★☆☆☆☆ Exercice 1 /7

On donne les complexes $z_1 = -2 + 2\mathrm{i}$ et $z_2 = \sqrt{6} + \sqrt{2}\mathrm{i}$.

1. Écrire sous forme exponentielle z_1 et z_2 puis $\dfrac{z_1}{z_2}$. /4.5
2. Écrire $\dfrac{z_1}{z_2}$ sous forme algébrique. /1.5
3. En déduire que $\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ et $\sin\left(\dfrac{7\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$. /1

★★☆☆☆ Exercice 2 /4

1. Soient a et b deux réels.
   À l'aide d'une formule d'Euler, démontrer que $\cos a \cos b = \dfrac{1}{2}\left[\cos(a-b) + \cos(a+b)\right]$. /2
2. En déduire $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{8}} \cos(2x)\cos(4x)\,dx$. /2

★★☆☆☆ Exercice 3 /6

1. Déterminer, sous forme exponentielle, les racines cubiques de l'unité. /1.5
2. Développer l'expression $(1+2\mathrm{i})^3$. /1.5
3. En déduire, sous forme algébrique, l'ensemble des solution de l'équation $z^3 = -11 - 2\mathrm{i}$. /3

★★★★☆ Exercice 4 /3

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Rappeler l'expression des racines $n-$ ième de l'unité. /1
   On notera ces racines w_k où $k \in [\![0\,;\,n-1]\!]$
2. On rappelle avec bienveillance que la somme des n premiers entiers naturels est égale à $\dfrac{n(n+1)}{2}$, autrement dit $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

   En utilisant le rappel précédent, calculer le produit des racines $n-$ ième de l'unité, autrement dit $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} w_k$. /2