○○○ **Exercice 8.**
Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 6 \\ u_{n+1} = 2u_n - 5 \end{cases}$$

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a :

$$u_n = 2^n + 5.$$

●○○ **Exercice 9.**
Soit (v_n) la suite géométrique de raison q et de premier terme v_0.
Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = v_0 q^n$.

●●○ **Exercice 10.**
Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n} \end{cases}$$

Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{2}{2n+1}$.

●○○ **Exercice 11.**
Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n \mathrm{e}^{2u_n} \end{cases}$$

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a : $u_n > 0$.

●○○ **Exercice 12.**
Soit la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} w_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+1} = 3w_n - 2n + 3 \end{cases}$$

Démontrer que pour tout entier naturel n on a :

$$w_n \geqslant n$$

.

●●○ **Exercice 13.**
Soit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} v_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = \dfrac{1}{3}v_n + 4 \end{cases}$$

.

1. Calculer v_1.
2. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a $v_{n+1} \geqslant v_n$.
3. En déduire la monotonie de la suite (v_n).

●●○ **Exercice 14.**
Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2-u_n} \end{cases}$$

1. Calculer u_2, u_3 et u_4.
2. Conjecturer l'expression de u_n en fonction de n.
3. Démontrer cette conjecture par récurrence puis en déduire u_{2023}.

●○○ **Exercice 15.**
Soit $\mathscr{P}_n$ la proposition « 2^n est un multiple de 3 ».

1. Démontrer que $\mathscr{P}_n$ est héréditaire.
2. $\mathscr{P}_n$ est-elle vraie pour tout entier naturel n ?

●●○ **Exercice 16.**
Soit $\mathscr{P}_n$ la proposition « $10^n - 1$ est un multiple de 9 ».

1. Démontrer que $\mathscr{P}_n$ est héréditaire.
2. $\mathscr{P}_n$ est-elle vraie pour tout entier naturel n ?

●●● **Exercice 17.**
a un réel strictement positif.
Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ (1+a)^n \geqslant 1 + na$.
(Inégalité de Bernoulli).

●●● **Exercice 18.**
Soit n un entier naturel et $a_0,\ a_1,\ a_2 \ldots,\ a_{n+1}$ des nombres réels non nuls.
Démontrer que pour tout entier naturel n,

$$\prod_{k=0}^{n} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_{n+1}}{a_0}$$

●●○ **Exercice 19.**
Soit n un entier naturel non nul.
Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul,

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

.

○○○ **Exercice 20.**
Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{1}{4}u_n + 2 \end{cases}$$

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n,

$$u_n \leqslant u_{n+1}.$$

2. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

●●○ Exercice 21.
On considère (u_n) une suite réelle telle que pour tout entier naturel n, $n < u_n < n+1$.
Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

●○○ Exercice 22.
On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{14}{3} \text{ et } u_0 = 1.$$

1. Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est majorée par 7.
2. Étudier la monotonie de la suite (u_n).

○○○ Exercice 23.
Soit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = 5+\cos(n^2)$.
Démontrer que la suite (v_n) est bornée.

●○○ Exercice 24.
Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \dfrac{n}{n+1}$.
Démontrer que la suite (u_n) est bornée.

●○○ Exercice 25.
Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{2}{3}u_n + 2n + 1 \end{cases}$$

1. Conjecturer la limite de la suite (u_n) à la calculatrice.
2. On considère le programme Python :

```python
def seuil():
    u=2;n=0
    while u..... :
        u=..........
        n=n+1
    return .....
```

Compléter la fonction Python ci-dessus pour qu'elle retourne le premier terme de la suite strictement supérieur à 100.

●○○ Exercice 26.
Calculer les limites des suites (u_n) définies de façon explicite de la façon suivante :

1. $u_n = \sqrt{n}\left(4 + \dfrac{1}{n}\right)$
2. $u_n = -n^3(3n^2+5)$
3. $u_n = \left(-7 + \dfrac{2}{\sqrt{n}}\right)(1-n)$

●○○ Exercice 27.
Déterminer la limite (si elle existe) de la suite (u_n) dans les cas suivants :

1. $u_n = n + (-1)^n$ où $n \in \mathbb{N}$
2. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2}$ où $n \in \mathbb{N}^*$
3. $u_n = \dfrac{1}{n}\cos(n)$ où $n \in \mathbb{N}^*$

●○○ Exercice 28.
Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ dans les cas suivants :

1. $u_n = \dfrac{1}{n}\left(n^2+n+2\right)$
2. $u_n = \dfrac{n^2-2n+3}{4n^3+1}$
3. $u_n = \dfrac{\sqrt{n}+n}{4n+5}$

○○○ Exercice 29.

1. Soit (u_n) telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 5n$.
   Déterminer la limite de la suite (u_n).
2. Soit (v_n) telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n \leqslant -n^2$.
   Déterminer la limite de la suite (v_n).
3. On considère une suite (w_n) qui vérifie $-\dfrac{1}{n} + 3 \leqslant w_n \leqslant \dfrac{1}{n} + 3$ pour tout entier naturel n non nul.
   Calculer la limite de la suite (w_n).

●○○ Exercice 30.
En utilisant les théorèmes de comparaison des limites, calculer les limites des suites suivantes dont on donne le terme général ci-dessous :

1. $u_n = n - \cos n$
2. $v_n = -n^2 + (-1)^n$
3. $w_n = \dfrac{4n+(-1)^n}{2n+3}$
4. $z_n = \dfrac{n - \sin n}{\cos n + 2}$

●○○ Exercice 31.
Déterminer la limite éventuelle des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suivantes en utilisant la limite d'une suite géométrique :

1. $u_n = \dfrac{4}{7^n}$
2. $u_n = \dfrac{1}{1+0,25^n}$
3. $u_n = 9^n - 3^n$
4. $u_n = \dfrac{(-4)^{n+1}}{5^n}$

●●○ Exercice 32.
Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} v_0 = -\dfrac{2}{3} \\ v_{n+1} = -2v_n + 1 \end{cases}$$

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n,
$$v_n = \frac{1}{3} - (-2)^n$$
2. La suite (v_n) admet-elle une limite ? Justifier.

●●○ Exercice 33.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant pour tout entier naturel n :

$$u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

●●○ Exercice 34.
On définit la suite (u_n) définie pour $n \geqslant 2$ par :

$$\begin{cases} u_2 = 1 \\ u_{n+1} = \left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right) u_n \end{cases}$$

1. (a) Démontrer que pour entier naturel n supérieur ou égal à 2,
$$0 \leqslant u_n \leqslant 1.$$
   (b) Étudier le sens de variation de la suite (u_n).
2. Justifier que la suite (u_n) est convergente.
3. Montrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2,
$$u_n = \frac{n}{2(n-1)}.$$
4. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

●●○ Exercice 35.
Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{1}{10} u_n (20 - u_n) \end{cases}$$

1. Soit f la fonction définie sur $[0\,;20]$ par
$$f(x) = \frac{1}{10} x(20-x).$$
   (a) Étudier les variations de f sur $[0\,;20]$
   (b) En déduire que pour tout $x \in [0\,;20]$,
$$f(x) \in [0\,;10].$$
   (c) On donne ci-dessous la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f dans un repère orthonormal.
   Représenter, sur l'axe des abscisses, à l'aide de ce graphique, les cinq premiers termes de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ puis émettre une conjecture quant à son sens de variation et à sa convergence.
2. Montrer par récurrence que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 10.$$
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est convergente et déterminer sa limite.