☆☆☆☆☆ Exercice 1 — 2 points

Soient m et n deux entiers relatifs. Démontrer que :

$$m \equiv 9n+2 \quad [26] \iff n \equiv 3m+20 \quad [26].$$

★★★☆☆ Exercice 2 — 8 points

On se place dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct.

1. (a) On considère les points A, B et C d'affixes respectives :

   $$a = 2,\ b = 3+\mathrm{i}\sqrt{3} \text{ et } c = 2\mathrm{i}\sqrt{3}$$

   Démontrer que le triangle ABC est rectangle en B.

   (b) On rappelle que le centre du cercle circonscrit d'un triangle rectangle est le milieu de son hypoténuse.

   En déduire que l'affixe ω du centre Ω du cercle circonscrit au triangle ABC est $1+\mathrm{i}\sqrt{3}$.

2. On note (z_n) la suite de nombres complexes, de terme initial $z_0 = 0$, et telle que :

   $$z_{n+1} = \frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} z_n + 2, \text{ pour tout entier naturel } n.$$

   Pour tout entier naturel n, on note A_n le point d'affixe z_n.

   (a) Montrer que le point A_2 a pour affixe $3+\mathrm{i}\sqrt{3}$.

   (b) Établir que pour tout entier naturel n, on a :

   $$z_{n+1} - \omega = \frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}(z_n - \omega),$$

   où ω désigne le nombre complexe défini à la question **1. b**.

   (c) Calcule le module et un argument de $\dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$.

   (d) Démontrer que le point Ω est situé sur la médiatrice du segment $[A_nA_{n+1}]$.

   (e) Justifier que, pour tout entier naturel n, on a : $A_{n+6} = A_n$.
   En déduire l'affixe du point A_{2023}.

3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, la longueur du segment $[A_nA_{n+1}]$ est égale à 2.