Chapitre

2

Nombres complexes (1) : partie algébrique

Jean-Robert Argand, mathématicien suisse (1768-1822)

Ce deuxième chapitre nous mène à la découvert des nombres complexes.
Les nombres complexes portent bien leur nom ! Ils interviennent partout : en algèbre, en analyse, en géométrie, en électronique, en traitement du signal, en musique, etc. Et en plus, ils n'ont jamais la même apparence : tantôt sous forme algébrique, tantôt sous forme trigonométrique, tantôt sous forme exponentielle, ...
Leur succès vient en fait de deux propriétés : en travaillant sur les nombres complexes, tout polynôme admet un nombre de racines égal à son degré et surtout ils permettent de calculer facilement en dimension 2.

1. Ensemble des nombres complexes

1.1 Préambule

L'équation $x + 5 = 2$ a ses coefficients dans $\mathbb{N}$ mais pourtant sa solution $x =$ _____ n'est pas un entier naturel. Il faut ici considérer l'ensemble plus grand $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs.

$$\mathbb{N} \xhookrightarrow{x+5=2} \mathbb{Z} \xhookrightarrow{2x=-3} \mathbb{Q} \xhookrightarrow{x^2=2} \mathbb{R} \xhookrightarrow{x^2=-1} \mathbb{C}$$

De même l'équation $2x = -3$ a ses coefficients dans $\mathbb{Z}$ mais sa solution $x =$ _____ est dans l'ensemble plus grand des rationnels $\mathbb{Q}$. Continuons ainsi, l'équation $x^2 = \frac{1}{2}$ à coefficients dans $\mathbb{Q}$, a ses solutions $x_1 =$ _____ et $x_2 =$ _____ dans l'ensemble des réels $\mathbb{R}$. Ensuite l'équation $x^2 = -1$ a ses coefficients dans $\mathbb{R}$ et ses solutions $x_1 =$ _____ et $x_2 =$ _____ dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$.
Ce processus est-il sans fin ? Non ! Les nombres complexes sont en quelque sorte le bout de la chaîne...

Outre la résolution d'équations, les nombres complexes s'appliquent à la trigonométrie, à la géométrie (comme nous le verrons cette année) mais aussi à l'électronique, à la mécanique quantique, etc.

1.2 Forme algébrique d'un nombre complexe

Étant donné que certaines équations polynomiales à coefficients réels n'ont pas toujours de solution (comme l'équation $x^2 = -1$), on cherche à construire un nouvel ensemble de nombres :

Théorème.

1. contenant tous les **nombres réels**,
2. muni de **deux opérations prolongeant l'addition et la multiplication des nombres réels et ayant les mêmes règles de calculs**,
3. contenant un élément noté i tel que ____________,
4. tout nombre z s'écrive de manière unique $z = x + \mathrm{i}y$ où a et b sont **des réels**,
5. le nombre 0 s'écrit ____________.

On admettra qu'un tel ensemble existe : il s'agit de l'ensemble des nombres complexes noté $\mathbb{C}$.

Définition 1.2

L'écriture $z = x + \mathrm{i}y$ unique est appelée **forme algébrique** du complexe z.

- Le **nombre réel** x est appelé **partie** ________________ de z et notée $\mathrm{Re}(z)$.
- Le **nombre réel** y est appelé **partie** ______________________ de z et notée $\mathrm{Im}(z)$.

Application 1.2. Soient $z = 5 + 4\mathrm{i}$ et $z' = 6 - 7\mathrm{i}$.

1. Écrire sous forme algébrique $z + z'$ et $z \times z'$.

2. En déduire $\mathrm{Re}(z + z')$ et $\mathrm{Im}(z \times z')$.

1.3 Identités remarquables

Propriété 1.2. Soient a et b deux réels.

- $(a+\mathrm{i}b)^2 = a^2 - b^2 + 2ab\mathrm{i} \qquad (1)$
- $(a-\mathrm{i}b)^2 = a^2 - b^2 - 2ab\mathrm{i} \qquad (2)$
- $(a+\mathrm{i}b)(a-\mathrm{i}b) = a^2 + b^2 \qquad (3)$

Preuve.

□

1.4 La division dans $\mathbb{C}$

Propriété 2.2. Tout nombre complexe non nul z admet un **unique inverse**, noté $\frac{1}{z}$.

Méthode

Pour obtenir la forme algébrique d'un quotient dans $\mathbb{C}$, on **multiplie** le numérateur et le dénominateur du quotient par **l'expression conjuguée** du dénominateur pour faire apparaître la troisième identité remarquable.

Application 2.2. Déterminer l'inverse de $3+2\mathrm{i}$.

1.5 Conjugué

Définition 2.2

On appelle **conjugué** du nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$ le nombre complexe noté $\overline{z}$ défini par :

$$\boxed{\overline{z} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}.$$

Exemples. $\overline{3-2\mathrm{i}} = \_\_\_\_\_\_\_\_$ $\overline{5+\mathrm{i}} = \_\_\_\_\_\_\_\_$ $\overline{3} = \_\_\_\_\_\_\_\_$ $\overline{\mathrm{i}} = \_\_\_\_\_\_\_\_$

Propriété 3.2. Soit z et z' deux nombres complexes.

1. $\overline{\overline{z}} = z$
2. $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
3. $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$
4. $\overline{z^n} = \overline{z}^n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$
5. $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z}}$
6. $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$ pour $z' \neq 0$

Application 3.2. Donner la forme algébrique de $z = \dfrac{2+\mathrm{i}}{3-2\mathrm{i}}$.

2. Techniques opératoires

2.1 Nombres réels, nombres imaginaires purs

Propriété 4.2.

1. z **réel** $\iff \mathrm{Im}(z) = 0 \iff z = \overline{z}$.
2. z **imaginaire pur** $\iff \mathrm{Re}(z) = 0 \iff z = -\overline{z}$.

Application 4.2. Démontrer que le nombre complexe $z = \dfrac{2-7\mathrm{i}}{-3+5\mathrm{i}} - \dfrac{2+7\mathrm{i}}{3+5\mathrm{i}}$ est un nombre réel après avoir calculé $\overline{z}$.

2.2 Formule du binôme de Newton

Propriété 5.2. Soit a et b deux nombres complexes. On a alors :

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} a^s b^{n-s}}.$$

Cette formule s'appelle **binôme de Newton** et elle est démontrée page 7.

Remarque. On peut calculer les coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$ à l'aide du triangle de Pascal.

Application 5.2. Calculer $(1+2\mathrm{i})^3$ puis vérifier le résultat à la calculatrice.

2.3 Équations dans $\mathbb{C}$

Propriété 6.2. Deux nombres complexes sont **égaux** si et seulement si ils ont **même partie réelle** et **même partie imaginaire**.

Preuve.

Application 6.2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $2z + 3 + \mathrm{i} = -\overline{z} + 1 + 4\mathrm{i}$ en posant $z = x + \mathrm{i}y$ où x et y sont réels.

Démonstration du binôme de Newton

On démontre cette égalité par récurrence. On pose $\mathscr{P}_n \ : \ (a+b)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

Initialisation : si $n=0$, on a d'une part $(a+b)^0 = 1$ et d'autre part $\displaystyle\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^k b^{0-k} = \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1$ ce qui montre que $\mathscr{P}_0$ est vraie.

Hérédité : soit n un entier naturel quelconque.

Supposons $\mathscr{P}_n$ vraie ($(a+b)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$).

Montrons que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie ($(a+b)^{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}$)

$$
\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n && (2.1)\\
&= (a+b)\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^n b^{n-k} \qquad \text{par hypothèse de récurrence} && (2.2)\\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} && (2.3)\\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{n+1} b^{n-k} + \binom{n}{n} a^{n+1} b^0 + \binom{n}{0} a^0 b^{n+1-0} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} && (2.4)\\
&= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^k b^{n-k+1} + a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} && (2.5)\\
&= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) a^k b^{n+1-k} && (2.6)\\
&= \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} b^0 + \binom{n+1}{0} a^0 b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} && (2.7)\\
&= \binom{n+1}{0} a^0 b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} + \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} b^0 && (2.8)\\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} && (2.9)
\end{aligned}
$$

On en déduit donc que $\mathscr{P}_{k+1}$ est vraie. Ainsi $\mathscr{P}_0$ est vraie et $\mathscr{P}_n$ est héréditaire à partir du rang $n=0$ donc on peut en conclure que $\mathscr{P}_n$ est vraie pour **tout** entier naturel n. $\square$