CHAPITRE

7

Produit scalaire dans l'espace

7.1 Différentes expressions du produit scalaire

7.1.1 Et dans l'espace ?

▶ **Note 1.7.**
Le *produit scalaire* dans le plan vu en classe de 1re se généralise à *l'espace*.

Définitions 1.7.

Le produit scalaire de deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\vec{v}$ est le *nombre réel*, noté $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ qui peut s'exprimer par :

- *la norme* : $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \dfrac{1}{2}\left(||\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}||^2 - ||\overrightarrow{u}||^2 - ||\overrightarrow{v}||^2\right)$
- *le projeté orthogonal* : $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \pm AB \times AH$ avec $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$ où H désigne le projeté orthogonal de C sur la droite (AB)
- *le cosinus* : $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = ||\overrightarrow{u}|| \times ||\overrightarrow{v}|| \times \cos(\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v})$
- *les coordonnées* : $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = xx' + yy' + zz'$

  avec $\overrightarrow{u}(x\,;\,y\,;\,z)$ et $\overrightarrow{v}(x'\,;\,y'\,;\,z')$

Application 1.7. Soient $\overrightarrow{u}(2\,;\,\sqrt{3}\,;\,1)$ et $\overrightarrow{v}(3\,;\,\sqrt{3}\,;\,2)$.
Calculer $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$, puis déterminer une mesure de l'angle $(\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v})$ au degré près.

7.1.2 Propriétés et orthogonalité de deux vecteurs

Propriétés 1.7.
Le produit scalaire est une forme :

- *symétrique* : $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}$
- *Bilinéaire* : $\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w}$ et $(a\overrightarrow{u}) \cdot (b\overrightarrow{v}) = ab \times (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v})$

Propriétés 2.7. *Colinéarité et orthogonalité de deux vecteurs*

- Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont *colinéaires* et *de même sens* : $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = ||\overrightarrow{u}|| \times ||\overrightarrow{v}||$
- Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont *colinéaires* et *de sens contraires* : $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = -||\overrightarrow{u}|| \times ||\overrightarrow{v}||$
- $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont *orthogonaux* si et seulement si $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$

Application 2.7. Soient les points $A(6\,;\,8\,;\,2)$, $B(4\,;\,9\,;\,1)$ et $C(5\,;\,7\,;\,3)$.
Démontrer que le triangle ABC est rectangle en A.

7.2 Orthogonalité dans l'espace

7.2.1 Droites orthogonales

Définitions 2.7.

Deux droites d_1 et d_2 de vecteurs directeurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont :

- *orthogonales* si et seulement si $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0$
- *perpendiculaires* si et seulement si d_1 et d_2 sont *orthogonales* **et** *sécantes*

ATTENTION ! Dans l'espace, on distingue droites « orthogonales » et droites « perpendiculaires ».

Application 3.7. Soient les points $A(2\,;\,-5\,;\,1)$ et $B(0\,;\,2\,;\,6)$.
Démontrer que la droite d de vecteur directeur $\vec{u}(-4\,;\,1\,;\,-3)$ est orthogonale à la droite (AB).

7.2.2 Droite et plan orthogonaux

Définition 1.7.

Un plan (P) de *vecteurs directeurs* $(\vec{u}_1\,;\,\vec{u}_2)$ est **orthogonale** à une droite d de vecteur directeur $\vec{v}$ si, et seulement si,

$$\vec{u}_1 \cdot \vec{v} = 0 \text{ et } \vec{u}_2 \cdot \vec{v} = 0.$$

Application 4.7. Soient les points $A(2\,;\,0\,;\,2)$, $B(4\,;\,0\,;\,0)$, $C(1\,;\,-2\,;\,1)$, $D(-1\,;\,1\,;\,0)$ et $E(1\,;\,-1\,;\,2)$.
Le plan (ABC) et la droite (DE) sont-ils orthogonaux ?

7.2.3 Plans orthogonaux

Définition 2.7.

Un plan (P) est *orthogonal* à un plan (Q) si, et seulement si, il existe une droite d du plan (Q) *orthogonale* au plan (P).

► **Note 2.7.**
Pour que deux plans (P) et (Q) soient *orthogonaux*, il suffit qu'un vecteur $\vec{v}$ de (Q) soit orthogonal à un couple de vecteurs directeurs $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ de (P).

7.3 Équation cartésienne d'un plan

7.3.1 Vecteur normal

Définition 3.7.

Un vecteur $\vec{n}$ est *normal* à un plan (P) si $\vec{n}$ est *orthogonal* à un couple de vecteurs directeurs $(\vec{u}, \vec{v})$ de (P).

Théorème 1.7.
Deux plans de vecteurs normaux $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ sont *orthogonaux* si et seulement si :

$$\boxed{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0}$$

Théorème 2.7.
Le plan (P) passant par le point a et de *vecteur normal* $\vec{n}$ est l'ensemble des points M tels que :

$$\boxed{\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0}$$

Application 5.7. Déterminer une équation cartésienne du plan (P) passant par le point $A(-3\,;\,-1\,;\,4)$ et de vecteur normal $\vec{n}(5\,;\,-2\,;\,3)$.

7.3.2 Équation cartésienne d'un plan

Théorème 3.7.
Une *équation cartésienne* d'un plan est de la forme :

$$\boxed{ax + by + cz + d = 0 \text{ avec } a,\ b,\ c \text{ non tous nuls}}$$

Le vecteur $\vec{n}(a\,;\,b\,;\,c)$ est alors un vecteur normal au plan.

7.3.3 Distance d'un point à un plan

Définition 4.7.
Le projeté orthogonal d'un point A sur une droite d ou un plan (P) est le point d'intersection H, de la droite d ou du plan (P), et de la perpendiculaire, à cette droite ou à ce plan, passant par le point A.

Théorème 4.7. *Distance d'un point à un plan*
On appelle *distance* d'un point M au plan (P), la longueur MH ou H est le projeté orthogonal de M sur le plan (P).
Cette distance est la plus courte distance entre le point M et un point du plan (P).