Exercice 1.

1. **Étude d'une fonction auxiliaire**

   (a) g est dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ et pour tout réel x de cet intervalle, on a :

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2x\mathrm{e}^x + x^2\mathrm{e}^x \\ &= (x^2+2x)\mathrm{e}^x \end{aligned}$$

   Or pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ on a $\mathrm{e}^x > 0$ et $x^2+2x \geqslant 0$ car c'est la somme de deux quantités positives. On en déduit que $g'(x) \geqslant 0$ et par suite g est strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.
   Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty\end{array}\right\} \overset{\text{par produit des limites}}{\Longrightarrow} \lim\limits_{x\to+\infty} x^2\mathrm{e}^x = +\infty.$$

   D'où $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\mathrm{e}^x - 1 = +\infty$ et par suite :

$$\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty.}$$

x	0		α		$+\infty$
signe de $g'(x)$	0		$+$		
variations de g	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

   (b) g est continue sur $[0\,;\,+\infty[$ et est strictement croissante.
   $0 \in [-1\,;\,+\infty[= g([0\,;\,+\infty[)$, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires dans le cas des fonctions strictement croissantes, l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

   (c) $g(0,70) \simeq -0,013 < 0$ et $g(0,71) \simeq 0,025 > 0$ donc on a bien $0,70 \leqslant \alpha \leqslant 0,71$.

   (d) La valeur renvoyée par la fonction est $0,704$: c'est la valeur approchée par excès de α au millième.

   (e) La fonction g étant continue, strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$, sachant de plus que $g(\alpha) = 0$, on en déduit le signe de $g(x)$ sur $[0\,;\,+\infty[$:

x	0		α		$+\infty$
signe de $g(x)$		$-$	0	$+$	

2. **Étude de la fonction f**

   (a) Calculons la limite de f en 0 : $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \mathrm{e}^x = 1 \\ \lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \dfrac{1}{x} = +\infty\end{array}\right\} \overset{\text{par somme des limites}}{\Longrightarrow} \lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x) = +\infty.$

   On en déduit que la droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à la courbe représentative de la fonction f.

(b) Calculons la limite de f en $+\infty$: $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0\end{array}\right\}\overset{\text{par somme des limites}}{\Longrightarrow} \quad \lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x + \dfrac{1}{x} = +\infty.$

D'où :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) + \infty.}$$

(c) f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et pour tout x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \mathrm{e}^x - \frac{1}{x^2} \\ &= \frac{x^2\mathrm{e}^x - 1}{x^2} \\ &= \frac{g(x)}{x^2} \end{aligned}$$

(d) Pour tout réel x de $]0\,;\,+\infty[$, on a $x^2 > 0$ donc $f'(x)$ a le même signe que $g(x)$ sur $]0\,;\,+\infty[$. On peut donc dresser le tableau de signe de $f'(x)$ et le tableau de variation de f sur $]0\,;\,+\infty[$:

x	0		α		$+\infty$
Signe de $f'(x)$	||	$-$	0	$+$	
Variations de f	|| $+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

La fonction f est donc strictement décroissante sur l'intervalle $]0\,;\,\alpha]$ et strictement croissante sur l'intervalle $[\alpha\,;\,+\infty[$.

(e) $f(\alpha) = \mathrm{e}^\alpha + \dfrac{1}{\alpha}$. Or on sait que $g(\alpha) = 0$ donc $\alpha^2\mathrm{e}^\alpha - 1 = 0$.

Or $\alpha^2\mathrm{e}^\alpha - 1 = 0 \Longleftrightarrow \mathrm{e}^\alpha = \dfrac{1}{\alpha^2}$ car $\alpha \neq 0$.

On en déduit donc que $f(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha^2} + \dfrac{1}{\alpha}$ ce qui prouve que le minimum de f sur $]0\,;\,+\infty[$ est bien $m = \dfrac{1}{\alpha^2} + \dfrac{1}{\alpha}$.

Exercice 2.

Partie A

1. La droite (IJ) passe par $I\left(1\ ;\dfrac{1}{3}\ ;\ 0\right)$, et est dirigée par $\overrightarrow{IJ}\left(-1\ ;\dfrac{1}{3}\ ;\ 1\right)$.

   Une représentation paramétrique de cette droite est :

   $$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 1-1\times t \\ y & = & \dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}\times t \\ z & = & 0+1\times t \end{array}\right.,\ t\in\mathbb{R},\text{ soit }\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 1-t \\ y & = & \dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}t \\ z & = & t \end{array}\right.,\ t\in\mathbb{R}$$

2. Soit d la droite qui admet pour représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{3}{4}+t'\left(a-\dfrac{3}{4}\right) \\ y=t' \\ z=1-t' \end{array}\right.,\ t'\in\mathbb{R}.$

   On vérifie que K$\in d$: $\left\{\begin{array}{l} \dfrac{3}{4}=\dfrac{3}{4}+t'\left(a-\dfrac{3}{4}\right) \\ 0=t' \\ 1=1-t' \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} t'=0 \\ t'=0 \\ t'=0 \end{array}\right.$ ce qui est cohérent. Donc K$\in d$.

   On vérifie que L$\in d$: $\left\{\begin{array}{l} a=\dfrac{3}{4}+t'\left(a-\dfrac{3}{4}\right) \\ 1=t' \\ 0=1-t' \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} t'=1 \\ t'=1 \\ t'=1 \end{array}\right.$ ce qui est cohérent. Donc L$\in d$.

   Le système paramétrique est donc bien un système pouvant représenter la droite (KL).

3. Les droites (IJ) et (KL) sont sécantes si, et seulement si, le système suivant admet une solution unique pour $(t,\ t')$.

   $$\left\{\begin{array}{rcr} 1-t & = & \dfrac{3}{4}+t'\left(a-\dfrac{3}{4}\right) \\ \dfrac{1}{3}+\dfrac{t}{3} & = & t' \\ t & = & 1-t' \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcr} 1-t & = & \dfrac{3}{4}+t'\left(a-\dfrac{3}{4}\right) \\ 1+t & = & 3t' \\ t & = & 1-t' \end{array}\right.$$

   $$\iff \left\{\begin{array}{rcr} 1-t & = & \dfrac{3}{4}+t'\left(a-\dfrac{3}{4}\right) \\ 1+1-t' & = & 3t' \\ t & = & 1-t' \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcr} 1-t & = & \dfrac{3}{4}+t'\left(a-\dfrac{3}{4}\right) \\ t' & = & \dfrac{1}{2} \\ t & = & \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

En remplaçant t et t' par $\dfrac{1}{2}$, la seule valeur de a pour que la première équation soit vérifiée est $a=\dfrac{1}{4}$ et dans ce cas L$\left(\dfrac{1}{4}\ ;1\ ;0\right)$.

Partie B

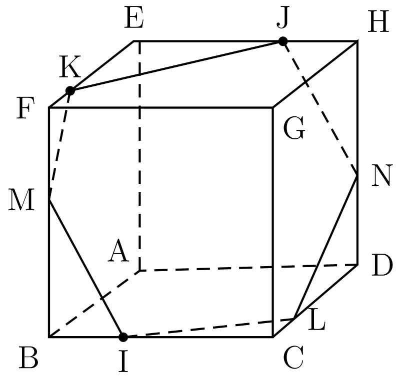
1. Démontrons que $\overrightarrow{IK}=\overrightarrow{JL}$.

   Tout d'abord $\overrightarrow{IK}\left(\dfrac{3}{4}-1\ ;\ 0-\dfrac{1}{3}\ ;\ 1-0\right)$ soit $\overrightarrow{IK}\left(-\dfrac{1}{4}\ ;\ -\dfrac{1}{3}\ ;\ 1\right)$.

De plus $\overrightarrow{LJ}\left(0-\dfrac{1}{4}\ ;\dfrac{2}{3}-1\ ;\ 1-0\right)$ soit $\overrightarrow{LJ}\left(-\dfrac{1}{4}\ ;\ -\dfrac{1}{3}\ ;\ 1\right)$.

Les vecteurs $\overrightarrow{IK}$ et $\overrightarrow{JL}$ sont égaux donc le quadrilatère IKJL est un parallélogramme.

2. Voici la section du cube par le plan (IJK) :



Exercice 3.

1. La probabilité que le lecteur choisisse un livre d'un écrivain français est :

a. 0,9 **b.** 0,7 **c.** $\boxed{0,475}$ **d.** 0,4

2. La probabilité que le lecteur ait choisi un roman policier sachant que l'écrivain est français est :

a. $\dfrac{4}{150}$ **b.** $\boxed{\dfrac{12}{19}}$ **c.** 0,3 **d.** 1

3. Le lecteur est venu 20 fois à la bibliothèque ; la probabilité qu'il ait choisi au moins un roman policier est :

a. $\boxed{1-0,25^{20}}$ **b.** $20\times 0,75$ **c.** $0,75\times 0,25^{20}$ **d.** $1-0,75^{20}$

4. Le lecteur est venu n fois à la bibliothèque.
Soit n_0 la plus grande valeur de n pour laquelle la probabilité que ce lecteur a toujours emprunté un roman policier est supérieure à $0,01$.
On peut affirmer que :

a. $n_0=15$ **b.** $\boxed{n_0=16}$ **c.** $n_0=17$ **d.** $n_0=11$