37 Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants :

1. $a = 4\mathrm{i}(1 - \mathrm{i})$
2. $b = 3\mathrm{i}\,[(1 + 2\mathrm{i}) - (4 + \mathrm{i})]$
3. $c = 2\mathrm{i}^4 + \mathrm{i} + 2(1 - 2\mathrm{i})$
4. $d = \mathrm{i}^3 - 1$

38 Donner la forme algébrique des nombres complexes z_1, z_2, z_3 et z_4 définis dans la console python par les commandes suivantes :

- Pour z_1 :

```
z1=complex(3,2)
```

- Pour z_2 :

```
z2=complex(-5,2)
```

- Pour z_3 :

```
z3=z1+z2
```

- Pour z_4 :

```
z4=z1*z2
```

39 Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants puis vérifier les résultats à la calculatrice :

1. $a = 5 - (2 - 3\mathrm{i})(2 + 3\mathrm{i})$
2. $b = (2 + \mathrm{i})(3 - 5\mathrm{i})(1 + 2\mathrm{i})$
3. $c = (4 + 2\mathrm{i})^2 - 5\mathrm{i}(1 - 3\mathrm{i})$
4. $d = (5 - \mathrm{i})^2$

40 On considère deux nombres complexes $z = a + \mathrm{i}b$ et $z' = a' + \mathrm{i}b'$.

1. Démontrer que $\mathrm{Re}(z \times z') = aa' - bb'$.
2. Déterminer $\mathrm{Im}(z \times z')$.

41 On considère la suite (u_n) à valeurs complexes définies par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = (1 + \mathrm{i})u_n$ pour tout entier naturel n.

1. Calculer les trois premiers termes de cette suite.
2. Démontrer que pour tout entier naturel n on a $u_n = (1 + \mathrm{i})^n$.
3. Soit $k \in \mathbb{N}$.
   Démontrer que u_{2k} est réel.

42 Pour tout nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$, on donne :

$$P(z) = z^2 - \mathrm{i}.$$

1. Exprimer la partie réelle de $P(z)$ en fonction de x et y.
2. Faire de même pour la partie imaginaire.
3. En déduire la forme algébrique de $P\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}\right)$.

43 Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \mathrm{i}^n$.

1. On dit qu'une suite est périodique de période T si pour tout entier naturel n, $u_{n+T} = u_n$. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est périodique de période 4.
2. Calculer $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} i^k$.
3. Pour quelles valeurs de n a-t-on $S_n = 0$?

44 Écrire le conjugué de chacun des complexes suivants :

1. $3 + 7\mathrm{i}$
2. $5 - 2\mathrm{i}$
3. $2\mathrm{i} - (4 + 5\mathrm{i})$
4. $(3 + 4\mathrm{i})(1 - 7\mathrm{i})$

45 Écrire le conjugué de chacun des nombres suivants :

1. 5
2. $\dfrac{2 - 4\mathrm{i}}{3 + 2\mathrm{i}}$
3. $(4 + 5\mathrm{i})^2$
4. $\dfrac{(3 - 4\mathrm{i})(4 + \mathrm{i})}{2 + 3\mathrm{i}}$

46 Écrire le conjugué de $\overline{z}$ le conjugué des nombres complexes suivants :

1. $z^2 - \mathrm{i}z + 3\mathrm{i} - 4$
2. $3\mathrm{i} + (2 + \mathrm{i})z$
3. $\dfrac{3z + \mathrm{i}}{z - \mathrm{i}}$

47 On considère un polynôme $P(z)$ de degré 2 à coefficients réels.
Montrer que si z_0 est une racine de P alors $\overline{z_0}$ l'est aussi.

48 Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants puis vérifier les résultats à la calculatrice :

1. $a = \dfrac{1}{2 - \mathrm{i}}$
2. $b = \dfrac{3}{2 + \mathrm{i}}$
3. $c = \dfrac{2\mathrm{i}}{5 - 3\mathrm{i}}$
4. $d = \dfrac{-1 + \mathrm{i}}{1 + \mathrm{i}}$

49 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $7z - 1 = 7\mathrm{i}$
2. $5z + 5 = 2z + 3 + 2\mathrm{i}$
3. $(4 + z)(5 + 2z) = 4\mathrm{i} + 2z^2$

50 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $\mathrm{i}\overline{z} - 1 = 7\mathrm{i} + \overline{z}$
2. $4\mathrm{i}\overline{z} - 4\mathrm{i} = 1 - \overline{z} + \mathrm{i}$

51 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z + 3 + \mathrm{i} = 2\overline{z} + 7 + 3\mathrm{i}$
2. $2z - 4 = 5\mathrm{i} + 4\overline{z}$
3. $z\overline{z} = z + 2$
4. $\overline{z} - 1 = z\overline{z} - \mathrm{i}$

52 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2\overline{z} = -1$.

53 Soit a et b deux réels non nuls en même temps. Démontrer que $Z = \dfrac{a+\mathrm{i}b}{a-\mathrm{i}b} + \dfrac{a-\mathrm{i}b}{a+\mathrm{i}b}$ est réel.

54 On considère le nombre complexe $z = a + 2\mathrm{i}$ avec $a \in \mathbb{R}$.
Déterminer a pour que z^2 soit imaginaire pur.

55 Soit z un nombre complexe non nul.

1. Écrire le conjugué des nombres suivants en fonction de z et $\overline{z}$:
   (a) $Z_1 = z + \overline{z}$
   (b) $Z_2 = z^2 + \overline{z}^2$
   (c) $Z_3 = \dfrac{z - \overline{z}}{z + \overline{z}}$
   (d) $Z_4 = \dfrac{z^2 - \overline{z}^2}{z\overline{z} + 3}$
2. Déterminer si chacun des nombres précédents est un nombre réel, un nombre imaginaire pur ou ni l'un ni l'autre.

56 Soit $Z = \dfrac{z + \mathrm{i}}{z - \mathrm{i}}$ pour tout $z \neq \mathrm{i}$.

1. Exprimer $\overline{Z}$ en fonction de $\overline{z}$.
2. En déduire tous les nombres complexes z tels que Z soit réel.

57 Soit k un nombre réel et on pose :

$$z = 5k^2 + 3k - 8 - (k^2 + k - 2)\mathrm{i}.$$

1. Déterminer la ou les valeur(s) du réel k pour que z soit un nombre réel.
2. Déterminer la ou les valeur(s) du réel k pour que z soit un nombre imaginaire pur.
3. Existe-t-il une valeur ou plusieurs valeurs du réel k pour que z soit nul ?

58 À l'aide du binôme de Newton et du triangle de Pascal, donner la forme algébrique des nombres suivants :

1. $(1 + \mathrm{i})^3$
2. $(1 + 2\mathrm{i})^4$
3. $(2 - \mathrm{i})^4$

59

1. Dans la formule du binôme de Newton avec $(x+y)^8$, trouve-t-on un terme en x^5y^3 ? Si oui, préciser son coefficient.
2. Même question avec x^2y^6.

60 On considère la fonction Python suivante :

```python
def developpe(a,b):
        S=0
        L=[1,4,6,4,1]
        for k in range(5):
                S=S+L[k]*a**(4-k)*b**k
        return(S)
```

1. (a) Que représente les termes de la liste L ?
   (b) Déterminer l'expression de S en fonction de a et b.
   (c) Quelle valeur renvoie la fonction pour : $a = 1$ et $b = \mathrm{i}$?
2. Louise a testé la fonction et a obtenu le résultat suivant :

```
> developpe(5,complex(0,3))
(-644+960j)
>
```

Quelle égalité mathématique peut-elle en déduire ?

61

1. Développer $(1 + z)^n$ pour tout $(z\,;\, n) \in \mathbb{C} \times \mathbb{N}^*$.
2. En remplaçant z successivement par 1, -1, i, $-\mathrm{i}$, évaluer les quantités suivantes :
   (a) $S_1 = 1 + \dbinom{n}{1} + \dbinom{n}{2} + \dbinom{n}{3} + \dbinom{n}{4} + \cdots$
   (b) $S_2 = 1 - \dbinom{n}{1} + \dbinom{n}{2} - \dbinom{n}{3} + \dbinom{n}{4} - \cdots$
   (c) $S_3 = 1 - \dbinom{n}{2} + \dbinom{n}{4} - \dbinom{n}{6} + \cdots$
   (d) $S_4 = \dbinom{n}{1} - \dbinom{n}{3} + \dbinom{n}{5} - \cdots$

62

1. Écrire une formule inspirée par le binôme de Newton pour $(a - b)^n$ en remarquant que $a - b = a + (-b)$.
2. En déduire que $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$.
3. Quel est le coefficient du terme en a^3b^7 dans le développement de $(a - b)^{10}$?