CHAPITRE

1

Nombres et intervalles

Les nombres apparaissent très tôt dans l'histoire de l'humanité. Pour mémoire, le calcul a été inventé avant l'écriture (il y a 20 000 ans mais certains disent 35 000 et d'autres plus). Il s'agissait de compter avec des cailloux (calculus en latin) afin d'évaluer des quantités entières.

1.1 Ensembles de nombres

1.1.1 Ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$

Définition 1.1.

- L'ensemble des entiers naturels se note $\mathbb{N} = \{0\,;\,1\,;\,2\,;\,3\,;4\,;\ldots\}$: cet ensemble a été noté $\mathbb{N}$ en 1888 par Richard Dedekind (pour « nummer » qui signifie numéro en allemand).
- C'est l'ensemble des nombres positifs qui permettent de *dénombrer* une collection d'objets. On note $\mathbb{N}^*$ ou $\mathbb{N}\backslash\{0\}$ l'ensemble des entiers naturels *non nuls.*

Exemples et contre-exemples :

1.1.2 Ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z}$

Définition 2.1.

- L'ensemble des nombres entiers relatifs est $\mathbb{Z} = \{\ldots\,;\,-2\,;\,-1\,;\,0\,;\,1\,;\,2\,;\,3\,;\,\ldots\}$.
  $\mathbb{Z}$ est la première lettre du mot « zahl » qui signifie nombre en allemand.
- Il est composé des *nombres entiers naturels* et de ______________________
- En particulier, l'ensemble $\mathbb{N}$ est *inclus dans* $\mathbb{Z}$, ce que l'on note « $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ ».

► **Note 1.1.**
Ne pas confondre $\in$ qui signifie « appartient à » (1 élément) et $\subset$ qui signifie « est inclus dans » (à partir de deux éléments).

Exemples et contre-exemples :

1.1.3 Ensemble des nombres décimaux $\mathbb{D}$

Définition 3.1.

Les *nombres décimaux* sont les nombres qui s'écrivent comme quotient d'un entier par 1, 10, 100, 1 000 et plus généralement par 10^k où k est un entier naturel.
Ce sont les nombres dont l'écriture décimale n'a qu'un nombre *limité* de chiffres après la virgule.
On note :

$$\boxed{\mathbb{D} = \left\{\frac{a}{10^k} \text{ où } a \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{Z}\right\}}.$$

Exemples et contre-exemples :

1.1.4 Les nombres rationnels et leur ensemble $\mathbb{Q}$

Définition 4.1.

Les *nombres rationnels* sont les nombres qui s'écrivent comme le quotient de *deux entiers*. Cet ensemble se note $\mathbb{Q}$ comme « quotiente » en italien, notation apparue en 1895 grâce à **Giuseppe Peano**.
On note :

$$\boxed{\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \text{ où } a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{Z}^*\right\}}.$$

Exemples et contre-exemples :

▶ **Note 2.1.**

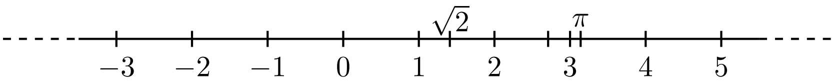
- La fraction $\frac{a}{b}$ avec $b \neq 0$ est dite *irréductible* lorsque le numérateur et le dénominateur n'ont pas de diviseurs communs (autres que 1 ou -1).
- La partie décimale d'un nombre rationnel est infinie et périodique (se répète) à partir d'un certain rang.
- La division par 0 est **impossible** : l'écriture $\frac{a}{0}$ n'a donc aucun sens.

1.1.5 L'ensemble des réels $\mathbb{R}$

Définition 5.1.

Dès l'antiquité, on avait découvert l'insuffisance des nombres rationnels. Par exemple, il n'existe pas de rationnel x tel que $x^2 = 2$ on dit que $\sqrt{2}$ est un irrationnel. Ainsi, l'ensemble de tous les nombres rationnels et irrationnels est l'ensemble des **nombres réels** noté $\mathbb{R}$: notation due à **Georg Cantor**.

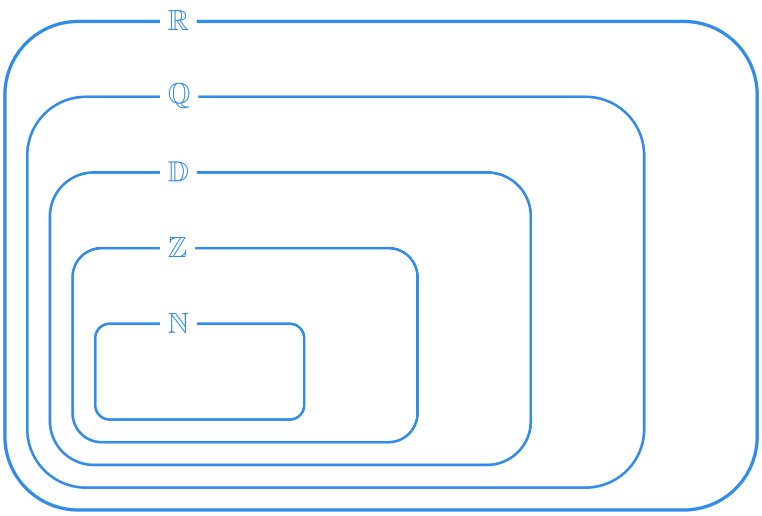
▶ **Note 3.1.**
Chaque nombre réel correspond à un unique point de la droite graduée. Réciproquement, à chaque point de la droite graduée correspond un unique réel, appelé **abscisse** de ce point.



1.1.6 Inclusions d'ensembles

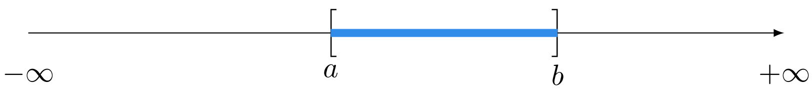
▶ **Note 4.1.**
On retiendra le résultat qui suit : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.
Cela suggère donc qu'un entier naturel est un entier relatif qui est lui-même un nombre décimal qui est donc aussi un rationnel et finalement aussi un nombre réel.

On retiendra donc le schéma ci-dessous :

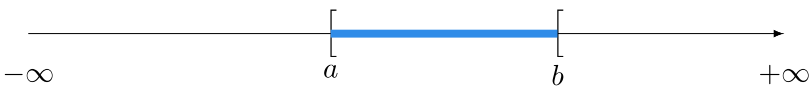


1.2 Intervalles de $\mathbb{R}$.

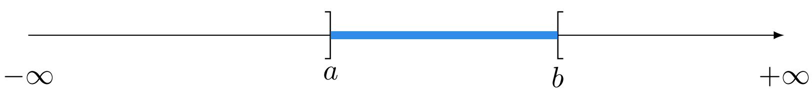
❶ L'ensemble des réels x tels que $a \leqslant x \leqslant b$ est l'intervalle $[a\,;\,b]$:



❷ L'ensemble des réels x tels que $a \leqslant x < b$ est l'intervalle $[a\,;\,b[$:

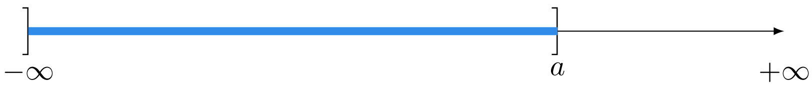


❸ L'ensemble des réels x tels que $a < x < b$ est l'intervalle $]a\,;\,b[$:



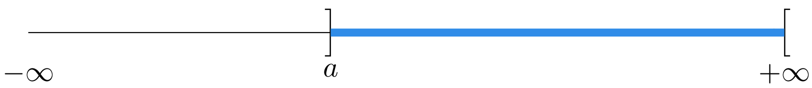
❹ L'ensemble des réels x tels que $a < x \leqslant b$ est l'intervalle $]a\,;\,b]$:

❺ L'ensemble des réels x tels que $x \leqslant a$ est l'intervalle $]-\infty\,;\,a]$:

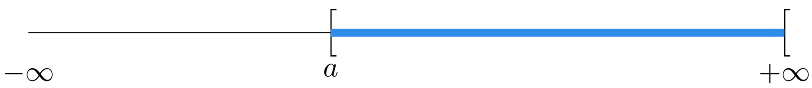


❻ L'ensemble des réels x tels que $x < a$ est l'intervalle $]-\infty\,;\,a[$:

❼ L'ensemble des réels x tels que $x > a$ est l'intervalle $]a\,;\,+\infty[$:



❽ L'ensemble des réels x tels que $x \geqslant a$ est l'intervalle $[a\,;\,+\infty[$:



1.3 Intersection, réunion d'intervalles et inclusion

1.3.1 Intersection

Définition 6.1.

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Les réels qui sont à la fois dans l'intervalle I *et* dans l'intervalle J sont dans *l'intersection* des intervalles I et J :

Si $x \in I$ *et* $x \in J$, alors $x \in I \cap J$ $\quad$ ($\cap$ se lit *inter*)

Application 1.1. Soit $I = [2\,;\,5]$ et $J = [4\,;\,9]$. Déterminer $I \cap J$.

1.3.2 Réunion

Définition 7.1.

Les réels qui sont dans l'intervalle I *ou* dans l'intervalle J sont dans *la réunion* des intervalles I et J :

$$\boxed{\text{Si } x \in I \text{ } \textit{ou} \text{ } x \in J\text{, alors } x \in I \cup J \qquad (\cup \text{ se lit } \textit{union})}$$

Application 2.1. Soit $I = [2\,;\,5]$ et $J = [4\,;\,9]$. Déterminer $I \cup J$.

1.3.3 Inclusion

Définition 8.1.

Un ensemble A est *inclus dans* un ensemble B lorsque tous les éléments de A appartiennent à B. On note :

$$\boxed{\mathrm{A} \subset \mathrm{B}}$$

Exemple. Tous les pays de la zone euro sont dans l'Union européenne. L'ensemble des pays de la zone euro est **inclus dans** l'ensemble des pays de l'Union européenne.

1.4 Puissances

1.4.1 Définition d'une puissance

Définition 9.1.

Soit n un entier naturel non nul et a un nombre réel.

- $a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{n facteurs}$.
- Pour $a \neq 0$, $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n} = \dfrac{1}{\underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{n facteurs}}$.
- Par convention, pour $a \neq 0$, on pose $a^0 = 1$.

Exemples.

1. $3^{-4} = \dfrac{1}{3^4} = \dfrac{1}{81}$.
2. Décomposons 24 en produit de facteurs premiers :

1.4.2 Calcul avec les puissances

Propriété. *Relative aux puissances*
Soient a et b sont des nombres réels non nuls.
m et n sont des entiers relatifs quelconques (positifs ou négatifs).

(1) $a^m \times a^n =$

(2) $\dfrac{a^m}{a^n} =$

(3) $(a^m)^n =$

(4) $(a \times b)^n =$

(5) $\left(\dfrac{1}{a}\right)^n =$

(6) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n =$

Application 3.1. Simplifier les expressions :

1. $6x \times 7x^2$
2. $(5x)^3$
3. $(4x^2)^3$

Application 4.1. Simplifier au maximum :

1. $\dfrac{2^{-3} \times 2^9}{(2^2)^3}$
2. $\dfrac{10^3}{[(10^3)^4]^{-5}}$
3. $\dfrac{5^7 \times 5^{-4} \times 5^9}{25}$