Une année de Mathématiques en Seconde

Cours et exercices

Yann Mobian

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} + 1 = 0$$

Lycée Ravel

Version 2023-2024

Table des matières

Préambule

Ceci est le livre complet comportant le cours et les exercices que nous allons traiter tout au long de cette année. Ne figurent pas les travaux dirigés que je vous donnerai au fur et à mesure de l'année. Tous mes documents publics sont sous licence CC-BY-NC :

Le BY de la licence signifie que si vous utilisez mon travail comme source (même modifié), vous devez signaler l'origine de votre source (une simple citation de mon nom est largement suffisant).

« Je suis contre la culture du cancre ».
Lino

CHAPITRE

1

Nombres et intervalles

Les nombres apparaissent très tôt dans l'histoire de l'humanité. Pour mémoire, le calcul a été inventé avant l'écriture (il y a 20 000 ans mais certains disent 35 000 et d'autres plus). Il s'agissait de compter avec des cailloux (calculus en latin) afin d'évaluer des quantités entières.

1.1 Ensembles de nombres

1.1.1 Ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$

Définition 1.1.

- L'ensemble des entiers naturels se note $\mathbb{N} = \{0\,;\,1\,;\,2\,;\,3\,;4\,;\ldots\}$: cet ensemble a été noté $\mathbb{N}$ en 1888 par Richard Dedekind (pour « nummer » qui signifie numéro en allemand).
- C'est l'ensemble des nombres positifs qui permettent de *dénombrer* une collection d'objets. On note $\mathbb{N}^*$ ou $\mathbb{N}\backslash\{0\}$ l'ensemble des entiers naturels *non nuls.*

Exemples et contre-exemples :

1.1.2 Ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z}$

Définition 2.1.

- L'ensemble des nombres entiers relatifs est $\mathbb{Z} = \{\ldots\,;\,-2\,;\,-1\,;\,0\,;\,1\,;\,2\,;\,3\,;\,\ldots\}$.
$\mathbb{Z}$ est la première lettre du mot « zahl » qui signifie nombre en allemand.
- Il est composé des *nombres entiers naturels* et de ______________________
- En particulier, l'ensemble $\mathbb{N}$ est *inclus dans* $\mathbb{Z}$, ce que l'on note « $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ ».

► **Note 1.1.**
Ne pas confondre $\in$ qui signifie « appartient à » (1 élément) et $\subset$ qui signifie « est inclus dans » (à partir de deux éléments).

Exemples et contre-exemples :

1.1.3 Ensemble des nombres décimaux $\mathbb{D}$

Définition 3.1.

Les *nombres décimaux* sont les nombres qui s'écrivent comme quotient d'un entier par 1, 10, 100, 1 000 et plus généralement par 10^k où k est un entier naturel.
Ce sont les nombres dont l'écriture décimale n'a qu'un nombre *limité* de chiffres après la virgule.
On note :

$$\boxed{\mathbb{D} = \left\{ \frac{a}{10^k} \text{ où } a \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{Z} \right\}}.$$

Exemples et contre-exemples :

1.1.4 Les nombres rationnels et leur ensemble $\mathbb{Q}$

Définition 4.1.

Les *nombres rationnels* sont les nombres qui s'écrivent comme le quotient de *deux entiers*. Cet ensemble se note $\mathbb{Q}$ comme « quotiente » en italien, notation apparue en 1895 grâce à **Giuseppe Peano**.
On note :

$$\boxed{\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \text{ où } a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{Z}^* \right\}}.$$

Exemples et contre-exemples :

▶ **Note 2.1.**

— La fraction $\dfrac{a}{b}$ avec $b \neq 0$ est dite *irréductible* lorsque le numérateur et le dénominateur n'ont pas de diviseurs communs (autres que 1 ou -1).

— La partie décimale d'un nombre rationnel est infinie et périodique (se répète) à partir d'un certain rang.

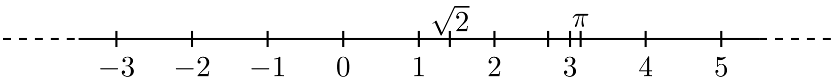
— La division par 0 est **impossible** : l'écriture $\dfrac{a}{0}$ n'a donc aucun sens.

1.1.5 L'ensemble des réels $\mathbb{R}$

Définition 5.1.

Dès l'antiquité, on avait découvert l'insuffisance des nombres rationnels. Par exemple, il n'existe pas de rationnel x tel que $x^2 = 2$ on dit que $\sqrt{2}$ est un irrationnel. Ainsi, l'ensemble de tous les nombres rationnels et irrationnels est l'ensemble des **nombres réels** noté $\mathbb{R}$: notation due à **Georg Cantor**.

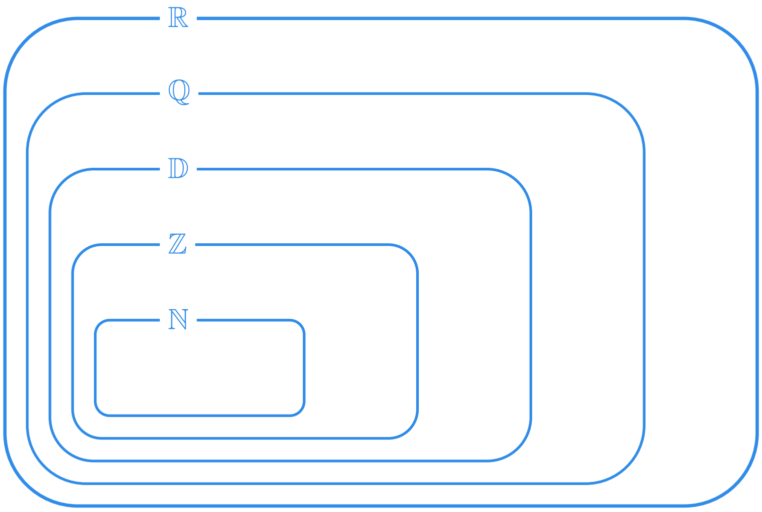
> ▶ **Note 3.1.**
> Chaque nombre réel correspond à un unique point de la droite graduée. Réciproquement, à chaque point de la droite graduée correspond un unique réel, appelé **abscisse** de ce point.



1.1.6 Inclusions d'ensembles

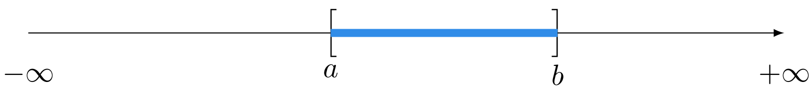
> ▶ **Note 4.1.**
> On retiendra le résultat qui suit : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.
> Cela suggère donc qu'un entier naturel est un entier relatif qui est lui-même un nombre décimal qui est donc aussi un rationnel et finalement aussi un nombre réel.

On retiendra donc le schéma ci-dessous :

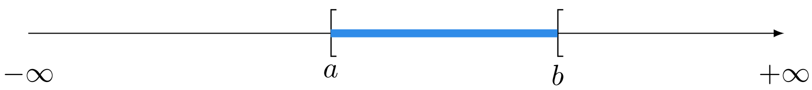


1.2 Intervalles de $\mathbb{R}$.

❶ L'ensemble des réels x tels que $a \leqslant x \leqslant b$ est l'intervalle $[a\,;\,b]$:

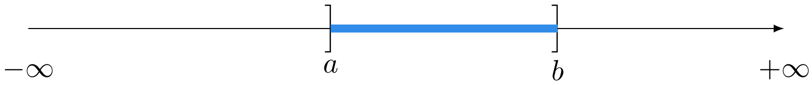


❷ L'ensemble des réels x tels que $a \leqslant x < b$ est l'intervalle $[a\,;\,b[$:

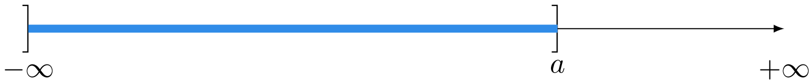


❸ L'ensemble des réels x tels que $a < x < b$ est l'intervalle $]a\,;\,b[$:

❹ L'ensemble des réels x tels que $a < x \leqslant b$ est l'intervalle $]a\,;\,b]$:



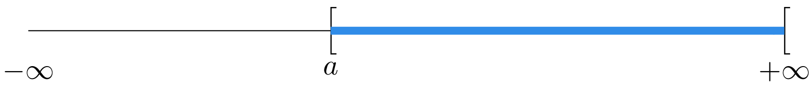
❺ L'ensemble des réels x tels que $x \leqslant a$ est l'intervalle $]-\infty\,;\,a]$:



❻ L'ensemble des réels x tels que $x < a$ est l'intervalle $]-\infty\,;\,a[$:

❼ L'ensemble des réels x tels que $x > a$ est l'intervalle $]a\,;\,+\infty[$:

❽ L'ensemble des réels x tels que $x \geqslant a$ est l'intervalle $[a\,;\,+\infty[$:



1.3 Intersection, réunion d'intervalles et inclusion

1.3.1 Intersection

Définition 6.1.

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Les réels qui sont à la fois dans l'intervalle I *et* dans l'intervalle J sont dans *l'intersection* des intervalles I et J :

Si $x \in I$ *et* $x \in J$, alors $x \in I \cap J$ ($\cap$ se lit *inter*)

Application 1.1. Soit $I = [2\,;\,5]$ et $J = [4\,;\,9]$. Déterminer $I \cap J$.

1.3.2 Réunion

Définition 7.1.
Les réels qui sont dans l'intervalle I *ou* dans l'intervalle J sont dans *la réunion* des intervalles I et J :

$$\boxed{\text{Si } x \in I \textit{ ou } x \in J, \text{ alors } x \in I \cup J \qquad (\cup \text{ se lit } \textit{union})}$$

Application 1.2. Soit $I = [2\,;\,5]$ et $J = [4\,;\,9]$. Déterminer $I \cup J$.

1.3.3 Inclusion

Définition 8.1.
Un ensemble A est *inclus dans* un ensemble B lorsque tous les éléments de A appartiennent à B.
On note :

$$\boxed{\mathrm{A} \subset \mathrm{B}}$$

Exemple. Tous les pays de la zone euro sont dans l'Union européenne. L'ensemble des pays de la zone euro est **inclus dans** l'ensemble des pays de l'Union européenne.

1.4 Puissances

1.4.1 Définition d'une puissance

Définition 9.1.
Soit n un entier naturel non nul et a un nombre réel.

- $a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{n facteurs}$.
- Pour $a \neq 0$, $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n} = \dfrac{1}{\underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{n facteurs}}$.
- Par convention, pour $a \neq 0$, on pose $a^0 = 1$.

Exemples.

1. $3^{-4} = \dfrac{1}{3^4} = \dfrac{1}{81}$.
2. Décomposons 24 en produit de facteurs premiers :

1.4.2 Calcul avec les puissances

Propriété. *Relative aux puissances*
Soient a et b sont des nombres réels non nuls.
m et n sont des entiers relatifs quelconques (positifs ou négatifs).

(1) $a^m \times a^n =$

(4) $(a \times b)^n =$

(2) $\dfrac{a^m}{a^n} =$

(5) $\left(\dfrac{1}{a}\right)^n =$

(3) $(a^m)^n =$

(6) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n =$

Application 1.3. Simplifier les expressions :

1. $6x \times 7x^2$
2. $(5x)^3$
3. $(4x^2)^3$

Application 1.4. Simplifier au maximum :

1. $\dfrac{2^{-3} \times 2^9}{(2^2)^3}$
2. $\dfrac{10^3}{[(10^3)^4]^{-5}}$
3. $\dfrac{5^7 \times 5^{-4} \times 5^9}{25}$

1.5 Les exercices du chapitre

Exercice 1.
Compléter avec le symbole mathématique qui convient :

1. $-2 \dots \mathbb{N}$
2. $7 \dots \mathbb{N}$
3. $-9,0 \dots \mathbb{Z}$
4. $\dfrac{2}{3} \dots \mathbb{D}$
5. $\mathbb{N} \dots \mathbb{D}$
6. $5,16 \dots \mathbb{Q}$

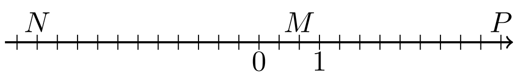
Exercice 2.
Indiquer l'ensemble minimum auquel appartient chaque nombre suivant parmi $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$; $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$:

1. $\dfrac{5-14}{3}$
2. $\dfrac{9}{6}$
3. $\sqrt{25}+6$
4. $3,14\,1596$

Exercice 3.
Compléter avec le symbole d'appartenance $\in$ ou de non-appartenance $\notin$:

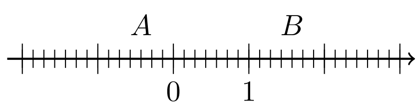
1. $2 \dots]-1\,;\,5]$
2. $-5 \dots]-1\,;\,0]$
3. $10^{-3} \dots [0\,;\,+\infty[$
4. $7 \dots]-\infty\,;\,7]$
5. $\pi \dots]3,14\,;\,3,15[$

Exercice 4.
On considère la droite des réels représentée ci-dessous.



1. Indiquer les abscisses (exactes) des points M, N et P :
2. Placer sur la droite, le plus précisément possible, les points A, B et C ayant respectivement pour abscisses -2 ; $\dfrac{5}{3}$ et $3,5$.

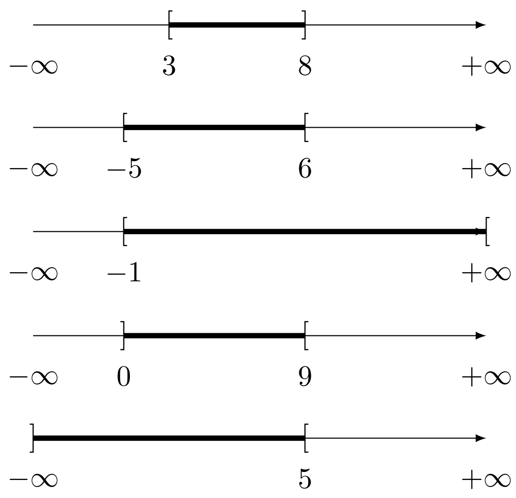
Exercice 5.
On considère la droite des réels représentée ci-dessous.



1. Lire les abscisses des points A et B.
2. Placer les points $C\left(\dfrac{5}{7}\right)$, $D(-1,5)$ et $E(3)$.

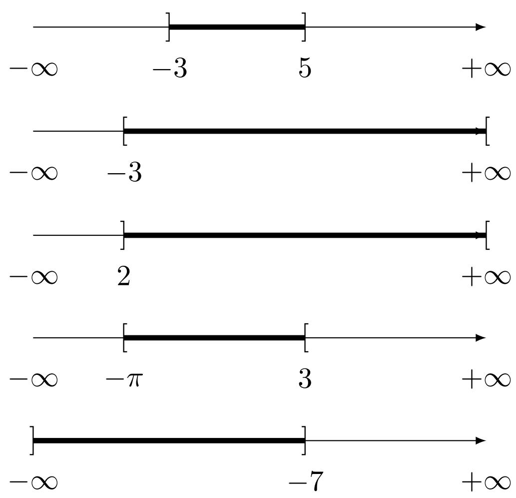
Exercice 6.

Écrire, sous forme d'intervalle, les réels qui appartiennent à la partie de la droite numérique représentée en « foncé » dans les cas suivants :



Exercice 7.

Même question qu'à l'exercice 6 :



Exercice 8.

Dans chacun des cas suivants, représenter l'ensemble des nombres vérifiant la condition donnée sur une droite graduée puis écrire cet ensemble sous forme d'intervalle :

1. $-2 \leqslant x < 2$
2. $x > \sqrt{3}$
3. $x \leqslant 2$
4. $x < -6$
5. $-2 < x \leqslant \dfrac{1}{3}$

Exercice 9.

Déterminer l'ensemble, sous forme d'union ou d'intersection d'intervalles, auquel appartient le nombre réel x dans chacun des cas suivants. Simplifier l'ensemble quand cela est possible. :

1. $x \leqslant 5$ et $x \geqslant -5$.
2. $x < 8$ ou $x \leqslant 5$.

Exercice 10.

Traduire chacune des informations ci-dessous par une ou des inégalités :

1. $x \in [-1\,;\,4]$
2. $x \in]-2\,;\,0[$
3. $x \in]-\infty\,;\,2[$
4. $x \in \left[\frac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$
5. $x \in [0\,;\,+\infty[$
6. $x \in \left]-\frac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$

Exercice 11.

Représenter les intervalles I et J de deux couleurs différentes sur la même droite réelle puis donner ensuite leur réunion et leur intersection.

1. $I = [-10\,;\,3]$ et $J = [-2\,;\,9]$
2. $I =]-3\,;\,8]$ et $J =]-5\,;\,6]$
3. $I =]-\infty\,;\,2]$ et $J = [4\,;\,6]$
4. $I =]-\infty\,;\,3]$ et $J = [0\,;\,+\infty[$

Exercice 12.

1. Sur un même axe, et avec des couleurs différentes, représenter les intervalles $I = [-3\,;\,5]$, $J =]0\,;\,2]$ et $K = [0\,;\,+\infty[$.
2. Parmi ces affirmations ci-dessous, lesquelles sont justes ?

   (a) $I \subset J$

   (b) $J \subset I$

   (c) $J \subset K$

   (d) $I \subset K$

Exercice 13.

Soit $A = \{a\,;\,k\,;\,d\,;\,f\,;\,m\,;\,u\}$, $B = \{u\,;\,d\,;\,m\,;\,b\}$ et $C = \{a\,;\,d\,;\,f\}$.

1. B est-il inclus dans A ? Justifier.
2. Écrire avec des accolades les ensembles : $A \cup B$, $A \cup C$ et $A \cap B$ et $A \cap C$.

Exercice 14.
Soient $A = \{m\,;\,a\,;\,t\,;\,h\}$, $B = \{e\,;\,u\,;\,x\}$
et $C = \{y\,;\,o\,;\,e\,;\,u\,;\,x\}$.

1. Justifier que B est inclus dans C.
2. Écrire avec des accolades, si possible, les ensembles : $A \cap B$, $A \cup B$, $A \cup C$ et $A \cap C$.

Exercice 15.
Simplifier au maximum les écritures :

1. $x \times x^2$
2. $(6u)^2$
3. $\left(\dfrac{x}{4}\right)^2$
4. $(5x)^3 \times (2u)^2$
5. $\dfrac{10^2 \times 10^{-4}}{10^{-7}}$

Exercice 16.
x est un nombre réel non nul. Écrire les nombres suivants sous la forme x^n avec n un entier relatif.

1. $A = \left(\dfrac{1}{x^{-4}}\right)^3$
2. $B = \dfrac{x^8 \times x^5}{x^3 \times x^{-10}}$
3. $C = ((x^2)^3)^4$
4. $D = \left(\dfrac{x^{-3}}{x^7}\right)^3$

Exercice 17.
Les nombres a et b étant non nuls, écrire plus simplement :

1. $(a^{-2}b^3)^{-4}$
2. $a^2b^{-2}a^{-3}b^3$
3. $\left(\dfrac{a}{b^5}\right)^{-1}$
4. $a^{-6}(a^3 \times b^{-2})^2$

Exercice 18.
Simplifier au maximum :

1. $\dfrac{4^{-5} \times 4^9}{(4^2)^3}$.
2. $\dfrac{10}{[(10^2)^3]^{-7}}$.
3. $\dfrac{5^5 \times 5^{-2} \times 5^9}{125}$.

Exercice 19.
Dans chacun des cas, déterminer la valeur de n :

1. $2^4 \times 3^2 \times 5^6 \times 7^2 = n^2$.
2. $2^3 \times 3^6 \times 5^3 \times 7^3 = n^3$.

Exercice 20.
Dans chacun des cas, écrire sous la forme 3^n où n est un entier relatif :

1. $\dfrac{3^5 \times 3^2}{3^{-7}}$.
2. $\dfrac{3^2 \times 27}{81}$.

CHAPITRE

2

ÉQUATIONS, INÉQUATIONS

2.1 Égalités et équations

2.1.1 Propriété des égalités

Propriété 1.2.
Soient a, b et c trois réels et d un réel *non nul*.

(1) $a = b \iff a + c =$.

(2) $a = b \iff a \times d =$.

Ce qui précède induit également :

(3) $a = b \iff a - c = b$.

(4) $a = b \iff \dfrac{a}{d} = \underline{\qquad}$.

Remarque : le symbole mathématique $\iff$ signifie « équivaut à ».

Application 2.1.

1. x et y sont deux nombres réels vérifiant l'égalité $4x + 5y = -3$.
   Exprimer y en fonction de x.

2. Le volume d'un cylindre de rayon r non nul et de hauteur h est donné par $\mathscr{V} = \pi r^2 h$.
   Exprimer h en fonction de V et r.

Propriété 2.2. *Équation produit nul*
Un *produit* de deux nombres réels est *nul* si et seulement si l'un au moins de ces deux nombres est nul.
Autrement dit :

$$\boxed{A \times B = 0 \Longleftrightarrow A = \qquad \text{ou} \quad B = \qquad}.$$

2.1.2 Équations

Définition 1.2.

1. Une *équation d'inconnue* x est une égalité qui peut être vraie pour certaines valeurs de x et fausse pour d'autres.
2. *Résoudre dans* $\mathbb{R}$ une équation d'inconnue x, c'est trouver l'ensemble de ses solutions, c'est-à-dire l'ensemble des nombres réels pour lesquels l'égalité est vraie.
3. On notera l'ensemble des solutions sous la forme $S = \{\ldots\}$ si une équation admet au moins une solution et $S = \varnothing$ si l'équation n'admet pas de solution.

Application 2.2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $-5x + 4 = 9$
2. $\dfrac{1}{8}x - 5 = 2$
3. $(-2x + 5)(7x + 11) = 0$.

2.1.3 Identités remarquables

Propriété 3.2.
Pour tous nombres réels a et b, on a :

(1) $(a+b)^2 =$

(2) $(a-b)^2 =$

(3) $(a+b)(a-b) =$

Remarque : les membres de gauche de ces égalités sont des produits et les membres de droite sont des sommes algébriques. On peut utiliser ces identités de la gauche vers la droite pour ________________ une expression et de la droite vers la gauche pour ________________ une expression.

Application 2.3. Développer les expressions suivantes :

1. $(y+6)^2$
2. $(x-5)^2$
3. $(5u-1)(5u+1)$

2.2 Inégalités et inéquations

2.2.1 Propriété des inégalités

Propriété 4.2.
Soit a, b et c trois réels et d un réel **non nul**.

(1) $a < b \iff a+c <$

(2) $a < b \iff a-c <$

(3) Si $d > 0$: $a < b \iff ad <$

(4) Si $d < 0$: $a < b \iff ad >$

(5) Si $d > 0$: $a < b \iff \dfrac{a}{d} < \dfrac{b}{d}$

(6) Si $d < 0$: $a < b \iff \dfrac{a}{d} > \dfrac{b}{d}$

Remarque : on a les mêmes équivalences si les inégalités sont larges et non strictes (« $\leqslant$ » au lieu de « $<$ »).

Application 2.4. Soit x un réel tel que $x < -5$ et y un réel tel que $y < 4$.
Que peut-on en déduire pour les expressions suivantes ?

1. $8x$
2. $-5y$
3. $x + y$

2.2.2 Encadrement d'un nombre réel et arrondis

Définition 2.2.
Soit x un nombre réel et n un entier relatif. Il existe un unique nombre entier relatif a tel que :

$$\boxed{\frac{a}{10^n} \leqslant x < \frac{a+1}{10^n}}.$$

Cet encadrement est *l'encadrement décimal de* x à 10^{-n} près.

Exemple. Donner l'arrondi de $16,123456$ à 10^{-3} près.

2.2.3 Inéquations

Propriété 5.2.
Les transformations suivantes permettent de passer d'une inéquation à une inéquation équivalente :

(1) Développer, factoriser, réduire certains termes.

(2) Ajouter ou soustraire un même nombre à chaque membre.

(3) Multiplier ou diviser chaque membre de l'équation par un même nombre non nul, *à condition de changer le sens de l'inégalité si ce nombre est négatif.*

Application 2.5. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $3x + 2 > 7$
2. $\dfrac{-2x}{5} \leqslant 3$

2.3 Les exercices du chapitre

Exercice 21.
On donne la relation $n = \dfrac{m}{M}$.

1. Exprimer m en fonction de n et M.
2. Exprimer M en fonction de n et m.

Exercice 22.
On donne la relation $PV = nRT$.

1. Exprimer P en fonction de V, n, R et T.
2. Exprimer R en fonction de P, V, n et T.
3. Exprimer T en fonction de P, V, n et R.

Exercice 23.
Soient u et v deux nombres réels vérifiant :

$$v - u = 5$$

1. Exprimer v en fonction de u.
2. Exprimer u en fonction de v.

Exercice 24.
Soient x et y deux nombres réels vérifiant :

$$-5x + 8y = 3$$

1. Exprimer y en fonction de x.
2. Exprimer x en fonction de y.

Exercice 25.
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $x + 5 = 1$
2. $x - 4 = -12$
3. $7x = 3$
4. $-9x = 2$

Exercice 26.
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $x - 4 = 12 - 2x$
2. $x + 3 = 5x$
3. $-6x + 1 = 7x - 11$
4. $\dfrac{2}{7}x + 1 = 8$

Exercice 27.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $(x-3)(2x+4)=0$
2. $(5x-1)(-3x+7)=0$
3. $5x(-4x+1)=0$
4. $(2x-1)^2=0$
5. $x^2=11x$

Exercice 28.

Pour tout réel x, on pose $f(x)=\dfrac{1}{4}x-\dfrac{1}{2}$.

1. Calculer l'image de 0 par la fonction f.
2. Démontrer que 0 a un unique antécédent par la fonction f.

Exercice 29.

Pour tout réel x, on pose $f(x)=-5x+4$.

1. Quelle est la nature de la fonction f ?
2. Déterminer l'image de $-\dfrac{1}{5}$ par f.
3. Démontrer que 0 a un unique antécédent par la fonction f.

Exercice 30.

Soit x un nombre réel. Développer les expressions suivantes :

1. $A=(x+4)^2$
2. $B=(x-3)^2$
3. $C=(x-7)(x+7)$
4. $D=(x-3)(x+8)$

Exercice 31.

Soit y un nombre réel. Développer les expressions suivantes :

1. $A=(2y+3)^2$
2. $B=(3y-5)^2$
3. $C=(1-9y)(1+9y)$

Exercice 32.

Montrer que pour tous nombres réels a et b on a :

$$a^2+b^2=\frac{(a+b)^2+(a-b)^2}{2}.$$

Exercice 33.
Soit x un nombre réel.
Factoriser les expressions suivantes en utilisant une *identité remarquable* :

1. $A = x^2 - 4$
2. $B = x^2 + 6x + 9$
3. $C = 9x^2 - 30x + 25$

Exercice 34.
Soit x un nombre réel.
Factoriser les expressions suivantes en faisant apparaître un *facteur commun* :

1. $A = -4(x+3) + (x+3)^2$
2. $B = (2x-7)^2 - 3(2x-7)$
3. $C = (x+4)^2 - x(x+4)$

Exercice 35.
Soit x un nombre réel.
Factoriser les expressions suivantes :

1. $A = (x-5)^2 - 4$
2. $B = (3x+1)^2 - 25$
3. $C = 36x^2 - 49$

Exercice 36.
On considère un nombre réel x tel que :

$$-3 < x \leqslant 5$$

Encadrer les expressions suivantes :

1. $x - 7$
2. $8x$
3. $-3x$
4. $\dfrac{x}{5}$
5. $2x + 3$
6. $-x$

Exercice 37.
Soit x un nombre réel tel que $x \leqslant 2$ et y un nombre réel tel que $y \leqslant -6$. Que peut-on en déduire pour les expressions suivantes ?

1. $3x$
2. $-4y$
3. $2x + 3y$
4. $-x - 2y$

Exercice 38.
Un rectangle $MNPQ$ est tel que :

$$MN > 8 \text{ et } MQ > 3$$

Que peut-on dire du périmètre de ce rectangle ?

Exercice 39.
1. Donner l'encadrement décimal à 10^{-1} près de π.
2. En déduire un encadrement de $-4\pi + 5$.
3. L'encadrement obtenu est-il l'encadrement décimal à 10^{-2} près de $-4\pi + 5$? Argumenter.

Exercice 40.
Soit x un nombre réel vérifiant :

$$-5,678 < x < -5,677$$

Donner l'arrondi à 10^{-2} près de x.

Exercice 41.
Dans chaque cas, le nombre a est-il solution de l'inéquation proposée ?
1. $x + 4 > 5x - 7 \quad a = -3$.
2. $x + 5 < 10x - 7 \quad a = 8$.

Exercice 42.
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :
1. $4x - 3 \geqslant 2x + 5$
2. $2 + x < 3 - x$
3. $3 - 4x \geqslant 5 + 6x$
4. $5 + x > x + 3$

Exercice 43.
Le périmètre d'un rectangle est inférieur à 24 cm et sa longueur vaut le double de sa largeur.
Quelle largeur peut-il avoir ?

Exercice 44.
Un photographe propose deux formules pour tirer sur papier des photos numériques.
- Avec la formule f, on paie $0,15$ € chaque tirage.
- Avec la formule g, on paie d'abord un forfait de 12 € et chaque tirage ne vaut que $0,09$ €.

À partir de combien de tirages a-t-on intérêt à choisir la formule avec forfait ?

Exercice 45.

Démontrer l'identité de *Lagrange* :
« pour tous nombres réels a, b, c et d, on a :

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2. \text{ »}$$

Exercice 46.

La somme d'un nombre réel et de son carré vaut $15,75$. On cherche la ou les valeur(s) possible(s) de ce nombre.

1. Développer l'expression $\left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{4}$.
2. Résoudre le problème posé.

CHAPITRE

3 Fonctions affines

3.1 Rappels de l'an dernier

3.1.1 Expression

Définition 1.3.
Les fonctions f, définies sur $\mathbb{R}$, dont l'expression peut se mettre sous la forme ____________, où m et p sont des réels, sont appelées *fonctions affines*.

Exemple 1.3.

Remarque.
1. **Si** $m = 0$ alors $f(x) = p$ est dite ________________ ;
2. **si** $p = 0$ alors $f(x) = mx$ est dite ________________.

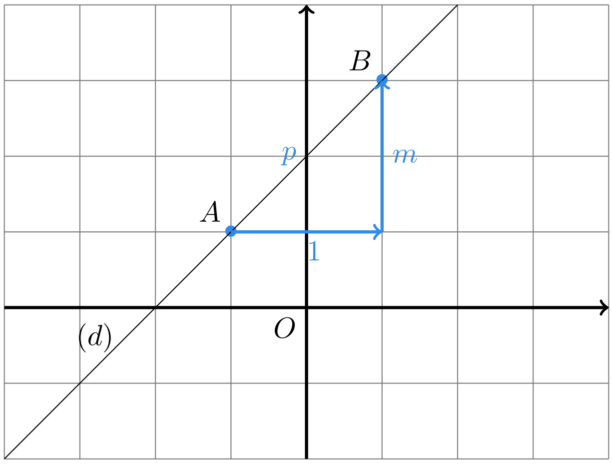
3.1.2 Représentation graphique

Le plan est muni d'un repère.

Théorème 1.3.
Toute fonction affine f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$ est représentée par **une droite** $\mathscr{D}$ non parallèle à l'axe des ordonnées qui aura pour équation $y = mx + p$.
Réciproquement, toute expression de la forme $y = mx + p$ est celle d'une fonction affine.
Par ailleurs :
1. p s'appelle *ordonnée à l'origine* : la droite $\mathscr{D}$ passe par le point de coordonnées $(0\,; p)$.
2. m s'appelle *le coefficient directeur ou pente* de la droite $\mathscr{D}$, et *le taux d'accroissement de* f :
Si $\mathrm{A}(x_\mathrm{A}\,; y_\mathrm{A})$ et $\mathrm{B}(x_\mathrm{B}\,; y_\mathrm{B})$ sont deux points de $\mathscr{D}$ tels que $x_\mathrm{A} \neq x_\mathrm{B}$ alors :

$$\boxed{m = \frac{f(x_\mathrm{B}) - f(x_\mathrm{A})}{x_\mathrm{B} - x_\mathrm{A}} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\Delta y}{\Delta x}}.$$

Illustration.



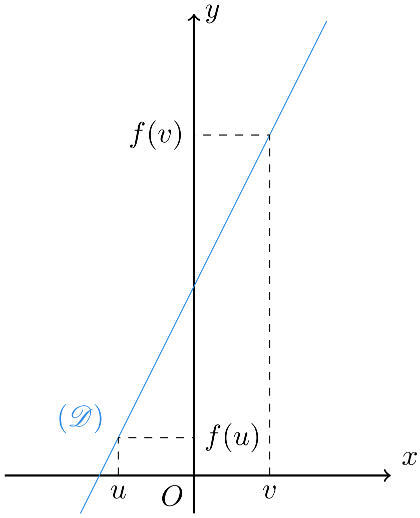
Application 3.2. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -4(x-1) + 2(x-3)$.
Démontrer que la fonction f est une fonction affine.

3.2 Variations d'une fonction affine

Théorème 2.3.
Soit $f : x \mapsto mx + p$ une fonction affine.

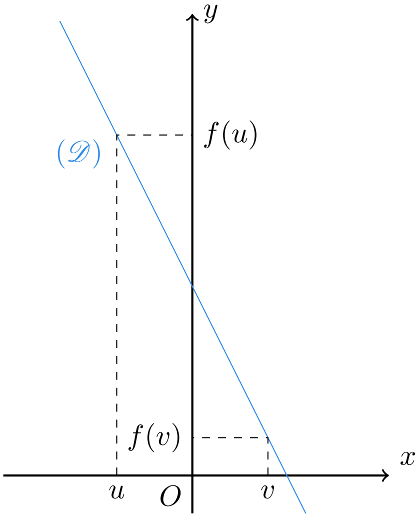
$m > 0$

Pour deux réels u et v :
si $u < v$ alors $f(u) < f(v)$.
On dit que f **conserve l'ordre** dans $\mathbb{R}$ ou encore que f est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$:



$m < 0$

Pour deux réels u et v :
si $u < v$ alors $f(u) > f(v)$.
On dit que f **ne conserve pas l'ordre** dans $\mathbb{R}$ ou encore que f est **strictement décroissante sur** $\mathbb{R}$:



Exemple 2.3.

1. Pour $f : x \longmapsto 3,8x$:
$m = 3,8 > 0$, si $u < v$ alors, __________, c'est-à-dire ______________________________.

2. Pour $g : x \longmapsto -4,1x$:
$m = -4,1 < 0$, si $u < v$ alors,__________ $>$ __________, c'est-à-dire ____________________.

Remarque.
À partir des variations d'une fonction, on peut élaborer son **tableau de variations** : c'est un tableau synthétique regroupant les informations concernant les variations de cette fonction.

À retenir :

1. Cas $m < 0$

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
Variation de f	

2. Cas $m = 0$

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
Variation de f	

3. Cas $m > 0$

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
Variation de f	

Application 3.4.
Dresser le tableau de variation de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -4x + 2$.

3.3 Signe d'une fonction affine

Définition 2.3.
Soit f une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$ avec $m \neq 0$.

1. On appelle **racine** de f le réel x_0 tel que $f(x_0) = 0$.

2. Le point de coordonnées $(x_0\,;\,0)$ est le point d'intersection de la courbe représentative de f avec l'axe des abscisses.

Théorème 3.3.
Soit $f : x \mapsto mx + p$ une fonction affine avec $m \neq 0$ admettant pour racine x_0.
Le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x est donné par le tableau suivant :

❒ Si $m > 0$

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
signe de $f(x)$		0	

❒ Si $m < 0$

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
signe de $f(x)$		0	

Application 3.5. Faire le tableau de signes des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ respectivement par :

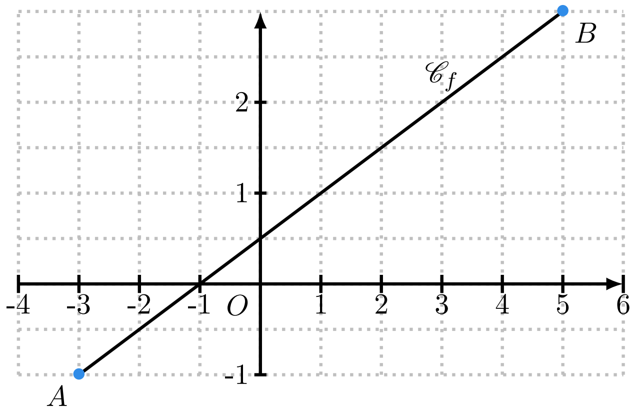
$$f(x) = 5x + 22 \text{ et } g(x) = -3x + 11.$$

3.4 Les exercices du chapitre

Exercice 47.
Justifier que les fonctions suivantes sont des fonctions affines :

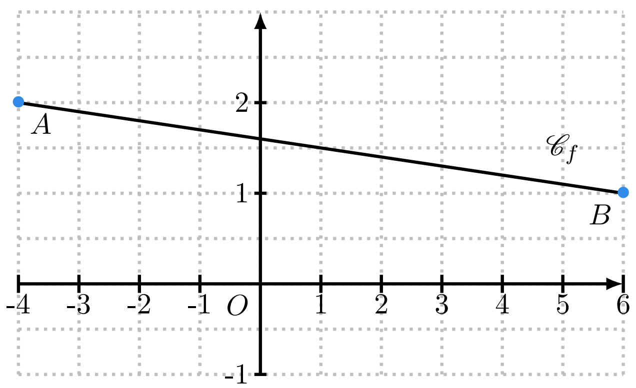
1. $f_1 \ : \ x \ \longmapsto 5x + 4$
2. $f_2 \ : \ x \ \longmapsto 5 - 3x$
3. $f_3 \ : \ x \ \longmapsto -\dfrac{x}{4}$

Exercice 48.
On donne ci-après la droite représentative d'une fonction affine :



1. Lire x_A, x_B, y_A et y_B.
2. De A à B quel est l'accroissement des x ? Celui des y ?
3. Calculer le coefficient directeur de la droite (AB).
4. En déduire l'équation de la fonction affine représentée par (AB).

Exercice 49.
Mêmes questions que précédemment avec la droite donnée ci-après :



Exercice 50.

Représenter graphiquement les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par :

1. $f(x) = 2x - 1$
2. $g(x) = -\dfrac{3}{4}x + 3$

Exercice 51.

La fonction affine f admet le tableau de valeurs suivant :

x	-3	-2	3	7
$f(x)$		-5	15	

1. Quels sont les accroissements des antécédents et des images entre les deux colonnes de nombres connus ?
2. Compléter alors ce tableau de valeurs.

Exercice 52.

On rappelle qu'augmenter un prix de 5 % revient à le multiplier par $1 + \dfrac{5}{100} = 1,05$.

1. Déterminer en fonction f qui, à l'ancien prix x, associe le nouveau prix augmenté de 5 %.
2. Quelle est la nature de la fonction f ? Justifier.

Exercice 53.

On rappelle que baisser un prix de 6 % revient à le multiplier par $1 - \dfrac{6}{100} = 0,94$.

1. Déterminer en fonction f qui, à l'ancien prix x, associe le nouveau prix baissé de 6 %.
2. Quelle est la nature de la fonction f ? Justifier.

Exercice 54.

Dans un magasin de reprographie les 20 premières photocopies sont facturées à $0,10$ € et les suivantes à $0,08$ €.

1. Calculer le prix de 5,10 et de 25 photocopies.
2. Si n désigne le nombre de photocopies et $p(n)$ le prix à payer, en euros, exprimer $p(n)$ en distinguant deux cas.
3. On définit une fonction en Python prix(n) qui automatise ce calcul. Compléter ce programme :

```python
def prix(n):
    if n<=20:
        return .....
    else:
        return .....
```


Exercice 55.
Une piscine propose deux tarifs.

- Tarif A : chaque entrée coûte $2,60$ €.
- Tarif B : on paye un abonnement à l'année de 15 € et chaque entrée coûte $1,50$ €.

1. Quel est le tarif le plus intéressant pour 8 entrées ? 10 entrées ?
2. Soit x le nombre d'entrées. Exprimer en fonction de x le prix payé pour x entrées pour le tarif A puis pour le tarif B.
3. On a défini ci-dessous deux fonctions :

```python
def tarifA(x):
    return .....

def tarifB(x) :
    return .....
```

   Compléter ces scripts.
4. Représenter graphiquement les deux fonctions affines associées aux différents tarifs.
5. Au bout de combien d'entrées, le tarif A devient-il plus intéressant ? Justifier.

Exercice 56.
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x - 4$.

1. Donner le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer l'intervalle dans lequel se trouvent les images par f des réels compris entre -2 et 5.
3. Démontrer que f admet une unique racine x_0 que l'on précisera.
4. Dresser le tableau de signes de f.

Exercice 57.
Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x - 6$.

1. Faire le tableau de signes de $f(x)$ dans $\mathbb{R}$.
2. On considère la fonction ci-dessous en Python :

```python
def signe(x):
    if x>-3:
        resultat="négatif"
    elif x<-3:
        resultat="positif"
    else:
        resultat=0
    return(resultat)
```

   (a) Quel est l'affichage si l'on entre dans la console signe(-4) ? signe(5) ?
   Justifier.
   (b) Quel est le rôle de cette fonction ?
   (c) Expliquer la valeur -3 de la condition « if ».

Exercice 58.

On considère la fonction affine f pour laquelle on dispose du tableau incomplet suivant :

x	...	-1	0	2
$f(x)$	20	5	...	-4

1. f est-elle croissante ?
2. Représenter graphiquement f.
3. Déterminer **graphiquement** l'expression algébrique de f puis compléter le tableau précédent.
4. (a) Démontrer que f admet une racine unique x_0.

   (b) Établir le tableau de signes de f et vérifier la cohérence du résultat à l'aide de la représentation graphique de f.

Exercice 59.

La mesure de la température peut s'effectuer dans plusieurs unités. En France, on utilise le degré Celsius (°C). Aux États-Unis, on utilise le degré Fahrenheit (°F). Pour obtenir en degré Fahrenheit une température mesurée en degré Celsius, on multiplie par $1,8$ et on ajoute 32.

1. On note x une mesure en degré Celsius. Donner l'expression $f(x)$ en fonction de x de cette mesure en degrés Fahrenheit.
2. Quelle est la mesure en °F de l'eau gelée ?
3. À quelle température en °C correspondent 230 °F ?
4. Voici un script incomplet écrit en Python qui permet à partir d'une température x exprimée en degrés Fahrenheit de déterminer sa valeur en degrés Celsius :

```python
def Conversion_FC(x):
    return .....
```

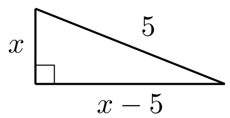
   (a) Quel est le nom de la fonction écrite dans ce script ?

   (b) Combien cette fonction possède-t-elle d'argument(s) ?

   (c) Compléter ce script.

Exercice 60.

On se demande s'il est possible de construire le triangle rectangle suivant.



1. Montrer que x vérifie : $x(2x-10)=0$.
2. Résoudre cette équation.
3. Interpréter les résultats : est-il possible de construire un tel triangle ?

CHAPITRE

4

ÉTUDE QUALITATIVE DE FONCTIONS

4.1 Modéliser par une fonction

4.1.1 Rappels de l'an dernier

Définitions 1.4.

Une *fonction* est un procédé qui à un nombre x appartenant à un ensemble $\mathscr{D}$ associe un nombre y.

On note : $x \overset{f}{\mapsto} y$ ou encore $f : x \longmapsto y$ ou encore $y = f(x)$.

On dit que :

- y est l'________________ de x par la fonction f.
- x est ________________________________ de y par la fonction f

Exemple 1.4.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -5x + 3$.

1. Calculer l'image de -3 par la fonction f.

2. Déterminer les antécédents éventuels de 0 par la fonction f.

4.1.2 Ensemble de définition

Définition 1.4.

Pour une fonction f donnée, l'ensemble de tous les nombres réels qui ont une image calculable par cette fonction est appelé *ensemble de définition* de la fonction f, que l'on notera $\mathscr{D}_f$.

Exemple 2.4.
La fonction affine f définie par $f : x \mapsto 9x + 4$ a pour ensemble de définition $\mathbb{R}$.
Graphiquement, l'ensemble de définition est l'intervalle sur lequel la courbe existe.

4.1.3 Tableau de valeurs

Pour une fonction f, donnée on peut établir un tableau de valeurs. Dans ce tableau, la première ligne contient des nombres réels x, et la seconde ligne contient leurs images respectives y.

x	-1	0	1	3
$f(x)$	4	3	5	2

Dans cet exemple, on a $f(1) =$ ______ ce qui montre que 5 est ____________ de 1 par la fonction f.
De même $f(0) = 3$ ce qui montre que 0 est ______ antécédent de 3 par la fonction f.

4.1.4 Fonction donnée par une formule

Exemple 3.4.
Un cycliste roule en moyenne à 43 km.h^{-1}. À chaque durée de trajet t, en heures, on associe la distance parcourue d, en km, par la formule $d = vt$ soit $d =$ ____________.
La *variable* est la durée t avec $t \geqslant 0$. On définit alors la fonction g sur $[0\,;\,+\infty[$ par $g(t) = 43t$.

4.2 Variation d'une fonction

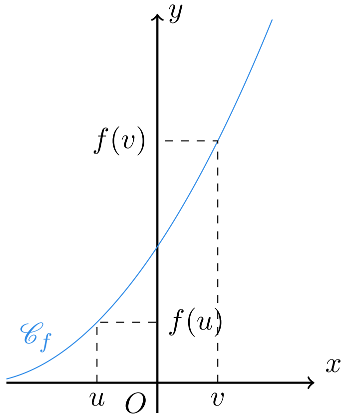
4.2.1 Sens de variation d'une fonction

Définitions 2.4.

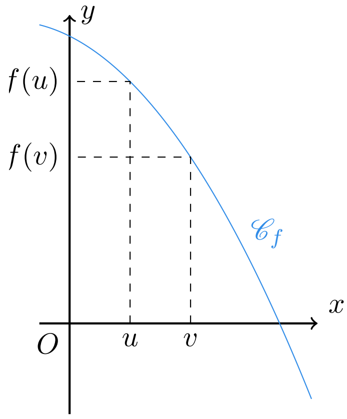
1. On dit que la fonction f est **croissante** sur un intervalle I si quels que soient les réels u et v dans I tels que $u \leqslant v$, on a $f(u) \leqslant f(v)$.
   Autrement dit, les nombres $f(u)$ et $f(v)$ sont rangés dans *le même ordre* que u et v.

2. On dit que la fonction f est **décroissante** sur un intervalle I si quels que soient les réels u et v dans I tels que $u \leqslant v$, on a $f(u) \geqslant f(v)$.
   Autrement dit, les nombres $f(u)$ et $f(v)$ sont rangés dans *l'ordre contraire* de u et v.

Exemple 4.4.



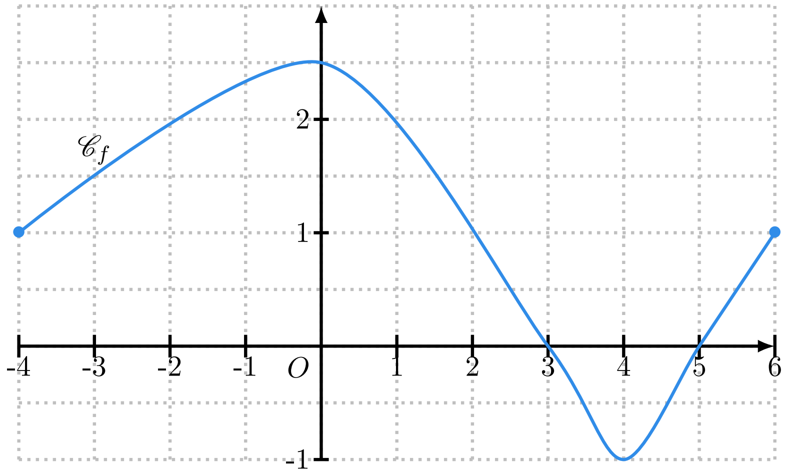
Fonction croissante
$u < v$ et $f(u) \leqslant f(v)$



Fonction décroissante
$u < v$ et $f(u) \geqslant f(v)$

Définition 2.4.
Donner ou décrire les variations d'une fonction signifie préciser sur quels intervalles la fonction est croissante, puis sur quels intervalles la fonction est croissante.

Exemple 5.4.
Décrire les variations de la fonction f dont la courbe est donnée ci-contre :



4.2.2 Tableau de variations

Propriété 1.4.
Le *tableau de variations* d'une fonction est un tableau synthétique regroupant les informations concernant les variations de la fonction.

Exemple 6.4.
Dresser le tableau de variation de la fonction f dont la courbe représentative est donnée ci-dessus.

4.3 Extremum

Définitions 3.4.

1. On dit que la fonction f admet un **maximum** sur un intervalle I atteint en x_0 si, quel que soit le réel x dans I, on a :

$$\boxed{f(x) \leqslant f(x_0)}$$

2. On dit que la fonction f admet un **minimum** sur un intervalle I atteint en x_0 si, quel que soit le réel x dans I, on a :

$$\boxed{f(x) \geqslant f(x_0).}$$

Exemple 7.4.
Soit la fonction f dont le tableau de variation est donné ci-contre :

x	-5		-3		2		5		7
Variation de f	4	$\searrow$	-1	$\nearrow$	4	$\searrow$	-2	$\nearrow$	0

1. Quel est le maximum de f sur $[-5\,;\,7]$?

2. Quel est le minimum de f sur $[-5\,;\,2]$?

4.4 Tableau de signes

Propriété 2.4.
On réunit au sein d'un tableau appelé *tableau de signes* les informations concernant le signe de la fonction f, c'est-à-dire la position de sa courbe représentative par rapport à l'axe des abscisses.

Exemple 8.4.
Dresser le tableau de signes de la fonction dont la courbe est donnée à page 3 :

4.5 Les exercices du chapitre

Exercice 61.
Traduire par des égalités de la forme $f(a) = b$, les phrases suivantes :

1. -5 est l'image de 4 par f.
2. 2 a pour image 0 par h.
3. 5 est un antécédent de -3 par f.

Exercice 62.
Même consigne avec :

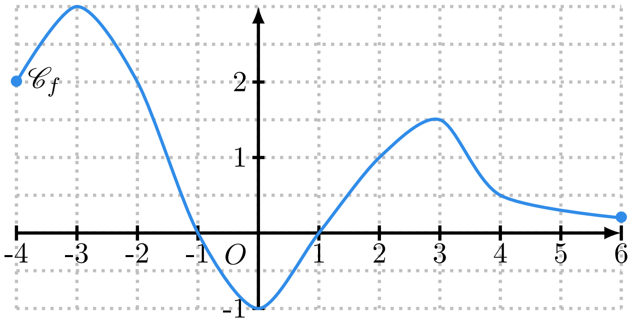
1. L'image de -5 par f est nulle.
2. La courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de f passe par le point $A(-3\,;\,1)$.
3. La courbe représentative $\mathscr{C}_g$ de g coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée 2.

Exercice 63.
Voici le tableau de variation d'une fonction f :

x	-2	-1	0	3	7
$f(x)$	3	0	4	2	4

1. Lire l'image de 3 puis donner $f(-2)$ et $f(7)$.
2. 4 a t-il plusieurs antécédents par la fonction f ? Justifier.

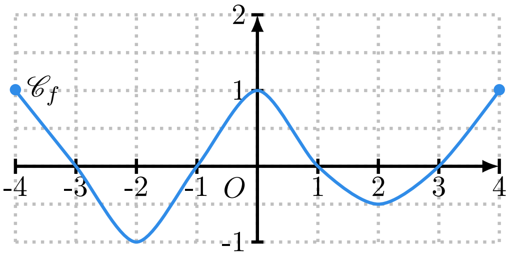
Exercice 64.
On donne ci-dessous, la courbe représentative d'une fonction f :



1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Lire les images par la fonction f de :
   - -3 ;
   - 3 ;
   - -2 ;
   - 0.
3. Déterminer les antécédents éventuels par la fonction f de :
   - -1 ;

- 2 ;
- -2.

Exercice 65.
On donne ci-dessous, la courbe représentative d'une fonction f :



1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Donner $f(2)$.
3. Déterminer les antécédents éventuels par la fonction f de :
   - -1 ;
   - 0 ;
   - 1.
4. Décrire les variations de f sur son ensemble de définition puis dresser le tableau de variation complet de f sur son ensemble de définition.

Exercice 66.
Voici le tableau de variation d'une fonction f :

x	0		1		5
Variation de f	-1	↗	4	↘	0

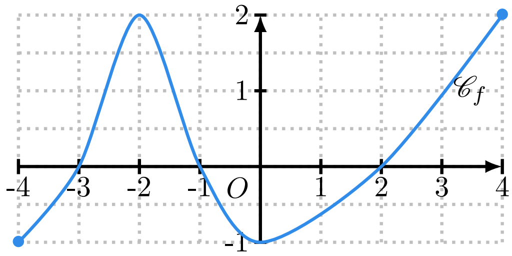
1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. Quel est le sens de variation de f sur $[0 ; 1]$? $[1 ; 5]$?
3. Dans un repère, tracer deux courbes susceptibles de pouvoir représenter f.

Exercice 67.
On donne le tableau de variation d'une fonction f :

x	-5		-3		-2		0		5
Variation de f	1	↗	4	↘	-1	↗	2	↘	1

1. Préciser l'ensemble de définition de f.
2. Quelle est l'image de 0 par la fonction f ?
3. Combien 1 a-t-il d'antécédents de f ?
4. Décrire par des phrases les variations de f.
5. Tracer dans un repère une courbe pouvant représenter f.

Exercice 68.
On donne ci-dessous, la courbe représentative d'une fonction f :



1. Préciser l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer le maximum de f sur :
   - son ensemble de définition ;
   - $[-4\,;\,0]$.
3. Déterminer le minimum de f sur :
   - son ensemble de définition ;
   - $[0\,;\,4]$.

Exercice 69.
Voici le tableau de variation d'une fonction f :

x	0		1		4		7
Variation de f	6	↘	1	↗	5	↘	2

Déterminer, en précisant pour quelles valeurs de x ils sont atteints, le minimum et le maximum de f sur :

1. l'intervalle $[0\,;\,7]$;
2. l'intervalle $[1\,;\,7]$.

Exercice 70.
f est la fonction définie sur $[-3\,;\,3]$ par :

$$f(x) = -x^3 + 3x.$$

Son tableau de variation est donné incomplet ci-dessous.

x	-3		-1		1		3
Variation de f	$\dots$	↘	$\dots$	↗	$\dots$	↘	$\dots$

1. Compléter les pointillés du tableau de variation.
2. Déterminer le maximum et le minimum de f sur $[-3\,;\,3]$.
3. Compléter les pointillés par ce qui convient :
   (a) si $1 \leqslant x \leqslant 3$, alors $\dots \leqslant f(x) \leqslant \dots$.

(b) Si $x \in [-3\,;\,3]$, alors $f(x) \in$ ______.

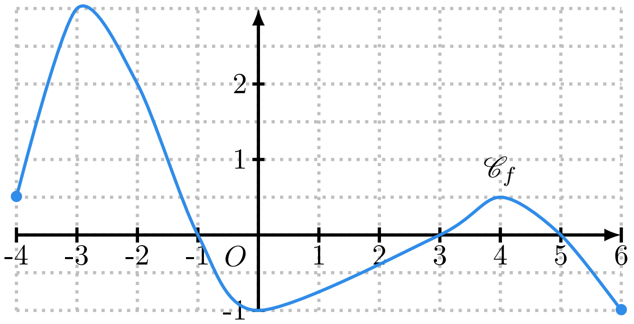
Exercice 71.
f est une fonction croissante sur l'intervalle $[-9\,;\,9]$.
Comparer les nombres suivants :

1. $f(-8)$ et $f(-5)$.
2. $f(7)$ et $f(2)$.

Exercice 72.
f est une fonction décroissante sur l'intervalle $[-3\,;\,5]$.
Comparer les nombres suivants :

1. $f(-2)$ et $f(0)$.
2. $f(3)$ et $f(4)$.

Exercice 73.
On donne ci-dessous, la courbe représentative d'une fonction f :



1. Déterminer les antécédents de 0 par la fonction f.
2. Faire le tableau de signes de f sur son ensemble de définition.
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) > 0$.

Exercice 74.
Soit une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont le tableau de signes est donné ci-après :

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

1. Donner le signe de $f(4)$, $f(-1)$ et $f(-2,8)$.
2. Donner quatre réels tels que $f(x) < 0$.
3. Donner tous les réels x tels que :
   (a) $f(x) < 0$.
   (b) $f(x) \geqslant 0$.
4. Donner une allure de courbe pouvant représenter f.

CHAPITRE

5

Résolution graphique d'équations, d'inéquations

5.1 Résolution graphique d'équations

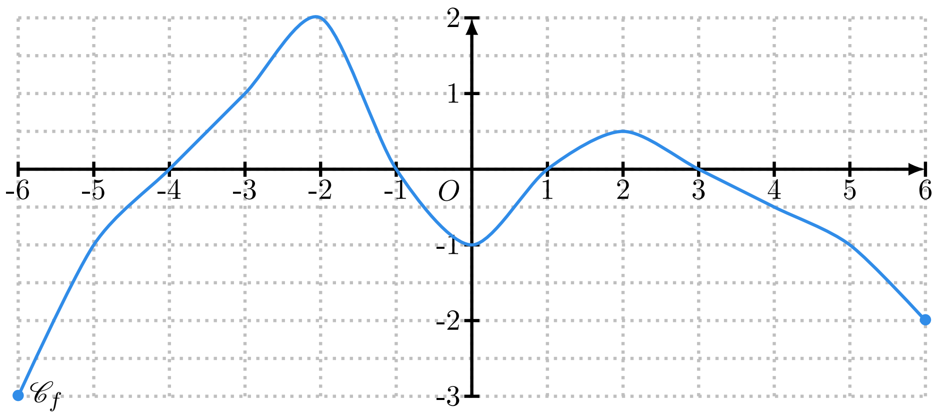
5.1.1 Équations du type $f(x) = k$

Ce genre d'équations a déjà été traité dans le chapitre précédent.

Méthode

1. On trace, si besoin (si elle n'est pas donnée), $\mathscr{C}_f$ dans un repère (orthogonal) ;
2. on trace la droite d'équation $y = k$, c'est-à-dire la droite passant par le point de coordonnées $(0\,;\,k)$ et parallèle à l'axe des abscisses ;
3. on recherche les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et de la droite d'équation $y = k$.

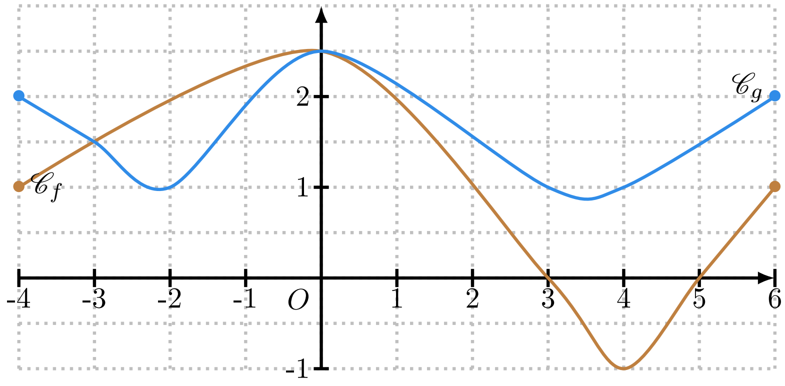
Exemple 1.5.
Résoudre sur l'intervalle $[-6\,;\,6]$ l'équation $f(x) = -1$:



5.1.2 Équation du type $f(x) = g(x)$

On cherche à résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$. Cela revient à chercher graphiquement (pour le moment) les éléments de l'ensemble de départ qui ont **même image** par f et g dont les courbes sont notées respectivement $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$. Autrement dit, on cherche les **abscisses** des points d'intersection éventuels entre $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

Exemple 2.5.
Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$:



5.2 Résolution graphique d'inéquations

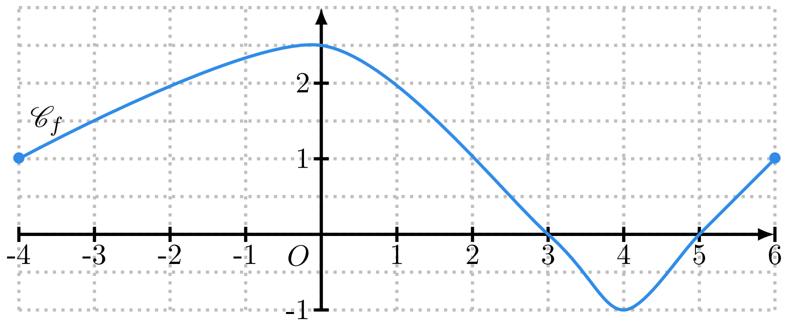
5.2.1 Premier type

On souhaite résoudre graphiquement les inéquations de la forme $f(x) \leqslant k$.

Méthode

1. On trace $\mathscr{C}_f$ dans un repère (orthogonal) ;
2. on trace la droite d'équation $y = k$, c'est-à-dire la droite passant par le point de coordonnées $(0 ; k)$ et parallèle à l'axe des abscisses ;
3. on recherche les points de la courbe situés **sous** la droite ;
4. l'ensemble des solutions est constitué des abscisses de ces points.

Exemple 3.5.
Résoudre graphiquement l'équation $f(x) \leqslant 1$:



▶ **Note 1.5.**

1. On résout de la même façon les inéquations du type $f(x) \geqslant k$.
   On retient alors les abscisses des points situés *au-dessus* de la droite d'équation $y = k$.
   Dans l'exemple précédent,
   $$f(x) \geqslant 1 \iff x \in \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$
2. De même pour les inéquations strictes $f(x) < k$ ou $f(x) > k$ on **exclura alors les abscisses des points d'intersection de la courbe et de la droite.** Dans l'exemple précédent,
   $$f(x) < 2 \iff \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

5.2.2 Deuxième type

On souhaite résoudre les inéquations de la forme $f(x) \leqslant g(x)$.

Méthode

1. On commence par tracer soigneusement les deux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ dans un repère orthogonal ;
2. l'ensemble des solutions est constitué des abscisses des points de la courbe $\mathscr{C}_f$ situés en dessous de $\mathscr{C}_g$.

Exemple 4.5.
Reprenons l'exemple 2 et résolvons l'inéquation $f(x) \leqslant g(x)$.

▶ **Note 2.5.**

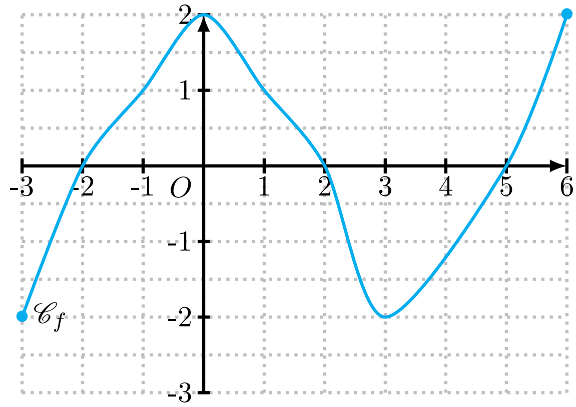
1. On résout de la même manière les inéquations du type $f(x) \geqslant g(x)$. On retient alors les abscisses des points de $\mathscr{C}_f$ situés au dessus de $\mathscr{C}_g$.

   Dans l'exemple 2, $f(x) \geqslant g(x) \iff$ ________________.
2. De même pour les inégalités strictes $f(x) > g(x)$ ou $f(x) < g(x)$, on exclura alors les abscisses des points d'intersection des deux courbes.

   Dans l'exemple 2,
   $$f(x) < g(x) \iff \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.$$

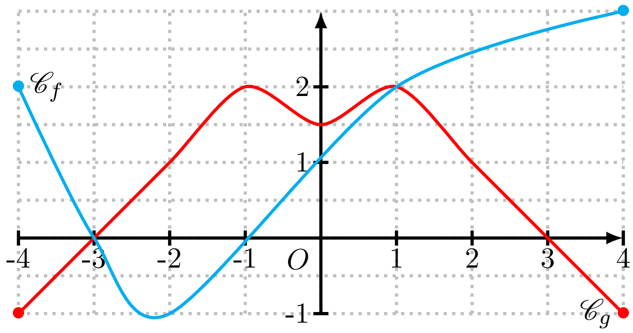
5.3 Les exercices du chapitre

Exercice 75.
Voici la courbe représentative d'une fonction f définie sur $[-3\,;\,6]$:



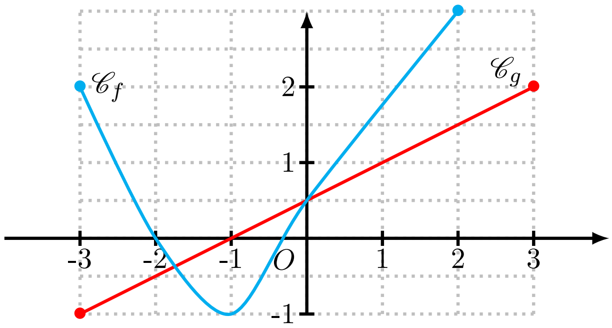
1. Déterminer les antécédents de 0 par la fonction f.
2. Dresser le tableau de signes de la fonction f sur $[-3\,;\,6]$.
3. Résoudre graphiquement, dans l'intervalle $[-3\,;\,6]$, les inéquations suivantes :
   (a) $f(x) > 1$
   (b) $f(x) \leqslant 1$
   (c) $f(x) > 0$

Exercice 76.
On donne ci-dessous les courbes représentatives de deux fonctions f et g définies sur le même intervalle $[-4\,;\,4]$:



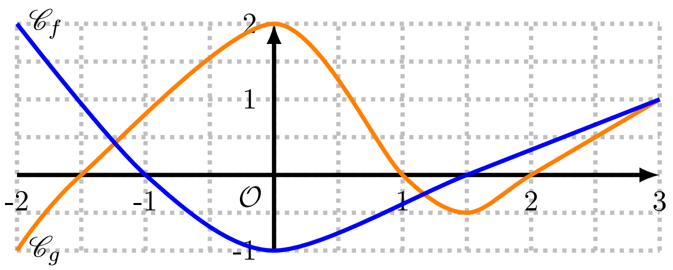
1. Dresser le tableau de signes des fonctions f et g.
2. Résoudre graphiquement :
   - $f(x) > 2,5\,;$
   - $f(x) = g(x)\,;$
   - $f(x) > g(x)$.

Exercice 77.
On donne ci-dessous les courbes représentatives de deux fonctions f et g définies sur le même intervalle $[-3\,;\,3]$:



1. Dresser le tableau de signe de la fonction g et le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[-3\,;\,3]$.
2. Résoudre graphiquement :
   - $f(x) = g(x)\,;$
   - $f(x) > g(x)$.
   - $g(x) \leqslant 1$.

Exercice 78.
Par lecture graphique, dresser le tableau de signes des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$:



Exercice 79.
Tracer la courbe représentative d'une fonction qui vérifie le tableau de signes ci-dessous :

<table>
<tr><td>x</td><td>-2</td><td></td><td>-1</td><td></td><td>0</td><td></td><td>2</td><td></td><td>3</td></tr>
<tr><td>Signe de $f(x)$</td><td></td><td>$+$</td><td>0</td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td><td>0</td><td>$+$</td><td></td></tr>
</table>

CHAPITRE

6

Informations chiffrées

6.1 Proportion et pourcentage

6.1.1 Population et sous-population

Définitions 4.6.

- On appelle *population* un ensemble d'éléments appelés les *individus*.
- On appelle *sous-population* une partie de la population.

Exemple 1.6.
On considère la population constituée par les élèves du lycée Ravel. Un individu est un élève. L'ensemble des élèves de la classe de Seconde 8 constitue une sous-population de la population des élèves du lycée.

6.1.2 Proportion d'une sous-population

Définition 1.6.
On considère une population qui possède N individus et une sous-population composée de n individus. La *proportion* d'individus de la sous-population, notée p, est égale à :

$$\boxed{p = \frac{n}{N}}$$

Application 6.1. Calculer la proportion des élèves inscrits en bilingue basque au sein de votre classe.

6.1.3 Pourcentage de pourcentage

Propriété 1.6.
On considère une population A, une sous population B de A et une sous-population C de B. On note p_B la proportion d'individus de la population de B dans A et p_C la proportion d'individus de la population de C dans B.

La proportion p d'individus de C dans A est égale à :

$$\boxed{p = p_B \times p_C}$$

Exemple 2.6.
On considère la population constituée par les véhicules que possède une entreprise. 75 % de ces véhicules sont électriques. Parmi les véhicules électriques, 30% sont des deux-roues. La proportion p des deux-roues électriques dans la population totale est donc $p = 0,75 \times 0,3 = 0,225$ ce qui prouve que les deux-roues électriques représentent $22,5\%$ de l'ensemble des véhicules de l'entreprise.

6.2 Variations d'une quantité

6.2.1 Variation absolue

Définition 2.6.
On considère une quantité qui varie au cours du temps. On note V_I la quantité initiale et V_F la quantité finale.

La *variation absolue* de la quantité est le nombre :

$$\boxed{V_F - V_I}$$

▶ **Note 1.6.**
La variation absolue possède la même unité que la quantité étudiée.

Exemple 3.6.
Le prix du baril de pétrole au 1^er^ octobre 2018 était de $73,68$ dollars. Au 1^er^ janvier 2019, le prix du baril était de $46,82$ dollars.
La variation absolue du prix du baril sur cette période est $46,82 - 73,68 = -26,86$. Cela signifie que le prix a baissé de $26,86$ dollars.

Propriétés 1.6.
1. Lorsque la variation absolue d'une quantité est *positive*, la quantité *augmente*.
2. Lorsque la variation absolue d'une quantité est *négative*, la quantité *diminue*.

6.2.2 Variation relative

Définition 3.6.

On considère une quantité qui varie au cours du temps. On note On note V_I la quantité initiale et V_F la quantité finale.

La *variation relative* de V_F par rapport à V_I est le nombre :

$$\boxed{\frac{V_F - V_I}{V_I}}$$

► **Note 2.6.**
La variation relative n'a pas d'unité. Elle s'appelle également le taux d'évolution de la quantité étudiée. Elle peut s'exprimer en pourcentage.

Application 6.2. Lors d'une semaine promotionnelle organisée dans un cinéma de quartier, une place d'entrée habituellement à 8 euros est vendue 5 euros. Quelle est le pourcentage d'évolution du prix de l'entrée ?

____

____

Définition 4.6.

Le *taux d'évolution* permettant de passer d'une valeur V_I à une valeur V_F est :

$$\boxed{t = \frac{V_F - V_I}{V_I} \qquad \text{on a alors} \qquad V_F = (1+t)V_I}$$

Si l'on veut le taux d'évolution en pourcentage, il faut multiplier t par ____________

ATTENTION : le taux d'évolution t peut être *négatif* ; cela revient à dire dans ce cas que l'évolution est une diminution ou une baisse.

Propriétés 2.6.
Faire évoluer une quantité d'un taux t revient à multiplier par $1+t$ et en pratique :

1. pour une augmentation de $p\%$, on multiplie par $1 + \frac{p}{100}$ (ici $t = \frac{p}{100}$).
2. pour une diminution de $p\%$, on multiplie par $1 - \frac{p}{100}$ (ici $t = -\frac{p}{100}$).

Définition 5.6.

Le nombre $1+t$ est appelé *multiplicateur*, puisque c'est par ce nombre que l'on multiplie V_I pour avoir V_F. On note alors :

$$\boxed{C_{\text{M}} = 1 + t \text{ et on a } V_F = C_{\text{M}} \times V_I}.$$

► **Note 3.6.**
Si l'on connaît C_{M}, alors $t = C_{\mathrm{M}} - 1$ (multiplier par 100 pour l'avoir en pourcentage).

Application 6.3.

1. Après une hausse de 8 % le prix d'un article est de 351 €. Quel était le prix de cet article avant la hausse ?
2. Après une baisse de 6 % le prix d'un article est de 329 €. Quel était le prix de cet article avant la baisse ?

6.3 Évolutions d'une quantité

6.3.1 Évolutions successives

Propriété 2.6.
Pour appliquer plusieurs évolutions successives à une quantité, il suffit de *multiplier* la quantité par le produit des coefficients multiplicateurs de chaque évolution.

Exemple 4.6.
Soit V_I une valeur initiale.

1. Pour une hausse de V_I de $t_1\%$ suivie d'une hausse de $t_2\%$, on a : $V_F = \left(1 + \dfrac{t_1}{100}\right)\left(1 + \dfrac{t_2}{100}\right)V_I$.
2. Pour une hausse de V_I de $t_1\%$ suivie d'une baisse de $t_2\%$, on a : $V_F = \left(1 + \dfrac{t_1}{100}\right)\left(1 - \dfrac{t_2}{100}\right)V_I$.

Définition 6.6.
Dans le cas de plusieurs évolutions, le *produit* des coefficients multiplicateurs permet de déterminer le taux d'évolution global.

Application 6.4. Le prix du carburant subit une hausse de $2,5\%$ puis une baisse de $0,4\%$. Quel est le taux d'évolution global associé à ces deux évolutions ?

6.3.2 Évolution réciproque

Définition 7.6.
Soit deux quantités V_0 et V_1.
On appelle *évolutions réciproques* les évolutions qui permettent de passer de V_0 à V_1 d'une part et de V_1 à V_0 d'autre part. Les coefficients multiplicateurs de deux évolutions réciproques sont inverses l'un de l'autre. Autrement dit, $C_{M_0} \times C_{M_1} = 1$.

Application 6.5. Un article augmente de 25%. Quelle baisse doit-on appliquer pour revenir au prix initial ?

6.4 Les exercices du chapitre

Exercice 80.
Sur 500 personnes inscrites à un examen, 380 sont reçues. Quel est le taux de réussite ? *Exprimer le résultat sous forme de pourcentage.*

Exercice 81.
Dans un lycée, 55 élèves sur 275 sont internes.
Quel pourcentage des élèves les internes représentent-ils ?

Exercice 82.
Dans un lycée, les 216 élèves de seconde représentent 40 % des élèves.
Quel est le nombre d'élèves du lycée ?

Exercice 83.
Calculer :

- 45 % de 80 %.
- Cinq sixièmes de deux tiers.
- Sept huitièmes de trois quarts.

Exercice 84.
Calculer :

- 12 % de 36 %.
- 18 % de 90 %.
- 50 % de 120 %.

Exercice 85.
Dans un lycée, il y a 350 élèves de seconde, dont 56 % de filles.
Les deux cinquièmes des filles et 20 % des garçons suivent une option musique.
Quel est le pourcentage d'élèves de seconde qui suivent l'option musique ?

Exercice 86.
Des études statistiques ont établi que 4 % de la population d'un pays est atteinte d'une certaine maladie. Pour cette maladie, un laboratoire pharmaceutique élabore un nouveau test de dépistage. Les essais sur un groupe témoin ont donné les résultats suivants :

- 4 % des individus du groupe témoin sont atteints de la maladie ;
- 85 % des personnes atteintes de la maladie réagissent positivement au test ;
- 99 % des personnes non atteintes de la maladie réagissent négativement au test.

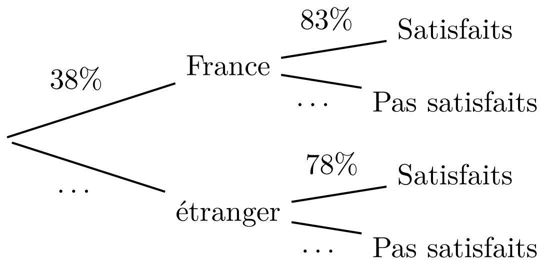
1. Vérifier que la proportion de personnes atteintes de la maladie qui réagissent positivement au test est $0,034$ puis l'exprimer en pourcentage.
2. Présenter les résultats de cette étude dans un tableau de pourcentages à double entrée.

Exercice 87.

Une agence de voyages a effectué un sondage auprès de l'ensemble de ses clients. Ce sondage montre que :

- 38 % des clients voyagent en France ;
- 83 % des clients voyageant en France sont satisfaits ;
- 78 % des clients voyageant à l'étranger sont satisfaits.

1. Compléter l'arbre suivant qui décrit ses données :



2. Calculer le pourcentage de clients de cette agence :
   (a) qui voyagent en France et sont satisfaits ;
   (b) qui voyagent à l'étranger et sont satisfaits ;
   (c) qui sont satisfaits ;
   (d) voyageant à l'étranger parmi les satisfaits.

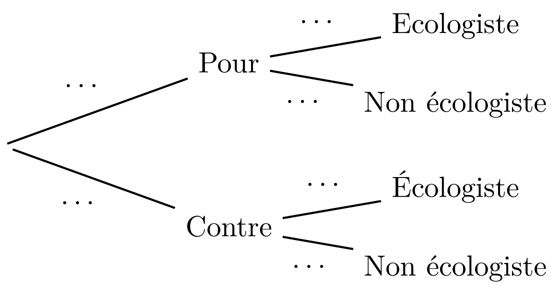
Exercice 88.

On souhaite implanter un parc éolien dans une région. Pour cela, on réalise un sondage sur la population voisine :

- 60 % des personnes interrogées sont contre l'implantation de ce parc éolien dans leur région et, parmi elles, 25 % se disent écologistes.
- Parmi la population interrogée favorable à l'implantation de ce parc, 10 % se disent écologistes.

On peut décrire ces données par l'arbre suivant :

1. Compléter l'arbre suivant qui décrit ces données :



2. Donner le pourcentage de la population favorable à l'implantation.
3. Calculer le pourcentage des personnes interrogées contre l'implantation et qui se disent écologistes.
4. Calculer le pourcentage des personnes interrogées pour l'implantation et qui se disent non écologistes.
5. Calculer le pourcentage des personnes interrogées qui se disent écologistes.

Exercice 89.
Afin de tester l'efficacité d'un médicament contre le cholestérol, des patients nécessitant d'être traités ont accepté de participer à un essai clinique organisé par un laboratoire.

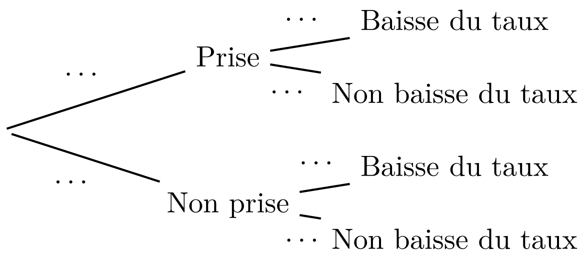
Dans cet essai, 60 % des patients ont pris le médicament pendant un mois, les autres ayant pris un placebo (comprimé neutre).

On étudie la baisse du taux de cholestérol après l'expérimentation.

On constate une baisse de ce taux chez 80 % des patients ayant pris le médicament.

On ne constate aucune baisse pour 90 % des personnes ayant pris le placebo.

1. Compléter l'arbre suivant qui décrit ces données :



2. Donner le pourcentage des patients ayant pris le placebo.
3. Calculer le pourcentage de patients ayant pris le médicament et ayant vu leur taux de cholestérol baisser.
4. Calculer le pourcentage de patients ayant vu leur taux de cholestérol baisser.

Exercice 90.
Calculez le coefficient multiplicateur dans chacun des cas suivants :

1. hausse de $0,1\%$;
2. baisse de 5% ;
3. baisse de 10% ;
4. hausse de 7%.

Exercice 91.
Donner les pourcentages d'augmentation ou de diminution associés aux coefficients multiplicateurs suivants :

1. $0,92$
2. $1,41$
3. $3,02$
4. $0,65$
5. $0,69$

Exercice 92.
Un article qui se vendait 35 € en juin 2 023, se vendait 42 € en septembre 2 023. Quel est le taux d'augmentation ?

Exercice 93.
Une veste se vendait 155 € en décembre 2 022. Quel était son prix en février 2 023 après une remise de 40 % ?

Exercice 94.
Une action valait $75,5$ € le 22 septembre 2 022, le lendemain elle avait augmenté de $7,3$%. Combien valait-elle le 23 septembre 2 022 ?

Exercice 95.
Calculer le taux d'évolution global d' :

1. un produit subit successivement une hausse de 12 % et de une hausse de 8 % ;
2. Un produit subit successivement une hausse de 12 % et de une baisse de 6 % ;
3. Un produit subit successivement une baisse de 5 % et de une baisse de 15 % ;
4. Un produit subit successivement une baisse de 25 % et de une hausse de 25 %.

Exercice 96.
Montrer qu'une hausse de 25 % et une baisse de 20 % constituent deux évolutions réciproques.

CHAPITRE

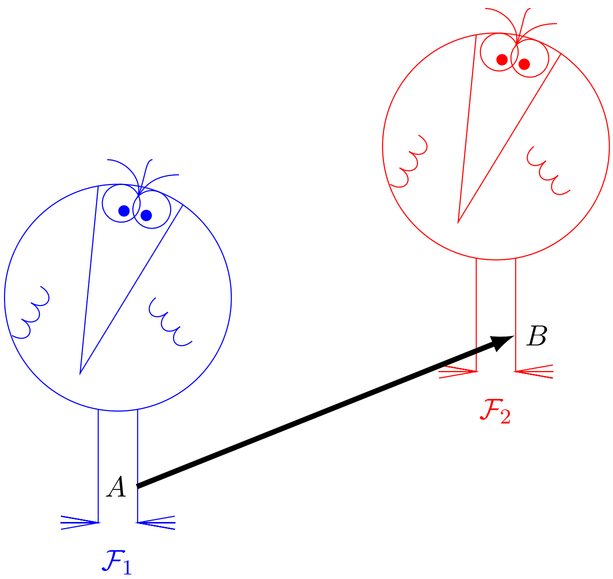
7

Les vecteurs

7.1 Translation et vecteurs

7.1.1 Translation de vecteur

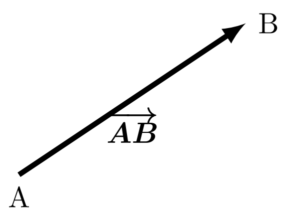
Sur la figure ci-dessous, on a construit l'image $\mathcal{F}_2$ de la figure $\mathcal{F}_1$ par la *translation* qui transforme A en B.
La flèche que l'on a tracée allant de A jusqu'au point B indique *la direction*, *le sens* et *la longueur* du déplacement que l'on doit effectuer pour construire l'image d'un point :



Définition 1.7.

Soient A et B deux points du plan.
La *translation* qui transforme A en B est appelée *translation de vecteur* $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$.

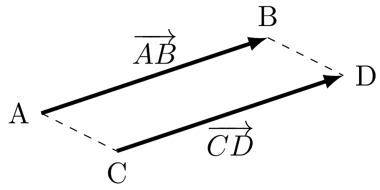
Lorsque $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ sont *distincts*, le vecteur $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ est représenté par une flèche allant du point $\boldsymbol{A}$ jusqu'au point $\boldsymbol{B}$:



7.1.2 Égalité de vecteurs

Définition 2.7.

Soient quatre points A, B, C et D du plan.
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont *égaux* signifie que D est ____________ de C par la translation de vecteur ____________ .



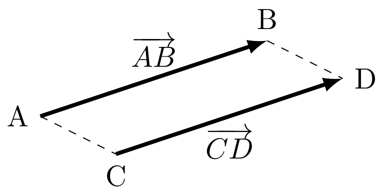
Définition 3.7.

On dit que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont *égaux* si les trois propriétés suivantes sont satisfaites :

1. les ________________ sont les mêmes, c'est à dire $(AB)//(CD)$;
2. ____________ sont les mêmes (le sens de A vers B est le même que le sens de C vers D) ;
3. les ________________ sont les mêmes, c'est à dire $AB = CD$.

De manière équivalente :

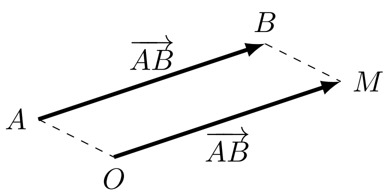
Propriété 1.7.
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \iff ABDC$ est ____________________________ .



ATTENTION ! L'ordre des points est très important !

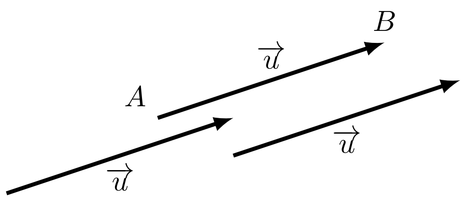
► **Note 1.7.**
Quand on a un parallélogramme, on peut alors en déduire plusieurs égalités de vecteurs.
Dans le cas de $ABDC$, comme sur la figure ci-dessus, on a en particulier aussi $\overrightarrow{AC} =$ ____.

Propriété 2.7.
Soit $\overrightarrow{AB}$ un vecteur et O un point du plan. Il existe *un unique* point M tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OM}$. C'est le point M de telle sorte que le quadrilatère $ABMO$ est un parallélogramme :



On dit aussi que M est l'image de O par la *translation* de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

► **Note 2.7.**
Il est important de noter que si on a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ alors l'objet $\overrightarrow{AB}$ est le même objet que $\overrightarrow{CD}$, bien que les points A et B ne soient pas les points C et D.
Par ailleurs, on peut nommer un vecteur par une seule lettre (minuscule) surmontée d'une flèche comme par exemple $\overrightarrow{v}$ voire $\overrightarrow{u}$.
On peut alors représenter un vecteur à plusieurs endroits du plan, cependant, il s'agit toujours du même objet.



Définition 4.7.
Le vecteur $\overrightarrow{BA}$ est appelé *vecteur opposé* du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
On le note aussi $-\overrightarrow{AB}$. Il est de *même direction* et *de même longueur* que le vecteur $\overrightarrow{AB}$, mais de *sens contraire*.

Propriété 3.7.
Soit A et B deux points du plan.

$$\boxed{\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB} \iff M \text{ milieu de } [AB]}$$

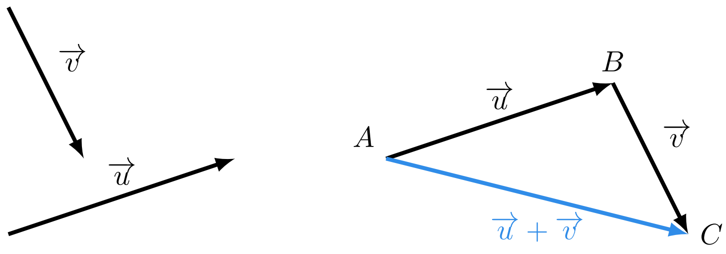
7.2 Somme de vecteurs

Pour faire la somme de deux vecteurs, on représente ces deux vecteurs de manière que l'origine de l'un soit l'extrémité de l'autre. La *somme* est alors le vecteur dont l'origine est l'origine du premier et l'extrémité est l'extrémité du second.

Méthode

Pour faire la somme de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$:

1. On choisit un point A.
2. On construit le point B tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$.
3. On construit ensuite le point C tel que $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{v}$.
4. On a alors $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.



Propriété 4.7. *Relation de Chasles*
Soient A, B et C trois points du plan. Alors :

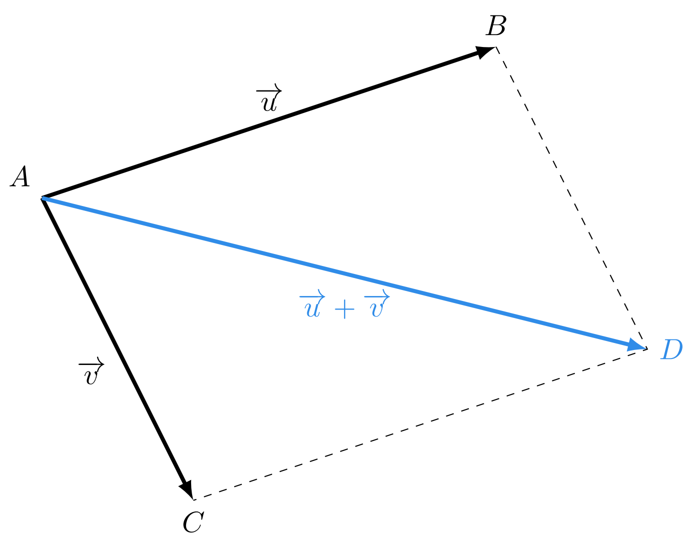
$$\boxed{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}}$$

► **Note 3.7.**
Bien faire attention à avoir le même point entourant un signe $+$ pour appliquer cette relation.
Ça ne fonctionne en particulier pas avec un signe $-$.
Parfois, on souhaite faire la somme de deux vecteurs qui ont la même origine, c'est à dire $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.
Il s'agit alors d'une autre propriété.

Propriété 5.7.
Pour tous points A, B et C du plan,

$$\boxed{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}}$$

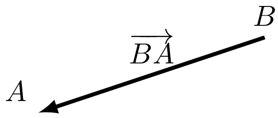
où D est le point tel que $ABDC$ est un parallélogramme.



► Note 4.7.
Pour tous points A et B,

$$\boxed{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}}$$

Cela explique pourquoi $\overrightarrow{BA}$ est l'opposé de $\overrightarrow{AB}$.
On note $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AB} + (-\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$.

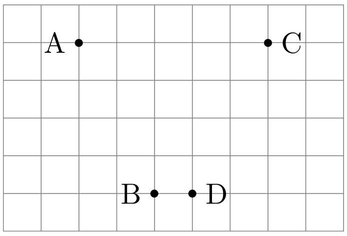


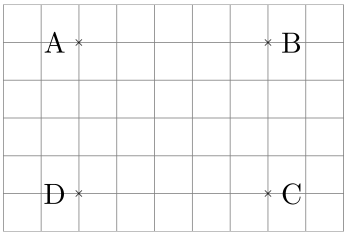
► Note 5.7.
Avec la règle du parallélogramme, on peut remarquer que l'on a :

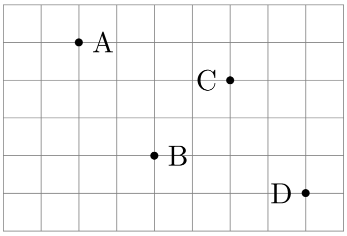
$$\boxed{\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}}$$

7.3 Les exercices du chapitre

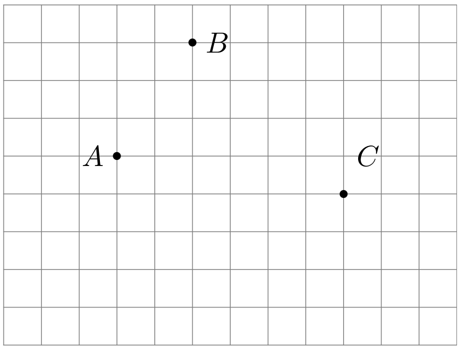
Exercice 97.
Sur chaque schéma de la figure,
l'égalité $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ est-elle vraie ? Justifier.







Exercice 98.
On donne la figure suivante :



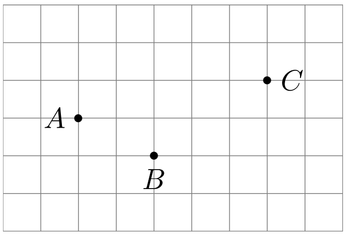
1. Construire, à partir des points A, B et C, les points D, E et F tels que :
   - $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$;
   - $\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{AB}$;
   - $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{BA}$.
2. Quels parallélogrammes peut-on tracer avec ces six points ?
3. En utilisant ces six points, compléter :
   - $\overrightarrow{BD} =$ ______ $=$ ______ ;
   - $\overrightarrow{BC} =$ ______ ;

- $\overrightarrow{AF} = \underline{\hspace{2cm}}$.

Exercice 99.

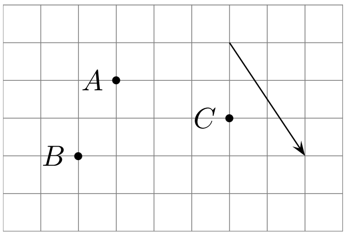
1. Construire ci-dessous un vecteur égal à :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\,?$$

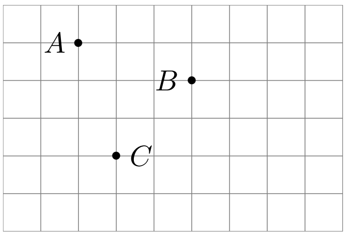


2. Le vecteur tracé ci-dessous est-il égal à

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\,?$$



3. Construire ci-dessous un vecteur égal à $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

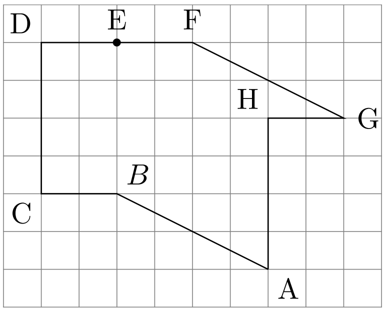


Exercice 100.

Compléter à l'aide de la relation de Chasles :

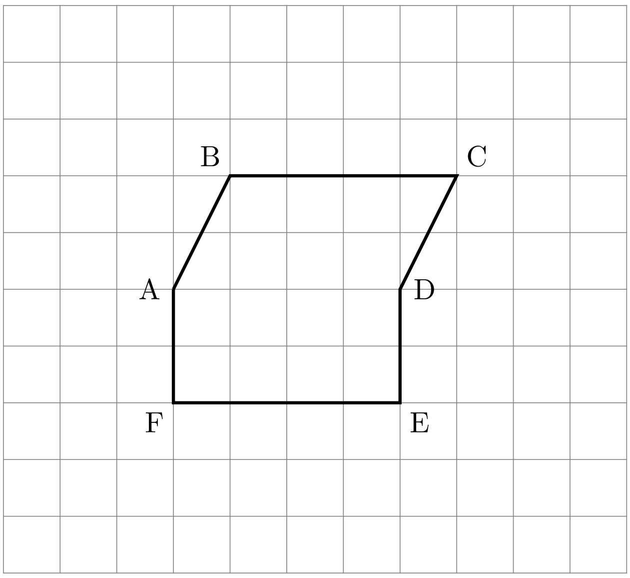
- $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{B\ldots}$
- $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{\ldots A} + \overrightarrow{A\ldots}$
- $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{\ldots P} + \ldots\ldots$
- $\overrightarrow{\ldots E} = \overrightarrow{F\ldots} + \overrightarrow{G\ldots}$
- $\overrightarrow{H\ldots} = \ldots\ldots + \overrightarrow{IJ}$
- $\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{R\ldots} + \overrightarrow{\ldots S}$
- $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} = \ldots\ldots$

Exercice 101.
On considère le motif suivant :



1. Citer tous les vecteurs égaux au vecteur $\overrightarrow{AB}$ représentés sur ce motif.
2. En n'utilisant que les lettres représentées sur ce motif, déterminer un vecteur égal au vecteur $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FE}$.
3. En n'utilisant que les lettres représentées sur ce motif, déterminer un vecteur égal aux vecteurs suivants :
   (a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AH}$
   (b) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$
   (c) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DE}$
   (d) $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{FB}$

Exercice 102.
On donne le motif ci-dessous :

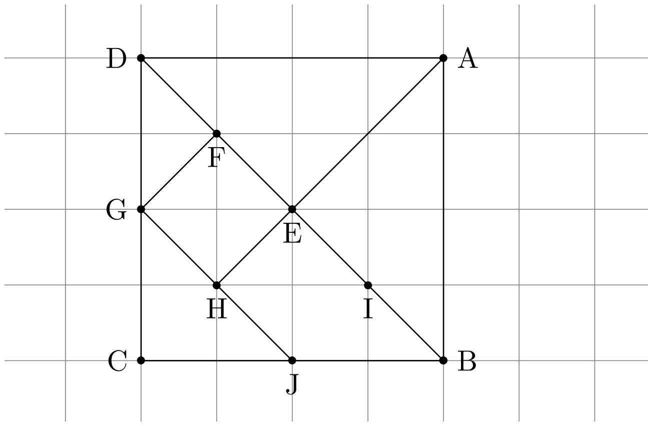


Construire les points G, H, I et J tels que :

- $\overrightarrow{\mathrm{EG}} = \overrightarrow{\mathrm{CD}}$.
- $\overrightarrow{\mathrm{FH}} = 2\overrightarrow{\mathrm{FE}}$.
- $\overrightarrow{\mathrm{FI}} = \overrightarrow{\mathrm{FA}} + \overrightarrow{\mathrm{FD}}$.
- J est l'image de F par la translation de vecteur $-\overrightarrow{\mathrm{AB}}$.

Exercice 103.
Dans le motif ci-dessous, compléter par ce qui convient :

1. $\overrightarrow{\mathrm{CD}} + \overrightarrow{\mathrm{DA}} = \dots$
2. $\overrightarrow{\mathrm{JB}} + \overrightarrow{\mathrm{JC}} = \dots$
3. $\overrightarrow{\mathrm{JB}} + \overrightarrow{\mathrm{JC}} = \dots$
4. $\overrightarrow{\mathrm{JG}} + \overrightarrow{\mathrm{JB}} = \overrightarrow{\mathrm{J}\dots}$
5. $\overrightarrow{\mathrm{GF}} + \overrightarrow{\mathrm{GH}} + \overrightarrow{\mathrm{JC}} = \dots$



Exercice 104.
Soient $ABCD$ un quadrilatère quelconque, et I, J, K, L les milieux respectifs de $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$.

1. Faire une figure.
2. Justifier que $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{IB}$, et que $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BJ}$.
3. À l'aide (entre autres) de la relation de Chasles, compléter le calcul suivant :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IJ} &= \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BJ}\\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{\dots} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\dots}\\ &= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right)\\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{\dots}\end{aligned}$$

4. De même, montrer que $\overrightarrow{LK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.
5. En déduire la nature du quadrilatère $IJKL$.
6. Quelle propriété du collège venez-vous de démontrer ?

Exercice 105.
Simplifier les expressions suivantes :

1. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC}$
2. $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{ON} + 2\overrightarrow{NP} - \overrightarrow{OP}$

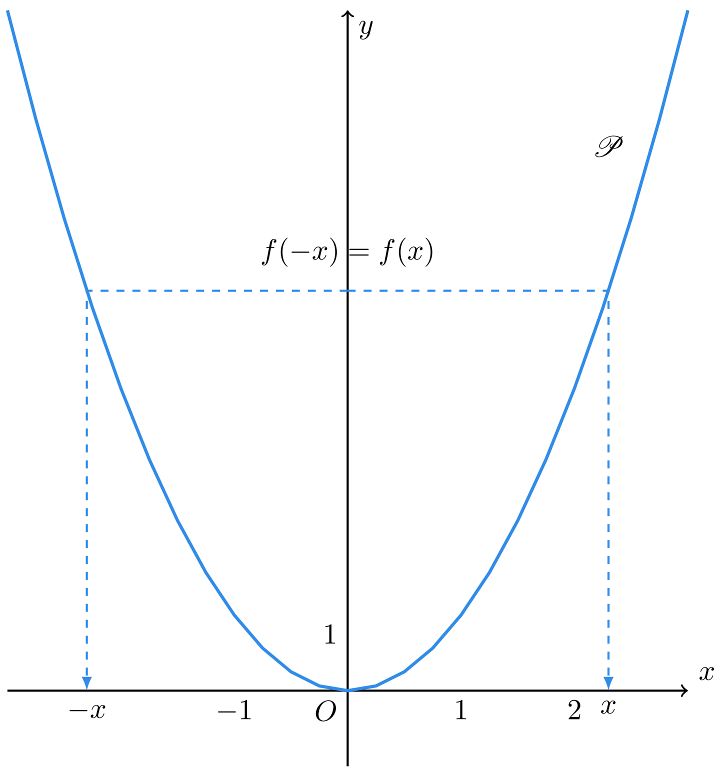
CHAPITRE

8 Fonction carré, fonction racine carré

8.1 La fonction carré

8.1.1 Définition et premières propriétés

Définition 1.8.
La *fonction carré* est la fonction f qui à tout réel x associe son carré soit $f(x) =$ ______ et on appelle *parabole* $\mathscr{P}$ la courbe représentative de cette fonction carré.



Propriétés 1.8.

1. *Un carré* est toujours positif ou nul dans $\mathbb{R}$.
   Pour tout réel x, on a $x^2 \geqslant 0$: la parabole $\mathscr{P}$ est toujours située *au dessus de l'axe des abscisses.*

2. *Un nombre et son opposé* ont le *même* carré.
   Pour tout réel x, on a $x^2 = (-x)^2$: la parabole $\mathscr{P}$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées : on dit que la fonction carré est *paire.*

8.1.2 Sens de variation de la fonction carrée

Propriétés 2.8.
La fonction carrée est :

1. *strictement décroissante* sur $]-\infty\,;\,0]$; autrement dit, la fonction carrée *ne conserve pas l'ordre des réels négatifs* : si $u < v \leqslant 0$ alors ________________.
2. *strictement croissante* sur $[0\,;\,+\infty[$; autrement dit, la fonction carrée *conserve l'ordre des réels positifs* : si $0 \leqslant u < v$ alors ________________.

On résume ces variations dans un tableau :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Variation de x^2	↘	0	↗

Application 8.1. Sans calcul, comparer les carrés de :

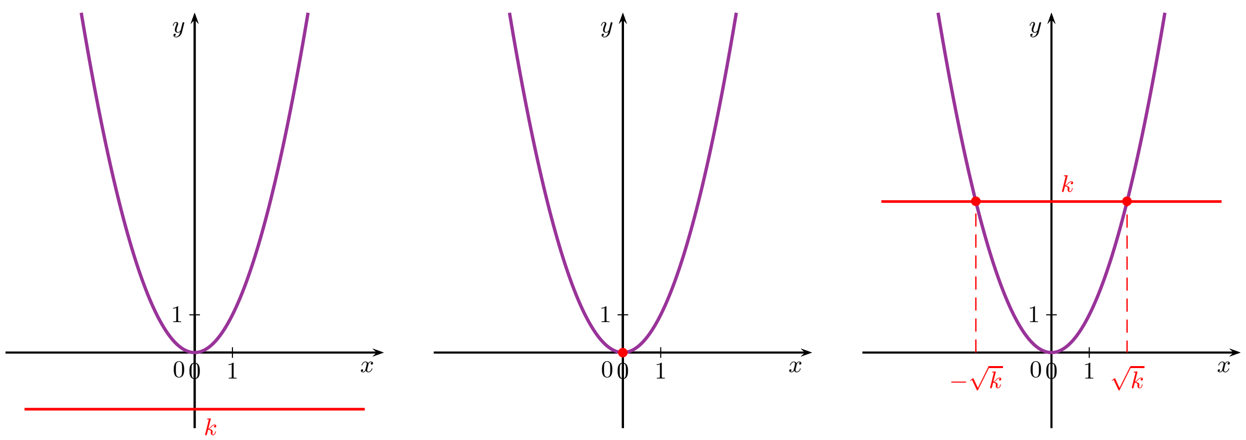
1. π et $3,15$
2. $-0,96$ et $-0,8$
3. $0,2$ et $-0,3$

Propriétés 3.8.

1. Si $k < 0$, comme un carré est positif, l'équation $x^2 = k$ n'a pas de solution.
2. Si $k = 0$, l'équation $x^2 = 0$ a pour unique solution $x = 0$.
3. Si $k > 0$, $x^2 = k \Leftrightarrow x^2 - k = 0 \Leftrightarrow \left(x + \sqrt{k}\right)\left(x - \sqrt{k}\right) = 0$.
   On obtient les deux solutions $x = -\sqrt{k}$ ou $x = \sqrt{k}$.

Illustrations.

$k < 0$ $\quad$ $k = 0$ $\quad$ $k > 0$



$x^2 = k$ n'a pas de solution $\quad$ $x^2 = 0$ a pour unique solution 0 $\quad$ $x^2 = k$ a deux solutions $-\sqrt{k}$ ou $\sqrt{k}$

Application 8.2. Résoudre graphiquement les équations suivantes :

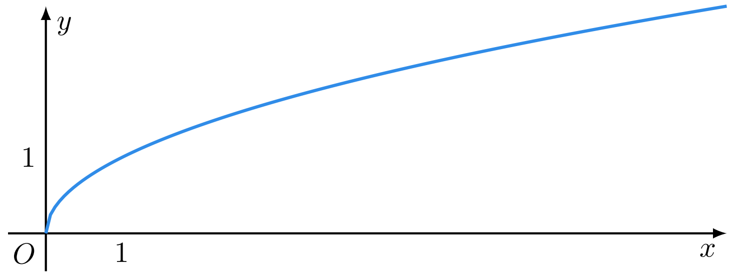
1. $x^2 = 16$
2. $x^2 = -2$
3. $x^2 = 0$

8.2 La fonction racine carré

8.2.1 Définition et courbe représentative

Définition 2.8.
La fonction *racine carré* est la fonction qui à tout réel x positif ou nul associe sa racine carré :

$$x \longmapsto \sqrt{x}$$



8.2.2 Sens de variation

Propriété.
La fonction racine carré *conserve* l'ordre dans les réels positifs.
Autrement dit, si $0 \leqslant u < v$ alors $\sqrt{u} < \sqrt{v}$: la fonction racine carré est donc *strictement croissante* sur $[0\,;\,+\infty[$.

x	0	$+\infty$
Variation de $\sqrt{x}$	0	↗

Application 8.3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $\sqrt{x} < 2$
2. $\sqrt{x} - 3 \geqslant 0$

Propriétés 4.8.
Pour tous nombres réels a et b positifs :

1. $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$
2. Si $b \neq 0$, $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$
3. Si a et b sont non nuls, $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$

ATTENTION ! En général on a $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Application 8.4.

1. Écrire $\sqrt{75}$ sous la forme $a\sqrt{3}$.
2. Simplifier $\sqrt{\dfrac{9}{25}}$.
3. Démontrer que $(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)$ est un entier.

8.3 Les exercices du chapitre

Exercice 106.
Calculer à la main $10\,001^2 - 9\,999^2$.

Exercice 107.
On donne les égalités :

$$4 \times 6 + 1 = 5^2 \text{ et } 7 \times 9 + 1 = 8^2$$

1. Quelle conjecture peut-on émettre en langage naturel ? Écrire cette conjecture en prenant n comme premier nombre.
2. Vérifier cette conjecture pour $n = 8$ puis pour $n = 12$.
3. Démontrer cette conjecture.

Exercice 108.
Résoudre graphiquement les équations suivantes :

1. $x^2 = 25$
2. $x^2 = 5$
3. $x^2 = 0$
4. $x^2 = -3$

Exercice 109.
Résoudre algébriquement les équations suivantes :

1. $4x^2 - 5 = 0$
2. $2x^2 + 3 = 1$
3. $\dfrac{4}{5}x^2 = 5$

Exercice 110.
Comparer sans aucun calcul et en justifiant à l'aide des propriétés de la fonction carrée :

a. $2,356^2$ et $2,5^2$
b. $(-1,08)^2$ et $(-1,2)^2$
c. $(-1,6)^2$ et $1,57^2$

Exercice 111.
Donner un encadrement de x^2 sachant que :

a. $-3,5 \leqslant x \leqslant -1$
b. $0,5 \leqslant x \leqslant 2,5$
c. $x \in]-2\,;\,1]$
d. $x \in]-2\,;\,4]$

Exercice 112.
À l'aide de la parabole d'équation $y = x^2$, déterminer l'ensemble des valeurs de x telles que :

1. $x^2 \geqslant 4$
2. $x^2 > 4$
3. $x^2 < 2$
4. $x^2 \geqslant -5$

Exercice 113.
Même consigne que précédemment :

1. $x^2 \geqslant 3$
2. $x^2 \leqslant 5$
3. $x^2 < 100$
4. $x^2 > 81$

Exercice 114.
Résoudre algébriquement les équations suivantes :

1. $(x-1)^2 = 4$
2. $(3x+4)^2 = 9$
3. $(x+1)^2 = 3$
4. $(-5x+1)^2 = 6$

Exercice 115.
Simplifier :

1. $(\sqrt{5})^2$
2. $-\left(\sqrt{\dfrac{3}{4}}\right)^2$
3. $\left(-2\sqrt{3}\right)^2$
4. $\left(3\sqrt{2}\right)^2$

Exercice 116.
Calculer $\sqrt{a+b}$ et $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ pour :

1. $a = 1$ et $b = 3$
2. $a = 4$ et $b = 3$

Exercice 117.
Écrire sous la forme $a\sqrt{b}$ où a et b sont des entiers naturels :

1. $\sqrt{18}$
2. $\sqrt{200}$
3. $\sqrt{125}$
4. $\sqrt{54}$
5. $\sqrt{24}$

Exercice 118.
Simplifier les sommes algébriques suivantes :

1. $2\sqrt{2} - 5\sqrt{2} + 4\sqrt{2}$
2. $-\sqrt{5} + 2\sqrt{5} + 4\sqrt{5}$

Exercice 119.

1. Simplifier au maximum $\sqrt{8}$, $\sqrt{18}$, $\sqrt{12}$ et $\sqrt{75}$.
2. Écrire sous la forme $a\sqrt{b}$ avec a et b entiers :
   (a) $3\sqrt{2} - 4\sqrt{8} + 2\sqrt{18}$
   (b) $\sqrt{12} + 3\sqrt{3} - \sqrt{75}$

Exercice 120.
Écrire sous la forme $a\sqrt{b}$ avec a et b entiers :

1. $\sqrt{27} - 2\sqrt{3} + \sqrt{48}$
2. $4\sqrt{32} - 3\sqrt{8} + \sqrt{18}$

Exercice 121.
Soit trois points A, B et C vérifiant $\mathrm{AB} = \sqrt{300}$,
$\mathrm{BC} = 2\sqrt{27}$ et $\mathrm{AC} = \sqrt{48}$.
Démontrer que ces trois points sont alignés.

Exercice 122.

Soit trois points A, B et C vérifiant $\mathrm{AB} = \sqrt{5} - \sqrt{3}$,
$\mathrm{AC} = \sqrt{5} + \sqrt{3}$ et $\mathrm{BC} = 4$.
Le triangle ABC est-il rectangle ?

Exercice 123.
Comparer, sans calcul, à l'aide de la fonction racine carrée :

1. $\sqrt{2{,}5}$ et $\sqrt{1{,}8}$
2. $\sqrt{3{,}08}$ et $\sqrt{\pi}$

Exercice 124.
Écrire l'ensemble des solutions des inéquations :

1. $\sqrt{x} < 2$
2. $\sqrt{x} - 5 \leqslant 0$
3. $3 - \sqrt{x} < 5$
4. $3 - 2\sqrt{x} \geqslant 0$

Exercice 125.
Dans chacun des cas, donner le meilleur encadrement possible de $\sqrt{x}$ en justifiant :

1. $0 \leqslant x \leqslant 4$.
2. $0,25 \leqslant x \leqslant 6,25$.
3. $\dfrac{1}{100} \leqslant x \leqslant 1$.

CHAPITRE

9 Géométrie repérée

9.1 Vecteurs dans un repère

9.1.1 Différents repères

Définition 1.9.

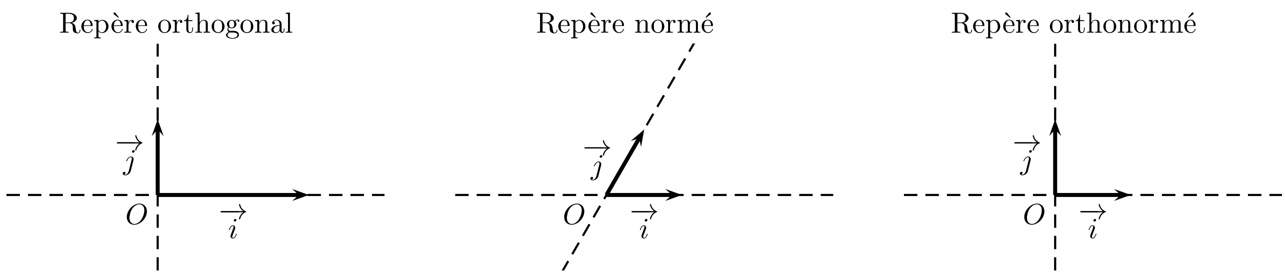
Soient O un point du plan et $\vec{i}$ et $\vec{j}$ deux vecteurs de ce plan de *directions différentes*.
$(\mathrm{O}; \vec{i}\,; \vec{j})$ est appelé __________ du plan : O est appelé ____________________ du repère et le couple $(\vec{i}\,; \vec{j})$ est appelé __________ du repère.

Définitions.

Soit un repère $(\mathrm{O}; \vec{i}\,; \vec{j})$ du plan.

1. Si les directions de $\vec{i}$ et de $\vec{j}$ sont orthogonales, le repère est dit ____________________
2. Si les normes de $\vec{i}$ et de $\vec{j}$ sont égales à 1, le repère est dit ____________________
3. Si les directions de $\vec{i}$ et de $\vec{j}$ sont orthogonales et que les normes de $\vec{i}$ et de $\vec{j}$ sont égales à 1, le repère est dit ____
4. Sinon, le repère est dit ____________________

Illustrations.



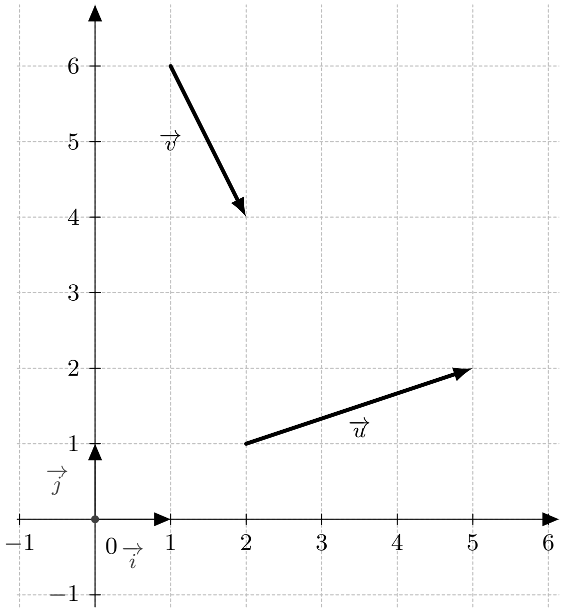
Définition 2.9.

Dans ce repère, si un vecteur $\vec{u}$ est égal à $\vec{u} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$ on dit que les coordonnées de $\vec{u}$ sont :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ que l'on peut également noter } (x\,;\,y).$$

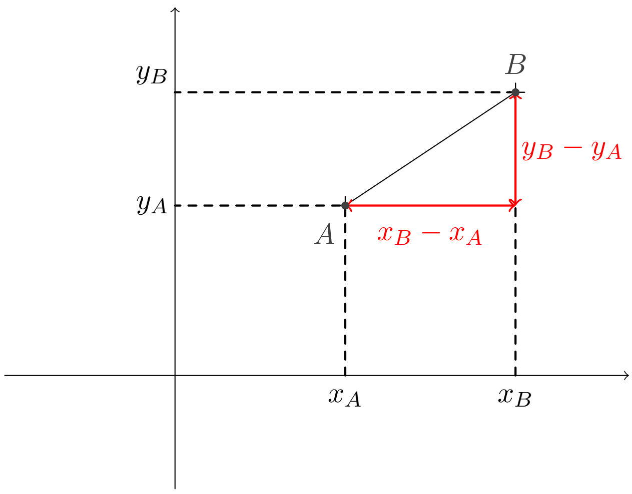
Exemple 1.9.

Déterminons les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ dans le repère $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j})$:



Ici les coordonnées de $\overrightarrow{u}$ sont $\begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$, les coordonnées de $\overrightarrow{v}$ sont $\begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$.

9.1.2 Coordonnées d'un vecteur



Propriété 1.9.

Dans un repère les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ que l'on peut aussi noter :

$$(x_B - x_A \,;\, y_B - y_A)$$

Propriété 2.9.
Dans un repère, on considère $\overrightarrow{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

$$\boxed{\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v} \iff x = x' \quad \text{et} \quad y = y'}.$$

Application 9.1. Dans un repère $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j})$, on considère les points $A(1; 2)$, $B(5; 4)$, $C(2; 1)$, $D(-2; -1)$ et $E(6; 2)$.

1. Montrer que le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.
2. Calculer les coordonnées du point G pour que le quadrilatère CBEG est un parallélogramme.

9.1.3 Somme de vecteurs

Propriété 3.9.
Dans un repère, soit les vecteurs $\overrightarrow{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

Dans ce repère, $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$.

Application 9.2. Dans un repère $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j})$, on donne $\overrightarrow{u}(1; 2)$ et $\overrightarrow{v}(-4; 7)$.
Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$.

9.1.4 Produit d'un vecteur par un réel

Dans un repère, on considère le vecteur $\overrightarrow{u}(x; y)$.
Le vecteur $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{u}$ a pour coordonnées $(x + x; y + y)$, soit $(2x; 2y)$. On le note $2\overrightarrow{u}$.
De même Le vecteur $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{u} + \overrightarrow{u}$ a pour coordonnées $(x+x+x; y+y+y)$, soit $(3x; 3y)$. On le note $3\overrightarrow{u}$.
De manière générale, on pose la définition suivante :

Définition 3.9.

Dans un repère, soit le vecteur $\overrightarrow{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et k un nombre réel.

Le vecteur $k\overrightarrow{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$ dans ce repère.

Application 9.3. Soit dans un repère $\overrightarrow{u}(2; 1)$.
Calculez les coordonnées des vecteurs $4\overrightarrow{u}$ et $-6\overrightarrow{u}$.

9.2 Vecteurs colinéaires

Définition 4.9.
Deux vecteurs *non nuls* $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont *colinéaires* signifie qu'ils ont *la même direction.* Il existe alors un réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$.

► **Note 1.9.**
Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur.

Définition 5.9.
On considère deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

On appelle *déterminant* de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ noté $\det(\vec{u}\ ;\ \vec{v})$ ou $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$, est le nombre défini par :

$$\boxed{\det(\vec{u}\ ;\ \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - yx' \text{ (différence des produits en croix)}}.$$

Propriété 4.9.
Dans un repère, on considère deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement les coordonnées de ces deux vecteurs sont proportionnelles, c'est-à-dire si et seulement si $xy' = x'y$ ou encore :

$$\boxed{\det(\vec{u}\ ;\ \vec{v}) = 0}.$$

Application 9.4. Soit dans un repère, $\vec{u}(1\,;\,\sqrt{2}+1)$ et $\vec{v}(\sqrt{2}-1\,;\,1)$.
Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils colinéaires ?

9.2.1 Applications de la colinéarité de vecteurs

Propriétés.
Soient A, B, C et D quatre points du plan distincts deux à deux.

1. Les droites (AB) et (CD) sont *parallèles* si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont *colinéaires.*
2. Les points A, B et C sont *alignés* si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont *colinéaires.*

Application 9.5. Soit $M(1\,;\,4)$, $N(3\,;\,3)$ et $P(7\,;\,1)$.
Démontrer que les points M, N et P sont alignés.

9.3 Milieu et longueur d'un segment

9.3.1 Coordonnées du milieu d'un segment

Propriété 5.9.
On se place dans un repère quelconque.
Soient $A(x_A\,;\,y_A)$ et $B(x_B\,;\,y_B)$ et $I(x_I\,;\,y_I)$ milieu de $[AB]$.

Alors :

$$\boxed{x_I = \frac{x_A + x_B}{2} \qquad \text{et } y_I = \frac{y_A + y_B}{2}.}$$

Application 9.6. On se place dans un repère orthonormé $(\mathrm{O}; \overrightarrow{i}\,; \overrightarrow{j}\,)$ et on donne les points $A(4\,;\,0)$ et $G(-2\,;\,6)$. Calculez les coordonnées du point K milieu du segment $[AG]$.

9.3.2 Calculs de distances

Propriété 6.9.
Dans un repère **orthonormé**, la distance AB entre les points $\mathrm{A}(x_\mathrm{A}\,;\,y_\mathrm{A})$ et $\mathrm{B}(x_\mathrm{B}\,;\,y_\mathrm{B})$ est telle que :

$$\boxed{AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Application 9.7. On se place dans un repère orthonormé $(\mathrm{O}; \overrightarrow{i}\,; \overrightarrow{j}\,)$ et on donne les points $A(-4\,;\,-1)$, $B(4\,;\,-2)$, et $C(-2\,;\,2)$.

1. Calculez les distances AB, AC et BC.
2. Le triangle ABC est-il rectangle ?

9.4 Les exercices du chapitre

Exercice 126.
Dans le plan muni d'un repère $(\text{O}; \vec{i}\,; \vec{j}\,)$, on considère les points $E(-5\,;\,7)$, $F(6\,;\,-2)$, $G(11\,;\,0)$, $H(0\,;\,9)$ et $K(-10\,;\,5)$.

1. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{HG}$ sont égaux. Que peut-on en déduire ?
2. Le quadrilatère $EGKF$ est-il un parallélogramme ?

Exercice 127.
Dans le plan muni d'un repère $(\text{O}; \vec{i}\,; \vec{j}\,)$, on considère les points $A(2\,;\,5)$, $B(9\,;\,3)$, $C(14\,;\,-4)$,$D(7\,;\,-2)$.

1. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$. Que peut-on en déduire concernant la nature du quadrilatère $ABCD$?
2. Calculer les coordonnées du point E pour que le quadrilatère ABEC soit un parallélogramme.
3. C est-il le milieu du segment [DE] ? Justifier.

Exercice 128.
Soient les points $A(1\,;\,2)$ et $B(3\,;\,-2)$ et les vecteurs $\vec{u}(2\,;\,5)$ et $\vec{v}(1\,;\,-2)$.

1. Calculer les coordonnées du vecteur $\vec{u}+\vec{v}$.
2. Calculer les coordonnées des points E et F définis par $\overrightarrow{AE}=\vec{u}+\vec{v}$ et $\overrightarrow{BF}=\vec{u}-\vec{v}$.

Exercice 129.
Dans le plan muni d'un repère $(\text{O}; \vec{i}\,; \vec{j}\,)$, on considère les points $A(-3\,;\,1)$, $B(2\,;\,-3)$ et $C(0\,;\,1)$.
Calculer les coordonnées du point M défini par :

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}.$$

Exercice 130.
Soit les vecteurs $\vec{u}(3\,;\,1)$ et $\vec{v}(1\,;\,-2)$.
Calculer les coordonnées des vecteurs $-2\vec{u}$, $5\vec{v}$ et
$\vec{w}=3\vec{u}-5\vec{v}$.

Exercice 131.
Soit les points $A(2\,;\,-1)$, $B(3\,;\,7)$, $C(-5\,;\,1)$ et $U(11\,;\,13)$.

1. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$, puis celles du vecteur $-\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}$.
2. Calculer les coordonnées du point V défini par
$$\overrightarrow{BV}=-\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}.$$
3. Montrer que le quadrilatère $CUAV$ est un parallélogramme.

Exercice 132.

Dans le plan muni d'un repère $(\text{O}; \vec{i}\,; \vec{j}\,)$. Dans les cas suivants, dire si les vecteurs suivants sont colinéaires :

1. $\vec{u}(-2\,;\,3)$ et $\vec{v}(-1\,;\,2)$.
2. $\vec{u}(24\,;\,6)$ et $\vec{v}(8\,;\,2)$.
3. $\vec{u}(1+\sqrt{2}\,;\,-1)$ et $\vec{v}(1\,;\,1-\sqrt{2})$.

Exercice 133.

Dans le plan muni d'un repère $(\text{O}; \vec{i}\,; \vec{j}\,)$, on considère les points $A(1\,;\,5)$, $B(3\,;\,8)$, $C(9\,;\,17)$ et $D(17\,;\,32)$.

1. (a) Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
   (b) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.
2. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont-ils colinéaires ?

Exercice 134.

Dans les cas suivants, dire si les points A,B et C sont alignés :

1. $A(12\,;\,15)$, $B(-13\,;\,10)$ et $C(16\,;\,16)$.
2. $A(10\,;\,-12)$, $B(-10\,;\,28)$ et $C(50\,;\,-92)$.

Exercice 135.

Dans les cas suivants, dire si les droites (AB) et (CD) sont parallèles :

1. $A(1\,;\,1)$, $B(3\,;\,11)$, $C(0\,;\,-1)$ et $D(-1\,;\,7)$.
2. $A(3\,;\,10)$, $B(0\,;\,-5)$, $C(1\,;\,-20)$ et $D(10\,;\,25)$.

Exercice 136.

Dans le plan muni d'un repère $(\text{O}; \vec{i}\,; \vec{j}\,)$, on considère les points $A(-1\,;\,-1)$, $B(2\,;\,8)$, $C(-2\,;\,-4)$, $D(3\,;\,3)$ et $E(9\,;\,20)$.

1. Les points A, B et C sont-ils alignés ?
2. Les droites (AB) et (DE) sont-elles parallèles ?

Exercice 137.

Dans le plan muni d'un repère quelconque $(\text{O}; \vec{i}\,; \vec{j}\,)$, on donne les points $A\,(-2\,;\,3)$, $B\,(4\,;\,7)$, $C\,(0\,;\,1)$ et $D\,(x\,;\,3)$ où x est un réel.
Calculer x pour que le quadrilatère $ABCD$ soit un trapèze de base $[AB]$.

Exercice 138.

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(\text{O}; \vec{i}\,; \vec{j}\,)$, on considère les points $A(2\,;\,3)$, $E(-4\,;\,1)$, $M(2\,;\,-1)$ et $N(8\,;\,1)$.

1. Montrer que la quadrilatère $AEMN$ est un parallélogramme.
2. Calculer les longueurs AE et AN. Que peut-on en déduire ?

Exercice 139.
Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}; \overrightarrow{i}\,; \overrightarrow{j}\,)$, on considère les points $A(3\,; -4)$, $B(7\,; -1)$ et $C(13\,; -9)$.
Calculer la mesure de l'angle $\widehat{ACB}$ arrondie à $0,1$ près.

Exercice 140.
Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}; \overrightarrow{i}\,; \overrightarrow{j}\,)$, on considère les points $A(2\,;3)$, $B(3\,;1)$ et $D(9\,;4)$.
Démontrer que le point B appartient au cercle de diamètre $[AD]$.

Exercice 141.
Dans un repère orthonormé, on considère les points A $(1\,; -1)$, B $(2\,; -2)$ et C $(4\,; 2)$.

1. Calculer AB, AC puis BC.
2. Que peut-on en déduire quant à la nature du triangle ABC ?
3. Calculer son aire.

Exercice 142.
Le plan est muni d'un repère orthonormé et on considère les points :

$$A\,(3;5),\; B\,(-6;2),\; C\,(-4;-4) \text{ et } D\,(5;-1)\,.$$

1. Soient I et J les milieux respectifs des segments $[BD]$ et $[AC]$.
   (a) Calculer les coordonnées des points I et J.
   (b) Que peut-on en déduire pour le quadrilatère $ABCD$? Justifier.
2. (a) Calculer les distances AC et BD.
   (b) Quelle est la nature exacte du quadrilatère $ABCD$?
   (c) Calculer l'aire du quadrilatère $ABCD$.

Exercice 143.
Le plan est muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O};\vec{\imath},\vec{\jmath})$ et on considère les points

$$A\left(-2;\frac{5}{2}\right),\; B\left(4;-\frac{1}{2}\right) \text{ et } C\left(3;-\frac{5}{2}\right).$$

1. Calculer les coordonnées du milieu I du segment $[AB]$.
2. Le vecteur $\vec{u}\,(2;4)$ est-il colinéaire au vecteur $\overrightarrow{AB}$? au vecteur $\overrightarrow{BC}$?
3. Soit $D\,(-1;y)$ où y est un nombre réel.
   (a) Déterminer y pour que le point D appartienne à la droite (CI).
   (b) Quelle est la nature du quadrilatère $ACBD$?

CHAPITRE

10 Fonction cube, fonction inverse

10.1 Fonction cube

10.1.1 Définition et représentation graphique

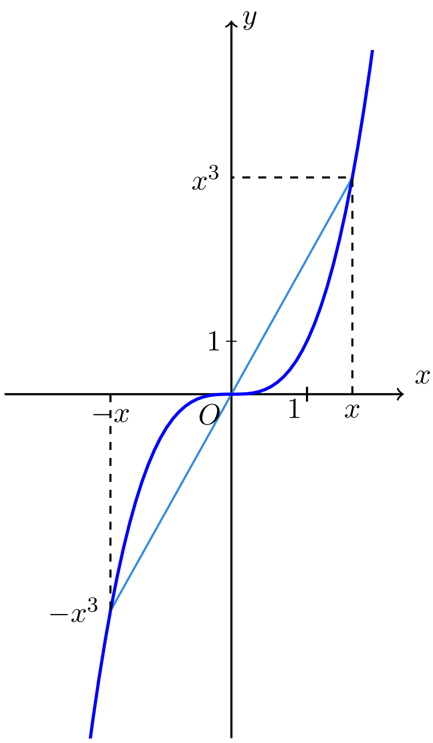
Définition 1.10.

La fonction *cube* est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto x^3$.

Propriété 1.10.
La fonction cube est impaire donc sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine du repère.

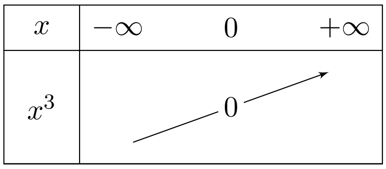
Démonstration. $\mathbb{R}$ est centré en 0.
Pour tout réel x on $(-x)^3 = (-x)(-x)(-x) = -x^3$ ce qui prouve que la fonction cube est bien impaire. $\square$

Courbe représentative.



10.1.2 Variations

Propriété 2.10. *Admise*
La fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$:



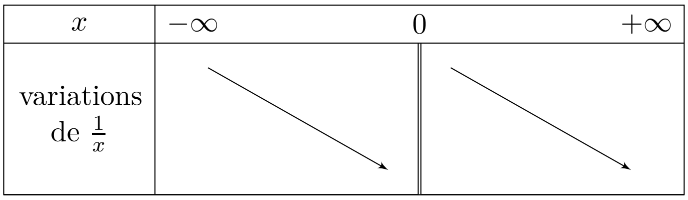
Propriété 3.10.
Pour tous réels a et b, on a : $a^3 = b^3 \Leftrightarrow a = b$ et $a^3 > b^3 \Leftrightarrow a > b$.

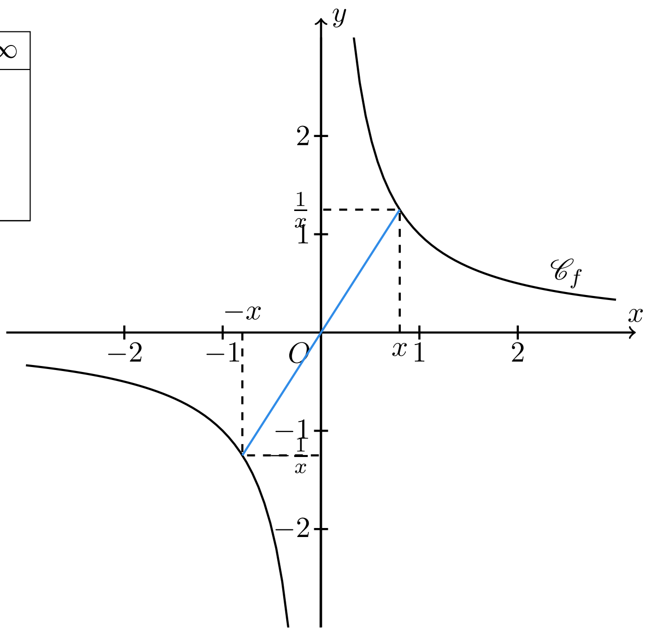
10.2 Fonction inverse

Définition 2.10.

La fonction *inverse* est la fonction f définie sur $\mathbb{R}^\star =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

Propriété 4.10.
La fonction *inverse* est décroissante sur $]-\infty; 0[$ et encore décroissante sur $]0; +\infty[$.





x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	2
$f(x)$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	2	1	$\frac{1}{2}$

Propriété 5.10.
La fonction inverse est impaire donc sa courbe représentative que l'on appelle *hyperbole* est symétrique par rapport à l'origine du repère.

Démonstration. □

10.3 Les exercices du chapitre

Exercice 144.

1. Sachant que $2 < x \leqslant 3$, déterminer un encadrement de x^3.
2. Sachant que $-3 \leqslant x \leqslant 3$, déterminer un encadrement de x^3.
3. Sachant que $x > 4$, déterminer une inégalité concernant x^3.
4. Sachant que $x \leqslant -5$, déterminer une inégalité concernant x^3.

Exercice 145.

1. Sachant que $8 \leqslant x^3 \leqslant 64$, déterminer un encadrement de x.
2. Sachant que $-1 < x^3 \leqslant 125$, déterminer un encadrement de x.
3. Sachant que $x^3 > 27$, déterminer une inégalité concernant x.
4. Sachant que $x^3 < -1000$, déterminer une inégalité concernant x.

Exercice 146.
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations d'inconnue x :

1. $-2x^3 > 16$
2. $3x^3 \leqslant 24$
3. $x^3 > -0,027$

Exercice 147.
On considère deux réels a et b.
Développer, réduire et ordonner :

1. $(a+b)^3$.
2. $(a-b)^3$.

Exercice 148.
Donner un encadrement de $\dfrac{1}{x}$ pour :

1. $x \in [1\,;\,4]$
2. $x \in]-4\,;\,-1]$
3. $x \in]-10^4\,;\,-1[$

Exercice 149.
Résoudre graphiquement les inéquations :

1. $\dfrac{1}{x} \geqslant 1$.
2. $\dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{2}$.
3. $\dfrac{1}{x} \geqslant -1$.

Exercice 150.
Pour quelles valeurs de x ne peut-on pas calculer les expressions suivantes ?

1. $\dfrac{2}{x-3}$.
2. $\dfrac{3x}{2x-5}$.
3. $3+\dfrac{2+x}{x+7}$.

Exercice 151.
Mettre au même dénominateur pour x non nul :

1. $\dfrac{1}{x}+5$.
2. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{4}$.
3. $\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{2x}$.

Exercice 152.
Faire le tableau de signes des expressions suivantes :

1. $\dfrac{x}{x+2}$
2. $\dfrac{x-5}{3-2x}$
3. $\dfrac{4x+1}{x(x-1)}$
4. $\dfrac{x^2-9}{x-11}$

CHAPITRE

11 Probabilités

11.1 Vocabulaire

Définitions.

- Une *expérience aléatoire* est un processus qui peut être répété, dont le résultat n'est pas connu à l'avance, mais dont l'ensemble des résultats possibles est connu.
- L'ensemble de résultats possibles, appelé *univers*, est souvent noté Ω parfois $\mathbb{U}$ et on appelle *issue* un résultat possible.

Exemples.

1. On lance un dé cubique et on regarde le résultat. L'univers est alors l'ensemble ____________________
2. On lance deux dés et on fait la somme. L'univers est alors l'ensemble ____________________

Définition 1.11.
On appelle *événement* tout sous-ensemble (ou encore sous-partie) de l'univers $\mathbb{U}$ et un *événement élémentaire* est un événement composé d'une seule issue. On décrit souvent un événement à l'aide d'une phrase.

Exemples. Dans l'expérience aléatoire du jet d'un dé, on peut considérer :

- l'événement « obtenir un 2 ». Il correspond à l'ensemble __________
- l'événement « obtenir un nombre pair ». Il correspond à l'ensemble __________

Définition 2.11.
Soit A un événement.
L'événement contraire de A, noté $\overline{A}$ et lu « non A » (ou « A barre ») est l'ensemble des issues de $\mathbb{U}$ qui ne sont pas dans A.

Exemples.

1. L'événement contraire de « obtenir un 2 » est « ne pas obtenir de 2 »et correspond à l'ensemble $\{1; 3; 4; 5; 6\}$.
2. L'événement contraire de « obtenir un nombre pair » est « obtenir un nombre impair » et correspond à l'ensemble $\overline{A} = \{1; 3; 5\}$.

Définition 3.11. *événements compatibles*
On dit de deux événements qu'ils sont *incompatibles* s'ils n'ont pas d'issue en commun. En particulier, deux événements contraires sont incompatibles.

Exemple. Les événements « obtenir un 2 » et « obtenir un nombre impair » sont incompatibles.

11.2 Loi de probabilité

▶ **Note 1.11.**
Sur l'ensemble $E = \{e_1; \ldots; e_n\}$, univers de l'expérience aléatoire, on veut pouvoir exprimer la fréquence d'apparition théorique de chaque issue.
On définit alors sur E une fonction de probabilité, notée $\mathbf{P}$, de sorte que :
Pour tout élément e_i de E, $\mathbf{P}(e_i) \geq 0$ et la somme des $\mathbf{P}(e_i)$ vaut 1 :

$$\boxed{\mathbf{P}(e_1) + \cdots + \mathbf{P}(e_n) = 1}.$$

Déterminer la fonction $\mathbf{P}$, c'est donner la *loi de probabilité* sur $\mathbb{U}$. Elle est souvent donnée sous forme de tableau, associant à chaque issue sa probabilité.

Définition 4.11.
Soit $\mathbb{U}$ l'univers associé à une expérience aléatoire et A un événement de $\mathbb{U}$.
La probabilité d'un événement A de $\mathbb{U}$ est la somme des probabilités des issues de A.

Exemple. La probabilité d'obtenir un nombre pair avec un jet de dé à six faces est :

$$\mathbf{P}(\text{« obtenir un nombre pair »}) = \mathbf{P}(2) + \mathbf{P}(4) + \mathbf{P}(6)$$

Propriété 1.11.
Soit A un événement de $\mathbb{U}$. Alors :

$$\boxed{\mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(\overline{A}) = 1 \text{ soit } \mathbf{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbf{P}(A)}.$$

▶ **Note 2.11.** *Cas particulier de l'équiprobabilité*
Dans certains cas, on estime que les probabilités de toutes les issues sont les mêmes. On dit que les issues sont *équiprobables*. C'est le cas lorsque l'on considère que le dé est « *équilibré* », ou bien que l'on tire (une carte, une boule dans une urne) « *au hasard* ».
On dit alors que la loi est *équirépartie*.
Si l'univers $\mathbb{U}$ contient n éléments, on a toute issue e a la probabilité $\mathbf{P}(e) = \dfrac{1}{n}$.

Exemple. Pour revenir à l'exemple précédent, si le dé est équilibré, la loi est équirépartie. Donc :

$$\mathbf{P}(\text{« obtenir un nombre pair »}) = \mathbf{P}(2) + \mathbf{P}(4) + \mathbf{P}(6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

Propriété 2.11.
On peut simplifier le calcul des probabilités dans le cas d'équiprobabilité.
Soit A un événement de E dont la loi est équirépartie.
Alors :

$$\boxed{\mathbf{P}(A) = \frac{\text{nombre d'éléments de } A}{\text{nombre d'éléments de } \mathbb{U}}}$$

Exemple. Dans notre exemple, l'événement « obtenir un nombre pair »représente l'ensemble $\{2; 4; 6\}$ qui contient 3 éléments. L'ensemble $\mathbb{U}$ contient lui 6 éléments. On a donc $\mathbf{P}(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

▶ **Note 3.11.**
Pour les expériences qui consistent à obtenir successivement plusieurs éléments (tirer au hasard plusieurs cartes, lancer plusieurs fois un dé, etc.), on peut utiliser un arbre des possibilités pour visualiser et compter les issues possibles, qui sont alors des listes d'issues.
Pour les expériences où l'on fait un tirage (choisir une carte, prendre une boule dans une urne, etc.), on distingue :

- le tirage **sans remise**, où l'on ne remet pas l'élément qui a été tiré ;
- le tirage **avec remise**, où l'on remet l'élément qui a été tiré.

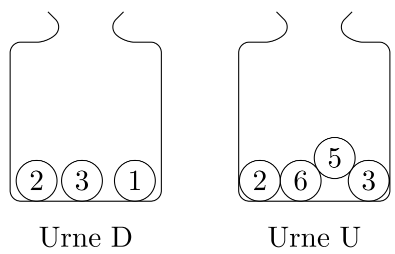
Exemple.

Deux urnes contiennent des boules numérotées indiscernables au toucher. Le schéma ci-contre représente le contenu de chacune des urnes.

On forme un nombre entier à deux chiffres en tirant au hasard une boule dans chaque urne :

— le chiffre des dizaines est le numéro de la boule issue de l'urne D ;

— le chiffre des unités est le numéro de la boule issue de l'urne U.



1. A-t-on plus de chance de former un nombre pair que de former un nombre impair ?

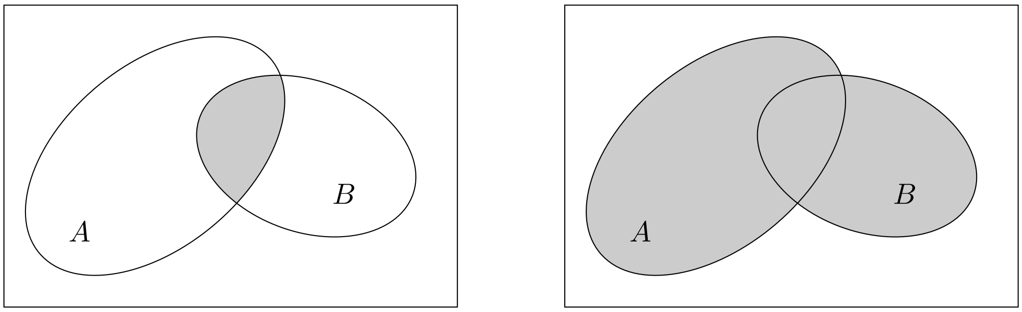
2. Montrer que la probabilité de former un nombre premier est égale à $\frac{1}{6}$ en utilisant un arbre.

11.3 Lien entre union et intersection

Définition 5.11.
Soient A et B deux événements. On définit les événements :

1. « A et B » , noté $A \cap B$ et prononcé aussi A inter(section) B, l'événement contenant les issues qui sont à la fois dans A et dans B.
2. « A ou B », noté $A \cup B$ et prononcé aussi A union B, l'événement contenant les issues qui sont dans A ou dans B (*éventuellement les deux*).

Illustration. À l'aide d'un diagramme (dit de Venn), on peut visualiser ces deux événements :

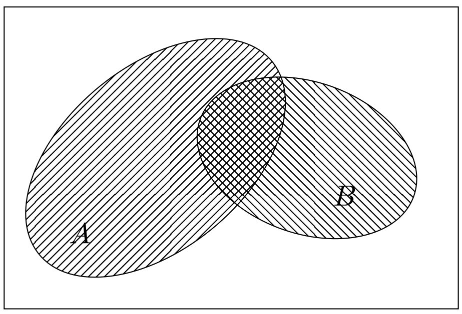


$A \cap B$ $A \cup B$

Propriété 3.11.
Quels que soient les événements A et B, on a :

$$\boxed{\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)}$$

Illustration.



11.4 Les exercices du chapitre

Exercice 153.
On jette un dé dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on s'intéresse au numéro apparaissant sur la face supérieure.

1. Décrire l'ensemble **U**, univers associé à cette expérience aléatoire.
2. Écrire sous forme de partie (d'ensemble) de **U** les événements :
   — A : « obtenir un numéro inférieur ou égal à 2 » ;
   — B : « obtenir un numéro impair » ;
   — C : « obtenir un numéro strictement supérieur à 4 ».
3. Pour chacun des événements suivants, les écrire sous forme de partie de $\mathbb{U}$ et les décrire par une phrase la plus simple possible.
   - $A \cup B$;
   - $A \cap B$;
   - $A \cup C$;
   - $\overline{A} \cap C$.

Exercice 154.
On choisit au hasard une carte dans un jeu de 52 cartes.

1. Combien y a-t-il d'issues possibles ?
2. On considère les événements :
   — A : « obtenir un as » ;
   — P : « obtenir un pique ».

   (a) Combien y a-t-il d'éventualités dans A ?
   (b) Combien y a-t-il d'éventualités dans P ?
   (c) Traduire par une phrase les événements $A \cap P$ et $A \cup P$.
   (d) Déterminer $\text{Card}(A \cap P)$ et $\text{Card}(A \cup P)$.

Exercice 155.
Soient A et B deux événements d'une même expérience aléatoire tels que $\mathbf{P}(A) = 0,2$, $\mathbf{P}(B) = 0,6$ et $\mathbf{P}(A \cap B) = 0,1$.

1. Calculer $\mathbf{P}(\overline{A})$.
2. Calculer $\mathbf{P}(A \cup B)$.

Exercice 156.
Soit A et B deux événements d'une même expérience aléatoire tels que $\mathbf{P}(A) = 0,4$, $\mathbf{P}(B) = 0,25$ et $\mathbf{P}(A \cup B) = 0,15$.

1. Calculer $\mathbf{P}(\overline{B})$.
2. Calculer $\mathbf{P}(A \cap B)$.

Exercice 157.
On considère une expérience aléatoire dont l'univers est $\mathbf{U} = \{1\,;\,2\,;\,4\,;\,5\}$. La probabilité de chacune des issues est donnée dans le tableau ci-dessous :

Issue e_i	1	2	4	5
Probabilité p_i	$0,1$	$0,4$	$0,3$	$\ldots$

1. Rappeler la valeur de $\mathbf{P}(\mathbb{U})$ puis calculer $\mathbf{P}(e_5)$.
2. Déterminer la probabilité de l'événement

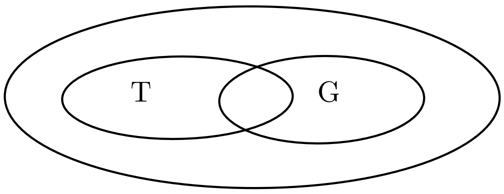
$$E = \{1\,;\,2\,;\,5\}.$$

Exercice 158.
Un centre de loisir propose de nombreuses activités mais seulement deux activités sportives : le tennis et le golf.
Sur 240 personnes inscrites dans ce centre :

- 145 sont inscrites au tennis ;
- 107 sont inscrites au golf ;
- 48 sont inscrites au tennis et au golf.

On choisit une personne au hasard parmi les personnes inscrites dans ce centre. On donnera les résultats sous forme de fraction irréductible.

1. Compléter le diagramme de Venn qui suit :



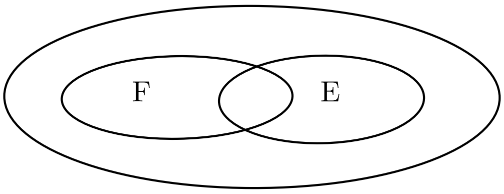
2. Calculer les probabilités des événements suivants :
   - T : « la personne est inscrite au tennis » ;
   - G : « la personne est inscrite au golf ».
3. Décrire les événements suivants par une courte phrase puis calculer leur probabilité :
   - $T \cap G$;
   - $T \cup G$;
   - $\overline{T}$.

Exercice 159.

Une campagne de prévention routière s'intéresse aux défauts constatés sur le freinage et sur l'éclairage de 400 véhicules :

- 60 des 400 véhicules présentent un défaut de freinage.
- 140 des 400 véhicules présentent un défaut d'éclairage.
- 45 véhicules présentent à la fois un défaut de freinage et un défaut d'éclairage.

1. Compléter le diagramme de Venn ci-dessous avec des nombres pour représenter la situation.



2. On choisit un véhicule au hasard parmi ceux qui ont été examinés. Quelle est la probabilité que :
   (a) le véhicule présente un défaut de freinage mais pas de défaut d'éclairage ?
   (b) le véhicule présente un défaut d'éclairage mais pas de défaut de freinage ?
   (c) le véhicule ne présente aucun des deux défauts ?
   (d) le véhicule présente au moins un des deux défauts ?

Exercice 160.

Dans une classe de 25 élèves, 15 élèves s'intéressent à la musique, 8 élèves au jeu d'échecs et 3 élèves à la fois à la musique et au jeu d'échecs.
Combien d'élèves ne s'intéressent ni à la musique, ni au jeu d'échecs ?

Exercice 161.

Un lycée compte 950 élèves.

350 d'entre eux sont en seconde, dont 189 filles.

Il y a 320 élèves de première parmi lesquels 60 % sont des filles. Les filles forment 58 % de l'effectif total du lycée.

1. Compléter le tableau de répartition des élèves donné ci-dessous :

	Secondes	1^{res}	T^{ales}	Total
Filles	189			551
Garçons				
Total	350	320		950

Par la suite, on choisit un élève de ce lycée au hasard.
On considère les évènements suivants :

F : « l'élève est une fille »,
A : « l'élève est en seconde »,
B : « l'élève est en première »,
C : « l'élève est en terminale ».

2. (a) Déterminer la probabilité qu'un élève choisi au hasard soit en seconde.

(b) Définir l'évènement $B \cup C$ par une phrase et calculer sa probabilité.

3. Définir l'évènement $F \cap A$ par une phrase et calculer sa probabilité.

Exercice 162.
Dans un club sportif chaque membre ne pratique qu'un sport. Leur répartition est donnée dans le tableau suivant :

	VTT	Gym	Volley- ball	Tir à l'arc	Total
Femmes	60	95	23	22	200
Hommes	90	50	107	53	300
Total	150	145	130	75	500

On choisit au hasard un membre du club sportif, et on considère les évènements :

A : « La personne choisie est une femme » ;

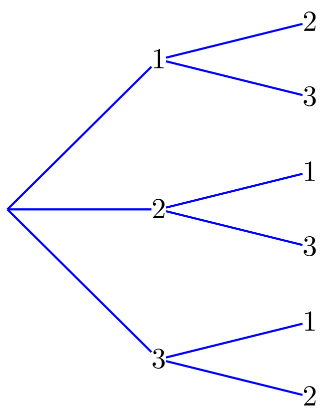
B : « La personne choisie fait du VTT ».

1. (a) Calculer les probabilités $\mathbf{P}(A)$ et $\mathbf{P}(B)$ des évènements A et B.
   (b) Calculer les probabilités $\mathbf{P}(A \cap B)$ et $\mathbf{P}(A \cup B)$.
2. La personne interrogée est une femme. Calculer la probabilité qu'elle pratique le VTT.
3. Sachant que la personne joue au volley-ball, quelle est la probabilité que ce soit un homme ?

Exercice 163.
Deux objets A et B sont rangés de manière aléatoire dans trois tiroirs (numérotés 1,2 et 3).
Quelle est la probabilité de l'événement M : « le tiroir n°2 est vide » dans les deux cas suivants ?

1. On ne peut placer qu'un seul objet dans un même tiroir.
2. On peut placer les deux objets dans un même tiroir.

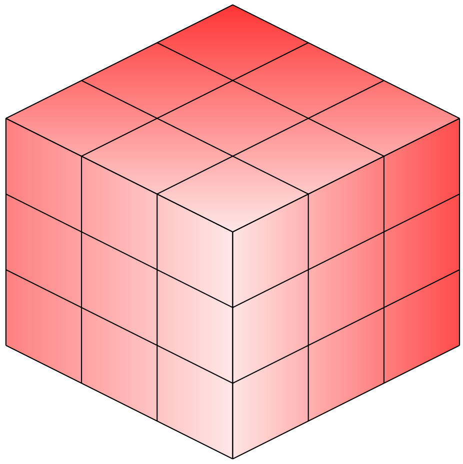
Aide pour la question a.



Exercice 164.
On suppose qu'à chaque naissance il y a la même probabilité d'avoir une fille ou un garçon et on s'intéresse aux familles de deux enfants qui n'ont pas eu de jumeaux.

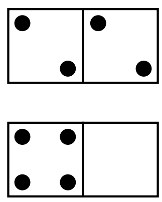
1. Faire un arbre décrivant toutes les issues possibles.
2. Déterminer les probabilités des évènements suivants :
   - ⋆ A : « Les deux enfants sont des garçons » ;
   - ⋆ B : « Les deux enfants sont de même sexe » ;
   - ⋆ C : « Il y a au moins un garçon » ;
   - ⋆ D : « Il y a au plus une fille » ;

Exercice 165.
On dispose d'un cube en bois que l'on peint en rouge. On découpe ensuite ce cube en petits dés cubiques, en partageant chaque arête du grand cube en trois parties égales comme le montre la figure ci-après :



1. Combien de petits cubes peut-on former ?
2. Combien de faces peintes en rouge peuvent avoir ces petits dés ?
3. On dispose tous les petits dés obtenus dans un sac et on en tire un au hasard.
   Calculer les probabilités des événements qui suivent :
   - ⋆ A : « le dé tiré n'a aucune face rouge »
   - ⋆ B : « le dé tiré a une seule face rouge »
   - ⋆ C : « le dé tiré a au moins une face rouge »

Exercice 166.



Un domino est une petite plaque partagée en deux parties. Sur chacune des parties figure une série de points.
Il peut y avoir de zéro à six points dans une série. *Dans les deux cas de figure ci-contre la somme totale de points est égale à 4.*

Lors d'une fête, on propose le jeu suivant :

- le joueur tire au hasard un domino parmi les dominos du jeu,
- il gagne, en euros, la somme des points figurant sur le domino tiré.

On suppose que tous les dominos du jeu ont la même probabilité d'être tirés.
Calculer la probabilité de gagner 7 euros. *On commencera par dénombrer le nombre total de dominos en expliquant la démarche.*

Exercice 167.

Dans cet exercice, on donnera les résultats sous forme de fraction irréductible.
Pour organiser le passage à l'oral de leur épreuve de langue, les élèves tirent au hasard trois cartons, un dans chacune des trois urnes.

- ⋆ La première urne contient les lettres « A », « B » et « C ».
- ⋆ La seconde urne contient les nombres « 25 » et « 27 ».
- ⋆ La dernière urne contient les mots « Matin » et « Après-midi ».

Ainsi, obtenir le tirage (A ; 25 ; Matin) signifie que l'élève passera son oral le 25 juin au matin avec le sujet A.

1. Décrire la situation à l'aide d'un arbre.
2. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
3. Après le tirage on choisit un élève au hasard.
   (a) Calculer la probabilité de l'événement D : « l'élève choisi passe le matin. »
   (b) Calculer la probabilité de l'événement E : « l'élève choisi passe le 27 juin. »
   (c) Calculer la probabilité de l'événement F : « l'élève choisi est interrogé sur le sujet C. »
   (d) Calculer la probabilité de l'événement G : « l'élève choisi passe l'après-midi avec le sujet B. »

Exercice 168.

On dispose de trois urnes U, V et W. L'urne U contient deux boules numérotées respectivement 1 et 2 ; L'urne V contient deux boules numérotées respectivement 2 et 3 ; L'urne W contient trois boules numérotées respectivement 1, 2 et 3.

On prend au hasard une boule de l'urne U, puis dans l'urne V, puis dans l'urne W.
On note $(x\,;\,y;\,z)$ le triplet obtenu. Par exemple, $(1\,;\,2\,;\,1)$ est un résultat possible.

1. À l'aide d'un arbre, dénombrer les issues possibles.
2. Déterminer les probabilités des événements suivants :
   A **:** « $x \leqslant z$ » ;
   B **:** « x, y et z sont deux à deux distincts » ;
   C **:** « $x + y + z = 6$ ».
3. Calculer les probabilités des événements suivants : $B \cap C$ et $B \cup C$.

CHAPITRE

12

Droites et systèmes

12.1 Retour sur la colinéarité de vecteurs

► **Note 1.12.** *Rappel sur le déterminant*
Le *déterminant* associé aux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le nombre réel noté det défini par :

$$\boxed{\det(\vec{u}\,;\vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y}$$

► **Note 2.12.** *Rappel sur la colinéarité*
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires $\iff \det(\vec{u}\,;\vec{v}) = 0$.

12.2 Équations cartésiennes de droites

12.2.1 Étude d'un exemple

Dans un repère, on considère les points $A\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$.

12.2.2 Cas général

Théorème 4.12.
Le plan est muni d'un repère.

1. Toute droite (d) du plan admet une équation de la forme $ax + by + c = 0$ avec $(a\,;\,b) \neq (0\,;\,0)$.

2. Un point appartient à la droite (d) *si et seulement* si ses coordonnées vérifient cette équation. Cette équation est appelée *équation cartésienne* de la droite (d).

Application 12.1. Soit la droite (d) d'équation $5x + 2y - 12 = 0$.
Les points $A\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$ appartiennent-ils à la droite (d) ?

Théorème 5.12.
Le plan est muni d'un repère.

Toute droite admettant une équation de la forme $ax+by+c = 0$ avec $(a\,;\,b) \neq (0\,;\,0)$ admet $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ comme vecteur directeur.

Application 12.2. Soit la droite (d) d'équation $x - 4y + 6 = 0$.
Préciser les coordonnées d'un vecteur directeur de la droite (d).

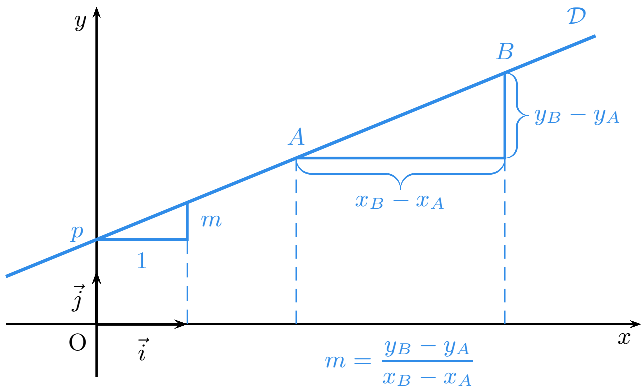
Application 12.3. Soit la droite (d) d'équation $2x - 5y + 2 = 0$.
Montrer que $P\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$ appartient à (d), préciser les coordonnées d'un vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ de cette droite puis représenter graphiquement cette droite (d).

12.3 Équations réduites de droites

Propriété 1.12.
1. Toute droite non parallèle à l'axe des ordonnées a une équation réduite de la forme $y = mx + p$ où m et p sont deux réels.
2. Toute droite parallèle à l'axe des ordonnées admet une équation de la forme $x = k$ avec k réel.

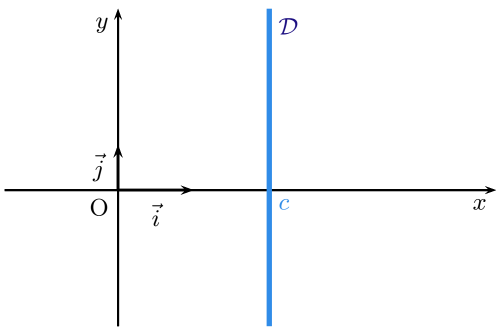
Illustrations.

1. Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y = mx + p$:



   - Le nombre réel m est le coefficient directeur de la droite $\mathcal{D}$;
   - Le nombre réel p est l'ordonnée à l'origine de la droite $\mathcal{D}$;
   - Le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$.

2. Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation $x = c$:



   - La droite $\mathcal{D}$ n'a pas de coefficient directeur ;
   - $\overrightarrow{j}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$.

12.4 Droites parallèles, droites sécantes

Propriété 2.12.
Soient (d) et (d') d'équation respective $ax+by+c=0$ et $a'x+b'y+c'=0$.
Alors (d) et (d') sont *parallèles* si et seulement tout vecteur directeur de la droite (d) est *colinéaire* à tout vecteur directeur de la droite (d').

Application 12.4. Soit la droite (d) d'équation $(d) : 2x-3y+7=0$ et $(d') : -4x+6y-2=0$.
Démontrer que (d) et (d') sont parallèles.

12.5 Système d'équations linéaires

Définition.
Un *système linéaire* de deux équations à deux inconnues x et y est la donnée de deux équations de la forme $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$, où a, b, c, a', b' et c' sont des réels donnés.

► Note 3.12.
Résoudre un système linéaire de deux équations à deux inconnues x et y c'est trouver tous les couples $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ vérifiant les deux équations.

Application 12.5. Résoudre les systèmes $\left\{\begin{array}{rcl} y & = & 3x+5 \\ y & = & 5x-3 \end{array}\right.$ et $\left\{\begin{array}{rcr} 3x-2y & = & -4 \\ 2x+6y & = & 1 \end{array}\right.$

12.6 Les exercices du chapitre

Exercice 169.

On souhaite déterminer une équation cartésienne de la droite (AB) avec $A\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$.

1. Déterminer les coordonnées d'un vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$ de la droite (AB).
2. Soit $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ un point du plan.
   Calculer le déterminant des vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$.
3. En déduire une équation cartésienne de la droite (AB).

Exercice 170.

Écrire une équation cartésienne de la droite (AB) pour :

1. $A\begin{pmatrix}8\\-1\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$.
2. $A\begin{pmatrix}5\\-2,4\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}5\\9\end{pmatrix}$.

Exercice 171.

Les équations suivantes sont des équations cartésiennes de droites. Préciser les valeurs de a, b et c (notations du cours) :

1. $2x - 5y + 7 = 0$.
2. $x = -4$
3. $-5x + \frac{1}{2}y - 7 = 0$.
4. $2y - 5 = 0$.

Exercice 172.

1. Tracer la droite (d) passant par le point A de coordonnées $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$.
2. Soit $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AM}$ puis le déterminant $\det(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{u})$.
3. En déduire une équation cartésienne de (d).

Exercice 173.

Même exercice que précédemment avec A de coordonnées $\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$.

Exercice 174.

Dans chacun des cas suivants, donner un point et un vecteur directeur de la droite puis la tracer :

1. $-x - 3y + 6 = 0$.
2. $2x - y + 3 = 0$.

3. $5x + 3y = 0$.
4. $-2x + 5 = 0$.

Exercice 175.
Soit la droite (d) donnée par une équation cartésienne $2x + 5y - 1 = 0$.

1. Donner les coordonnées d'un vecteur directeur de (d).
2. Écrire son équation réduite.

Exercice 176.
Mêmes questions qu'à l'exercice précédent :

1. $(d_1)\ :\ 3x + y - 1 = 0$.
2. $(d_2)\ :\ -2x + 2y + 5 = 0$.
3. $(d_3)\ :\ 4x - 7 = 0$.

Exercice 177.
La droite (d) est donnée par son équation réduite. Donner une équation cartésienne de (d) puis une équation cartésienne à coefficients entiers :

1. $(d_1)\ :\ y = \frac{3}{2}x - 2$.
2. $(d_2)\ :\ y = \frac{8}{5}x$.
3. $(d_3)\ :\ x = -\dfrac{5}{3}$.

Exercice 178.
On considère les droites (d) et (d') qui ont pour équation cartésiennes respectives $6x - y + 3 = 0$ et $-4x + \dfrac{2}{3}y + 5 = 0$.

1. Donner les coordonnées d'un vecteur directeur de (d) et de (d').
2. Ces droites sont-elles parallèles ?

Exercice 179.
Mêmes questions qu'à l'exercice précédent avec (d) et (d') qui ont pour équation cartésiennes respectives $3x + 2y - 1 = 0$ et $x + \dfrac{1}{3}y + 4 = 0$.

Exercice 180.

1. Tracer les droites (d) et (d') d'équations respectives $y = 2x - 1$ et $y = 3x + 4$.
2. Justifier que ces droites sont sécantes.
3. Calculer les coordonnées de leur point d'intersection E.