2

Les suites numériques

I. Définition et modes de génération

Définition 1

On appelle ***suite numérique*** une suite finie ou infinie de nombres, appelés *termes de la suite*. Cette suite est habituellement notée u, v ou w. Le premier terme est le plus souvent u_0 ou u_1, et pour un nombre entier n, u_n est ***le terme de rang n***.
$u(n+1)$ noté aussi u_{n+1} est le terme qui suit $u(n)$ noté également u_n, et u_{n-1} est le terme qui précède u_n.

Exemple.

1. On considère u la suite de premier terme $u_0 = 8$, et dont chaque terme (sauf le premier) est égal à la moitié du précédent.
   (a) Calculer u_1.

   (b) Calculer le 3e terme.

2. On considère v la suite définie pour tout nombre entier $n \geq 1$ par $v_n = 2n^2 - 3$.
   (a) Calculer v_3.

(b) Calculer le 4e terme.

(c) Calculer le terme de rang 2.

3. On considère w la suite définie par :

$$\begin{cases} w_0 = 5 \\ w_{n+1} = 2w_n - 4 \text{ pour tout } n \text{ entier positif.} \end{cases}$$

(a) Calculer w_1.

(b) Calculer le 3e terme.

(c) Calculer le terme de rang 3.

Exemple. On considère u la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = 0,5u_n + 1 \text{ pour tout } n \text{ entier positif.} \end{cases}$$

1. Donner les trois premiers termes de la suite.

2. Compléter la fonction Python ci-contre pour qu'elle calcule et renvoie le terme de rang n :

```
def u(n):
    n = 0
    u =
    while ...:
        n = ...
        u = ...
    return ...
```

II. Représentation graphique

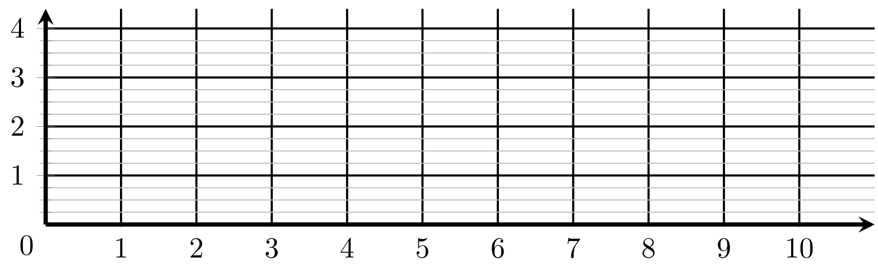
Définition 2

La représentation graphique d'une suite u est le nuage de points de coordonnées $(n; u_n)$.

Exemple. On définit la suite u sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 0,5 \\ u_{n+1} = 0,75u_n + 1 \text{ pour tout } n \text{ entier positif.} \end{cases}$$

1. À l'aide de la calculatrice, déterminer les onze premiers termes de la suite (arrondir au dixième).
2. Tracer la suite sur le graphique ci-dessous :



III. Variations

Définition 3

Une suite u est dite :

- ____________________ si chaque terme est plus grand que le précédent : $u_{n+1} \geq u_n$;
- ____________________ si chaque terme est égal aux précédent : $u_{n+1} = u_n$;
- ____________________ si chaque terme est plus petit que le précédent : $u_{n+1} \leq u_n$;

Exemple. Par lecture graphique, conjecturer le sens de variation de la suite u de l'exemple précédent.

IV. Suite arithmétique

Exemple. L'activité d'une entreprise étant florissante, en moyenne 7 nouveaux employés ont été embauchés chaque année. En 2021, elle comptait 38 employés, et on suppose que cette progression va se poursuivre dans les années à venir.

On appelle u_n le nombre d'employés l'année $2021 + n$.

1. Donner les cinq premiers termes de la suite.

2. Combien y aura-t-il d'employés en 2035 ?

Une suite est arithmétique si on passe au terme suivant en ajoutant (ou soustrayant) toujours le même nombre.

Définition 4

Une suite u est dite ***arithmétique*** s'il existe un réel r, appelé ***raison***, tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait :

$$\boxed{u_{n+1} = u_n + r}$$

Habituellement, une suite arithmétique est définie par la donnée de *son premier terme et sa raison*.

Exemple.

1. Donner les quatre premiers termes de la suite arithmétique u de premier terme $u_1 = 9$ et de raison -2.

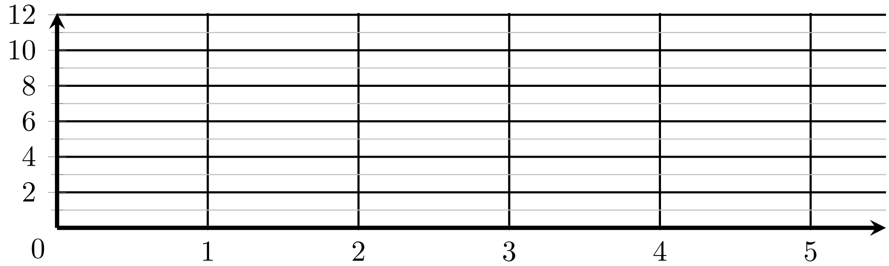
2. La suite v est arithmétique, et on sait que $v_0 = 1$ et $v_1 = 3$. Déterminer la raison, puis calculer v_5.

Propriété 1

La suite u est :

- **croissante** si et seulement si sa raison est ____________________ ;
- ____________________ si et seulement si sa raison est ____________________ ;
- ____________________ si sa raison est ____________________.

Exemple. Représenter graphiquement (de couleur différente) les deux suites de l'exemple précédent :



Définition 5

Une suite est ***arithmétique*** si et seulement si les points de sa représentation graphique sont alignés.
On dit que les termes de la suite suivent un modèle de ***croissante linéaire***.

Propriété 2

Soit une suite u ***arithmétique*** de raison r et de premier terme u_0.
Pour tout entier naturel n, on a :

$$\boxed{u_n = u_0 + nr}$$

Exemple. En 2019, une entreprise souhaite réaliser une campagne de publicité pour promouvoir ses produits.

Elle prend alors contact avec une agence de publicité, nommée A, qui lui indique qu'en 2019, selon ses tarifs, le coût d'une campagne de publicité s'élève à 10 000 euros pour 2019 mais que celui-ci augmentera ensuite de 750 euros par an.

On note u_n le coût d'une campagne publicitaire pour l'entreprise suivant les tarifs de l'agence A pour l'année $(2019+n)$. Ainsi $u_0 = 10\,000$.

1. Quel sera le coût d'une campagne de publicité pour l'entreprise en 2025 si elle choisit l'agence A ?

2. Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Argumenter la réponse.

3. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n). Justifier la réponse.

4. L'entreprise contacte une agence de publicité B qui lui dit que le coût d'une campagne de publicité pour l'année $(2019+n)$ est donné par :

$$v_n = n^2 + 200n + 10\,000$$

   (a) Déterminer la valeur de v_2.

(b) Quel sera le coût d'une campagne de publicité pour l'entreprise en 2025 si elle choisit l'agence B ?

V. Suite géométrique

Exemple. Il y a 124 loups en 2022 dans un parc animalier, et on considère que la population devrait augmenter de 3% chaque année.

On appelle v_n le nombre de loups l'année $2022 + n$.

1. Donner les cinq premiers termes de la suite (arrondis à l'unité).

2. Combien y aura-t-il d'employés en 2032 ?

Une suite est géométrique si on passe au terme suivant en multipliant (ou divisant) toujours le même nombre non nul.

Définition 6

Une suite v est dite ***géométrique*** s'il existe un réel $q \neq 0$, appelé ***raison***, tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait :

$$\boxed{v_{n+1} = q \times v_n}$$

Habituellement, une suite géométrique est définie par la donnée de *son premier terme et sa raison*.

Exemple.

1. Donner les onze premiers termes de la suite géométrique u de premier terme $u_0 = 10$ et de raison $0,7$ (arrondir chaque terme au dixième).

2. Donner les onze premiers termes de la suite géométrique v de premier terme $v_0 = 0,2$ et de raison $1,5$ (arrondir chaque terme au dixième).

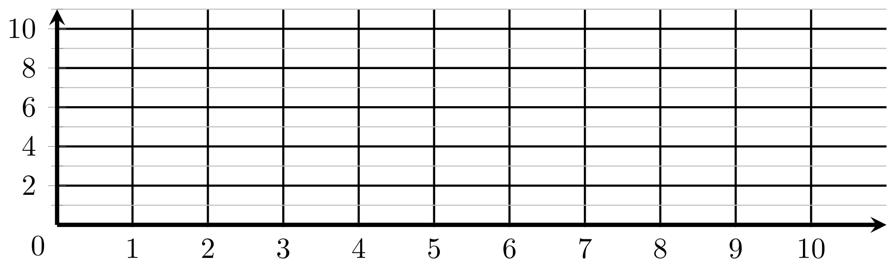
3. La suite w est géométrique, et on sait que $w_7 = 23$ et $w_8 = 69$. Déterminer la raison, puis calculer w_6 et w_9 (arrondir à l'unité).

Propriété 3

La suite v (géométrique de premier terme et de raison strictement positifs) est :

- ____________________ si et seulement si sa raison est ____________________ ;
- ____________________ si et seulement si sa raison est ____________________ ;
- ____________________ si sa raison est ____________________.

Exemple. Représenter graphiquement les deux suites u et v de l'exemple précédent :



Définition 7

On dit que les termes d'une suite géométrique ont un ***modèle d'évolution relative constante***, ou suivent ***un modèle discret de croissance exponentielle***.

Propriété 4

Soit une suite v ***géométrique*** de raison $q > 0$ et de premier terme v_0.
Pour tout entier naturel n, on a :

$$\boxed{v_n = v_0 \times q^n}$$

Exemple. Un complexe cinématographique a ouvert ses portes en 2018 en périphérie d'une ville. En 2018, le complexe a accueilli 180 mille spectateurs. La gestionnaire du complexe prévoit une augmentation de 4 % par an de la fréquentation du complexe.

Soit n un entier naturel. On note u_n le nombre de spectateurs, en milliers, du complexe cinématographique pour l'année $(2018 + n)$. On a donc $u_0 = 180$.

1. Calculer le nombre de spectateurs en 2019.

2. Justifier que $u_{n+1} = 1,04u_n$. En déduire que la suite (u_n) est géométrique en précisant sa raison et son premier terme.

3. Exprimer u_n en fonction de n, pour tout entier naturel n.

4. En déduire une estimation du nombre de spectateurs en 2023.