

3.1 Taux de variation

Définition 1.3.

Soient f une fonction définie sur un intervalle I de \mathbb{R} , et a et b deux nombres de l'intervalle I , *distincts*.

Le *taux de variation* de f entre a et b est le nombre noté τ se lisant « tau » défini par :

$$\tau = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Exemple 1.3.

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2$.

Calculer le taux de variation de f entre 2 et 4.

3.2 Polynôme du second degré

Définition 2.3.

Les fonctions de la forme $x \mapsto ax^2 + b$ (avec a et b des nombres réels, et $a \neq 0$) et $x \mapsto a(x - x_1)(x - x_2)$ (avec a, x_1, x_2 des nombres réels, et $a \neq 0$) sont des *polynômes du second degré*.

Exemples.

Propriété 1.3. *Représentation graphique*

La représentation graphique d'une fonction polynôme du second degré est une *parabole* :

1. si $a < 0$, la fonction est d'abord *croissante* puis *décroissante*, et admet un *maximum* ;
2. si $a > 0$, la fonction est d'abord *décroissante* puis *croissante*, et admet un *minimum*.

Propriété 2.3. *Sommet*

1. La parabole représentative d'un polynôme de la forme $f(x) = ax^2 + b$ a pour sommet $S(0 ; b)$.
2. La parabole représentative d'un polynôme de la forme $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ a pour sommet $S(\alpha ; \beta)$, avec :

$$\alpha = \frac{x_1 + x_2}{2} \text{ et } \beta = f(\alpha)$$

► **Note.**

La parabole est *symétrique* par rapport à la droite d'équation $x = \alpha$ (où α est l'abscisse de son sommet).

Exemple 2.3.

Soient les deux polynômes du second degré définis sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = 3x^2 + 1 \text{ et } g(x) = -2(x - 1)(x + 2).$$

1. Identifier les nombres a , b , x_1 ou x_2 sur ces deux expressions.

2. Dans un repère, placer le sommet de chacune des courbes, puis tracer son allure.

Propriété 3.3. *Tableaux de variations*

	$a < 0$			$a > 0$				
$f(x) = ax^2 + b$	x	$-\infty$	0	$+\infty$	x	$-\infty$	0	$+\infty$
	f	$\nearrow b \searrow$			f	$\searrow b \nearrow$		
$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$	x	$-\infty$	α	$+\infty$	x	$-\infty$	α	$+\infty$
	f	$\nearrow f(\alpha) \searrow$			f	$\searrow f(\alpha) \nearrow$		

Exemple 3.3.

On considère les deux fonctions définies sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = -4x^2 - 1 \text{ et } g(x) = 2(x - 4)(x + 1).$$

Pour chacune des deux fonctions :

1. Dresser son tableau de variations.

2. Déterminer la valeur de ses extremums.

Propriété 4.3. *Racines*

Soit un polynôme du second degré de la forme $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

L'équation $f(x) = 0$ a deux solutions, qui sont appelées *racines du polynôme*, et sont égales à x_1 et x_2 .

Dans le cas où $x_1 = x_2$, il n'y a qu'une racine appelée *racine double*.

Exemples.

Application.

1. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = -3(x - 4)(x + 2)$.

(a) Résoudre $f(x) = 0$.

(b) Déterminer les coordonnées du sommet de la parabole associée à f .

(c) Placer le sommet et les racines dans un repère, et tracer l'allure de la courbe.

(d) Par lecture graphique, dresser le tableau de signes de f .

2. Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par $g(x) = 4x^2 + 1$.

(a) Résoudre $g(x) = 0$.

(b) Dresser le tableau de signes de g .

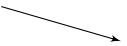
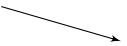


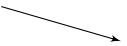







3.3 Polynôme de degré 3

Définition 3.3.

Les fonctions de la forme $x \mapsto ax^3 + b$ (avec a et b des nombres réels, et $a \neq 0$) et $x \mapsto a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$ (avec x_1, x_2, x_3 des nombres réels distincts, et $a \neq 0$) sont des *polynômes du troisième degré*.

Propriété 5.3. Variations

- Fonction de la forme $x \mapsto ax^3 + b$:
 - si $a < 0$, la fonction est *décroissante* ;
 - si $a > 0$, la fonction est *croissante*.
- Fonction de la forme $x \mapsto a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$:
 - si $a < 0$, la fonction est *décroissante*, puis *croissante*, puis *décroissante* ;
 - si $a > 0$, la fonction est *croissante*, puis *décroissante*, puis *croissante*.

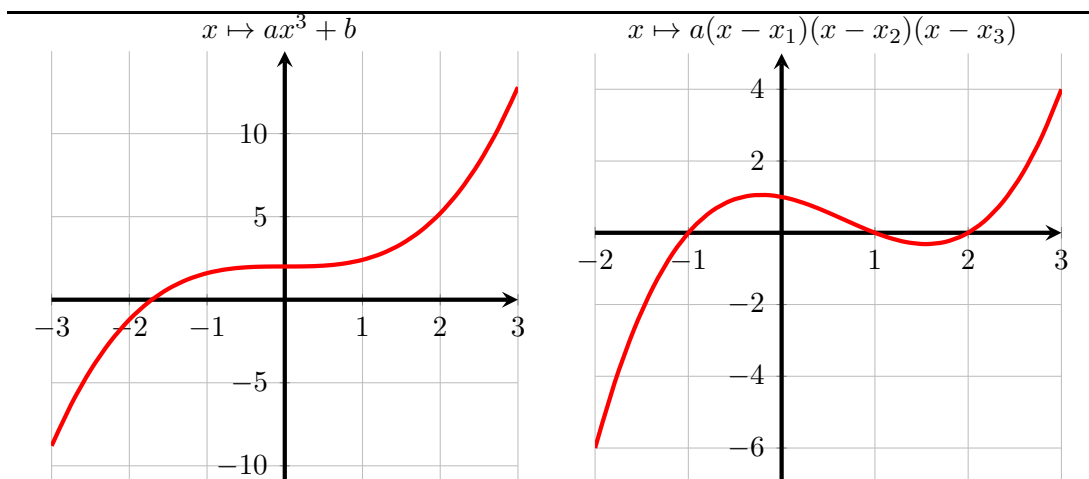
	$a < 0$	$a > 0$												
$f(x) = ax^3 + b$	<table border="1"> <tr> <td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td></tr> <tr> <td>f</td><td colspan="2"></td></tr> </table>	x	$-\infty$	$+\infty$	f			<table border="1"> <tr> <td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td></tr> <tr> <td>f</td><td colspan="2"></td></tr> </table>	x	$-\infty$	$+\infty$	f		
x	$-\infty$	$+\infty$												
f														
x	$-\infty$	$+\infty$												
f														
$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$	<table border="1"> <tr> <td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td></tr> <tr> <td>f</td><td colspan="2"></td></tr> </table>	x	$-\infty$	$+\infty$	f			<table border="1"> <tr> <td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td></tr> <tr> <td>f</td><td colspan="2"></td></tr> </table>	x	$-\infty$	$+\infty$	f		
x	$-\infty$	$+\infty$												
f														
x	$-\infty$	$+\infty$												
f														

Application. Dresser le tableau de variations des deux fonctions suivantes :

1. $f(x) = -2x^3 + 4$

2. $g(x) = 4(x - 2)(x + 1)(x + 3)$

Propriété 6.3. *Allure des courbes*



Application.

1. On définit la fonction f sur \mathbb{R} par $f(x) = -2x^3 + 3$.

(a) Identifier a et b .

(b) Dresser le tableau de variations de f .

2. On définit la fonction g sur \mathbb{R} par $g(x) = 2(x - 2)(x + 3)(x - 1)$.

(a) Identifier a , x_1 , x_2 , x_3 .

(b) Dresser le tableau de variations de g .

(c) Quelles sont les solutions de $g(x) = 0$?

(d) Dresser le tableau de signes de g .

Propriété 7.3.

L'équation $a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = 0$ a trois solutions : $x = x_1$, $x = x_2$ ou $x = x_3$.