscr{D}_f$ est la *somme des aires algébriques* des domaines définis par des intervalles sur lesquels f garde un *signe constant.*
Dans l'exemple ci-contre, exprimons l'aire du domaine colorée à l'aide d'intégrales :



Propriété 3.9. *Admise*
Soit f et g deux fonctions *continues* sur un intervalle $[a\,;\,b]$ telles que $f \leqslant g$ sur $[a\,;\,b]$.
On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ leurs courbes représentatives dans un repère orthogonal.
L'aire du domaine $\mathscr{D}$ délimité par les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$, exprimée en unité d'aire, est égale à :

$$\boxed{\int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)\,dx}$$

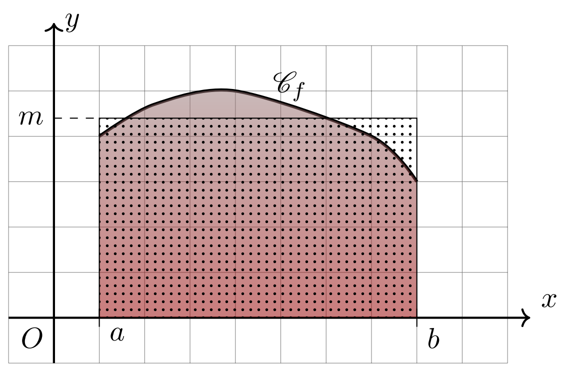


9.3.2 Valeur moyenne

Définition 4.9.
Soient a et b deux réels tels que $b > a$.
La *valeur moyenne* d'une fonction f continue sur l'intervalle $[a;b]$ est :

$$m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$$

Illustration.



La zone rosée et le rectangle ont la même aire.
En effet, $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = m(b-a)$.