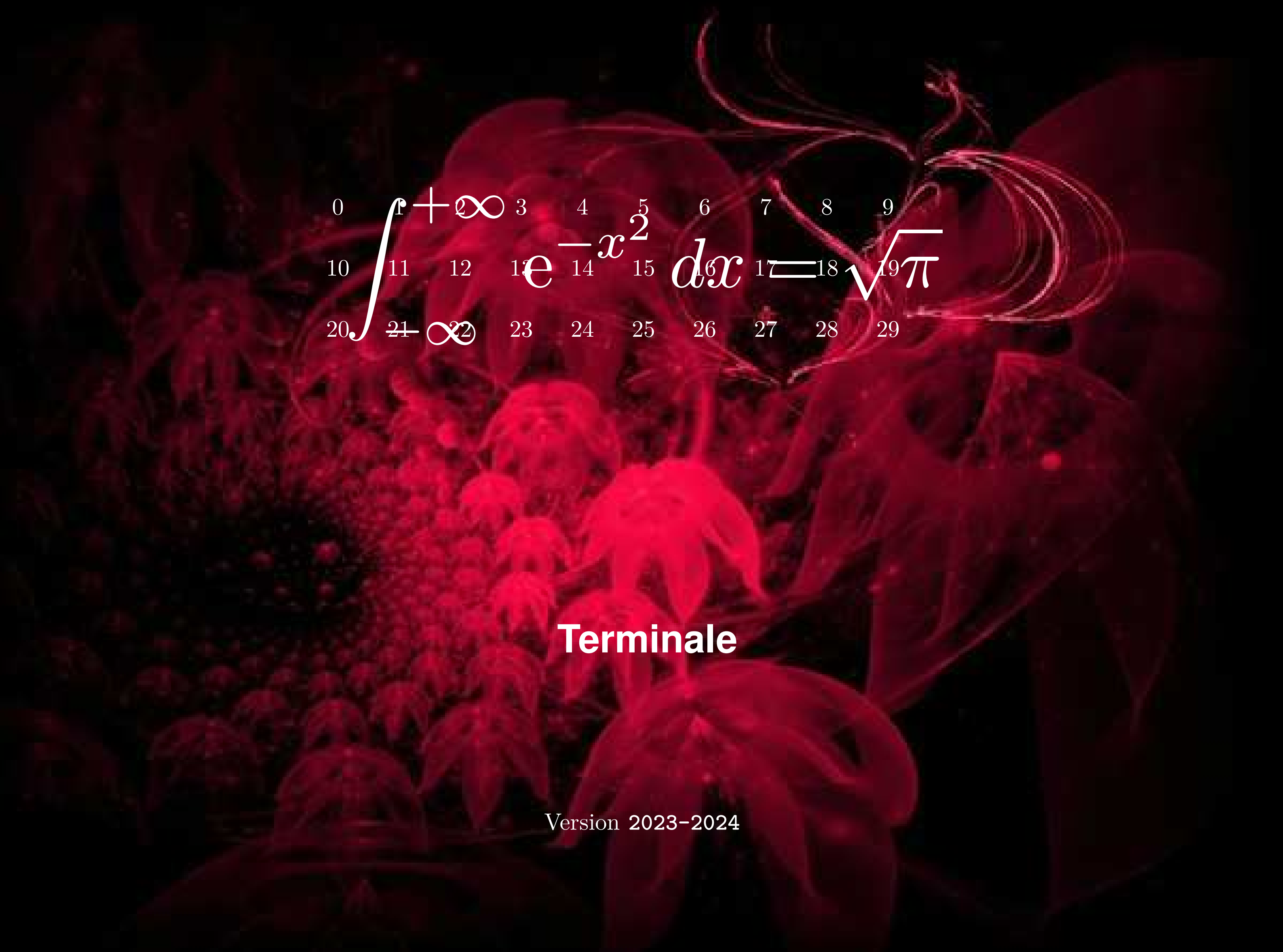
Une année en spé Mathématiques

Cours et exercices

Yann Mobian



$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$$

Terminale

Version 2023-2024

Table des matières

Préambule

Ceci est le livre complet comportant le cours et les exercices que nous allons traiter tout au long de cette année. Il vous sera utile lorsque vous serez absent et vous permettra également d'avoir sous format numérique les notions qui vous serviront de pré-requis pour le Supérieur.
Tous mes documents publics sont sous licence CC-BY-NC :

Le BY de la licence signifie que si vous utilisez mon travail comme source (même modifié), vous devez signaler l'origine de votre source (une simple citation de mon nom est largement suffisant).

CHAPITRE 1

Probabilités discrètes

1.1 Rappels de l'an dernier

1.1.1 Probabilités conditionnelles

Définition 1.1.

Soit A un événement de probabilité non nulle.
On appelle probabilité de B *sachant* A, le nombre noté $\mathbf{P}_A(B)$ défini par :

$$\boxed{\mathbf{P}_A(B) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(A)}}$$

On en déduit une formule de calcul de la *probabilité d'une intersection.*

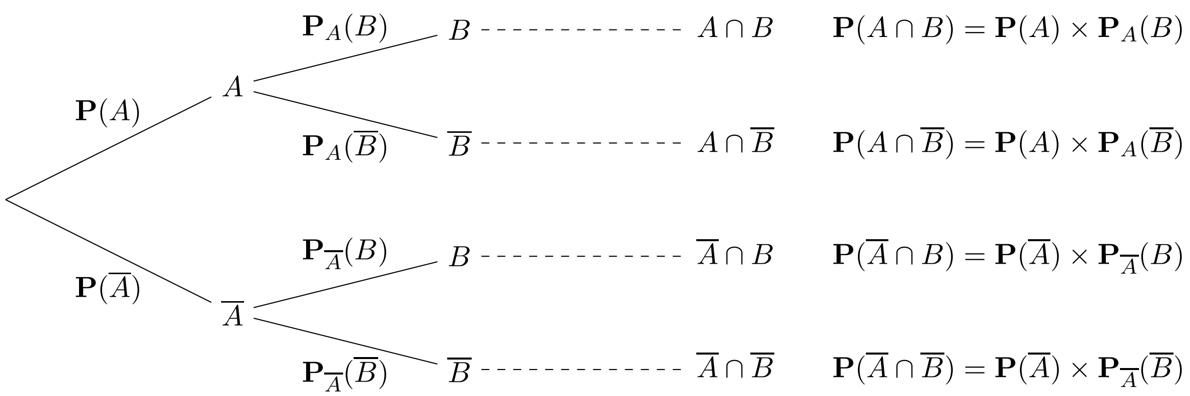
Propriété 1.1.
Soient A et B deux évènements d'un univers Ω tels que $\mathbf{P}(A) \neq 0$ et $\mathbf{P}(B) \neq 0$ on a :

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) \times \mathbf{P}_A(B) = \mathbf{P}(B) \times \mathbf{P}_B(A).$$

Cette écriture s'appelle la ____

1.1.2 Arbre et probabilité conditionnelle

Voici comment un arbre de probabilités est pondéré avec les probabilités conditionnelles :



Propriété 2.1. *Règles de calculs*

- La somme des branches issues d'un même ____________ vaut toujours ____________ ;
- La probabilité de l'événement correspondant à un chemin (constitué de plusieurs branches) est égale au ________________________ des probabilités inscrites sur chaque branche du chemin.
- La probabilité d'un événement est la __________________ des probabilités des chemins menant à cet événement.

Propriété 3.1. *Formule des probabilités totales*
On suppose que l'univers probabiliste est la réunion des événements A_1, A_2, ..., A_n deux à deux incompatibles et de probabilité non nulle autrement dit les événements A_1, A_2, ..., A_n forment une partition de l'univers : on parle alors de *système complet d'événements.*
Pour tout événement B de l'univers Ω :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(B) &= \mathbf{P}(A_1 \cap B) + \mathbf{P}(A_2 \cap B) + \cdots + \mathbf{P}(A_n \cap B) \\ &= \mathbf{P}(A_1) \times \mathbf{P}_{A_1}(B) + \mathbf{P}(A_2) \times \mathbf{P}_{A_2}(B) + \cdots + \mathbf{P}(A_n) \times \mathbf{P}_{A_n}(B)\end{aligned}$$

Dans le cas particulier où l'on a l'arbre plus haut, on a donc :

$$\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A \cap B) + \mathbf{P}(\overline{A} \cap B) = \mathbf{P}(A) \times \mathbf{P}_A(B) + \mathbf{P}(\overline{A}) \times \mathbf{P}_{\overline{A}}(B)$$

Méthode

La rédaction est la même que celle de l'an dernier. On veillera bien à définir les événements qui forment une partition de l'univers et on veillera à bien citer la formule des probabilités totales.

Exercice 1. ***D'après sujet bac Métropole 2022.***

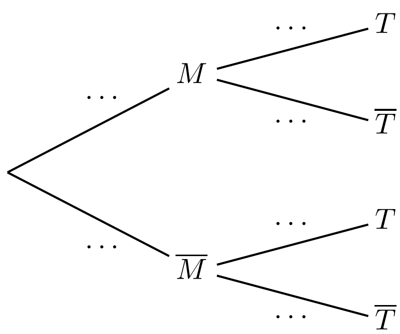
Le coyote est un animal sauvage proche du loup, qui vit en Amérique du Nord.
Dans l'état d'Oklahoma, aux États-Unis, 70 % des coyotes sont touchés par une maladie appelée ehrlichiose.
Il existe un test aidant à la détection de cette maladie. Lorsque ce test est appliqué à un coyote, son résultat est soit positif, soit négatif, et on sait que :

- Si le coyote est malade, le test est positif dans 97 % des cas.
- Si le coyote n'est pas malade, le test est négatif dans 95 % des cas.

Des vétérinaires capturent un coyote d'Oklahoma au hasard et lui font subir un test pour l'ehrlichiose.
On considère les évènements suivants :

- M : « le coyote est malade » ;
- T : « le test du coyote est positif ».

1. Compléter l'arbre pondéré ci-dessous qui modélise la situation.



2. Déterminer la probabilité que le coyote soit malade et que son test soit positif.

3. Démontrer que la probabilité de T est égale à $0,694$.

4. On appelle « valeur prédictive positive du test » la probabilité que le coyote soit effectivement malade sachant que son test est positif.

   Calculer la valeur prédictive positive du test. On arrondira le résultat au millième.

1.1.3 Indépendance

Définition 2.1.

Soient A et B deux événements de probabilité non nulle.
On dit que B est *indépendant* de A si $\mathbf{P}_A(B) = \mathbf{P}(B)$, autrement dit si la réalisation ou non de l'événement A n'a aucune influence sur celle de B.
Dans ce cas, on a alors aussi $\mathbf{P}_B(A) = \mathbf{P}(A)$, autrement dit A est indépendant de B aussi.

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_B(A) &= \frac{\mathbf{P}(A\cap B)}{\mathbf{P}(B)} \\
&= \frac{\mathbf{P}(A)\times\mathbf{P}_A(B)}{\mathbf{P}(B)} \\
&= \frac{\mathbf{P}(A)\times\mathbf{P}(B)}{\mathbf{P}(B)} \\
&= \mathbf{P}(A)
\end{aligned}$$

□

En échangeant les noms des événements, on remarque alors que c'est réciproque.
On dit alors simplement que les deux événements A et B sont *indépendants* si et seulement si l'une des deux égalités suivantes est vraie (ce qui implique que l'autre l'est aussi) :

$$\mathbf{P}_A(B)=\mathbf{P}(B) \qquad \text{ou} \qquad \mathbf{P}_B(A)=\mathbf{P}(A)$$

⚠ Ne pas confondre *indépendants* et *incompatibles.*
On rappelle que deux événements sont *incompatibles* si et seulement si $\mathbf{P}(A\cap B)=0$.

Propriété 4.1.
Soient A et B deux événements de probabilité non nulle.
A et B sont *indépendants si et seulement si* :

$$\mathbf{P}(A\cap B)=\mathbf{P}(A)\times\mathbf{P}(B)$$

Exercice 2. ***D'après sujet bac Asie 2022.***

Lors d'une kermesse, un organisateur de jeux dispose, d'une part, d'une roue comportant quatre cases blanches et huit cases rouges et, d'autre part, d'un sac contenant cinq jetons portant les numéros 1, 2, 3, 4 et 5. Le jeu consiste à faire tourner la roue, chaque case ayant la même probabilité d'être obtenue, puis à extraire un ou deux jetons du sac selon la règle suivante :

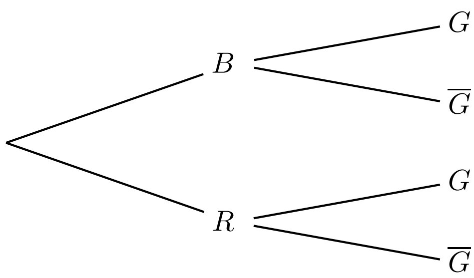
- si la case obtenue par la roue est blanche, alors le joueur extrait un jeton du sac ;
- si la case obtenue par la roue est rouge, alors le joueur extrait successivement et sans remise deux jetons du sac.

Le joueur gagne si le ou les jetons tirés portent tous un numéro impair.

1. Un joueur fait une partie et on note B l'évènement « la case obtenue est blanche », R l'évènement « la case obtenue est rouge » et G l'évènement « le joueur gagne la partie ».
   (a) Donner la valeur de la probabilité conditionnelle $\mathbf{P}_B(G)$.

   (b) On admettra que la probabilité de tirer successivement et sans remise deux jetons impairs est égale à $0,3$.

Compléter l'arbre de probabilité suivant :



2. (a) Montrer que $\mathbf{P}(G) = 0,4$.

(b) Un joueur gagne la partie.
Quelle est la probabilité qu'il ait obtenu une case blanche en lançant la roue ?

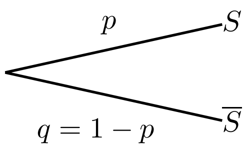
3. Les évènements B et G sont-ils indépendants ? Justifier.

1.2 Épreuve, loi et schéma de Bernoulli

1.2.1 Épreuve de Bernoulli

Définition 3.1.

Soit p un nombre réel appartenant à $[0\,;\,1]$.
On appelle *épreuve de Bernoulli* toute expérience aléatoire admettant exactement deux issues, appelées généralement **succès** S et ____________ $\overline{S}$ et de probabilités respectives p et $q = 1 - p$.



Exemples.

- Lancer une pièce de monnaie équilibrée et savoir si pile est obtenu est une épreuve de Bernoulli se succès S « pile a été obtenu » dont la probabilité est $p = 0,5$. L'échec $\overline{S}$ est « Face a été obtenu ».
- Interroger une personne dans la rue en France et lui demander si elle est gauchère est une épreuve de Bernoulli de succès S « La personne est gauchère » dont la probabilité est environ égale à $0,13$.

1.2.2 Loi de Bernoulli

Définition 4.1.

On réalise une épreuve de Bernoulli dont le succès S a pour probabilité p.
Une variable aléatoire X est **une variable aléatoire de Bernoulli** lorsqu'elle est à valeurs dans $\{0\,;\,1\}$ où la valeur 1 est attribuée au succès.
On dit alors que X suit la **loi de Bernoulli** de paramètre p.
Autrement dit, on a $\mathbf{P}(X = 1) = p$ et $\mathbf{P}(X = 0) = 1 - p$.
On peut résumer la loi de Bernoulli par le tableau suivant :

x_i	1	0
$\mathbf{P}(X = x_i)$	p	$1 - p$

Propriété 5.1.
Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de Bernoulli de paramètre p.
L'*espérance* mathématique de X est $E(X) = p$ et la *variance* est $V(X) = p(1 - p)$.

Démonstration. $E(X) = \mathbf{P}(X = 1) \times 1 + \mathbf{P}(X = 0) \times 0 = p$.
$V(X) = \mathbf{P}(X = 1) \times 1^2 + \mathbf{P}(X = 0) \times 0^2 - E(X)^2 = p(1 - p)$ □

1.2.3 Schéma de Bernoulli

Définition 5.1.

Soit n un entier naturel non nul.
Un *schéma de Bernoulli* est la répétition de n épreuves de Bernoulli *identiques* et *indépendantes*.

1.2.4 Loi binomiale

Soit n un entier naturel non nul et p un réel compris entre 0 et 1.

Définition 6.1.
On considère un schéma de Bernoulli de paramètres n et p et X la variable aléatoire comptant le nombre de succès contenus dans ce schéma.
On dit alors que X suit la *loi binomiale* de paramètres n et p, notée $\mathscr{B}(n\,;\,p)$.

Propriété 6.1.
La loi de la variable aléatoire X qui suit la *loi binomiale* de paramètres n et p est donnée pour tout entier k compris entre 0 et n, par :

$$\boxed{\mathbf{P}(X=k)=\binom{n}{k}\times p^k\times(1-p)^{n-k}}$$

(Probabilité de réaliser k succès sur les n expériences).
$\binom{n}{k}$ est appelé coefficient binomial et sera vu de façon approfondie dans un chapitre futur.

Propriété 7.1.
Si X suit la *loi binomiale* de paramètres n et p alors :

- $E(X)=np$
- $V(X)=np(1-p)$
- $\sigma(X)=\sqrt{np(1-p)}$

Démonstration. On a $E(X)=E(X_1+X_2+X_3+\cdots+X_n)=E(X_1)+E(X_2)+E(X_3)+\cdots+E(X_n)=np$.
$V(X)=V(X_1+X_2+X_3+\cdots+X_n)=V(X_1)+V(X_2)+V(X_3)+\cdots+V(X_n)=np(1-p)$. □

Retour sur l'exercice 1. On rappelle que la probabilité qu'un coyote capturé au hasard présente un test positif est de $0,694$.

1. Lorsqu'on capture au hasard cinq coyotes, on assimile ce choix à un tirage avec remise.
   On note X la variable aléatoire qui à un échantillon de cinq coyotes capturés au hasard associe le nombre de coyotes dans cet échantillon ayant un test positif.

   (a) Quelle est la loi de probabilité suivie par X ? Justifier et préciser ses paramètres.

(b) Calculer la probabilité que dans un échantillon de cinq coyotes capturés au hasard, un seul ait un test positif. On arrondira le résultat au centième.

(c) Un vétérinaire affirme qu'il y a plus d'une chance sur deux qu'au moins quatre coyotes sur cinq aient un test positif : cette affirmation est-elle vraie ? Justifier la réponse.

2. Pour tester des médicaments, les vétérinaires ont besoin de disposer d'un coyote présentant un test positif. Combien doivent-ils capturer de coyotes pour que la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux présente un test positif soit supérieure à $0,99$?

1.3 Les exercices du chapitre

○○○ **Exercice 1.**
Selon les autorités sanitaires d'un pays, 7 % des habitants sont affectés par une certaine maladie. Dans ce pays, un test est mis au point pour détecter cette maladie. Ce test a les caractéristiques suivantes :

- Pour les individus malades, le test donne un résultat négatif dans 20 % des cas ;
- Pour les individus sains, le test donne un résultat positif dans 1 % des cas.

Une personne est choisie au hasard dans la population et testée.
On considère les évènements suivants :

- M « la personne est malade » ;
- T « le test est positif ».

1. En utilisant un arbre pondéré, calculer la probabilité de l'évènement $M \cap T$.
2. Démontrer que la probabilité que le test de la personne choisie au hasard soit positif, et de 0,065 3.
3. On considère dans cette question que la personne choisie au hasard a eu un test positif. Quelle est la probabilité qu'elle soit malade ? On arrondira le résultat à 10^{-2} près.
4. Les événements M et T sont-ils indépendants ? Justifier.

●○○ **Exercice 2.**
Au cours de la fabrication d'une paire de lunettes, la paire de verres doit subir deux traitements notés T1 et T2.
On prélève au hasard une paire de verres dans la production.
On désigne par A l'évènement : « la paire de verres présente un défaut pour le traitement T1 ».
On désigne par B l'évènement : « la paire de verres présente un défaut pour le traitement T2 ».
Une étude a montré que :

— la probabilité qu'une paire de verres présente un défaut pour le traitement T1 notée $\mathbf{P}(A)$ est égale à 0,1.

— la probabilité qu'une paire de verres présente un défaut pour le traitement T2 notée $\mathbf{P}(B)$ est égale à 0,2.

— la probabilité qu'une paire de verres ne présente aucun des deux défauts est 0,75.

1. Compléter le tableau suivant avec les probabilités correspondantes :

	A	$\overline{A}$	Total
B			
$\overline{B}$			
Total			1

2. (a) Déterminer, en justifiant la réponse, la probabilité qu'une paire de verres, prélevée au hasard dans la production, présente un défaut pour au moins un des deux traitements T1 ou T2.

   (b) Donner la probabilité qu'une paire de verres, prélevée au hasard dans la production, présente deux défauts, un pour chaque traitement T1 et T2.

   (c) Les évènements A et B sont-ils indépendants ? Justifier la réponse.

3. Calculer la probabilité qu'une paire de verres, prélevée au hasard dans la production, présente un défaut pour un seul des deux traitements.
4. Calculer la probabilité qu'une paire de verres, prélevée au hasard dans la production, présente un défaut pour le traitement T2, sachant que cette paire de verres présente un défaut pour le traitement T1.

●●○ **Exercice 3.**
Une entreprise fait fabriquer des paires de chaussettes auprès de trois fournisseurs $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_3$.
Dans l'entreprise, toutes ces paires de chaussettes sont regroupées dans un stock unique.
La moitié des paires de chaussettes est fabriquée par le fournisseur $\mathcal{F}_1$, le tiers par le fournisseur $\mathcal{F}_2$ et le reste par le fournisseur $\mathcal{F}_3$.

Une étude statistique a montré que :

- 5 % des paires de chaussettes fabriquées par le fournisseur $\mathcal{F}_1$ ont un défaut ;
- 1,5 % des paires de chaussettes fabriquées par le fournisseur $\mathcal{F}_2$ ont un défaut ;
- sur l'ensemble du stock, 3,5 % des paires de chaussettes ont un défaut.

On considère les évènements F_1, F_2, F_3 et D suivants :

- F_1 : « La paire de chaussettes prélevée est fabriquée par le fournisseur $\mathcal{F}_1$ » ;
- F_2 : « La paire de chaussettes prélevée est fabriquée par le fournisseur $\mathcal{F}_2$ » ;
- F_3 : « La paire de chaussettes prélevée est fabriquée par le fournisseur $\mathcal{F}_3$ » ;
- D : « La paire de chaussettes prélevée présente un défaut ».

On prélève au hasard une paire de chaussettes dans le stock de l'entreprise.

1. Traduire en termes de probabilités les données de l'énoncé en utilisant les évènements précédents.
   Dans la suite, on pourra utiliser un arbre pondéré associé à cette expérience.
2. Calculer la probabilité qu'une paire de chaussettes prélevée soit fabriquée par le fournisseur $\mathcal{F}_1$ et présente un défaut.
3. Définir puis calculer la probabilité de l'évènement $F_2 \cap D$.
4. En déduire la probabilité de l'évènement $F_3 \cap D$.
5. Sachant que la paire de chaussettes prélevée est fabriquée par le fournisseur $\mathcal{F}_3$, quelle est la probabilité qu'elle présente un défaut ?

●○○ **Exercice 4.**
La chocolaterie « Choc'o » fabrique des tablettes de chocolat noir, de 100 grammes, dont la teneur en cacao annoncée est de 85 %.

À l'issue de la fabrication, la chocolaterie considère que certaines tablettes ne sont pas commercialisables : tablettes cassées, mal emballées, mal calibrées, etc.
La chocolaterie dispose de deux chaînes de fabrication :

- la chaîne A, lente, pour laquelle la probabilité qu'une tablette de chocolat soit commercialisable est égale à 0,98.
- la chaîne B, rapide, pour laquelle la probabilité qu'une tablette de chocolat soit commercialisable est 0,95.

À la fin d'une journée de fabrication, on prélève au hasard une tablette et on note :
A l' évènement : « la tablette de chocolat provient de la chaîne de fabrication A » ;
C l'évènement : « la tablette de chocolat est commercialisable ».
On note x la probabilité qu'une tablette de chocolat provienne de la chaîne A.

1. Montrer que $\mathbf{P}(C) = 0,03x + 0,95$.
2. À l'issue de la production, on constate que 96 % des tablettes sont commercialisables et on retient cette valeur pour modéliser la probabilité qu'une tablette soit commercialisable.

   Justifier que la probabilité que la tablette provienne de la chaîne B est deux fois égale à celle que la tablette provienne de la chaîne A.

●○○ **Exercice 5.**
Une entreprise dispose d'un parc de 600 ordinateurs neufs. La probabilité que l'un d'entre eux tombe en panne pendant la première année est de $0,1$. La panne de l'un des ordinateurs n'affecte pas les autres machines du parc.

1. Justifier que cette situation correspond à un schéma de Bernoulli et donner ses paramètres.
2. On considère la variable aléatoire X correspondant au nombre d'ordinateurs tombant en panne durant la première année. Quelle est la loi de probabilité de X ?
3. Calculer la probabilité que 20 appareils tombent en panne la première année.
4. Calculer la probabilité que 40 appareils au moins tombent en panne durant la première année.

●○○ **Exercice 6.**
Dans une entreprise, un stage de formation à l'utilisation d'un nouveau logiciel de gestion a été suivi par 25 % du personnel. On choisit dix personnes dans l'entreprise, qui possède un effectif suffisamment grand pour assimiler ce choix à un tirage avec remise. On note X le nombre de personnes choisies qui ont suivi le stage.

1. Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale. Préciser ses paramètres.
2. Calculer $\mathbf{P}(X = 3)$.
   Que représente ce nombre ?
3. Calculer la probabilité que quatre personnes au plus parmi les dix choisies aient suivi le stage.
4. Calculer la probabilité qu'au moins cinq personnes parmi les dix choisies aient suivi le stage.

●●○ **Exercice 7.**
Les douanes s'intéressent aux importations de casques audio portant le logo d'une certaine marque. Les saisies des douanes permettent d'estimer que :

- 20 % des casques audio portant le logo de cette marque sont des contrefaçons ;
- 2 % des casques non contrefaits présentent un défaut de conception ;
- 10 % des casques contrefaits présentent un défaut de conception.

L'agence des fraudes commande au hasard sur un site internet un casque affichant le logo de la marque. On considère les évènements suivants :

- C : « le casque est contrefait » ;
- D : « le casque présente un défaut de conception » ;

Dans l'ensemble de l'exercice, les probabilités seront arrondies à 10^{-3} si nécessaire.

Partie 1.

1. Calculer $\mathbf{P}(C \cap D)$. On pourra s'appuyer sur un arbre pondéré.
2. Démontrer que $\mathbf{P}(D) = 0,036$.
3. Le casque a un défaut. Quelle est la probabilité qu'il soit contrefait ?

Partie 2.

On commande n casques portant le logo de cette marque. On assimile cette expérience à un tirage aléatoire avec remise. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de casques présentant un défaut de conception dans ce lot.

1. Dans cette question, $n = 35$.
   (a) Justifier que X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n,\ p)$ où $n = 35$ et $p = 0,036$.
   (b) Calculer la probabilité qu'il y ait parmi les casques commandés, exactement un casque présentant un défaut de conception.
   (c) Calculer $\mathbf{P}(2 \leqslant X \leqslant 5)$.
2. Dans cette question, n n'est pas fixé.
   Quel doit être le nombre minimal de casques à commander pour que la probabilité qu'au moins un casque présente un défaut soit supérieur à $0,99$?

CHAPITRE

2

SUITES NUMÉRIQUES

2.1 Principe de récurrence

2.1.1 Préambule

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n - n \end{cases}$$

1. Calculer les trois premiers termes de cette suite.

2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = 2^n + n + 1$.
   (a) Calculer les trois premiers termes de cette suite.

   (b) Quelle conjecture peut-on émettre ? ____________________

   (c) À quelle difficulté est-on confrontés ? ____________________

2.1.2 Le principe

Le raisonnement par récurrence peut se comparer à la théorie des dominos : on considère une suite de dominos rangés de telle sorte que si un domino tombe alors le suivant tombera. Si on fait tomber le premier domino alors le second tombera, puis le troisième, ...etc..
Conclusion : si le premier domino tombe alors tous tomberont. Tout repose en fait sur le principe de propagation "si l'un tombe alors le suivant aussi"

Le raisonnement par récurrence

Si $\underbrace{\mathscr{P}_0 \text{ est vraie}}_{\text{Initialisation}}$ et si : $\underbrace{\forall n \in \mathbb{N},\ (\mathscr{P}_n \Longrightarrow \mathscr{P}_{n+1})}_{\text{Hérédité}}$, alors : $\forall n,\ \mathscr{P}_n$.

Remarques.

- La proposition $\mathscr{P}_n$ peut se traduire par une égalité, une inégalité, une affirmation ...
- Les conditions d'initialisation et d'hérédité sont **indispensables** (voir contre-exemples en exercices).
- La condition d'hérédité est une **implication**, on suppose que $\mathscr{P}_n$ est vraie puis on montre que $\mathscr{P}_{n+1}$ l'est également.

⚠ Toute autre rédaction est exclue. Commencer l'hérédité par « supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}_n$ est vraie » est une erreur **gravissime**. En effet, si on suppose la proposition vraie pour TOUS les rangs, que reste-t-il à prouver ? On ne peut jamais montrer ce qu'on prend comme hypothèse.

Application 1.2. Cas d'une égalité.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0.
Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 + nr$.

Application 2.2. Cas d'une inégalité.

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n \mathrm{e}^{-u_n} \end{cases}$$

Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$.

Application 3.2. Cas d'une phrase.

Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $7^n - 1$ est multiple de 6.

Application 4.2. Cas d'une somme.

Soit n un entier naturel non nul.
Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul,

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

.

2.2 Quelques rappels de l'an dernier

Définition 1.2.

- Une *suite* est une application $u : \mathbb{N} \to$.
- Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $u(n)$ ou u_n le n-ème *terme* ou *terme général* de la suite.

► **Note 1.2.**
La suite est notée u, ou plus souvent $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou simplement (u_n). Il arrive fréquemment que l'on considère des suites définies à partir d'un certain entier naturel n_0 plus grand que 0, on note alors $(u_n)_{n\geq n_0}$.

Exemple 1.2.

- $(\sqrt{n})_{n\geq 0}$ est la suite de termes : 0, 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$,...
- $(F_n)_{n\geq 0}$ définie par $F_0 = 1$, $F_1 = 1$ et la relation $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pour $n \in \mathbb{N}$ (suite de Fibonacci que vous pouvez retrouver au grand oral). Les premiers termes sont 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...Chaque terme est la somme des deux précédents.

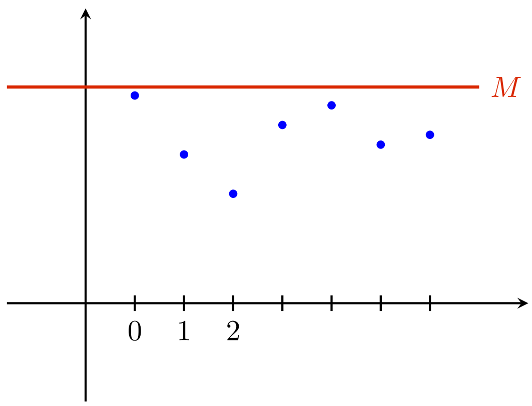
Définition 2.2.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique.

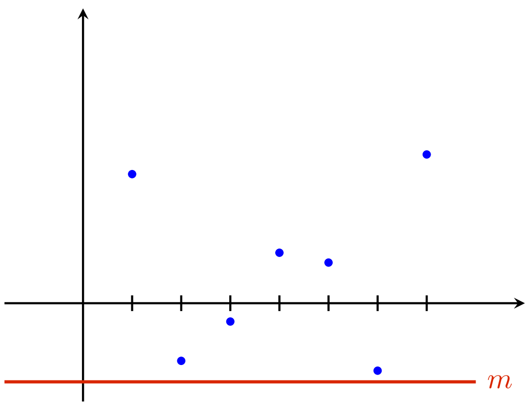
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *majorée* si : $\exists M \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq M.$
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *minorée* si : $\exists m \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geq m.$
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *bornée* si elle est majorée et minorée, ce qui revient à dire :

$$\exists (m, M) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad m \leq u_n \leq M$$

Cas d'une suite ______________



Cas d'une suite ______________



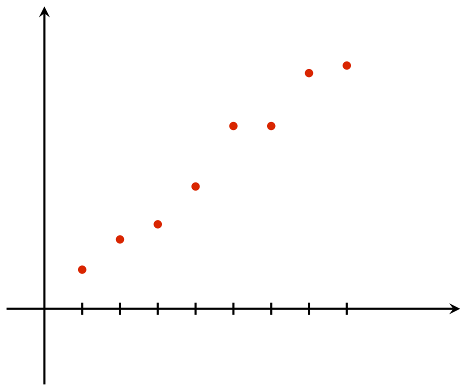
Application 5.2. Démontrer que la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \cos(n^3) + 3$ est bornée.

2.3 Sens de variation d'une suite

Définition 3.2.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique.

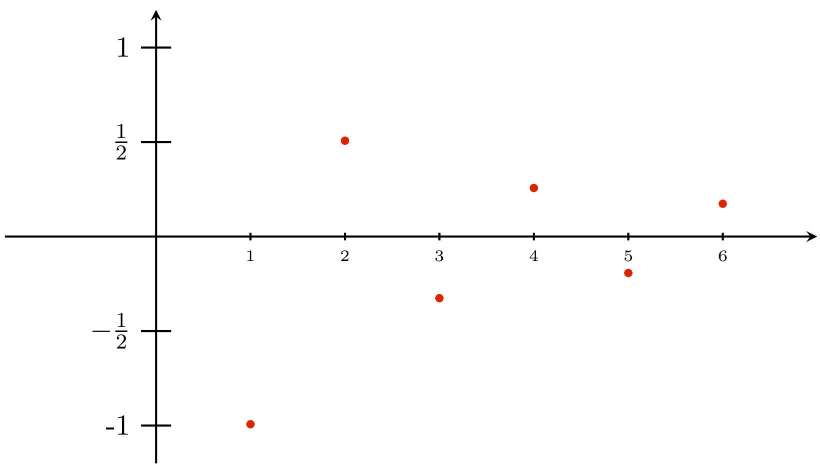
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *croissante* si $\forall n \in \mathbb{N},$
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *strictement croissante* si $\forall n \in \mathbb{N},$
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *décroissante* si $\forall n \in \mathbb{N},$
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *strictement décroissante* si $\forall n \in \mathbb{N},$
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *monotone* si elle est
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *strictement monotone* si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.

Exemple 2.2.
Cas d'une suite croissante mais *non* strictement croissante.



Remarques.

- Il peut arriver qu'une suite soit ***croissante*** (resp. décroissante) à partir d'un certain rang n_0 : pour tout $n \geqslant n_0,\ u_{n+1} \geqslant u_n$ (resp. $u_{n+1} \leqslant u_n$).
- Il existe des suites *ni croissantes ni décroissantes*, par exemple la suite u définie pour tout entier naturel non nul par $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$:



- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante si et seulement si :

- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite à termes **strictement positifs**, elle est croissante si et seulement si :

Application 6.2. Étudier la monotonie des suites u et v définies par :

1. $u_{n+1} = -2u_n^2 + u_n$ et $u_0 = -3$ où $n \in \mathbb{N}$
2. $v_n = \dfrac{2^n}{3^{n+4}}$ où $n \in \mathbb{N}$

2.4 Limite infinie d'une suite

2.4.1 Limite infinie

Définition 4.2.

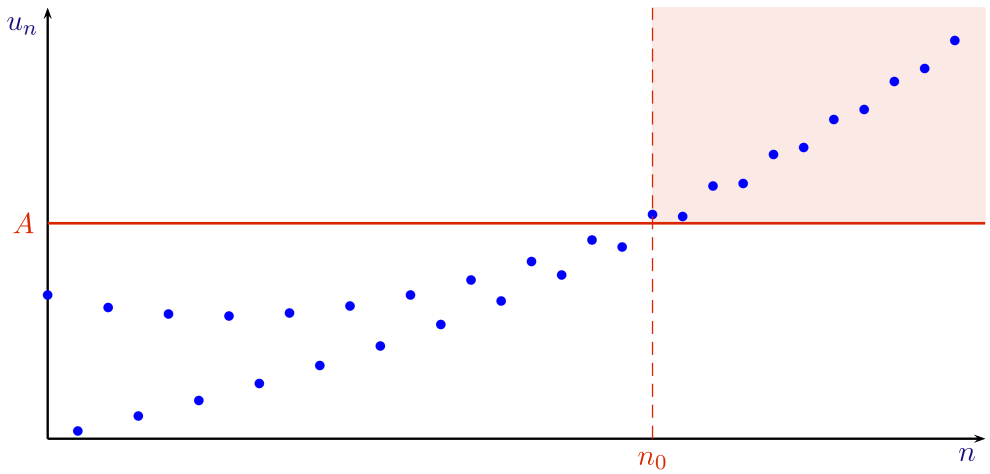
Une suite (u_n) a pour limite $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$, si tout intervalle de la forme $]A\,;+\infty[$ contient tous les termes u_n *à partir d'un certain rang.*

Autrement dit, pour tout réel A, il existe un entier n_0 tel que pour tout entier $n \geqslant n_0$, on ait $u_n > A$.
On note :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \qquad}$$

▶ **Note 2.2.**
On dit dans ce cas que la suite (u_n) **diverge** vers $+\infty$.

Illustration.



2.4.2 Premières limites de référence

Propriété 1.2.

- $\lim\limits_{n\to+\infty} n =$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} =$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 =$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} n^k =$ pour tout entier $k \geqslant 1$

Application 7.2. Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 5n - 4$.

1. Conjecturer la limite de la suite (u_n).
2. Résoudre l'inéquation $u_n > A$ où A est un réel donné.
3. Justifier alors que la suite (u_n) a pour limite $+\infty$.

2.5 Limite finie d'une suite

2.5.1 Suite convergente

Définition 5.2.

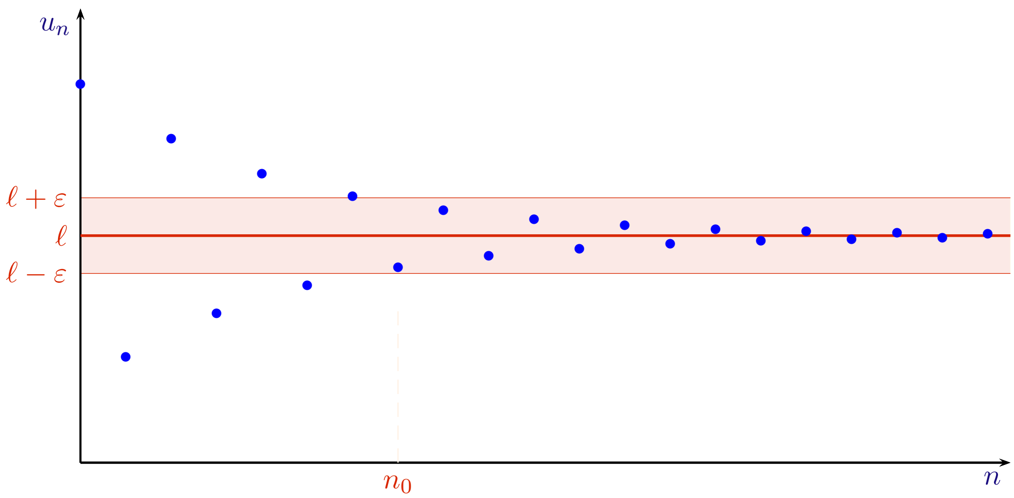
Une suite (u_n) admet pour limite le réel ℓ quand n tend vers $+\infty$, si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes de la suite *à partir d'un certain rang* n_0.

On note :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = \qquad\qquad}$$

▶ **Note 3.2.**
On dit dans ce cas que la suite (u_n) *converge* vers ℓ.

Illustration.



2.5.2 Suites de référence

Propriété 2.2.

- $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$
- $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$
- $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$
- $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^k} = 0$ pour tout entier $k \geqslant 1$

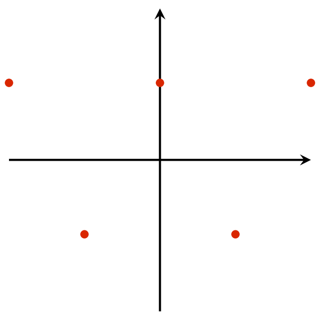
Théorème 1.2. *Unicité de la limite*
Si une suite (u_n) admet une limite le réel ℓ quand n tend vers $+\infty$ alors cette limite est unique et on note :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell}$$

2.5.3 Des suites sans limite

⚠ Une suite n'a pas nécessairement de limite. C'est le cas par exemple pour les suites « alternées » ou celles dont les valeurs oscillent. Dans ces cas, on dira que ces suites sont également *divergentes.*

Exemple 3.2.
La suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = (-1)^n$ alterne entre les valeurs -1 et 1 :



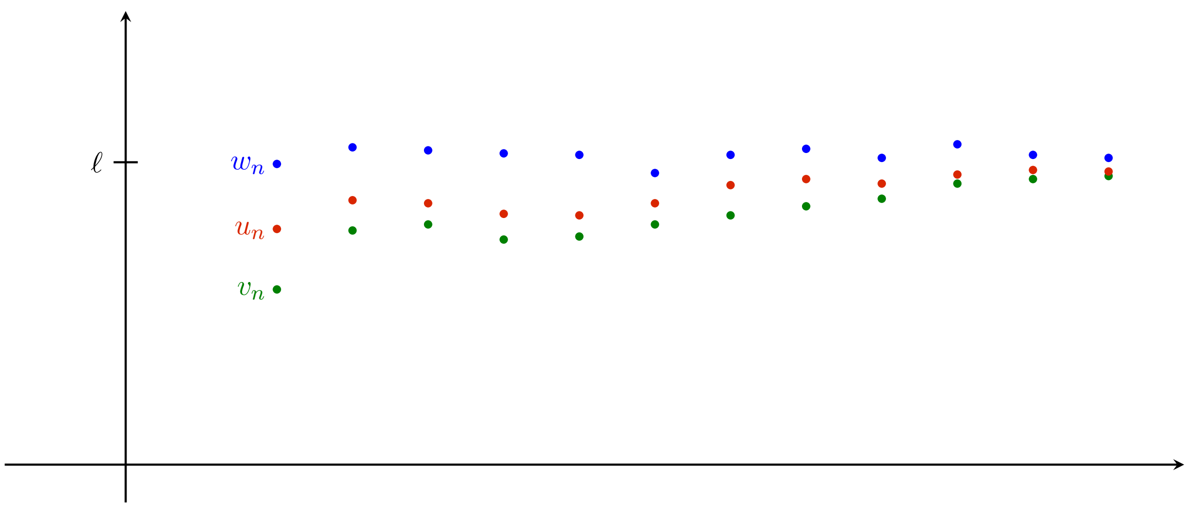
2.6 Théorèmes d'encadrement et de comparaison

2.6.1 Théorème d'encadrement des limites dit « des gendarmes »

Théorème 2.2. *Admis*
Si les suites (u_n), (v_n) et (w_n) sont telles que :

- à partir d'un certain rang $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$;
- (v_n) et (w_n) ont la même limite finie ℓ,

alors la suite (u_n) *converge* et a pour limite $\boldsymbol{\ell}$.



Application 8.2. Déterminer la limite de la suite v définie sur $\mathbb{N}^*$ par $v_n = \dfrac{2+\sin n^2}{3n}$.

2.6.2 Théorème de comparaison

Théorème 3.2.
Soient (u_n), (v_n) deux suites définies sur $\mathbb{N}$.
Si à partir d'un certain rang, $u_n \geqslant v_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ alors :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$$

Démonstration.

□

Le même type de théorème existe pour $-\infty$ et il se démontre de la même manière.

Théorème 4.2.
Soient (u_n) et (v_n) deux suites définies sur $\mathbb{N}$.
Si à partir d'un certain rang, $u_n \leqslant v_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ alors :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty}$$

2.7 Opérations et limites

2.7.1 Somme

Limite de (u_n)	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$
Limite de (v_n)	ℓ'	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$
Limite de $(u_n + v_n)$	$\ell + \ell'$	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$

Dans le cas où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ on ne peut pas tirer de conclusion générale pour (u_n+v_n), il s'agit d'une *forme indéterminée*, forme que l'on essaiera de lever en fonction de l'expression donnée. En tout état de cause, il n'y a pas de résultat général.

2.7.2 Produit

Limite de (u_n)	ℓ	$\ell \neq 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
Limite de (v_n)	ℓ'	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Limite de $(u_n \times v_n)$	$\ell \times \ell'$	$*\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

$*$: $+$ ou $-$ appliquer la règle des signes.
Dans le cas où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \pm\infty$, on ne peut pas tirer de conclusion générale pour $(u_n \times v_n)$, il s'agit d'une *forme indéterminée* qui nécessitera une étude particulière.

2.7.3 Quotient

Limite de (u_n)	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$
Limite de (v_n)	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	$\ell' \neq 0$	$\ell' \neq 0$
Limite de $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0	$*\infty$	$*\infty$

$*$: $+$ ou $-$ appliquer la règle des signes.
Dans les cas où $\lim u_n = \pm\infty$ et $\lim v_n = \pm\infty$, $\lim u_n = 0$ et $\lim v_n = 0$, on ne peut pas tirer de conclusion générale pour $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$, il s'agit de *formes indéterminées*.

2.8 Limites de suites monotones

Propriété 3.2.
Si une suite *croissante* a pour limite ℓ, alors tous les termes de la suite sont *inférieurs ou égaux* à ℓ.

Théorème 5.2. *Admis*

- Toute suite *croissante majorée converge*, c'est-à-dire admet une limite finie.
- Une suite *décroissante minorée converge*, c'est-à-dire admet une limite finie.

▶ **Note 4.2.**
Ce théorème se nomme le théorème de convergence monotone.

⚠ Ce théorème est un théorème d'existence, il justifie l'existence d'une limite finie mais ne précise pas cette limite !

Théorème 6.2. *Admis*
- Une suite *croissante non majorée* a pour limite $+\infty$.
- Une suite *décroissante non minorée* a pour limite $-\infty$.

2.9 Limites des suites arithmétiques et géométriques

2.9.1 Suites arithmétiques

Propriété 4.2.
Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.
- Si $r < 0$ on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.
- Si $r = 0$ alors la suite est **constante** et égale à u_0, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = u_0$.
- Si $r > 0$ alors on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

2.9.2 Suites géométriques

Propriété 5.2.
Soit la suite géométrique (q^n) définie sur $\mathbb{N}$ avec q un réel.
- Si $q > 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.
- Si $q = 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 1$.
- Si $-1 < q < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.
- Si $q \leqslant -1$ alors la suite (q^n) n'a pas de limite.

Propriété 6.2.
Soit (u_n) la suite géométrique de raison q et de premier terme u_0.

	$u_0 < 0$	$u_0 > 0$
$q \leqslant -1$	Pas de limite	
$-1 < q < 1$	la suite (u_n) tend vers 0	
$q = 1$	la suite (u_n) tend vers u_0	
$q > 1$	la suite (u_n) tend vers $-\infty$	la suite (u_n) tend vers $+\infty$

2.10 Les exercices du chapitre

○○○ **Exercice 8.**
Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 6 \\ u_{n+1} = 2u_n - 5 \end{cases}$$

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a :

$$u_n = 2^n + 5.$$

●○○ **Exercice 9.**
Soit (v_n) la suite géométrique de raison q et de premier terme v_0.
Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = v_0 q^n$.

●●○ **Exercice 10.**
Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n} \end{cases}$$

Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{2}{2n+1}$.

●○○ **Exercice 11.**
Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n \mathrm{e}^{2u_n} \end{cases}$$

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a : $u_n > 0$.

●○○ **Exercice 12.**
Soit la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} w_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+1} = 3w_n - 2n + 3 \end{cases}$$

Démontrer que pour tout entier naturel n on a :

$$w_n \geqslant n$$

.

●●○ **Exercice 13.**
Soit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} v_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = \dfrac{1}{3}v_n + 4 \end{cases}$$

.

1. Calculer v_1.
2. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a $v_{n+1} \geqslant v_n$.

3. En déduire la monotonie de la suite (v_n).

●●○ Exercice 14.
Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2-u_n} \end{cases}$$

1. Calculer u_2, u_3 et u_4.
2. Conjecturer l'expression de u_n en fonction de n.
3. Démontrer cette conjecture par récurrence puis en déduire u_{2023}.

●○○ Exercice 15.
Soit $\mathscr{P}_n$ la proposition « 2^n est un multiple de 3 ».

1. Démontrer que $\mathscr{P}_n$ est héréditaire.
2. $\mathscr{P}_n$ est-elle vraie pour tout entier naturel n ?

●●○ Exercice 16.
Soit $\mathscr{P}_n$ la proposition « $10^n - 1$ est un multiple de 9 ».

1. Démontrer que $\mathscr{P}_n$ est héréditaire.
2. $\mathscr{P}_n$ est-elle vraie pour tout entier naturel n ?

●●● Exercice 17.
a un réel strictement positif.
Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $(1+a)^n \geqslant 1 + na$.
(Inégalité de Bernoulli).

●●● Exercice 18.
Soit n un entier naturel et $a_0,\ a_1,\ a_2 \ldots,\ a_{n+1}$ des nombres réels non nuls.
Démontrer que pour tout entier naturel n,

$$\prod_{k=0}^{n} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_{n+1}}{a_0}$$

●●○ Exercice 19.
Soit n un entier naturel non nul.
Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul,

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

.

○○○ Exercice 20.
Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{1}{4}u_n + 2 \end{cases}$$

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n,

$$u_n \leqslant u_{n+1}.$$

2. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

●●○ Exercice 21.
On considère (u_n) une suite réelle telle que pour tout entier naturel n, $n < u_n < n+1$.
Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

●○○ Exercice 22.
On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{14}{3} \text{ et } u_0 = 1.$$

1. Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est majorée par 7.
2. Étudier la monotonie de la suite (u_n).

○○○ Exercice 23.
Soit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = 5 + \cos(n^2)$.
Démontrer que la suite (v_n) est bornée.

●○○ Exercice 24.
Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \dfrac{n}{n+1}$.
Démontrer que la suite (u_n) est bornée.

●○○ Exercice 25.
Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{2}{3}u_n + 2n + 1 \end{cases}$$

1. Conjecturer la limite de la suite (u_n) à la calculatrice.
2. On considère le programme Python :

```python
def seuil():
    u=2;n=0
    while u.....  :
        n=n+1
        u=.......
    return .....
```

Compléter la fonction Python ci-dessus pour qu'elle retourne le premier terme de la suite strictement supérieur à 100.

●○○ Exercice 26.
Calculer les limites des suites (u_n) définies de façon explicite de la façon suivante :

1. $u_n = \sqrt{n}\left(4 + \dfrac{1}{n}\right)$
2. $u_n = -n^3(3n^2 + 5)$
3. $u_n = \left(-7 + \dfrac{2}{\sqrt{n}}\right)(1 - n)$

●○○ **Exercice 27.**
Déterminer la limite (si elle existe) de la suite (u_n) dans les cas suivants :

1. $u_n = n + (-1)^n$ où $n \in \mathbb{N}$
2. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2}$ où $n \in \mathbb{N}^*$
3. $u_n = \dfrac{1}{n}\cos(n)$ où $n \in \mathbb{N}^*$

●○○ **Exercice 28.**
Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ dans les cas suivants :

1. $u_n = \dfrac{1}{n}\left(n^2 + n + 2\right)$
2. $u_n = \dfrac{n^2 - 2n + 3}{4n^3 + 1}$
3. $u_n = \dfrac{\sqrt{n} + n}{4n + 5}$

○○○ **Exercice 29.**

1. Soit (u_n) telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 5n$.
   Déterminer la limite de la suite (u_n).
2. Soit (v_n) telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n \leqslant -n^2$.
   Déterminer la limite de la suite (v_n).
3. On considère une suite (w_n) qui vérifie
   $-\dfrac{1}{n} + 3 \leqslant w_n \leqslant \dfrac{1}{n} + 3$ pour tout entier naturel n non nul.
   Calculer la limite de la suite (w_n).

●○○ **Exercice 30.**
En utilisant les théorèmes de comparaison des limites, calculer les limites des suites suivantes dont on donne le terme général ci-dessous :

1. $u_n = n - \cos n$
2. $v_n = -n^2 + (-1)^n$
3. $w_n = \dfrac{4n + (-1)^n}{2n + 3}$
4. $z_n = \dfrac{n - \sin n}{\cos n + 2}$

●○○ **Exercice 31.**
Déterminer la limite éventuelle des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suivantes en utilisant la limite d'une suite géométrique :

1. $u_n = \dfrac{4}{7^n}$
2. $u_n = \dfrac{1}{1 + 0,25^n}$
3. $u_n = 9^n - 3^n$
4. $u_n = \dfrac{(-4)^{n+1}}{5^n}$

●●○ **Exercice 32.**
Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} v_0 = -\dfrac{2}{3} \\ v_{n+1} = -2v_n + 1 \end{cases}$$

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n,

$$v_n = \frac{1}{3} - (-2)^n$$

2. La suite (v_n) admet-elle une limite ? Justifier.

●●○ **Exercice 33.**
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant pour tout entier naturel n :

$$u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

●●○ **Exercice 34.**
On définit la suite (u_n) définie pour $n \geqslant 2$ par :

$$\begin{cases} u_2 = 1 \\ u_{n+1} = \left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right) u_n \end{cases}$$

1. (a) Démontrer que pour entier naturel n supérieur ou égal à 2,

$$0 \leqslant u_n \leqslant 1.$$

   (b) Étudier le sens de variation de la suite (u_n).
2. Justifier que la suite (u_n) est convergente.
3. Montrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2,

$$u_n = \frac{n}{2(n-1)}.$$

4. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

●●○ Exercice 35.
Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{1}{10}u_n\left(20 - u_n\right) \end{cases}$$

1. Soit f la fonction définie sur $[0\,;\,20]$ par

$$f(x) = \frac{1}{10}x(20 - x).$$

   (a) Étudier les variations de f sur $[0\,;\,20]$

   (b) En déduire que pour tout $x \in [0\,;\,20]$,

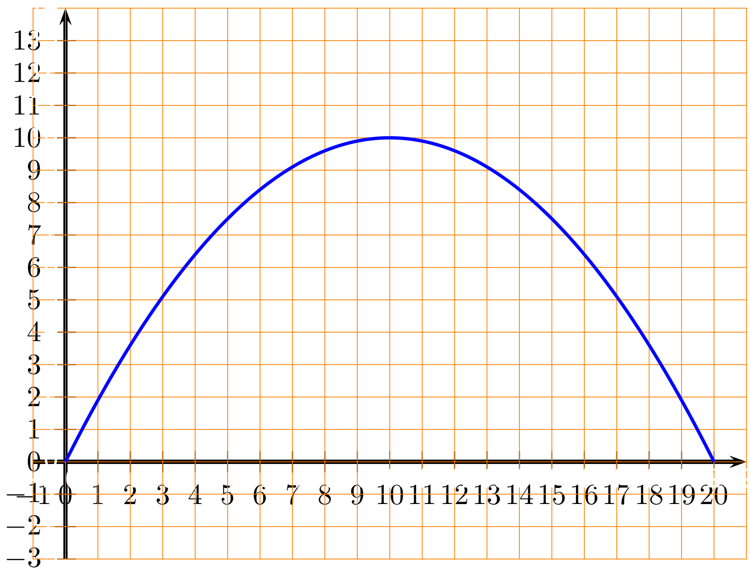
$$f(x) \in [0\,;\,10].$$

   (c) On donne ci-dessous la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f dans un repère orthonormal.
   Représenter, sur l'axe des abscisses, à l'aide de ce graphique, les cinq premiers termes de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ puis émettre une conjecture quant à son sens de variation et à sa convergence.

2. Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 10.$$

3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est convergente et déterminer sa limite.



CHAPITRE

3

Limites et dérivation

3.1 Limite d'une fonction à l'infini

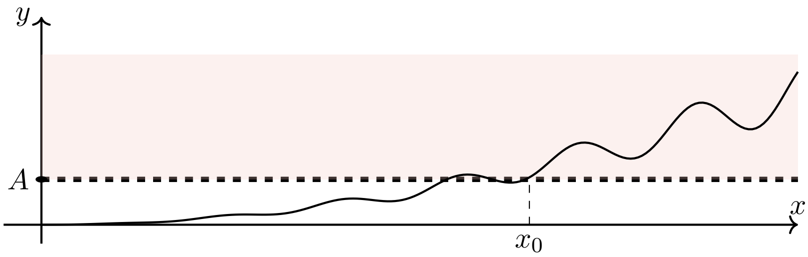
3.1.1 Limite infinie à l'infini

Définition 1.3.

On considère une fonction f définie sur un intervalle de la forme $]a\,;\,+\infty[$.
On dit que f a **pour limite** $+\infty$ **en** $+\infty$ lorsque tout intervalle de la forme $]A\,;\,+\infty[$ contient toutes les valeurs de x dès que x est *suffisamment grand.*
On écrit :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$$

Illustration.



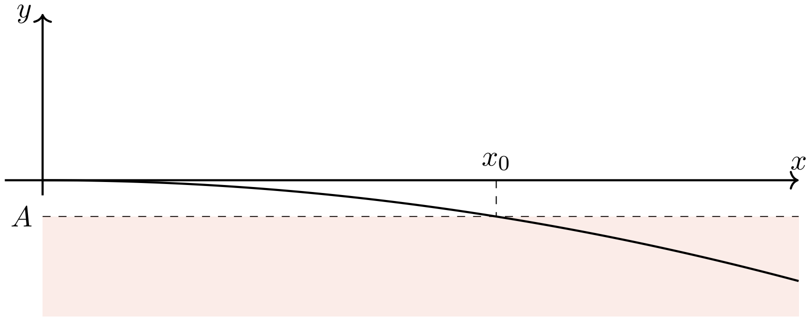
▶ **Note 1.3.**
Je vous laisse adapter cette définition pour cet énoncé au cas d'une limite en $-\infty$.

Définition 2.3.

On considère une fonction f définie sur un intervalle de la forme $]a\,;\,+\infty[$.
On dit que f a *pour limite* $-\infty$ *en* $+\infty$ lorsque tout intervalle de la forme $]-\infty\,;\,A[$ contient toutes les valeurs de x dès que x est suffisamment grand.
On écrit :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty}$$

Illustration.



► **Note 2.3.**
Je vous laisse adapter cette définition pour cet énoncé au cas d'une limite en $-\infty$.

Propriété 1.3. *Limites de référence*

1. En $+\infty$:
   (a) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$
   (b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$
   (c) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^p = +\infty$ si $p \geqslant 1$
   (d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$
2. En $-\infty$:
   (a) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$
   (b) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^p = +\infty$ si p est pair et $-\infty$ si p est impair.

Démonstration. La limite de de l'exponentielle en $+\infty$

□

3.1.2 Limite finie à l'infini

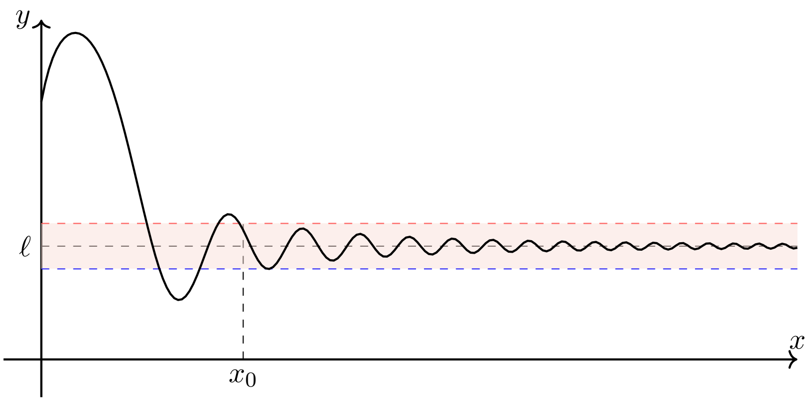
Définition 3.3.

On considère une fonction f définie sur un intervalle de la forme $]a\,;\,+\infty[$ et un réel ℓ.
On dit que f a *pour limite* ℓ *en* $+\infty$ lorsque tout intervalle I ouvert contenant ℓ (comme $]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[$) contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est *suffisamment grand*.
Il existe un réel x_0 tel que pour tout $x \geqslant x_0$, $f(x) \in I$.
On écrit :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell}$$

▶ **Note 3.3.**
Je vous laisse de nouveau adapter cet énoncé au cas d'une limite en $-\infty$.

Illustration.



Propriété 2.3. *Limites de référence*

1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$
2. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$
3. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$
4. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$
5. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2} = 0$
6. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0.$

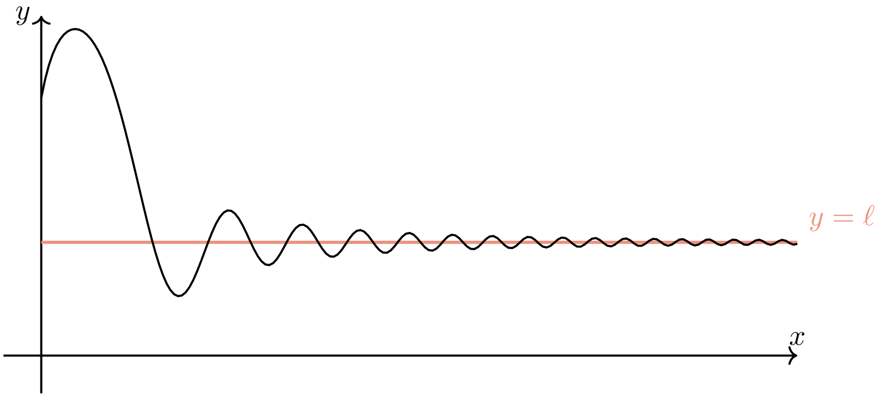
Démonstration. Limite de l'exponentielle en $-\infty$.

□

Définition 4.3.

Lorsque f a pour limite ℓ en $+\infty$ (resp. $-\infty$), on dit que la droite d'équation $y = \ell$ est *asymptote horizontale* à la courbe représentative de la fonction f notée $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$).

Exemple.



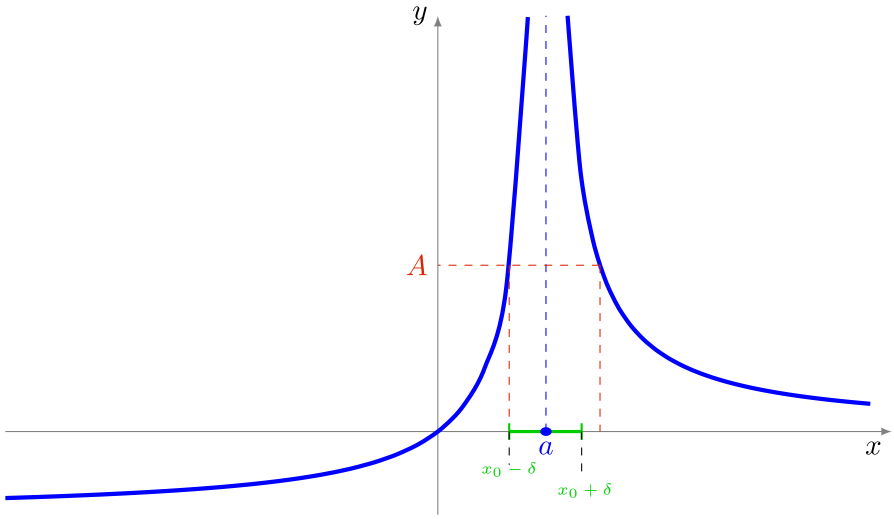
Dans cet exemple $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$, ce qui implique que la droite d'équation $y = \ell$ est *asymptote horizontale* à la courbe représentative de f au voisinage de $+\infty$.

3.2 Limite infinie d'une fonction en un réel

Définition 5.3.

On considère une fonction f définie sur un ensemble ouvert dont le réel a est une borne.
On dit que f a *pour limite* $+\infty$ *en* a lorsque tout intervalle de la forme $]A\,; +\infty[$ contient toutes les valeurs de x dès que x *est assez proche de* a.
On écrit :

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = +\infty}$$



Définition 6.3.
On dit que f admet pour $+\infty$ en a à droite lorsque tout intervalle $]A\,;+\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est *assez proche* de a, x *restant strictement supérieur* à a.
On écrit :

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to a\\x>a}} f(x) = +\infty}$$

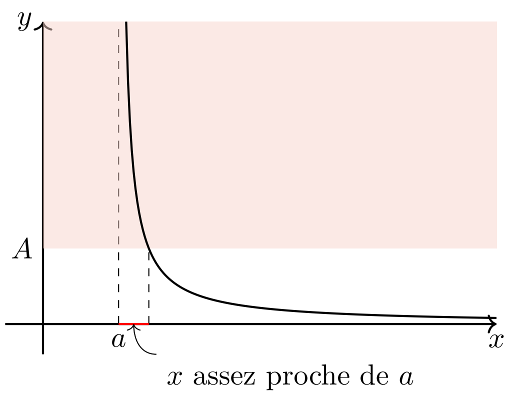
▶ **Note 4.3.**
Je vous laisse encore adapter cet énoncé au cas d'une limite en a par valeurs inférieures.

Propriété 3.3. *Limites de référence*

- $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$
- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$
- $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\x<0}} \frac{1}{x} = -\infty$
- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$

Définition 7.3.
Lorsque f a pour limite $+\infty$ ou $-\infty$ en a (ou à droite de a, ou à gauche de a), on dit que la droite d'équation $x = a$ est *asymptote verticale* à la courbe représentative de la fonction f.

Exemple.



Application 1.3. On considère une fonction f dérivable dont le tableau de variation est donné ci-dessous :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
Variations de f	5 ↘		$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	-4	↗	2

Préciser les différentes asymptotes à la courbe représentative de la fonction f.

3.3 Théorèmes d'opérations

3.3.1 Limites et opérations

Les principaux résultats sur les calculs de limites ont été vus au chapitre 3, avec les formes indéterminées.
Un exemple pour illustrer avec une rédaction possible :

Application 2.3. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ par $f(x) = \dfrac{x}{3x-6}$.

Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition et en déduire l'existence d'asymptotes à la courbe représentative de f.

Il existe des limites que l'on ne pourra calculer à l'aide des opérations algébriques déjà vues. Par exemple, comment peut-on procéder pour calculer la limite de $f: \ x \mapsto \mathrm{e}^{-\sqrt{x}}$ en $+\infty$?

3.3.2 Limite d'une composée

Pour décrire une fonction, on peut parfois la décomposer en enchaînements de fonctions plus simples, comme les fonctions de référence vues en 1re comme $x \mapsto x^2$, $x \mapsto \mathrm{e}^x$, $x \mapsto \dfrac{1}{x}$...

Définition 8.3.
Soient deux fonctions u et v définies sur deux ensembles I et J tels que l'image de I par u est contenue dans J : $u(I) \subset J$.
La fonction obtenue en appliquant successivement u, puis v, s'appelle la **composée** de la fonction u par la fonction v et est notée $v \circ u$, ou parfois.
Pour tout réel x de I :

$$(v \circ u)(x) = v[u(x)].$$

Théorème 1.3. *Admis*
Soient ω, Ω et ℓ des réels ou l'infini et u et v deux fonctions, alors

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\omega} u(x) = \Omega \\ \lim\limits_{T\to\Omega} v(T) = \ell\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to\omega} v\circ u(x) = \ell$$

Application 3.3. Retour sur l'exemple avec $f\ : x \mapsto \mathrm{e}^{-\sqrt{x}}$ en $+\infty$.

3.3.3 Limites et comparaisons

On dispose de théorèmes analogues à ceux déjà vus pour les suites.
Soient deux fonctions f et g définies sur un intervalle $]a\,;+\infty[$ telles que pour tout réel $x > a$, $g(x) \geqslant f(x)$.

Théorème 2.3. *Comparaison des limites*

1. Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.
2. Si $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

► **Note 5.3.**
On obtient des théorèmes analogues en $-\infty$.

Application 4.3. Déterminer la limite, si elle existe, de $3x - \sin x$ en $-\infty$.

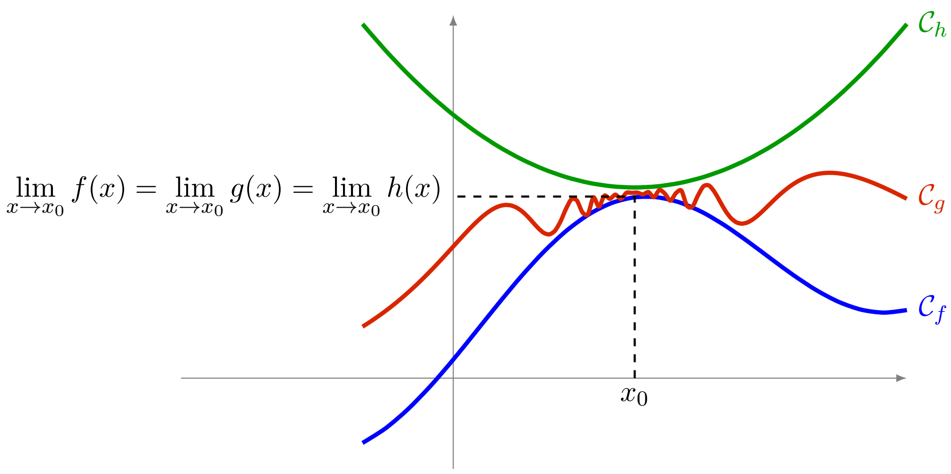
Théorème 3.3. *D'encadrement des limites dit des gendarmes*

Soit x_0 un réel ou $x_0 = \pm\infty$.

Si $f \leqslant g \leqslant h$ et si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = \ell \in \mathbb{R}$, alors :

$$\boxed{\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \ell}$$

Illustration.



Application 5.3. Déterminer la limite, si elle existe, de $\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$ en $+\infty$.

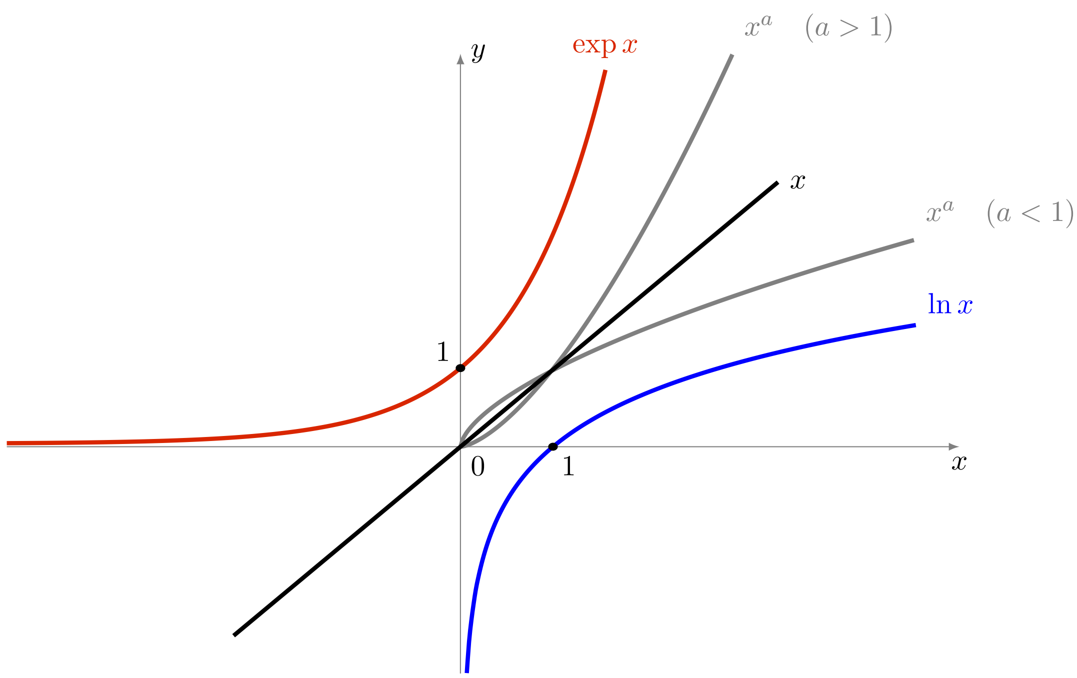
3.3.4 Croissances comparées

Propriété 4.3.
Soit n un entier naturel.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^n} = +\infty, \qquad \lim_{x \to -\infty} x^n \mathrm{e}^x = 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{x}} = +\infty$$

Application 6.3. Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} (x+5)\mathrm{e}^x$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{3x}}{x}$.

Illustration des croissances comparées.



3.4 Compléments sur la dérivation

3.4.1 Dérivée de la composée

Propriété 5.3.
Soit v une fonction dérivable sur un intervalle J telle que pour tout réel $x \in I$, $u(x) \in J$.
La fonction $(v \circ u)$ est *dérivable* sur I et :

$$\boxed{(v \circ u)' = u' \times (v' \circ u)}$$

3.4.2 Dérivée de u^n

Propriété 6.3.
Soit n un entier non nul n. Si u est une fonction *dérivable* sur un intervalle I et si lorsque n est *strictement négatif*, u ne s'annule pas sur I, alors la fonction u^n est dérivable sur I et :

$$\boxed{(u^n)' = nu'u^{n-1}}$$

3.4.3 Dérivée de $\sqrt{u}$

Propriété 7.3.
Si u est une fonction *dérivable* et *strictement positive* sur un intervalle I alors la fonction $\sqrt{u}$ est dérivable sur I et :

$$\boxed{(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}}$$

3.4.4 Dérivée de e^u

Propriété 8.3.
Si u est une fonction *dérivable* sur un intervalle I alors la fonction e^u est dérivable sur I et :

$$\boxed{(\mathrm{e}^u)' = u'\mathrm{e}^u}$$

Application 7.3. Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \mathrm{e}^{-x^2+6x+4} \text{ sur } I = \mathbb{R} \text{ et } f_2(x) = (3x^2+7x-5)^9 \text{ sur } I = \mathbb{R}.$$

3.5 Les exercices du chapitre

○○○ **Exercice 36.**
Soit f définie sur $I =]1\,;+\infty[$.
On sait que :

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = -\infty \text{ et que } \lim_{x\to+\infty} f(x) = 4$$

1. Démontrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f admet deux asymptotes dont on précisera les équations.
2. On sait que f est strictement croissante sur $I =]1\,;+\infty[$. Tracer dans un repère une allure de la courbe $\mathscr{C}_f$.

●○○ **Exercice 37.**
On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont le tableau de variations est donné ci-dessous :

x	$-\infty$	-7	1	$+\infty$
Variation de f	4 ↘	-2 ↗	7 ↘	0

1. Quelles sont les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$?
2. Interpréter graphiquement ces résultats.
3. Donner une allure possible de la courbe représentative de f.

○○○ **Exercice 38.**
Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} 0,4x$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} -100$
3. $\lim\limits_{x\to-\infty} -6x^3$
4. $\lim\limits_{x\to-\infty} 9x^3$

●○○ **Exercice 39.**
Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} - 3$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x + 4x + 5$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x + 5$
4. $\lim\limits_{x\to-\infty} 3 - \dfrac{5}{x}$

○○○ **Exercice 40.**
Justifier les deux résultats ci-dessous :

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} (\mathrm{e}^x + 4)(5 - \mathrm{e}^x) = 20$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} (5x+4)\sqrt{x} = +\infty$

●○○ Exercice 41.
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{2}{\mathrm{e}^x + 3}$.

1. (a) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x + 3$.
   (b) En déduire $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.
   (c) Interpréter ce résultat.
2. (a) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x + 3$.
   (b) En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
   (c) Interpréter ce résultat.

●○○ Exercice 42.
Soit la fonction f définie sur $]3\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x-3}.$$

1. (a) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} x - 3$.
   (b) En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
   (c) Interpréter graphiquement ce résultat.
2. (a) Étudier le signe de $x - 3$ sur $]3\,;\,+\infty[$.
   (b) En déduire la limite de f en 3.
   (c) Interpréter ce résultat.

●○○ Exercice 43.
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}.$$

1. Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x}$.
2. En déduire $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ puis interpréter ce résultat.

●○○ Exercice 44.
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel x,

$$\frac{1}{x^2+1} \leqslant f(x) \leqslant \frac{2}{x^2+1}$$

1. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2+1}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{x^2+1}$.
2. En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

●○○ Exercice 45.

1. Rappeler les limites du cours : $\lim\limits_{x \to -\infty} x\mathrm{e}^x$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{x}}$.
2. En déduire les limites :
   (a) $\lim\limits_{x \to -\infty} x\mathrm{e}^x - 6$
   (b) $\lim\limits_{x \to +\infty} 5 + \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$

(c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{\sqrt{x}} + 7$

●●○ Exercice 46.
Déterminer les limites des fonctions suivantes après avoir factorisé numérateur et dénominateur :

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{2x+9}$
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x+\sqrt{x}}{x^2+5}$
3. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2+4x}{x^3+3x^2}$

●○○ Exercice 47.
Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x<3}} \dfrac{x^2+4}{x-3}$
2. $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x<2}} \dfrac{x}{x^2-5x+6}$
3. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \dfrac{(x+2)e^x}{x}$
4. $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x<3}} \dfrac{2x+2}{3-x}$

●○○ Exercice 48.
Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

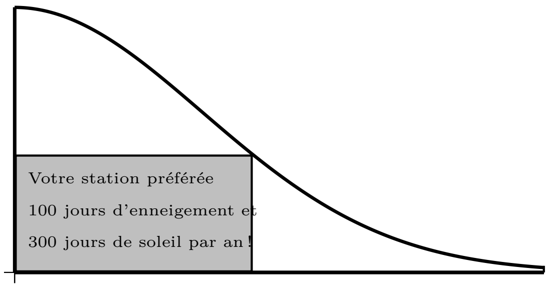
1. $f_1(x) = (e^x + 8x^2 + 6x)^5$ sur $I = \mathbb{R}$
2. $f_2(x) = \sqrt{e^x + 3}$ sur $I = \mathbb{R}$
3. $f_3(x) = e^{-5x^3}$ sur $I = \mathbb{R}$
4. $f_4(x) = \dfrac{1}{(e^x + x^2)^3}$ sur $I = \mathbb{R}$

●●○ Exercice 49.
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x^2+2x+3}{x^2+2} \text{ et on note } \mathscr{C}_f \text{ sa courbe représentative.}$$

1. Démontrer que $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote (d) parallèle à l'axe des abscisses.
2. Étudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ et (d).
3. Calculer la dérivée de f et étudier son signe sur $\mathbb{R}$.
4. Dresser le tableau de variation complet de f sur $\mathbb{R}$.

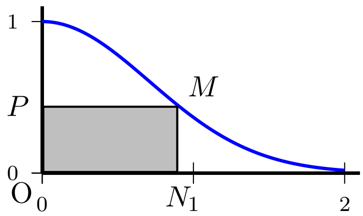
●●● Exercice 50.
Une entreprise spécialisée est chargée par l'office de tourisme d'une station de ski de la conception d'un panneau publicitaire ayant la forme d'une piste de ski.
Afin de donner des informations sur la station, une zone rectangulaire est insérée sur le panneau comme indiqué sur la figure ci-dessous.



Un panneau est découpé dans une plaque rectangulaire de 2 mètres sur 1 mètre. Il est représenté ci-dessous dans un repère orthonormé ; l'unité choisie est le mètre.

Pour x nombre réel appartenant à l'intervalle $[0\,;\,2]$, on note :

- M le point de la courbe $\mathscr{C}_f$ de coordonnées $\left(x\ ;\ \mathrm{e}^{-x^2}\right)$,
- N le point de coordonnées $(x\ ;\ 0)$,
- P le point de coordonnées $\left(0\ ;\ \mathrm{e}^{-x^2}\right)$,
- $A(x)$ l'aire du rectangle ONMP.



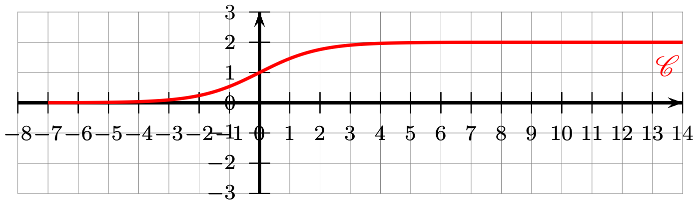
1. Justifier que pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\,;\,2]$, on a : $A(x) = x\mathrm{e}^{-x^2}$.
2. Déterminer la position du point M sur la courbe $\mathscr{C}_f$ pour laquelle l'aire du rectangle ONMP est maximale.

●●● Exercice 51.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{2\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}.$$

On donne ci-dessous la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f dans un repère orthonormé.



1. Calculer la limite de la fonction f en moins l'infini et interpréter graphiquement le résultat.
2. Montrer que la droite d'équation $y = 2$ est asymptote horizontale à la courbe $\mathscr{C}$.
3. Calculer $f'(x)$, f' étant la fonction dérivée de f, et vérifier que pour tout nombre réel x on a :
$$f'(x) = \frac{f(x)}{\mathrm{e}^x + 1}.$$
4. Montrer que la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$.
5. Montrer que la courbe $\mathscr{C}$ passe par le point I$(0\,;\,1)$ et que sa tangente en ce point a pour coefficient directeur $0,5$.

CHAPITRE

4

Continuité et convexité

4.1 Continuité et applications

4.1.1 Continuité

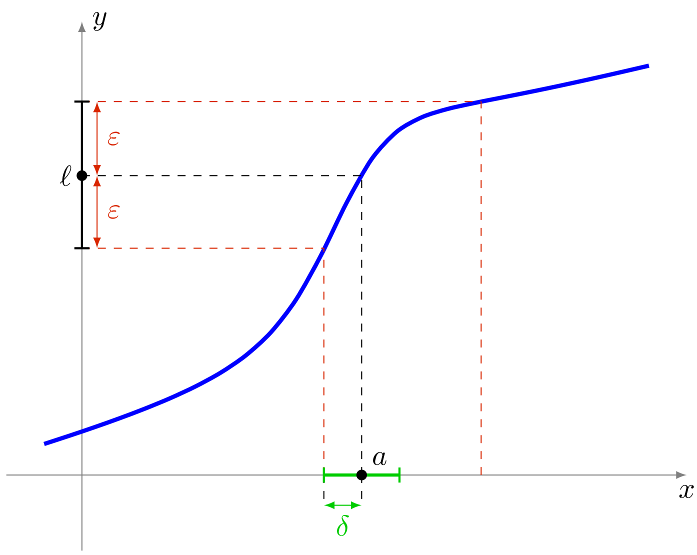
Définition 1.4.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
Soient $a \in \mathbb{R}$ un point de I ou une extrémité de I et $\ell \in \mathbb{R}$.
On dit que f *a pour limite* ℓ *en* a si :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon}$$

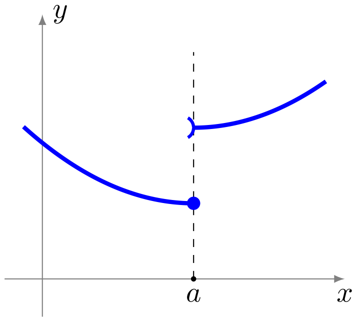
► **Note 1.4.**
On dit aussi que $f(x)$ *tend vers* ℓ *lorsque* x *tend vers* a.
On note alors $\lim_{x \to a} f(x) = f(a) = \ell$

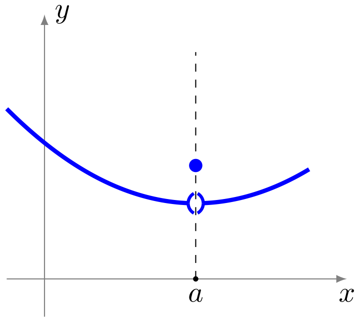
Illustration.

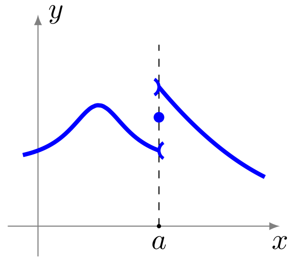


Intuitivement, une fonction est continue sur un intervalle, si on peut tracer son graphe « sans lever le crayon », c'est-à-dire si sa courbe représentative *n'admet pas de saut.*

Voici l'exemple de *trois* fonctions qui ne sont pas continues en a :







Définition 2.4.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
On dit que f est *continue sur* I si f est *continue* en tout réel de I.

Propriétés.
Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et soit λ un réel.

- La *somme* $f+g$ est *continue* sur I.
- Le *produit* $\lambda \cdot f$, le *produit* $f \times g$ et f^n (où n est un entier naturel non nul) sont *continues* sur I.
- Si de plus g ne *s'annule pas* sur I alors les fonctions $\dfrac{1}{g}$ et $\dfrac{f}{g}$ sont *continues* sur I.

Propriété 1.4.
Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $f(I) \subset J$.
Si f est continue en un point $a \in I$ et si g est continue en $f(a)$, alors $g \circ f$ est continue en a.

Propriété 2.4.
Si f est *dérivable* sur I alors f est *continue* sur I.

⚠ La réciproque est fausse. Exemple de la fonction valeur absolue en 0.

4.1.2 Image d'une suite par une fonction continue

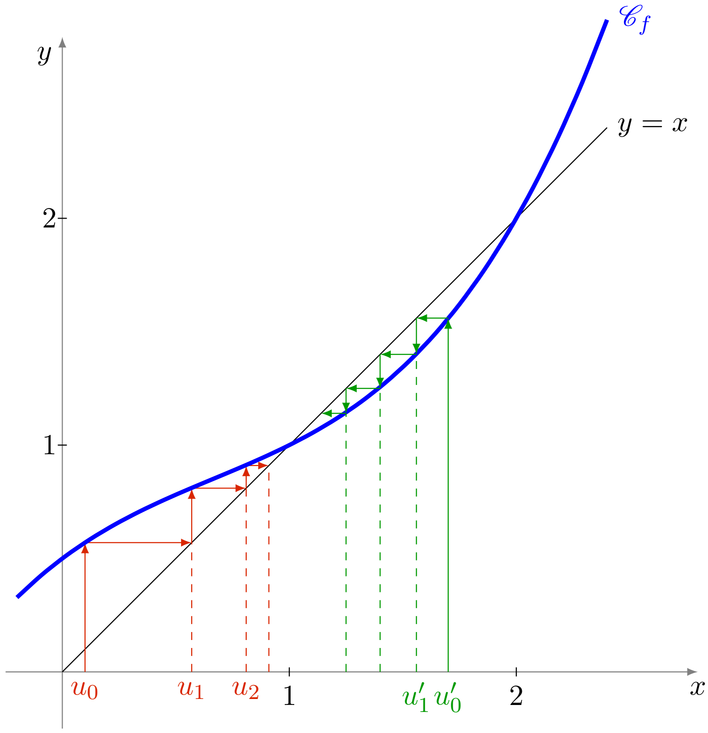
Propriété 3.4.
Soient f une fonction définie sur un intervalle I et (u_n) une suite telle que u_n appartient à I pour tout entier naturel n.

Si (u_n) converge vers un réel ℓ appartenant à I et *si* f est *continue* en ℓ alors la suite $f(u_n)$ converge vers $f(\ell)$.

Propriété 4.4.
Soient f une fonction *continue* sur un intervalle I et (u_n) une suite telle que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.
Si (u_n) converge vers un réel ℓ alors ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$.

Construction des premiers termes d'une suite récurrente.

Voici comment tracer la suite : on trace le graphe de f et la droite d'équation $y = x$. On part d'une valeur u_0 sur l'axe des abscisses, la valeur $u_1 = f(u_0)$ se lit sur l'axe des ordonnées, mais on reporte la valeur de u_1 sur l'axe des abscisses par symétrie par rapport à la bissectrice. On recommence : $u_2 = f(u_1)$ se lit sur l'axe des ordonnées et on le reporte sur l'axe des abscisses, etc. On obtient ainsi une sorte d'escalier, et graphiquement on conjecture que la suite est croissante et tend vers 1. Si on part d'une autre valeur initiale u'_0 , c'est le même principe, mais cette fois on obtient un escalier qui descend :



Application 1.4. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{2}x + 2$.
On admet que la suite (u_n) converge et on note ℓ sa limite.

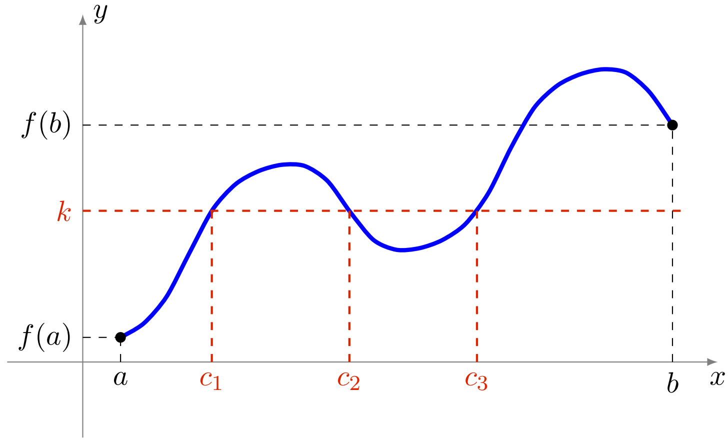
1. Conjecturer la limite de la suite (u_n).
2. Justifier que f est continue sur $\mathbb{R}$.
3. Démontrer la conjecture émise à la question 1.

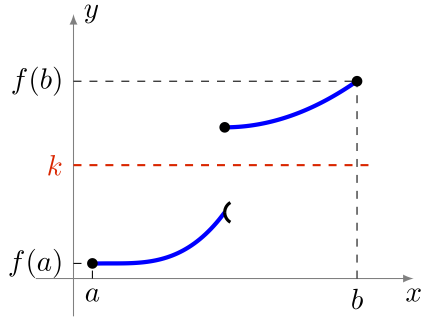
4.2 Équation $f(x) = k$

4.2.1 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 1.4. *TVI*
Soient f une fonction définie et *continue* sur un intervalle I et a et b deux réels de I.
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe *au moins* un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.

Une illustration du théorème des valeurs intermédiaires (figure de gauche), le réel c n'est pas *nécessairement unique*. De plus si la fonction *n'est pas continue*, le théorème n'est plus vrai (figure de droite).





Théorème 2.4. *Corollaire du précédent*
Soit f une fonction définie et *continue* et *strictement monotone* sur un intervalle $[a\,;\,b]$.
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ possède une *solution unique* dans l'intervalle $[a\,;\,b]$.

► **Note 2.4.**
Dans le cas particulier $k = 0$ et $f(a)$ et $f(b)$ sont de *signes contraires* : si f est continue et strictement monotone sur $[a\,;\,b]$ et si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, alors l'équation $f(x) = 0$ admet une *unique solution* dans l'intervalle $]a\,;\,b[$.

Théorème 3.4. *Extension du théorème*
On peut appliquer le corollaire du théorème dans le cas d'un intervalle du type $[a\,;\,b[$, $]a\,;\,b]$ ou $]a\,;\,b[$, a et b pouvant être $+\infty$ ou $-\infty$. On remplace alors le calcul de $f(a)$, par exemple par $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

4.2.2 Méthodes d'encadrement

— *Méthode de balayage.*

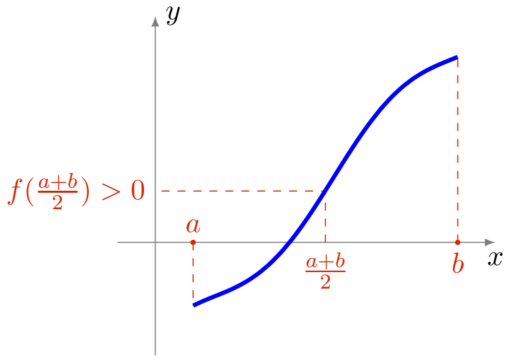
Application 2.4. Soit f la fonction définie sur $[1\,;\,+\infty[$ par $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

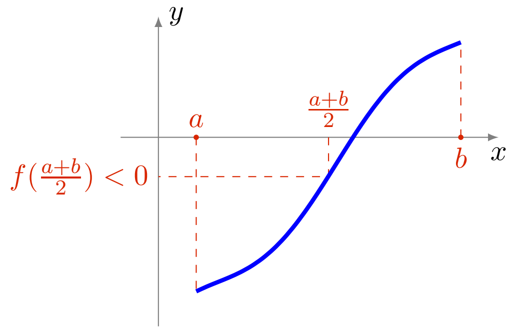
1. Démontrer que f est strictement croissante sur $[1\,;\,+\infty[$ et calculer la limite de f en $+\infty$.
2. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[1\,;\,+\infty[$.
3. Déterminer un encadrement de α à $0,01$ près par la méthode de « balayage » puis une valeur approchée de α à $0,01$ près.

— *Méthode de dichotomie.*

Voici la première étape de la construction : on regarde le signe de la valeur de la fonction f appliquée au point « milieu » $\frac{a+b}{2}$.

- Si $f(a) \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant 0$, alors il existe $c \in \left[a, \dfrac{a+b}{2}\right]$ tel que $f(c) = 0$.
- Si $f(a) \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) > 0$, cela implique que $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot f(b) \leqslant 0$, et alors il existe $c \in \left[\dfrac{a+b}{2}, b\right]$ tel que $f(c) = 0$.





Nous avons obtenu un intervalle de longueur moitié dans lequel l'équation $f(x) = 0$ admet une solution. On itère alors le procédé pour diviser de nouveau l'intervalle en deux.

Voici le processus complet :

- **Au rang 0 :**
  On pose $a_0 = a$, $b_0 = b$. Il existe une solution x_0 de l'équation $f(x) = 0$ dans l'intervalle $[a_0, b_0]$.
- **Au rang 1 :**
  — Si $f(a_0) \cdot f(\frac{a_0+b_0}{2}) \leqslant 0$, alors on pose $a_1 = a_0$ et $b_1 = \frac{a_0+b_0}{2}$,
  — sinon on pose $a_1 = \frac{a_0+b_0}{2}$ et $b_1 = b$.
  — Dans les deux cas, il existe une solution x_1 de l'équation $f(x) = 0$ dans l'intervalle $[a_1, b_1]$.
- ...
- **Au rang n :** supposons construit un intervalle $[a_n, b_n]$, de longueur $\frac{b-a}{2^n}$, et contenant une solution x_n de l'équation $f(x) = 0$. Alors :
  — Si $f(a_n) \cdot f(\frac{a_n+b_n}{2}) \leqslant 0$, alors on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$,
  — sinon on pose $a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$ et $b_{n+1} = b_n$.
  — Dans les deux cas, il existe une solution x_{n+1} de l'équation $f(x) = 0$ dans l'intervalle $[a_{n+1}, b_{n+1}]$.

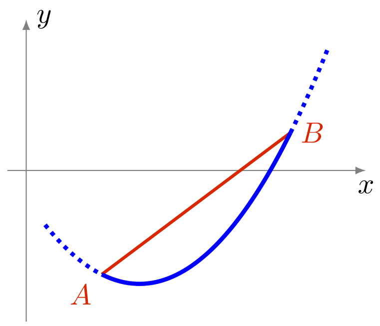
4.3 Convexité d'une fonction

4.3.1 Fonction convexe, fonction concave

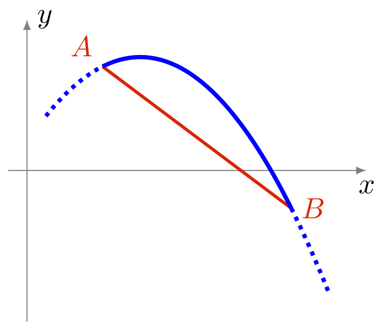
Définition 3.4.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

Si pour tous points distincts A et B de $\mathscr{C}_f$, la courbe $\mathscr{C}_f$ est située « en dessous » du segment $[AB]$ alors on dit que la fonction f est *convexe* sur I.



Si pour tous points distincts A et B de $\mathscr{C}_f$, la courbe $\mathscr{C}_f$ est située « au dessus » du segment $[AB]$ alors on dit que la fonction f est *concave* sur I.



4.3.2 Convexité des fonctions deux fois dérivables

Propriété 5.4. *Admise*

Soit f une fonction définie, *deux fois dérivable* sur un même intervalle I. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- f est *convexe* sur I.
- f' est *croissante* sur I.
- f'' est *positive* sur I.
- $\mathscr{C}_f$ est située *au-dessus* de ses tangentes.

De la même façon, les propositions suivantes sont équivalentes :

- f est *concave* sur I.
- f' est *décroissante* sur I.
- f'' est *négative* sur I.
- $\mathscr{C}_f$ est située *en dessous* de ses tangentes.

Définition 4.4.

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.
On dit qu'un point A de $\mathscr{C}_f$ est un *point d'inflexion* lorsque, en ce point la courbe $\mathscr{C}_f$ *traverse* sa tangente.

Propriété 6.4. *Admise*
Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel de I.

(1) Le point $A(a\,;\,f(a))$ est un point d'inflexion de $\mathscr{C}_f$ si et seulement si la convexité de f change en a.

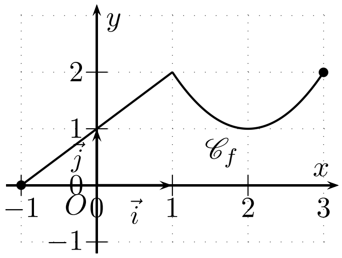
(2) Si de plus f est deux fois dérivable sur I, alors le point $A(a\,;\,f(a))$ est un point d'inflexion si et seulement si f'' s'annule et change de signe en a.

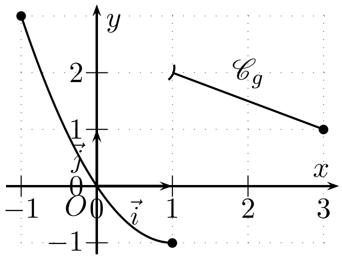
Application 3.4. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - x^2 + x + 1$. On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.

1. À l'aide de la calculatrice, conjecturer la convexité de f et les éventuels points d'inflexion de $\mathscr{C}_f$.
2. Calculer la dérivée seconde de f.
3. En déduire la convexité de f.
4. Justifier l'existence d'un point d'inflexion de $\mathscr{C}_f$ dont on précisera les coordonnées.

4.4 Les exercices du chapitre

○○○ **Exercice 52.**
Les fonctions f et g sont représentées sur la figure ci-après :





1. Lesquelles de ces fonctions sont continues sur $[-1\,;\,3]$?
2. Préciser sur quel(s) intervalles(s) la fonction semble dérivable.

●○○ **Exercice 53.**
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 1 & \text{si} \quad x \leqslant -1 \\ 3 - x & \text{si} \quad x > -1 \end{cases}$$

1. Représenter graphiquement f.
2. f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

●○○ **Exercice 54.**

On considère la suite (u_n) définie par son premier terme $u_0 =$ et par la relation de récurrence, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est la fonction définie sur $]-\infty\,;\,12]$
par $f(x) = \sqrt{12 - x}$. On admet que la suite (u_n) converge et que f est continue sur $]-\infty\,;\,12]$. On note ℓ la limite de la suite (u_n).

1. À l'aide de la calculatrice, conjecturer la valeur de ℓ.
2. Démontrer qu'il existe un unique réel α tel que $f(\alpha) = \alpha$.
3. Démontrer la conjecture en utilisant la continuité de f.

●○○ **Exercice 55.**
Reprendre les questions de l'exercice précédent avec (u_n), définie par $u_0 = -10$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^x - 1$$

.

●○○ Exercice 56.
Une fonction f admet pour tableau de variations :

x	-3	0	4
Variation de f	1 ↘	-1	↗ 0

1. Déterminer le nombre de solutions de l'équation :
   (a) $f(x) = 0$
   (b) $f(x) = 3$
   (c) $f(x) = -\dfrac{1}{2}$
2. (a) Donner l'allure d'une courbe pouvant représenter la fonction f.
   (b) Discuter selon les valeurs de m, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.

●○○ Exercice 57.

1. À l'aide de la calculatrice, conjecturer le nombre de solutions de l'équation :

$$x^3 - 6x + 2 = 0.$$

2. Montrer que l'intervalle $[-1\,;\,2]$ contient une des solutions précédentes.

●●○ Exercice 58.
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 + x^2 + x.$$

1. Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Étudier les variations de f.
3. Démontrer que l'équation $f(x) = 2$ a une solution unique α dans $\mathbb{R}$ puis vérifier que α appartient à l'intervalle $[0\,;\,2]$.
4. Déterminer une valeur approchée à 10^{-1} près de α.

●●○ Exercice 59.
Soit $f\ :\ [0\,;\,1] \mapsto [0\,;\,1]$ une fonction continue.
Montrer que f admet un point fixe, c'est-à-dire que l'équation $f(x) = x$ admet une solution sur $[0\,;\,1]$.

●●○ Exercice 60.
Démontrer que l'équation $x^2\mathrm{e}^x = 1$ admet une solution unique dans $\mathbb{R}$ et que cette solution appartient à l'intervalle $[0\,;\,1]$.

●○○ Exercice 61.
Montrer que les courbes représentatives des fonctions suivantes admettent la même tangente au point d'abscisse 1 :

1. $f \ : \ x \longmapsto -x^2 + x + 3$.
2. $g \ : \ x \longmapsto \dfrac{1}{x} + 2$.
3. $h \ : \ x \longmapsto -5x + 8\sqrt{x}$.

●●○ Exercice 62.
Soit f la fonction définie sur $]-1\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \sqrt{x+1}.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1. Démontrer que f est concave sur $[-1\,;\,+\infty[$.
2. Tracer sur l'écran d'une calculatrice $\mathscr{C}$ et la droite d'équation $y = \dfrac{1}{2}x + 1$.
3. Démontrer que pour tout réel x appartenant à $]-1\,;\,+\infty[$,

$$\sqrt{1+x} \leqslant \frac{1}{2}x + 1.$$

●●○ Exercice 63.
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x\mathrm{e}^x + 1.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1. Étudier la convexité de f.
2. Déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.
3. En déduire que, pour tout réel x appartenant à $[-2\,;\,+\infty[$, $f(x) \geqslant x + 1$.

●○○ Exercice 64.

Soit f une fonction convexe dérivable et définie sur un intervalle I.
Démontrer que, pour tous réels a et b de I, on a :

$$f(b) - f(a) \geqslant f'(a)(b-a).$$

●○○ Exercice 65.
Déterminer les éventuels points d'inflexion de la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 - 21x^2 + 19.$$

●○○ Exercice 66.
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

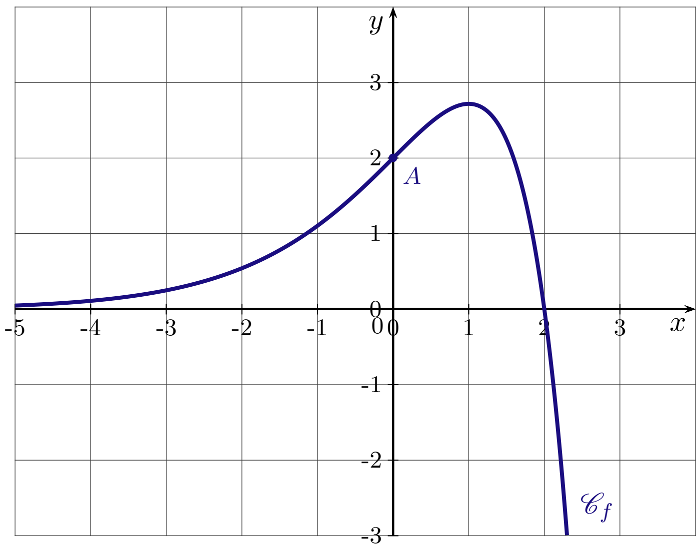
$$f(x) = x^4 - 2x^3 - 120x^2 + 3.$$

Soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.
Étudier la convexité de f et l'existence d'éventuels points d'inflexion pour $\mathscr{C}_f$.

●●○ **Exercice 67.**
Soit f la fonction définie pour tout réel x par :

$$f(x) = (2 - x)\mathrm{e}^x.$$

Sa courbe représentative notée $\mathscr{C}_f$ est tracée ci-dessous dans le plan muni d'un repère orthonormé.



1. Déterminer une équation de la tangente $\mathscr{D}$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse 0 puis tracer la droite $\mathscr{D}$ dans le repère précédent.
2. Quelle conjecture peut-on émettre quant au point A pour $\mathscr{C}_f$?
3. On note f'' la dérivée seconde de la fonction f. Calculer $f''(x)$.
4. Étudier la convexité de la fonction f.
5. Démontrer la conjecture de la question **2.**

CHAPITRE

5

Droites et plans de l'espace

5.1 Vecteurs de l'espace

5.1.1 Définition d'un vecteur de l'espace

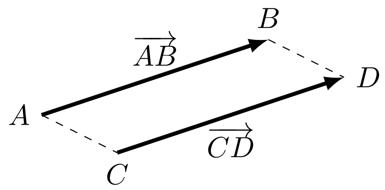
Définition 1.5.

Soient A et B deux points de l'espace.

On associe le *vecteur* $\overrightarrow{AB}$ à la translation qui transforme A en B.

Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si et seulement si ________ est un parallélogramme (éventuellement aplati).

On peut alors noter $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ et on dit que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont des ________________ du vecteur $\overrightarrow{u}$.



Note 1.5.

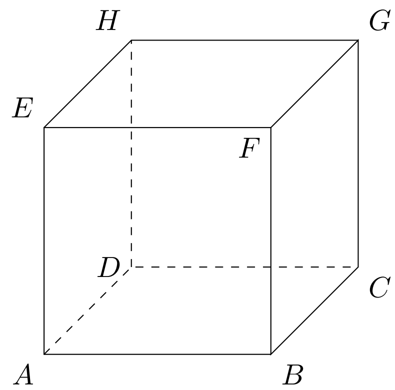
- Deux vecteurs sont égaux s'ils ont même ________________________________
- Lorsque A et B sont **confondus**, on dit que le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est ____ et on le note $\overrightarrow{0}$.

Théorème 1.5. *admis*

Soient $\overrightarrow{u}$ et A un point de l'espace. Il existe un unique point M tel que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{u}$ et on dit que $\overrightarrow{AM}$ est le représentant de $\overrightarrow{u}$ d'origine A.

Application 1.5.

On considère le cube $ABCDEFGH$ représenté ci-dessous. Construire les points M et N tels que :

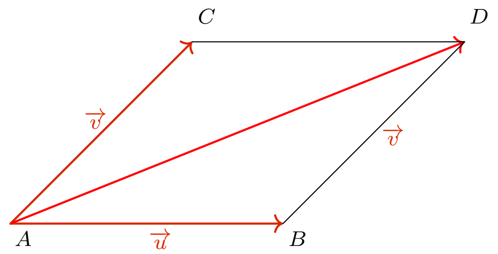


- $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EH}$.
- $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{HE}$.

5.1.2 Opérations sur les vecteurs de l'espace

Définition 2.5.

> Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace de représentants respectifs $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$.
> La *somme* des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est le vecteur noté $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ de représentant $\overrightarrow{AD}$ tel que $ABDC$ soit un parallélogramme.



Propriété 1.5. *Relation de Chasles*
Pour tous points A, B et C de l'espace, $\overrightarrow{AB} + \underline{\hspace{2cm}} = \overrightarrow{AC}$.

Propriétés 1.5.

- Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul. Le vecteur $k\overrightarrow{u}$ est le vecteur qui a :
  - la *même direction* que le vecteur $\overrightarrow{u}$;
  - le *même sens* que $\overrightarrow{u}$ si $k > 0$, le *sens contraire* de $\overrightarrow{u}$ si $k < 0$;
  - pour *norme* $|k| \times \|\overrightarrow{u}\|$.
- Pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$ et pour tout réel k, $0\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$.

Propriétés 2.5.
Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace et k et k' deux réels.

- $k\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0} \iff k = 0 \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.
- $k(k'\overrightarrow{u}) = kk'\overrightarrow{u}$.
- $(k + k')\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{u} + k'\overrightarrow{u}$.
- $k(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = k\overrightarrow{u} + k\overrightarrow{v}$.

Définition 3.5.

> Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace.
> On dit que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont *colinéaires* s'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{u} = \qquad\qquad$ ou $\overrightarrow{v} = \qquad\qquad$.

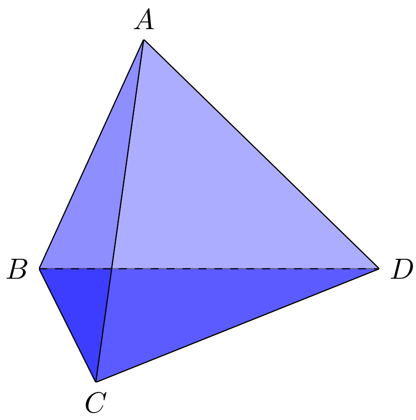
▶ **Note 2.5.**

- Deux vecteurs non nuls sont *colinéaires* si et seulement si
- Le vecteur nul est *colinéaire à tout vecteur.*

Application 2.5.

On considère le tétraèdre $ABCD$ représenté ci-dessous.

1. Construire les points M et N tels que $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{CN} = 2\overrightarrow{BC}$.
2. Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{MC}$ et $\overrightarrow{AN}$ sont colinéaires.



5.2 Droites et plans de l'espace

5.2.1 Caractérisation vectorielle d'une droite

Définition 4.5.
Soient A et B deux points *distincts* de l'espace. La droite (AB) est l'ensemble des points M tels que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont ____________ : on a donc $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$ où $k \in \mathbb{R}$ et le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur ____________ de la droite (AB).

5.2.2 Caractérisation vectorielle d'un plan

Définition 5.5.
Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace tels que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont *pas colinéaires*.
$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont *coplanaires* lorsqu'il existe deux réels x et y tels que : $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$.
On dit alors que le vecteur $\vec{w}$ est une **combinaison linéaire** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

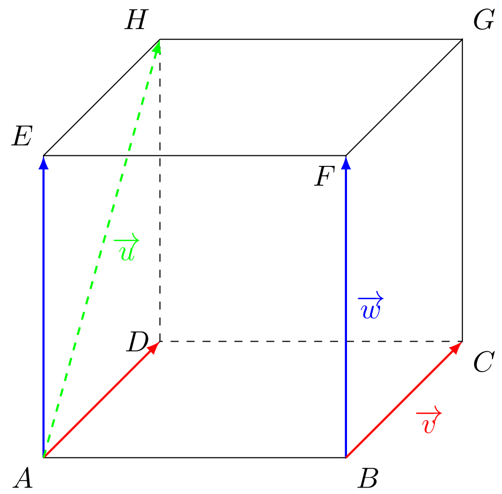
Définitions 1.5.

- On dit que des points sont *coplanaires* s'il existe un plan qui contient ces plans.

  Soient A, B et C trois points *non alignés* de l'espace.
- Le *plan* (ABC) est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$, où $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$.
- Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont des *vecteurs directeurs* du plan (ABC).
  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est une *base* de ce plan et $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est un *repère* de ce plan.

▶ **Note 3.5.**
Trois points sont *toujours* coplanaires.

Propriété 2.5.
Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs de l'espace tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AD}$.
$\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont *coplanaires* si et seulement si les points A, B, C et D sont *coplanaires*.



5.3 Positions relatives de droites et de plans

5.3.1 Positions relatives de deux droites

Définitions 2.5.

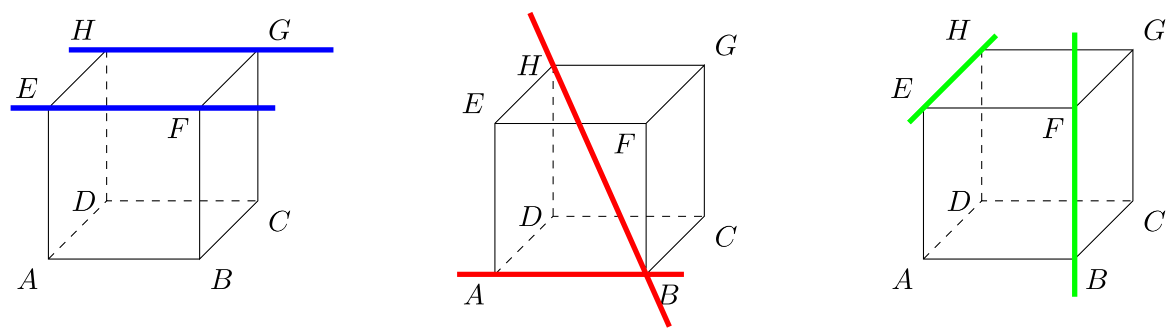
Soit d une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ et d' une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u'}$.

- d et d' sont *parallèles* lorsque $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ sont ________________
- d et d' sont *coplanaires* lorsqu'il existe un plan qui contient d et d' et non coplanaires sinon.

Propriétés 3.5.
Soient A, B, C et D quatre points distincts de l'espace.

- Les droites (AB) et (CD) sont *coplanaires* si les points A, B, C et D sont *coplanaires*, c'est-à-dire s'il existe un plan contenant les quatre points A, B, C et D.
- Deux droites sont *coplanaires* si et seulement si elles sont *sécantes* ou *parallèles*.
- Si deux droites sont *non coplanaires*, alors leur intersection est *vide*.

Exemple 1.5.

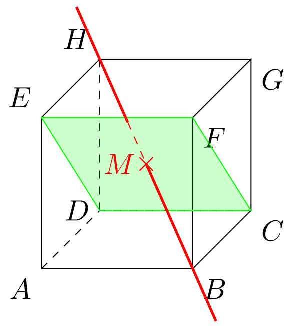


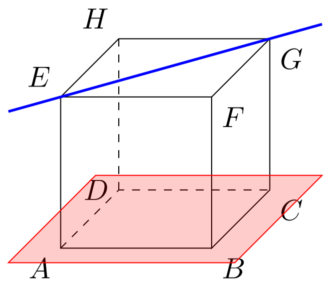
5.3.2 Positions relatives d'une droite et d'un plan

Propriétés 4.5.

- Une droite est *parallèle à un plan* lorsqu'elle admet un vecteur directeur colinéaire à un vecteur directeur de ce plan.
- Si une droite *n'est pas parallèle à un plan*, alors elle coupe ce plan en un ________________.

Exemple 2.5.





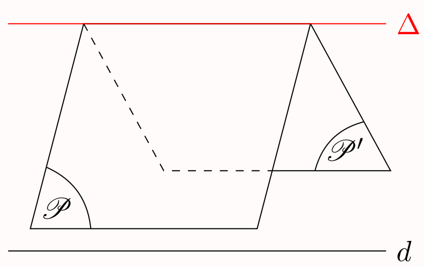
5.3.3 Positions relatives de deux plans

Propriétés 5.5.

- Deux plans sont *parallèles* lorsqu'ils admettent un même couple de vecteurs directeurs non colinéaires.
- Deux plans *non parallèles sont sécants suivant une droite.*
- Lorsque deux plans sont parallèles, tout plan coupant l'un coupe l'autre et les droites d'intersection sont parallèles.

► **Note 4.5.**
Ces propriétés seront très utiles pour les sections de solides.

Théorème 2.5. *Théorème du toit*
Soit d une droite parallèle à deux plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sécants en une droite Δ.
Alors d est parallèle à Δ.



5.4 Repères de l'espace

5.4.1 Base de l'espace

Définition 6.5.

Une *base de l'espace* est formée d'un triplet de vecteurs $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ non coplanaires.

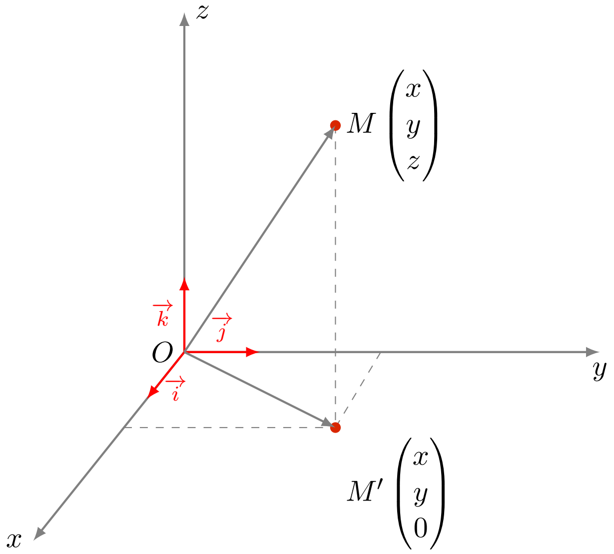
Propriété 3.5.
Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base de l'espace.
Pour tout vecteur $\vec{u}$ de l'espace, il existe un unique triplet $(x\,;\,y\,;\,z)$ tel que $\vec{u} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$.

$(x\,;\,y\,;\,z)$ sont les *coordonnées* de $\vec{u}$ dans cette base et on note $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

5.4.2 Repère de l'espace

Définition 7.5.

Un *repère de l'espace* est formé d'un point donné O et d'une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On note $(O\,;\,\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un tel repère où O est l'*origine* du repère.



Propriété 4.5.
Soit $(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k})$ un repère de l'espace. Pour tout point M de l'espace, il existe un unique triplet $(x\,;\,y\,;\,z)$ tel que $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$, ce triplet $(x\,;\,y\,;\,z)$ ou encore $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est le triplet *de coordonnées* du point M dans le repère $(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k})$ et z est appelée la cote de M.

Propriétés 6.5.
On se place dans un repère $(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k})$ de l'espace.

1. Pour deux points A$\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}$ et B$\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{pmatrix}$ on a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$
2. Coordonnées de K milieu de [AB] : $\begin{pmatrix} \dfrac{x_B + x_A}{2} \\ \\ \dfrac{y_B + y_A}{2} \\ \\ \dfrac{z_B + z_A}{2} \end{pmatrix}$
3. Si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ alors $\vec{u} + \vec{v}\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \\ z + z' \end{pmatrix}$ et pour tout réel λ on a $\lambda\vec{u}\begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix}$

5.4.3 Caractérisations d'une droite de l'espace

Définition 8.5.
Soient $A(x_A, y_A, z_A)$ un point et $\vec{u}(a\,;\,b\,;\,c)$ un vecteur non nul. La droite $\mathscr{D}$ passant par A de vecteur directeur $\vec{u}$ est l'ensemble des points M de l'espace tels qu'il existe un réel λ tel que :

$$\overrightarrow{AM} = \lambda\vec{u}$$

▶ **Note 5.5.**
Conséquence immédiate : la droite $\mathscr{D}$ peut être représentée par un système paramétrique.

Propriété 5.5.
Un point $M(x, y, z)$ appartient à la droite $\mathscr{D}$ passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}(a\,;\,b\,;\,c)$ si, et seulement si, il existe un réel t tel que

$$\begin{cases} x &= x_A + at \\ y &= y_A + bt \\ z &= z_A + ct \end{cases}$$

Ce système est une *représentation paramétrique* de la droite $\mathscr{D}$ dont le paramètre est t.

▶ **Note 6.5.**
Il n'existe pas d'équation cartésienne de droite dans l'espace !

Application 3.5. Donner une représentation paramétrique de la droite passant par les points :

$$A\begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ et } B\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Application 4.5. Soit une droite d de représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 5+3t \\ y & = & -1+4t,\ t\in\mathbb{R} \\ z & = & 1-t \end{array}\right.$$

1. Donner les coordonnées d'un vecteur directeur de cette droite d.
2. Donner les coordonnées de deux points de cette droite.
3. Le point $T(-1\,;\,-9\,;\,3)$ appartient-il à d ?

5.4.4 Représentation paramétrique d'un plan

Propriété 6.5.
Un point $M(x, y, z)$ appartient au plan $\mathscr{P}$ passant par A et de vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}(a, b, c)$ et $\overrightarrow{u}(\alpha, \beta, \gamma)$ si, et seulement si, il existe deux réels t et t' tels que

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & x_A+at+\alpha t' \\ y & = & y_A+bt+\beta t' \\ z & = & z_A+ct+\gamma t' \end{array}\right.$$

Ce système est une *représentation paramétrique* du plan $\mathscr{P}$ de paramètres est t et t'.

Démonstration.

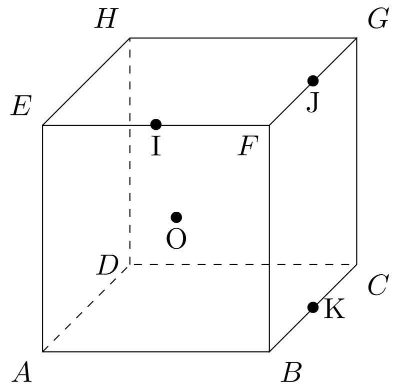
$\square$

Application 5.5. Dans un repère de l'espace, on considère les points $A(3\,;\,3\,;\,0)$, $B(5\,;\,4\,;\,-2)$ et $C(6\,;\,2\,;\,1)$.

1. Démontrer que les trois points A, B et C définissent un plan $\mathscr{P}$ de l'espace.
2. Déterminer une représentation paramétrique de ce plan.

5.5 Les exercices du chapitre

●○○ **Exercice 68.**
Dans le cube $ABCDEFGH$ ci-dessous, I, J et K sont les milieux respectifs des arêtes $[AF]$, $[FG]$ et $[BC]$. On nomme O le centre de ce cube.



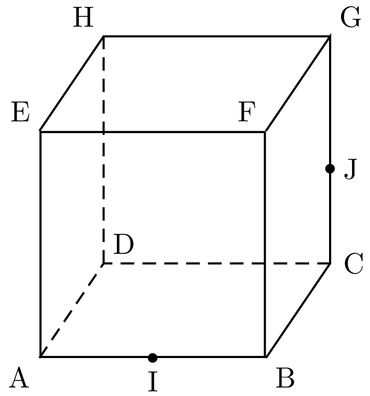
1. Citer, sans justifier, deux vecteurs égaux à :

   (a) $\overrightarrow{DC}$
   (b) $\overrightarrow{GJ}$
   (c) $\overrightarrow{JK}$
   (d) $\overrightarrow{OB}$

2. Compléter avec un point de la figure :
   (a) $\overrightarrow{HG} + \overrightarrow{\cdots J} = \overrightarrow{HJ}$
   (b) $\overrightarrow{H\cdots} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{HB}$
   (c) $\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{\cdots J} = \overrightarrow{AK}$

●○○ **Exercice 69.**
On reprend la figure de l'exercice précédent. Les triplets de vecteurs suivants sont-ils des triplets de vecteurs coplanaires ?
1. $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{CB}$.
2. $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{KC}$ et $\overrightarrow{IJ}$.
3. $\overrightarrow{HG}$, $\overrightarrow{FB}$ et $\overrightarrow{EH}$.
4. $\overrightarrow{OE}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OG}$.

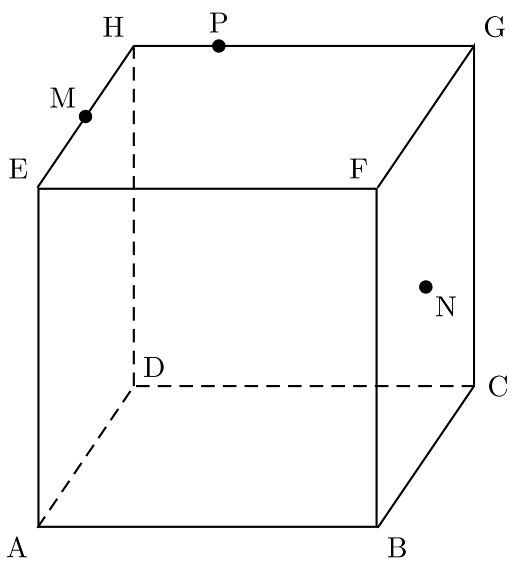
●○○ **Exercice 70.**
ABCDEFGH est un cube, I est le milieu de [AB] et J celui de [CG] :



1. Quelle est la position relative des droites :
   (a) (AD) et (FG) ?
   (b) (AD) et (BG) ?
   (c) (EC) et (BH) ?
   (d) (EJ) et (AC) ?
2. Quelle est l'intersection des plans :
   (a) (DBF) et (AEB) ?
   (b) (ABG) et (CDH) ?
   (c) (ABJ) et (CDH) ?
   (d) (DFB) et (EAD) ?

●●○ **Exercice 71.**
On considère un cube ABCDEFGH donné ci-dessous. On note M le milieu du segment [EH], N celui de [FC] et P le point tel que
$\overrightarrow{HP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{HG}$.

1. Justifier que les droites (MP) et (FG) sont sécantes en un point L.
   Construire le point L
2. On admet que les droites (LN) et (CG) sont sécantes et on note T leur point d'intersection.
   On admet que les droites (LN) et (BF) sont sécantes et on note Q leur point d'intersection.
   (a) Construire les points T et Q en laissant apparents les traits de construction.
   (b) Construire l'intersection des plans (MNP) et (ABF).
3. En déduire une construction de la section du cube par le plan (MNP).



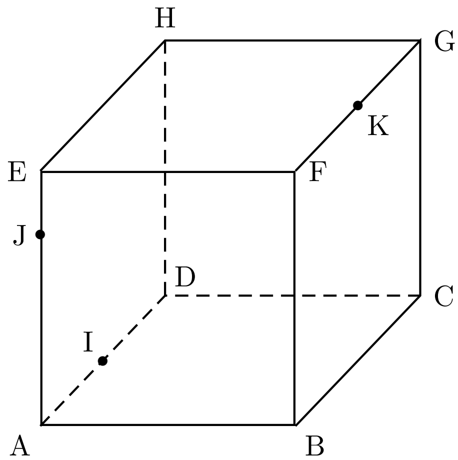
●●○ Exercice 72.
La figure ci-contre représente un cube ABCDEFGH.
Les trois points I, J, K sont définis par les conditions suivantes :

— I est le milieu du segment [AD] ;

— J est tel que $\overrightarrow{\mathrm{AJ}} = \frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{AE}}$;

— K est le milieu du segment [FG].

1. Sur la figure donnée ci-après, construire sans justifier le point d'intersection P du plan (IJK) et de la droite (EH). On laissera les traits de construction sur la figure.
2. En déduire, en justifiant, l'intersection du plan (IJK) et du plan (EFG).



●○○ Exercice 73.
Dans l'espace muni d'un repère $\left(O\ ;\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\right)$, on considère les points $A(2\,;\,1\,;\,-3)$ et $B(0\,;\,2\,;\,4)$.

1. Calculer les coordonnées du point M milieu du segment $[AB]$.
2. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
3. Soit le point $C(1\,;\,-2\,;\,-1)$. Calculer les coordonnées du point D pour que le quadrilatère $ABCD$ soit un parallélogramme.

●○○ Exercice 74.
Tracer un repère $\left(O\ ;\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\right)$ et placer les points suivants :
$A(2\,;\,1\,;\,0)$, $B(0\,;\,2\,;\,10)$, $C(1\,;\,1\,;\,-3)$ et $D(-1\,;\,2\,;\,3)$.

●●○ Exercice 75.
Dans l'espace muni d'un repère $\left(O\ ;\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\right)$, on considère les points $A(1\,;\,0,5\,;\,2)$, $B(0\,;\,2\,;\,0,5)$, $C(3\,;\,2,5\,;\,7)$ et $D(3\,;\,-2,5\,;\,1)$.

1. (a) Les points A, B et C sont-ils alignés ?
   (b) Le point A appartient-il à la droite (BD) ?
2. On considère les points $E(1\,;\,0,5\,;\,4)$ et $F(-3\,;\,-2\,;\,1)$.
   (a) Les points A, B, D et E sont-ils coplanaires ?

(b) Le point F appartient-il au plan (ABD) ?

●●○ Exercice 76.

Dans l'espace muni d'un repère $\left(O\ ;\ \overrightarrow{i},\ \overrightarrow{j},\ \overrightarrow{k}\right)$, on considère les vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\4\\-3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}2\\5\\-3\end{pmatrix}$.

1. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{u}+3\overrightarrow{v}-2\overrightarrow{w}$.
2. Les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont-ils coplanaires ?

●○○ Exercice 77.

Dans l'espace muni d'un repère $\left(O\ ;\ \overrightarrow{i},\ \overrightarrow{j},\ \overrightarrow{k}\right)$, on considère les vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}0\\-6\\3\end{pmatrix}$.

1. Justifier que le vecteur $\overrightarrow{w}$ n'est pas colinéaire au vecteur $\overrightarrow{v}-\overrightarrow{u}$.
2. Calculer les coordonnées du vecteur $3\overrightarrow{u}-3\overrightarrow{v}+2\overrightarrow{w}$.
3. Que peut-on en déduire pour les trois vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$?
4. Donner les coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{t}$ non colinéaire à $\overrightarrow{v}$ et coplanaire à $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{w}$.
5. Déterminer les coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{h}$ de cote nulle et coplanaire à $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

●●○ Exercice 78.

Soient A, B et C trois points de l'espace non alignés. On considère les points M et N tels que $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BN}=3\overrightarrow{AB}$.

1. Faire une conjecture. Quelle conjecture peut-on émettre pour les points M, N et C ?
2. Démontrer cette conjecture.

●●○ Exercice 79.

$ABCDEFGH$ est un cube. Soit U et V les points tels que $\overrightarrow{UF}=\frac{1}{4}\overrightarrow{GF}$ et $\overrightarrow{BV}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BA}$.

Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{FB}$, $\overrightarrow{UV}$ et $\overrightarrow{GA}$ sont coplanaires.

CHAPITRE

6

PRODUIT SCALAIRE DANS L'ESPACE

6.1 Différentes expressions du produit scalaire

6.1.1 Et dans l'espace ?

▶ **Note 1.6.**
Le *produit scalaire* dans le plan vu en classe de 1re se généralise à *l'espace*.

Définitions 1.6.
Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le *nombre réel*, noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ qui peut s'exprimer par :

- *la norme* : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(||\vec{u} + \vec{u}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2\right)$
- *le projeté orthogonal* : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \pm AB \times AH$ avec $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ où H désigne le projeté orthogonal de C sur la droite (AB)
- *le cosinus* : $\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \cos(\vec{u}\,;\,\vec{v})$
- *les coordonnées* : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = xx' + yy' + zz'$

  avec $\vec{u}(x\,;\,y\,;\,z)$ et $\vec{v}(x'\,;\,y'\,;\,z')$

Application 1.6. Soient $\vec{u}(2\,;\,\sqrt{3}\,;\,1)$ et $\vec{v}(3\,;\,\sqrt{3}\,;\,2)$.
Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$, puis déterminer une mesure de l'angle $(\vec{u}\,;\,\vec{v})$ au degré près.

6.1.2 Propriétés et orthogonalité de deux vecteurs

Propriétés 1.6.
Le produit scalaire est une forme :

- *symétrique* : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- *Bilinéaire* : $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ et $(a\vec{u}) \cdot (b\vec{v}) = ab \times (\vec{u} \cdot \vec{v})$

Propriétés 2.6. *Colinéarité et orthogonalité de deux vecteurs*

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont *colinéaires* et *de même sens* : $\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}||$
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont *colinéaires* et *de sens contraires* : $\vec{u} \cdot \vec{v} = -||\vec{u}|| \times ||\vec{v}||$
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont *orthogonaux* si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

Application 2.6. Soient les points $A(6\,;\,8\,;\,2)$, $B(4\,;\,9\,;\,1)$ et $C(5\,;\,7\,;\,3)$.
Démontrer que le triangle ABC est rectangle en A.

6.2 Orthogonalité dans l'espace

6.2.1 Droites orthogonales

Définitions 2.6.

Deux droites d_1 et d_2 de vecteurs directeurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont :

- *orthogonales* si et seulement si $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0$
- *perpendiculaires* si et seulement si d_1 et d_2 sont *orthogonales* **et** *sécantes*

ATTENTION ! Dans l'espace, on distingue droites « orthogonales » et droites « perpendiculaires ».

Application 3.6. Soient les points $A(2\,;\,-5\,;\,1)$ et $B(0\,;\,2\,;\,6)$.
Démontrer que la droite d de vecteur directeur $\vec{u}(-4\,;\,1\,;\,-3)$ est orthogonale à la droite (AB).

6.2.2 Droite et plan orthogonaux

Définition 1.6.

Un plan (P) de *vecteurs directeurs* $(\vec{u}_1\,;\,\vec{u}_2)$ est **orthogonale** à une droite d de vecteur directeur $\vec{v}$ si, et seulement si,

$$\vec{u}_1 \cdot \vec{v} = 0 \text{ et } \vec{u}_2 \cdot \vec{v} = 0.$$

Application 4.6. Soient les points $A(2\,;\,0\,;\,2)$, $B(4\,;\,0\,;\,0)$, $C(1\,;\,-2\,;\,1)$, $D(-1\,;\,1\,;\,0)$ et $E(1\,;\,-1\,;\,2)$.
Le plan (ABC) et la droite (DE) sont-ils orthogonaux ?

6.2.3 Plans orthogonaux

Définition 2.6.

Un plan (P) est *orthogonal* à un plan (Q) si, et seulement si, il existe une droite d du plan (Q) *orthogonale* au plan (P).

► **Note 2.6.**
Pour que deux plans (P) et (Q) soient *orthogonaux*, il suffit qu'un vecteur $\vec{v}$ de (Q) soit orthogonal à un couple de vecteurs directeurs $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ de (P).

6.3 Équation cartésienne d'un plan

6.3.1 Vecteur normal

Définition 3.6.

Un vecteur $\vec{n}$ est *normal* à un plan (P) si $\vec{n}$ est *orthogonal* à un couple de vecteurs directeurs $(\vec{u}, \vec{v})$ de (P).

Théorème 1.6.
Deux plans de vecteurs normaux $\overrightarrow{n}_1$ et $\overrightarrow{n}_2$ sont *orthogonaux* si et seulement si :

$$\boxed{\overrightarrow{n}_1 \cdot \overrightarrow{n}_2 = 0}$$

Théorème 2.6.
Le plan (P) passant par le point a et de *vecteur normal* $\overrightarrow{n}$ est l'ensemble des points M tels que :

$$\boxed{\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = 0}$$

Application 5.6. Déterminer une équation cartésienne du plan (P) passant par le point $A(-3\,;\,-1\,;\,4)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n}(5\,;\,-2\,;\,3)$.

6.3.2 Équation cartésienne d'un plan

Théorème 3.6.
Une *équation cartésienne* d'un plan est de la forme :

$$\boxed{ax + by + cz + d = 0 \text{ avec } a,\ b,\ c \text{ non tous nuls}}$$

Le vecteur $\overrightarrow{n}(a\,;\,b\,;\,c)$ est alors un vecteur normal au plan.

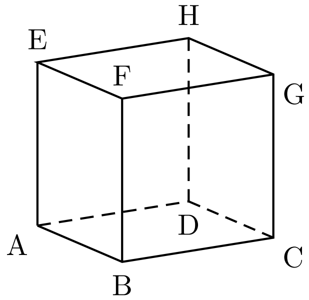
6.3.3 Distance d'un point à un plan

Définition 4.6.
Le projeté orthogonal d'un point A sur une droite d ou un plan (P) est le point d'intersection H, de la droite d ou du plan (P), et de la perpendiculaire, à cette droite ou à ce plan, passant par le point A.

Théorème 4.6. *Distance d'un point à un plan*
On appelle *distance* d'un point M au plan (P), la longueur MH ou H est le projeté orthogonal de M sur le plan (P).
Cette distance est la plus courte distance entre le point M et un point du plan (P).

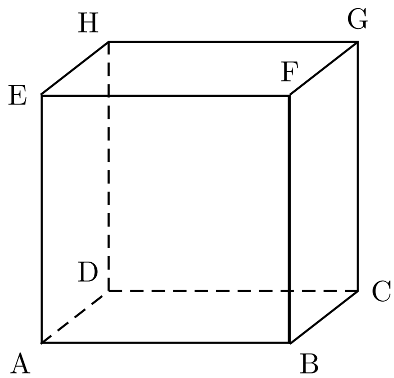
6.4 Les exercices du chapitre

●○○ **Exercice 80.**
On considère un cube ABCDEFGH.



1. Simplifier le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{AE}}$.
2. En déduire que $\overrightarrow{\mathrm{AG}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BD}} = 0$.
3. On admet que $\overrightarrow{\mathrm{AG}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BE}} = 0$.
4. Démontrer que la droite (AG) est orthogonale au plan (BDE).

●●○ **Exercice 81.**
On considère un cube ABCDEFGH de côté a.
Les points I, J, K, L et O sont les milieux respectifs de [BF], [FG], [CD], [BC] et [AG].



1. Déterminer, en fonction de a, les produits scalaires :

   - $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AB}$
   - $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AE}$
   - $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AF}$
   - $\overrightarrow{KC} \cdot \overrightarrow{KB}$
   - $\overrightarrow{DK} \cdot \overrightarrow{BL}$
   - $\overrightarrow{EB} \cdot \overrightarrow{DG}$
   - $\overrightarrow{FG} \cdot \overrightarrow{EG}$
   - $\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HB}$

2. (a) En écrivant $\overrightarrow{BJ}$ sous la forme $\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FJ}$, calculer $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{BJ}$.
   (b) Exprimer en fonction de a, les longueurs BK et BJ.
   (c) En déduire une mesure approchée de l'angle $\widehat{\mathrm{KBJ}}$.

●○○ **Exercice 82.**
Soient les points A(6 ; 8 ; 2), B(4 ; 9 ; 1) et C(5 ; 7 ; 3).

1. Démontrer que le triangle ABC est rectangle en A.
2. Calculer son aire.

3. Déterminer une mesure, au degré près, de l'angle $\widehat{\text{BCA}}$.

●○○ **Exercice 83.**
Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, on considère les points $A(3\,;\,-6\,;\,3)$ et $B(-5\,;\,6\,;\,-1)$ et $(\mathcal{D})$ de représentation paramétrique :

$$(\mathcal{D})\left\{\begin{array}{rcr} x &=& 1-2t \\ y &=& 5-t \\ z &=& -2+t \end{array}\right. \quad (t\in\mathbb{R}).$$

1. Donner une représentation paramétrique de la droite (AB).
2. Les droites (AB) et $(\mathcal{D})$ sont-elles orthogonales ? Perpendiculaires ?

●○○ **Exercice 84.**
Déterminer, dans chaque cas, une équation cartésienne du plan (P) passant par le point A et de vecteur normal $\overrightarrow{n}$:

1. A$(2\ ;\ 0\ ;\ 1)$ et $\overrightarrow{n}(1\ ;\ -1\ ;\ 3)$
2. A$(\sqrt{2}\ ;\ 1\ ;\ 3)$ et $\overrightarrow{n}(2\ ;\ -3\ ;\ 1)$

●○○ **Exercice 85.**
Déterminer, dans chaque cas, une équation cartésienne du plan (P) perpendiculaire en A à (AB) :

1. A$(2\ ;\ 0\ ;\ -1)$ et B$(0\ ;\ 1\ ;\ 3)$
2. A$(-2\ ;\ -1\ ;\ 3)$ et B$(-1\ ;3\ ;\ 2)$

●●○ **Exercice 86.**
On considère le plan (P) d'équation cartésienne $x-3y+2z-5=0$ et le point A$(2\ ;\ 3\ ;\ -1)$.
Est-il vrai que le point H$(3\ ;\ 0\ ;\ 1)$ est le projeté orthogonal de A sur le plan (P) ?

●○○ **Exercice 87.**
Soient les points A$(1\ ;\ -1\ ;\ 3)$, B$(0\ ;\ 3\ ;\ 1)$, C$(2\ ;\ 1\ ;\ 3)$, D$(4\ ;\ -6\ ;\ 2)$ et E$(6\ ;\ -7\ ;\ -1)$

1. Démontrer que les points A, B et C définissent un plan (P) de l'espace de vecteur normal $\overrightarrow{DE}$.
2. En déduire une équation cartésienne de (P).

●●○ **Exercice 88.**
Le plan (P) a pour équation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 1+t-s \\ y &=& -2-t+s, \\ z &=& 2t-s \end{array}\right. \qquad (t,s)\in\mathbb{R}^2$$

1. Déterminer les coordonnées d'un point situé dans le plan (P) et préciser les coordonnées de deux vecteurs directeurs du plan (P).
2. Déterminer une équation cartésienne de (P).

CHAPITRE

7

Logarithme Népérien

7.1 Fonction logarithme népérien

7.1.1 Fonction réciproque de la fonction exponentielle

Définition 1.7.

La fonction *exponentielle* est :

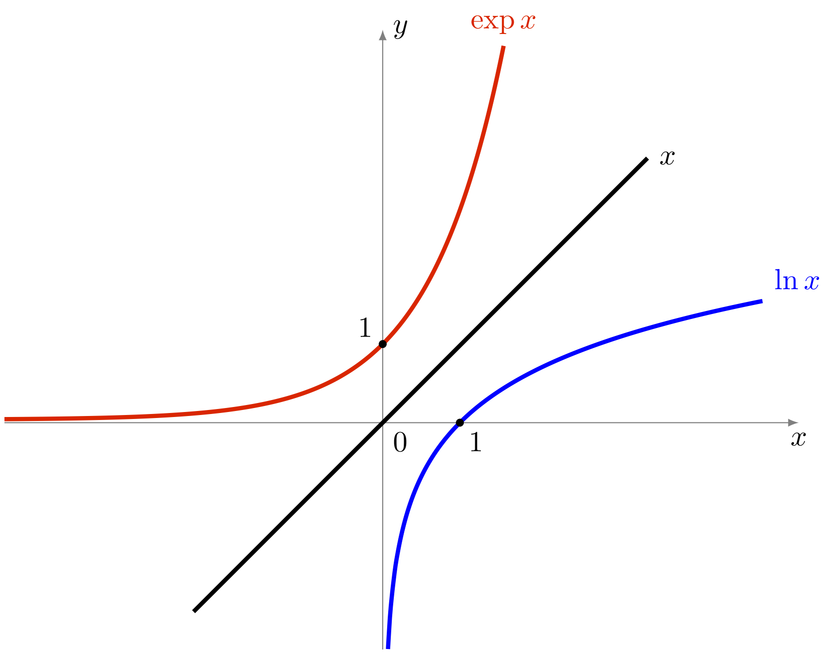
- ________________ sur $\mathbb{R}$.
- ____ sur $\mathbb{R}$.
- $a > 0 \in$ donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires dans le cas des fonctions strictement croissantes, pour tout réel $a > 0$, il existe un unique réel x tel que $\mathrm{e}^x = a$.

Définition 2.7.

La fonction qui, à tout réel $x > 0$, associe le réel $\ln(x)$ s'appelle *fonction logarithme népérien* que l'on note ln : cette fonction est définie sur $]0\,;+\infty[$ et c'est la *fonction réciproque* de la fonction exponentielle.

Propriété 1.7.

Dans un repère orthonormé, les courbes représentatives des fonctions *exponentielle* et *logarithme népérien* sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.



Propriétés 1.7.

- Pour tout $b > 0$ et pour tout réel a, $\mathrm{e}^a = b \Longleftrightarrow$.
- $\ln(1) =$ et $\ln(\mathrm{e}) =$.
- Pour tout réel $a > 0$, $\mathrm{e}^{\ln(a)} =$.
- Pour tout réel a, $\ln(\mathrm{e}^a) =$.

Application 1.7. Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \ln(5x - 2)$
2. $g(x) = \ln(-x^2 - 5x + 6)$

Application 2.7. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\mathrm{e}^x = 3$
2. $\mathrm{e}^{-5x+1} = 4$
3. $\ln(x) = -3$
4. $\ln(-3x + 4) = 0$

7.1.2 Relation fonctionnelle et propriétés algébriques

Propriété 2.7. *Relation fonctionnelle*
Pour tous x et y réels strictement positifs,

$$\boxed{\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y).}$$

Démonstration.

□

Propriété 3.7. *Conséquences*
Pour tous réels x et y strictement positifs :

- $\ln\left(\dfrac{1}{x}\right) =$.
- $\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) =$.
- $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\ln(x^n) =$.
- $\ln(\sqrt{x}) =$.

Démonstration. Prouvons la première égalité.

□

Application 3.7. Démontrer que $\ln(8) - \ln(2) + \ln(4) - \ln(16) = 0$.

7.2 Étude de la fonction ln

7.2.1 Dérivée et variations

Propriétés 2.7. *Dérivées*

- La *fonction logarithme népérien* est *continue* et *dérivable* sur $]0\,;+\infty[$ et pour tout réel $x>0$,

$$\boxed{\ln'(x)=\frac{1}{x}}$$

- Soit u une fonction *dérivable* sur un intervalle I telle que, pour tout $x\in I$, $u(x)>0$.
  La fonction $\ln\circ u\ :\ x\to\ln(u(x))$ est dérivable sur I et :

$$\boxed{(\ln\circ u)'=\frac{u'}{u}}$$

Démonstration.

$\square$

Application 4.7. Calculer la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\ln(5x^2+x+3)$.

Propriété 4.7. *Sens de variation*
La fonction *logarithme népérien* est *strictement croissante* sur $]0\,;+\infty[$.

Conséquences :

Propriétés 3.7.
Pour tous réels a et b strictement positifs, on a :

- $\ln(a) = \ln(b) \Longleftrightarrow$

- $\ln(a) \leqslant \ln(b) \Longleftrightarrow$

  En particulier, on a :

- $\ln(a) \leqslant 0 \Longleftrightarrow$

- $\ln(a) \geqslant 0 \Longleftrightarrow$

Application 5.7. On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 85 \times 0,2^n + 15$.
Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels : $a_n < 15,004$.

7.2.2 Limites

Propriété 5.7.

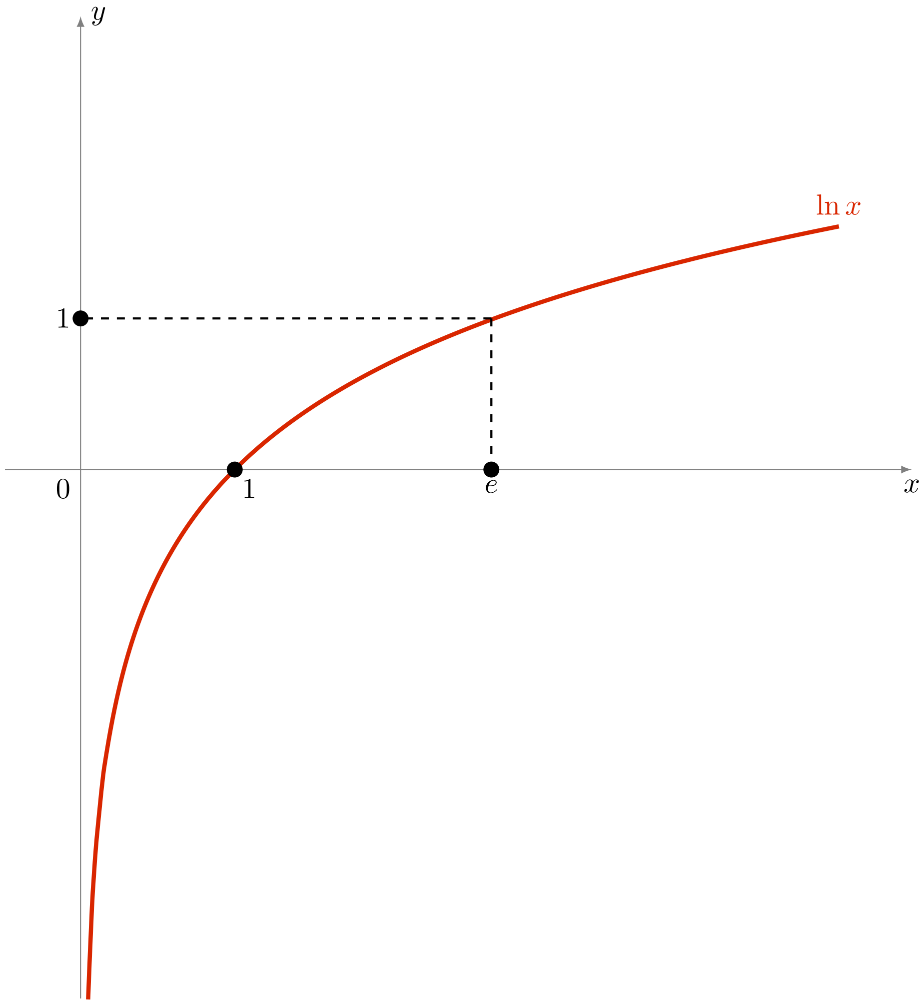
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$

Conséquences.

On peut dresser le tableau de variation de la fonction ln :

x	0	$+\infty$
Variation de ln	$-\infty$	$+\infty$

Courbe représentative de la fonction ln :



Propriété 6.7. *Croissances comparées*

- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0.$
- $\displaystyle\lim_{x\to 0}x\ln(x)=0.$

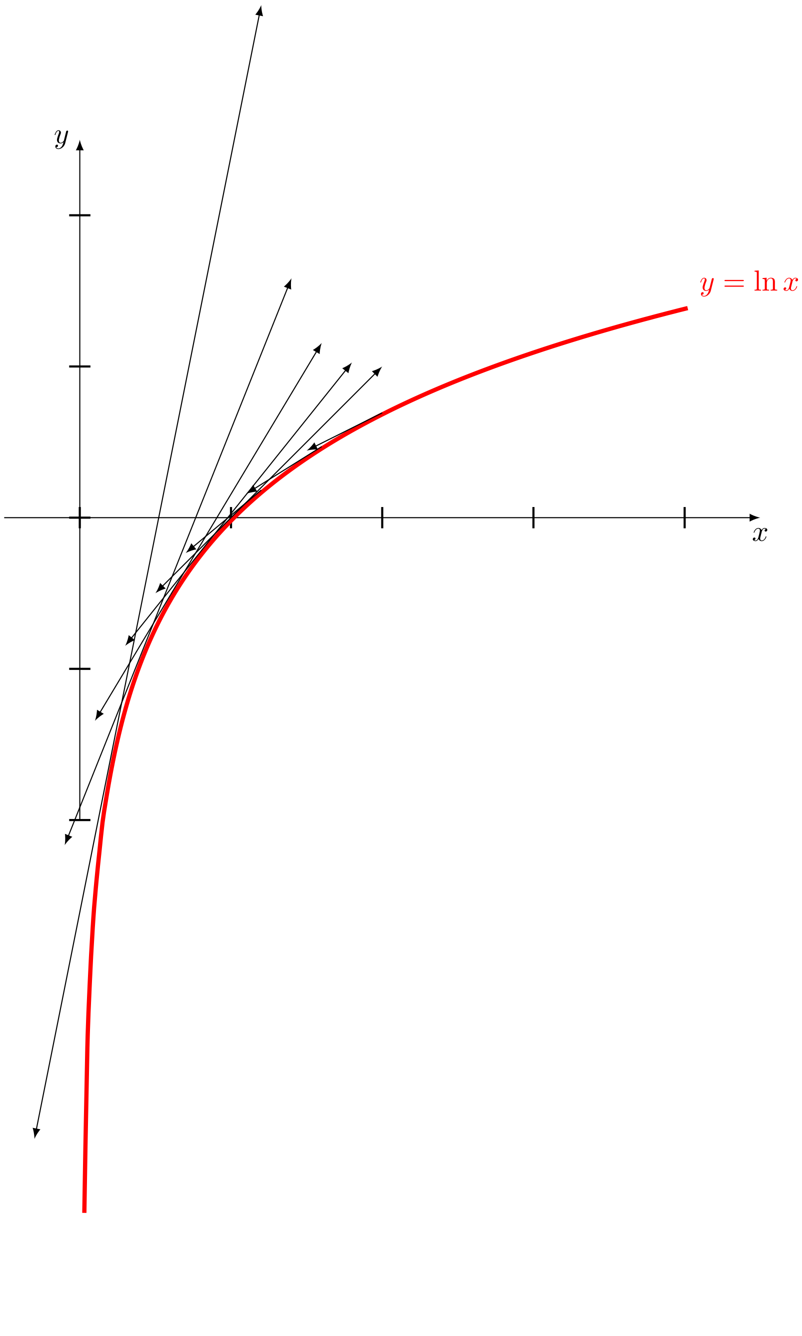
  Pour tout entier naturel $n\geqslant 2$,
- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^n}=0$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0}x^n\ln(x)=0.$

Propriété 7.7. *Concavité*

La fonction *logarithme népérien* est *concave* sur $]0\,;\,+\infty[$: sa courbe représentative est donc toujours située *en dessous* de ses tangentes sur $]0\,;\,+\infty[$.

Démonstration.

□



7.3 Les exercices du chapitre

●○○ Exercice 89.
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $5e^x - 3 = 0$
2. $e^{-x+2} - 1 = 0$
3. $e^{2x} = 4$
4. $(3e^x - 1)(e^x + 6) = 0$.

●○○ Exercice 90.
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\ln(x) - 5 = 0$
2. $3\ln(x) - 1 = 0$
3. $(\ln(x) + 5)(5 - 4\ln(x)) = 0$
4. $(\ln(x))^2 = 4\ln(x)$.

●●○ Exercice 91.
Résoudre en posant $X = \ln x$ ou $X = e^x$:

1. $(\ln x)^2 + \ln x - 2 = 0$
2. $2(\ln x)^2 - \ln x - 15 = 0$
3. $e^{2x} - 5e^x + 4 = 0$

●●○ Exercice 92.
À partir de sa mise en culture, l'évolution d'une population de bactéries est fonction du temps est donnée par $g(t) = 10^6 e^{0,25t}$ où t est exprimé en heures. Calculer :

1. la population initiale à $t = 0$,
2. le temps au bout duquel la population initiale aura triplé.

●●○ Exercice 93.
On note $f(t)$ la concentration plasmatique, exprimée en microgramme par litre (μg.L^{-1}), d'un médicament, au bout de t heures après administration par voie intraveineuse.
Le modèle mathématique est : $f(t) = 20e^{-0,1t}$, avec $t \in [0\ ;\ +\infty[$.
La concentration plasmatique initiale du médicament est donc $f(0) = 20\,\mu$g.L^{-1}.

1. La demi-vie du médicament est la durée (en heure) après laquelle la concentration plasmatique du médicament est égale à la moitié de la concentration initiale.
   Déterminer cette demi-vie, notée $t_{\frac{1}{2}}$.
2. On estime que le médicament est éliminé dès que la concentration plasmatique est inférieure à $0,2\mu$g.L^{-1}. Déterminer le temps à partir duquel le médicament est éliminé. On donnera le résultat arrondi au dixième.

●○○ Exercice 94.
Exprimer en fonction de $\ln 3$:

1. $a = \ln(9)$
2. $b = \ln\left(\frac{1}{3}\right)$
3. $c = \ln\left(3\sqrt{3}\right)$
4. $d = \ln(36) - 2\ln(2)$

●○○ **Exercice 95.**
Simplifier les nombres suivants pour les écrire en fonction de $\ln(2)$ et de $\ln(5)$ uniquement :

1. $a = \ln(10) - \ln\left(\dfrac{1}{4}\right)$
2. $b = \ln(0,05)$
3. $c = \ln\left(\dfrac{\sqrt{5}}{3}\right)$
4. $d = 2\ln(5\mathrm{e}^2) + \ln(4\mathrm{e}^{-1})$

●○○ **Exercice 96.**
Simplifier les expressions suivantes :

1. $a = \ln(\mathrm{e}^4) + 3\ln(\mathrm{e}^{-1})$
2. $b = \mathrm{e}^{2\ln(5)} - \ln\left((\mathrm{e}^5)^2\right)$
3. $c = \ln(\mathrm{e}^{-3}) \times \ln(\mathrm{e}^3)$
4. $d = 20\ln(\sqrt{\mathrm{e}}) - \mathrm{e}^{3\ln(2)}$

●●○ **Exercice 97.**
Soit (u_n) la suite géométrique de raison $q > 0$ et de premier terme $u_0 > 0$. On pose $v_n = \ln(u_n)$.
Démontrer que la suite (v_n) est une suite arithmétique en précisant sa raison et son premier terme.

●○○ **Exercice 98.**
Déterminer la valeur exacte du nombre réel :

$$A = \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln\left(\frac{2}{3}\right) + \ln\left(\frac{3}{4}\right) + \cdots + \ln\left(\frac{2023}{2022}\right).$$

●○○ **Exercice 99.**

1. Démontrer que pour tout réel $x > -1$ on a :
$$2\ln(x+1) = \ln(x^2 + 2x + 1)$$
2. Démontrer que pour tout réel x, on a :
$$\ln(1 + \mathrm{e}^{-2x}) = -2x + \ln(1 + \mathrm{e}^{2x})$$

●○○ **Exercice 100.**
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $\ln x < 10$
2. $2\ln x + 200 > 0$
3. $1 - 2\ln(x) \geqslant 0$
4. $2\ln(x) - 6\ln(3) < 0$

●○○ **Exercice 101.**
On considère la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = 1 - \ln(x).$$

1. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la courbe représentative de la fonction f et l'axe des abscisses.
2. Étudier la position relative de la courbe représentative de la fonction f et l'axe des abscisses.

●○○ **Exercice 102.**
Déterminer le plus petit entier naturel n tel que :

1. $0,99^n \leqslant \dfrac{1}{2}$
2. $1,02^n > 2$

●○○ **Exercice 103.**
Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes définies par :

1. $f_1(x) = \ln(3x - 7)$
2. $f_2(x) = \ln(-x^2 + 4x - 3)$
3. $f_3(x) = \ln(x) - 3\ln(2 - x)$

●●○ **Exercice 104.**
Résoudre les équations suivantes après avoir déterminé que quel ensemble on peut les résoudre :

1. $\ln(x^2) = \ln(x) + \ln(6)$
2. $\ln(x + 1) + \ln(x - 4) = \ln(5)$
3. $2\ln(x) = \ln(5x - 3)$.

●●○ **Exercice 105.**
Résoudre les équations suivantes après avoir déterminé que quel ensemble on peut les résoudre :

1. $\ln\left[(x - 3)(2x + 1)\right] = \ln(4)$
2. $\ln(x - 3) + \ln(2x + 1) = 2\ln(2)$

●●○ **Exercice 106.**
Résoudre les inéquations suivantes après avoir déterminé que quel ensemble on peut les résoudre :

1. $\ln(3x - 4) < 0$
2. $\ln(-x + 3) \geqslant 1$
3. $\ln(1 - x) \leqslant \ln(x)$
4. $\ln(3 + 2x) < \ln(x - 3)$

●○○ **Exercice 107.**
Déterminer les limites des fonctions suivantes aux bornes de leur ensemble de définition D :

1. $f_1(x) = \ln(2x - 6)$ et $D =]3\,;\,+\infty[$
2. $f_2(x) = \ln(\mathrm{e}^x + 3)$ sur $D = \mathbb{R}$.
3. $f_2(x) = \ln(1 + \mathrm{e}^{-2x})$ sur $D = \mathbb{R}$.

●●○ **Exercice 108.**
On considère la fonction f définie sur $\left]\dfrac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$ par :

$$f(x) = \ln(2x - 1) - x + 1.$$

1. Calculer la limite de f en $\dfrac{1}{2}$ et interpréter graphiquement le résultat obtenu.
2. (a) Démontrer que pour tout réel $x > \dfrac{1}{2}$:

$$f(x) = \ln(x) - x + 1 + \ln\left(2 - \frac{1}{x}\right).$$

   (b) En déduire la limite de f en $+\infty$.

3. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions distinctes α et β dans l'intervalle $\left]\frac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$ avec $\alpha < \beta$.
4. Donner la valeur exacte de α et une valeur approchée de β au dixième près.

●●○ Exercice 109.
Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = x^2 \ln x.$$

1. Démontrer qu'il existe une unique tangente à $\mathscr{C}_f$ passant par O.
2. Préciser l'équation de cette tangente.

●●● Exercice 110.

Partie A

Soit u la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$u(x) = x^2 - 2 + \ln x.$$

1. Étudier les variations de u sur $]0\,;\,+\infty[$ et préciser ses limites en 0 et en $+\infty$.
2. (a) Montrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une solution unique sur $]0\,;\,+\infty[$.
   On note α cette solution.
   (b) À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.
3. Déterminer le signe de $u(x)$ suivant les valeurs de x.
4. Montrer l'égalité : $\ln\alpha = 2 - \alpha^2$.

Partie B

On considère la fonction f définie et dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = x^2 + (2 - \ln x)^2.$$

On note f' la fonction dérivée de f sur $]0\,;\,+\infty[$.

1. Exprimer, pour tout x de $]0\,;\,+\infty[$, $f'(x)$ en fonction de $u(x)$.
2. En déduire les variations de f sur $]0\,;\,+\infty[$.

●●● Exercice 111.
Soit la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{2x+1}.$$

1. Calculer la limite de f en 0.
2. (a) Vérifier que pour tout réel $x > 0$:

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x}\left(\frac{1}{2+\frac{1}{x}}\right).$$

   (b) En déduire la limite de f en $+\infty$.
   (c) Interpréter graphiquement les résultats précédents.

●●● Exercice 112.

Soit n un entier naturel non nul. On rappelle le résultat : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^n} = 0$.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = x - \frac{\ln x}{x^2}.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

1. Soit u la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $u(x) = x^3 - 1 + 2\ln x$.
   (a) Étudier le sens de variation de la fonction u sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
   (b) Calculer $u(1)$ et en déduire le signe de $u(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
2. (a) Calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
   (b) Déterminer la fonction dérivée de f et construire le tableau de variations de la fonction f.
3. Soit la droite (Δ) d'équation $y = x$.
   Étudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à (Δ).
4. Pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, on note respectivement M_k et N_k les points d'abscisse k de $\mathscr{C}$ et (Δ).
   (a) Déterminer la limite de M_kN_k lorsque k tend vers $+\infty$.
   (b) Écrire un algorithme en langage naturel permettant de déterminer le plus petit entier k_0 supérieur ou égal à 2 tel que la distance M_kN_k soit inférieure ou égale à 10^{-2}.

●○○ Exercice 113.

On considère la fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = 3x - 3x\ln(x).$$

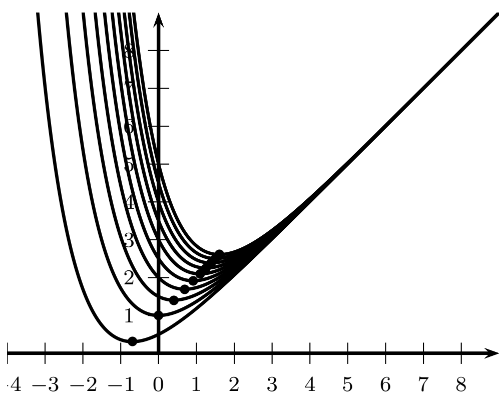
On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé et $\mathscr{T}$ la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $a > 0$.
Quelle est la position relative de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{T}$?

●●● Exercice 114.

Soit k un réel strictement positif. On considère les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_k(x) = x + k\mathrm{e}^{-x}.$$

On note $\mathscr{C}_k$ la courbe représentative de la fonction f_k dans un plan muni d'un repère orthonormé.
On a représenté ci-dessous quelques courbes $\mathscr{C}_k$ pour différentes valeurs de k.



Pour tout réel k strictement positif, la fonction f_k admet un minimum sur $\mathbb{R}$. La valeur en laquelle ce minimum est atteint est l'abscisse du point noté A_k de la courbe $\mathscr{C}_k$. Il semblerait que, pour tout réel k strictement positif, les points A_k soient alignés.
Est-ce le cas ?

●●● Exercice 115.
Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x}.$$

1. Démontrer tous les éléments du tableau : limites, extremum, signe de la dérivée.

x	0		e		$+\infty$
signe de $f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
Variation de f	‖ $-\infty$	↗	$\dfrac{1}{\mathrm{e}}$	↘	0

2. Démontrer que, pour $n \geqslant 3$, l'équation $f(x) = \dfrac{1}{n}$ possède une unique solution sur $[1\,;\,\mathrm{e}]$ notée α_n.
3. (a) En utilisant l'égalité, $n \geqslant 3$,
   $f\left(\alpha_n\right) = \dfrac{1}{n}$, comparer, pour tout entier $n \geqslant 3$, $f\left(\alpha_n\right)$ et $f\left(\alpha_{n+1}\right)$.
   (b) Démontrer que la suite $\left(\alpha_n\right)$ est décroissante.
   (c) La suite $\left(\alpha_n\right)$ est-elle convergente ? Justifier.

CHAPITRE

8 Primitives, équations différentielles

8.1 Équation différentielle $y' = f$ et primitive

8.1.1 Définition de l'équation différentielle $y' = f$

Définitions.

Soit f une fonction *continue* sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

- On dit qu'une fonction F est *solution* de l'équation différentielle $y' = f$ sur I lorsque F est *dérivable* sur I et que $F' = f$.
- *Résoudre* sur I l'équation différentielle $y' = f$, c'est trouver *toutes* les fonctions F dérivables sur I telle que $F' = f$.

Exemple 1.8.

Soit (E) l'équation différentielle $y' = x$.

La fonction F dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par $F(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + 4$ est une solution de (E), en effet pour tout réel x on a $F'(x) =$ ______________.

8.1.2 Primitives d'une fonction

Définition 1.8.

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.

On appelle *primitive* de f sur I toute fonction F dérivable sur I telle que $F' = f$.

Exemple 2.8.

La fonction $F : x \longmapsto \mathrm{e}^x + x^2 + x + 5$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \longmapsto \mathrm{e}^x + 2x + 1$.

Application 1.8. Soit $(E) : y' = x\mathrm{e}^x$ et $f : x \longmapsto (x-1)\mathrm{e}^x$.

Vérifier que f est solution de (E).

Propriété 1.8. *Admise*

Toute fonction *continue* sur un intervalle I admet *des* primitives sur I.

Propriété 2.8.
Soient f une fonction *continue* sur un intervalle I et G une *primitive* de f sur I.
Les primitives de f sur I, c'est-à-dire, les solutions de l'équation différentielle $y' = f$, sont les fonctions F définies sur I par $f(x) = G(x) + C$, où C est une constante réelle.

Propriété 3.8.
Soit f une fonction *continue* sur un intervalle I. Pour tout réel $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$, il *existe une unique* primitive F de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$.
Autrement dit, l'équation différentielle $y' = f$ admet une unique solution F telle que $F(x_0) = y_0$.

8.2 Opérations sur les primitives

► **Note 1.8.**
La méthode de recherche d'une primitive vient la bonne connaissance des formules de dérivation, puisqu'il s'agit de faire l'opération contraire.
Les seuls cas « évidents » de formules sont les sommes et les produits par une constante, et par suite les fonctions polynomiales.

8.2.1 Primitives des fonctions de référence

Fonction $f\ :\ x \longmapsto \cdots$	Une primitive $F :\ x \longmapsto \cdots$	Intervalle I
a (constante)		$\mathbb{R}$
x		$\mathbb{R}$
Plus généralement : x^n où $n \in \mathbb{N}$		$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x^2}$		$]-\infty\,;\,0[$ ou $]0\,;\,+\infty[$
Plus généralement : $\dfrac{1}{x^n}$ où $n \in \mathbb{N}$ et $n \geqslant 2$		$]-\infty\,;\,0[$ ou $]0\,;\,+\infty[$
$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$		$]0\,;\,+\infty[$
$\dfrac{1}{x}$		$]0\,;\,+\infty[$
$f(x) = \mathrm{e}^x$		$\mathbb{R}$
$f(x) = \mathrm{e}^{-x}$		$\mathbb{R}$
$f(x) = \mathrm{e}^{ax+b}$ où $a \neq 0$		$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin(x)$		$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos(x)$		$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin(ax+b)$ où $a \neq 0$		$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos(ax+b)$ où $a \neq 0$		$\mathbb{R}$

8.2.2 Primitives et opérations sur les fonctions

Propriété 4.8.
Soient f et g deux fonctions admettant respectivement les fonctions F et G comme primitives sur un intervalle I.

- $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur I.
- Pour tout réel k, kF est une primitive de kf.

Application 2.8. Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle I :

1. $f(x) = x^4 - 2x^2 - 2$ sur $I = \mathbb{R}$.

2. $f(x) = -\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}$ sur $I =]0\,;\,+\infty[$.

8.2.3 Primitives et composition

Fonction de la forme	Une primitive F :	Conditions d'existence
$u'\mathrm{e}^u$	e^u	
$u' \times u^n$	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$	Si $n < -1$, $u(x) \neq 0$
$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\sqrt{u}$	$u(x) > 0$ pour tout x de I
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln\|u\|$	$u(x) \neq 0$ pour tout x de I
$(v' \circ u) \times u'$	$v \circ u$	

Application 3.8. Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle I :

1. $f_1(x) = 2x(x^2 + 1)^4$ et $I = \mathbb{R}$.

2. $f_2(x) = \dfrac{4x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ et $I = \mathbb{R}$.

8.3 Équations différentielles du premier ordre

8.3.1 Solution d'une équation différentielle

Définition 2.8.

Une *équation différentielle du premier ordre* est une égalité reliant une fonction dérivable et sa dérivée et une *solution d'une équation différentielle* est une fonction qui vérifie cette égalité.

Exemple 3.8.

On considère l'équation différentielle $y' = 3y$. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{3x}$ est *une* solution de cette équation différentielle. En effet, $f'(x) = 3\mathrm{e}^{3x} = 3f(x)$.

8.3.2 Résolution de l'équation différentielle $y' = ay$

Propriété 5.8.
Soit a un nombre réel non nul.
Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = ay$ sont les fonctions $x \longmapsto C\mathrm{e}^{ax}$, où $C \in \mathbb{R}$.

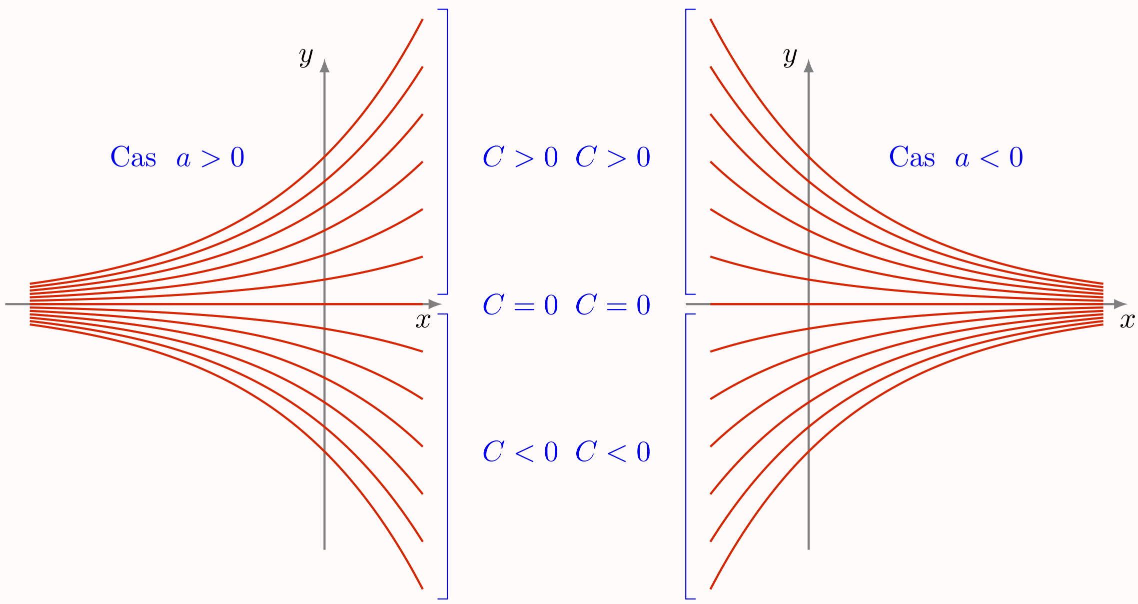
Démonstration.

- Soit $C \in \mathbb{R}$. La fonction f_C, définie sur $\mathbb{R}$ par $f_C(x) = C\mathrm{e}^{ax}$, est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x, $f'_C(x) = Ca\mathrm{e}^{ax} = af_C(x)$ ce qui prouve que f_C est donc une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle.
- Prouvons l'unicité des fonctions f_C. Soit g une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ solution de (E). On note h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = g(x)\mathrm{e}^{-ax}$.
  h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $h'(x) = \mathrm{e}^{-ax}(g'(x) - ag(x))$. Or g est solution de (E) donc $g'(x) = ag(x)$ soit $g'(x) - ag(x) = 0$ ce qui induit que $h'(x) = 0$ et par suite que h est constante. Pour tout réel x on a donc $h(x) = C$ soit $g(x)\mathrm{e}^{-ax} = C$ d'où $g(x) = C\mathrm{e}^{ax}$.

□

▶ Note 2.8.

- Soit a un réel non nul fixé.
  Les courbes de solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = ay$ ont les allures suivantes :



- Si les fonctions f et g sont solutions de l'équation $y' = ay$, alors les fonctions $f + g$ et kf (où k est un réel) sont également solutions de cette équation.

8.3.3 Résolution de l'équation différentielle $y' = ay + b$

Propriété 6.8.
Soient a et b deux réels non nuls.
On considère l'équation différentielle $(E)\ :\ y' = ay + b$.

- (E) admet une unique solution *particulière constante*, qui est la fonction $x \longmapsto -\dfrac{b}{a}$.
- Les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E) sont les fonctions $x \longmapsto C\mathrm{e}^{ax} - \dfrac{b}{a}$ où C est une constante réelle.
- Pour tous réels x_0 et y_0, l'équation (E) admet une unique solution g vérifiant la condition initiale $g(x_0) = y_0$.

Démonstration.

- Montrer que les fonction $x \longmapsto C\mathrm{e}^{ax} - \dfrac{b}{a}$ sont solutions sur $\mathbb{R}$ de (E).
- Réciproquement : soit f une solution de (E) sur $\mathbb{R}$. On pose $g(x) = -\dfrac{b}{a}$.
  Vérifier que g est solution de (E). Justifier que la fonction $f - g$ est dérivable et que $f - g$ est solution de $(E)'\ :\ y' = ay$. En déduire une expression de $f - g$ puis de f.

$\square$

Application 4.8.

1. Résoudre l'équation différentielle $y' = 5y$.
2. Résoudre l'équation différentielle $y' = 6y+1$ puis en déduire l'unique solution h de cette équation vérifiant $h(0) = 4$.

8.3.4 Équation différentielle $y' = ay + f$

Propriété 7.8.
Soient a un nombre réel et f une fonction définie sur un intervalle I.
On considère l'équation différentielle $(E)\ :\ y' = ay + f$ et g une solution particulière de (E) sur I.
Les solutions de (E) sur I sont les fonctions $x \longmapsto C\mathrm{e}^{ax} + g(x)$ où C est une constante réelle.

8.4 Les exercices du chapitre

○○○ **Exercice 116.**
Dans chacun des cas suivants, vérifier que la fonction f est une solution de l'équation différentielle (E) sur $\mathbb{R}$:

1. $f : x \mapsto 3x^2 - 5x + 9$; $(E) : y' = 6x - 5$.
2. $f : x \mapsto 1 - \mathrm{e}^{-2x+1}$; $(E) : y' = 2\mathrm{e}^{-2x+1}$.

●○○ **Exercice 117.**
La fonction g, définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}$ est solution de l'équation différentielle $y' = f$.

1. Déterminer la fonction f.
2. Écrire toutes les primitives de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
3. En déduire la fonction h telle que $h' = f$ et $h(0) = 0$.

●○○ **Exercice 118.**
Un mobile subit un mouvement rectiligne uniformément accéléré d'accélération $a = 1{,}5$ m.s^{-2}. La vitesse du mobile au temps $t \geqslant 0$ (t en secondes), est $v(t)$, en m.s^{-1}, et sa position est donnée par $x(t)$, en mètres, avec $x(0) = 0$.

1. Sachant que la vitesse initiale du mobile est 2 m.s^{-1}, exprimer $v(t)$ en fonction de t.
2. En déduire $x(t)$ en fonction de t.

○○○ **Exercice 119.**
Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$:

1. $f(x) = x^2 - 3x + 7$
2. $f(x) = x^6 + 3x^5 - x^4$
3. $f(x) = 0{,}1x^4 + \dfrac{x^2}{10} - \dfrac{x}{100}$

●○○ **Exercice 120.**
Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive de la fonction f sur $]0\,;+\infty[$:

1. $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^3}$
2. $f(x) = \dfrac{1}{2x} + \dfrac{x}{2}$
3. $f(x) = \dfrac{5}{x^4} - \dfrac{3x^2}{2} + \dfrac{1}{7}$

●○○ **Exercice 121.**
On considère les fonctions f et F définies sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = (-x^2 + 2x + 1)\mathrm{e}^{-x}$ et $F(x) = (x^2 - 1)\mathrm{e}^{-x}$.

1. Vérifier que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire la primitive G de f telle que $G(0) = 5$.

●●○ **Exercice 122.**
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\mathrm{e}^x$.

1. Déterminer les valeurs de a et b pour que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = (ax + b)\mathrm{e}^x$ soit une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire l'expression de la primitive de f s'annulant en 1.

●○○ **Exercice 123.**
Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

1. $y' = 3y$
2. $y' + 2y = 0$
3. $2y' = y$
4. $\dfrac{y}{5} = y'$

●○○ **Exercice 124.**

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) :
$$y' = 2\,023y.$$
2. Déterminer la solution de f de l'équation (E) telle que $f(0) = 2024$.

●○○ **Exercice 125.**
On considère l'équation différentielle :
$(E)\ :\ y' = -\dfrac{1}{2}y + 3.$

1. Donner la seule solution constante sur $\mathbb{R}$ de (E).
2. En déduire toutes les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

●○○ **Exercice 126.**
Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

1. $y' = -2y + 5$
2. $y' = y - 3$
3. $2y' + 7y = 6$
4. $3y' - 6y = 1$

●○○ **Exercice 127.**
Dans chacun des cas suivants, déterminer la solution f sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E) vérifiant la condition initiale donnée :

1. $y' = 5y - 2$ et $f(0) = -1$.
2. $y' = -5y + 4$ et $f(1) = 0$.
3. $y' = -1$ et $f(2) = 1$.

●●○ **Exercice 128.**
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par
$f(x) = x\mathrm{e}^x$ et l'équation différentielle : $(E)\ :\ y' = y + \mathrm{e}^x$.

1. Vérifier que la fonction f est une solution particulière de (E).
2. En déduire la seule solution g de l'équation (E) telle que $g(2) = 5$.

●●● **Exercice 129.**
On cherche à modéliser l'évolution du nombre, exprimé en millions, de foyers français possédant un téléviseur à écran plat, en fonction de l'année.

Soit $g(x)$ le nombre, exprimé en millions, de tels foyers l'année x.
On pose $x = 0$ en 2005, $g(0) = 1$ et g est une solution, qui ne s'annule pas sur $[0\ ;\ +\infty[$, de l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}) \quad ; \quad y' = \frac{1}{20}y(10-y).$$

1. On considère une fonction y qui ne s'annule pas sur $[0\ ;\ +\infty[$ et on pose $z = \dfrac{1}{y}$.
   (a) Montrer que y est solution de (E) si et seulement si z est solution de l'équation différentielle :
   $$(\mathrm{E}_1) \quad : \quad z' = -\frac{1}{2}z + \frac{1}{20}.$$
   (b) Résoudre l'équation (E_1) et en déduire les solutions de l'équation (E).
2. Montrer que g est définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :
   $$g(x) = \frac{10}{9\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}+1}.$$
3. Étudier les variations de g sur $[0\ ;\ +\infty[$.
4. Calculer la limite de g en $+\infty$ et interpréter le résultat.
5. En quelle année le nombre de foyers possédant un tel équipement dépassera-t-il 5 millions ?

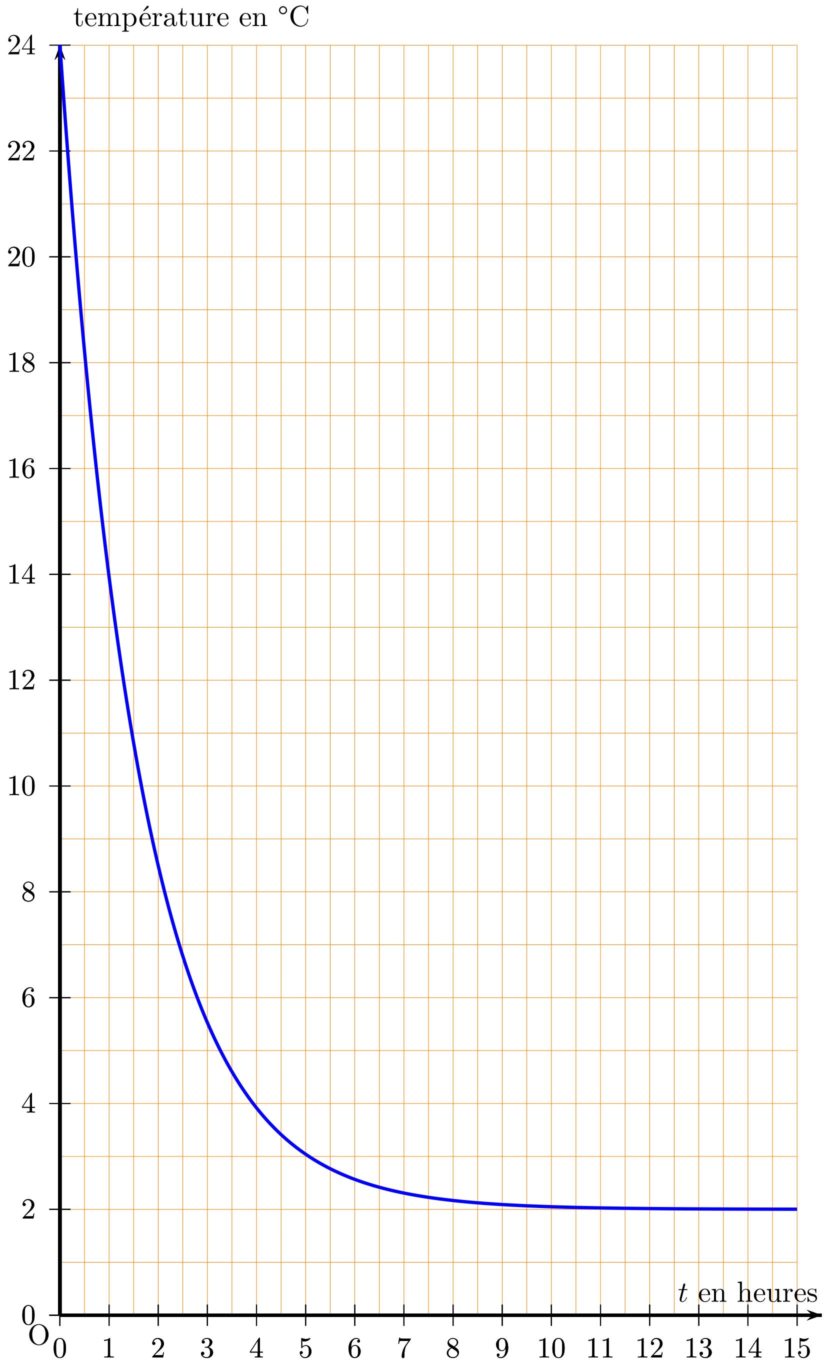
●●● **Exercice 130.**
La conservation d'une variété de fruits nécessite de les placer, après la récolte et avant le stockage, dans un tunnel refroidissant à air pulsé.
On s'intéresse à l'évolution de la température du fruit en fonction du temps.
À l'instant $t = 0$, les fruits, dont la température est de 24 °C, sont placés dans le tunnel où l'air pulsé est à 2 °C.
On considère la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ qui à tout instant t, exprimé en heures, associe la température d'un fruit, exprimée en °C.

On admet que f est la solution de l'équation différentielle : $y' + 0,61y = 1,22$ avec $f(0) = 24$.

1. Résoudre l'équation différentielle
   $y' + 0,61y = 1,22$ où y est une fonction dérivable sur $[0\,;+\infty[$.
2. En déduire que pour tout t de $[0\,;+\infty[$, $f(t) = 2 + 22\mathrm{e}^{-0,61t}$.
   La courbe représentative de f, notée $\mathcal{C}$, est donnée ci-contre.
3. Calculer la limite de $f(t)$ quand t tend vers $+\infty$. Interpréter graphiquement ce résultat pour la courbe représentative de f.
4. Par expérience, on observe que la température d'un fruit :
   — décroît ;
   — tend à se stabiliser à la température du tunnel où l'air pulsé est à 2 °C.

   La fonction f fournit-elle un modèle en accord avec ces observations ?
5. Déterminer graphiquement en faisant apparaître les traits de construction utiles :
   (a) la température d'un fruit au bout de 4 heures ;
   (b) au bout de combien de temps la température d'un fruit aura diminué de moitié par rapport à la température initiale.

6. On considère que la vitesse de refroidissement est satisfaisante lorsque la température d'un fruit baisse de $\frac{7}{8}$ en moins de 6 heures. Peut-on considérer que la vitesse de refroidissement est satisfaisante ?



CHAPITRE

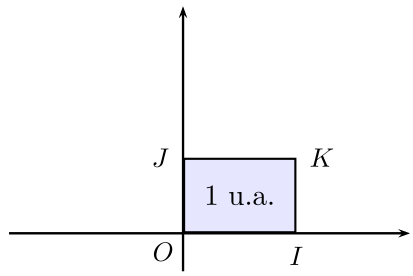
9

Calcul intégral

9.1 Intégrale d'une fonction positive

Définition 1.9.

Soit $\mathscr{P}$ un plan muni d'un repère orthogonal .
Soient I, J et K les points tels que $\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{\imath}$, $\overrightarrow{OJ} = \overrightarrow{\jmath}$ et $\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{\imath} + \overrightarrow{\jmath}$.
On appelle unité d'aire (notée u.a.) l'unité de mesure des aires telle que Aire$(OIKJ) = 1$ u.a.

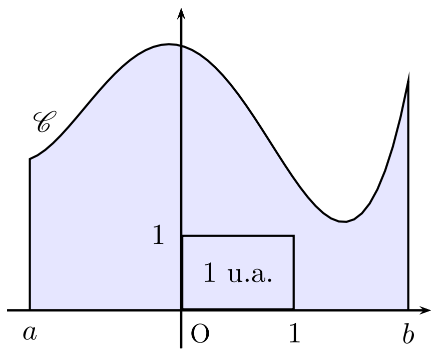


Exemple 1.9.

Si $OI = 2$ cm et $OJ = 5$ cm alors 1u.a $= 2 \times 5 = 10$ cm^2.

Définition 2.9.

Soit f une fonction *continue et positive* sur un intervalle $[a\,;\,b]$.
L'intégrale de f sur $[a\,;\,b]$, notée $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$, est l'aire du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe représentative de f et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.
Les nombres a et b sont les *bornes* de l'intégrale.



▶ **Note 1.9.**
- le symbole $\int$ représente une somme (il ressemble à un S), $f(x)d(x)$ représente l'aire d'un rectangle de largeur (très petite) dx et de hauteur $f(x)$.
- La variable x est muette, c'est à dire que l'on peut noter aussi :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \dots$$

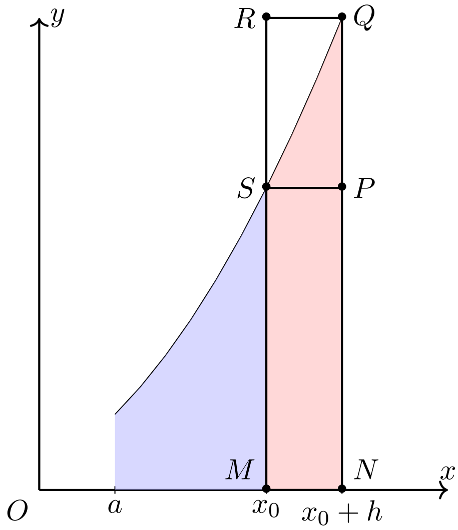
autrement dit, le nombre ne dépend pas de x, mais uniquement de f, a et b.

Application 1.9. Soit $f : x \longmapsto x+1$. Calculer $\int_{-1}^{5} f(x)dx$, autrement dit l'aire située entre l'axe des abscisses, la courbe représentative de f et les droites d'équation $x=-1$ et $x=5$.

9.1.1 Théorème fondamental

Théorème 1.9.
Soit f une fonction *continue* et *positive* sur un intervalle $[a\,;\,b]$.
On définit, pour tout $x \in [a\,;\,b]$, $F(x) = \int_a^x f(t)dt$.
La fonction F est la primitive de f qui s'annule en a.

Démonstration.



On ne fait la démonstration que dans le cas où la fonction est *strictement croissante*.
On a donc un cas similaire à celui représenté ci-contre.
Soit $x_0 \in [a;b]$ et $h>0$ tel que $x_0+h \in [a;b]$. On a :

$$F(x_0) = \int_a^{x_0} f(t)dt \quad \text{et} \quad F(x_0+h) = \int_a^{x_0+h} f(t)dt$$

Puisque f est positive,
la différence $F(x_0+h)-F(x_0)$ est l'aire coloriée en rouge sur la figure.
Cette aire est comprise entre l'aire du rectangle $MNPS$ qui vaut $hf(x)$ et celle de $MNQR$ qui vaut $hf(x+h)$.

Comme f est *croissante*, on a :

$$hf(x_0) \leqslant F(x_0+h)-F(x_0) \leqslant hf(x_0+h)$$

Puis, comme $h>0$,

$$f(x_0) \leqslant \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} \leqslant f(x_0+h)$$

Comme f est continue sur $[a;b]$, $\lim\limits_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$.
Par suite, d'après le théorème d'encadrement des limites :

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} = f(x_0)$$

On peut tenir le même type de raisonnement avec $h<0$.
Finalement, F est dérivable en x_0 et $F'(x_0)=f(x_0)$, cela quelque soit $x_0 \in [a\,;\,b]$.
Donc F est dérivable sur $[a\,;\,b]$ et $F'=f$.. □

Théorème 2.9. *Corollaire*
Soit f une fonction *continue et positive* sur $[a\,;\,b]$ et soit F une primitive de f sur $[a\,;\,b]$.
Alors :

$$\boxed{\int_a^b f(t)\,dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)}$$

Application 2.9. Soit la fonction f définie sur $[-4\,;\,1]$ par $f(x) = -x^2 - 3x + 4$.

1. Démontrer que f est positive sur $[-4\,;\,1]$.
2. Calculer l'aire sous la courbe représentative de la fonction f entre -4 et 1 en unité d'aire puis en cm^2 si on se place dans un repère orthonormé d'unité $0,5$ cm.

9.2 Intégrale d'une fonction continue

9.2.1 Fonction de signe quelconque

Définition 3.9.
Soient f une fonction *continue* sur un intervalle I et a et b deux réels de I et F une primitive de f sur I.
On définit l'*intégrale de f de a à b* par :

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= [F(x)]_a^b \\ &= F(b) - F(a)\end{aligned}$$

▶ **Note 2.9.**
Le réel $F(b) - F(a)$ ne *dépend pas* de la primitive choisie pour f.
En effet, si G est une autre primitive de f alors $G = F + k$ avec k réel donc :

$$\begin{aligned}G(b) - G(a) &= F(b) + k - (F(a) + k) \\ &= F(b) - F(a)\end{aligned}$$

9.2.2 Propriétés des intégrales

Propriétés 1.9.
Soient f et g deux fonctions *continues* sur un intervalle I.
On considère trois réels a, b et c appartenant à I et λ un réel.

- $\displaystyle\int_a^a f(x)dx = 0$ et $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.
- *Relation de Chasles* : $\displaystyle\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.
- *Linéarité de l'intégrale* : $\displaystyle\int_a^b \lambda f(x) + g(x)dx = \lambda\int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.

Application 3.9. On souhaite calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\mathrm{e}^x + 2}\,dx$.

1. On pose $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 2}\,dx$.
   Calculer J.
2. Calculer $2I + J$.
3. En déduire la valeur de I.

Propriétés 2.9. *Intégrales et inégalités*
Soient deux réels a et b tels que $a \leqslant b$ et f et g deux fonctions *continues* sur $[a\,;\,b]$.

- *Positivité* : si f est *positive* sur $[a\,;\,b]$ alors : $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \geqslant 0$.
  Attention ; réciproque fausse !
- *Ordre* : si $f \geqslant g$ sur $[a\,;\,b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \geqslant \int_a^b g(x)dx$.

Propriétés 3.9. *Fonction paire ou impaire*
Soient f une fonction *continue* un intervalle I centré en 0 et a un réel de I.

- *Paire* : si f est *paire* alors $\displaystyle\int_{-a}^0 f(x)dx = \int_0^a f(x)dx$.
- *Impaire* : si f est *impaire* alors $\displaystyle\int_{-a}^0 f(x)dx = -\int_0^a f(x)dx$.

9.2.3 Intégration par parties

Propriété 1.9.
Soient u et v deux fonctions *dérivables* sur un intervalle I à dérivées u' et v' *continues* sur I et a et b deux réels de I.
On a :

$$\boxed{\int_a^b u(t)v'(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)dt}$$

Application 4.9. À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \ln(x)\,dx$.

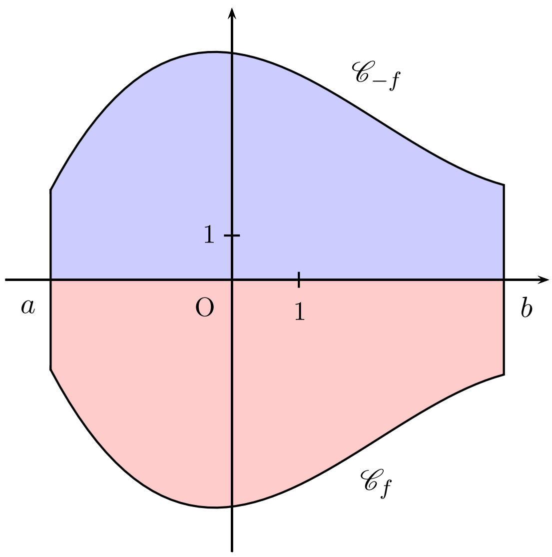
9.3 Applications du calcul intégral

9.3.1 Calcul d'aire

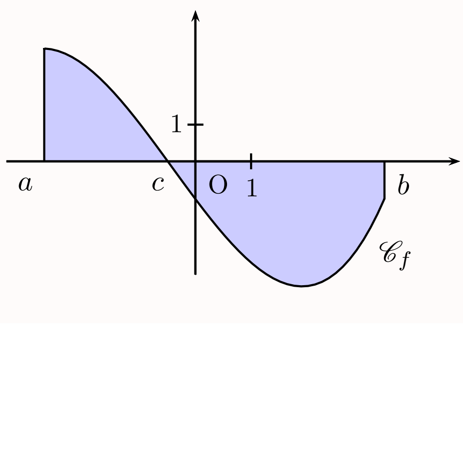
Propriété 2.9.
Soient f une fonction *continue* et *négative* sur un intervalle $[a\,;\,b]$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.
L'aire du domaine $\mathscr{D}$ délimité par la courbe $\mathscr{C}_f$ et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$, exprimée en unité d'aire est égale à :

$$\boxed{-\int_a^b f(x)dx}$$

Illustration.

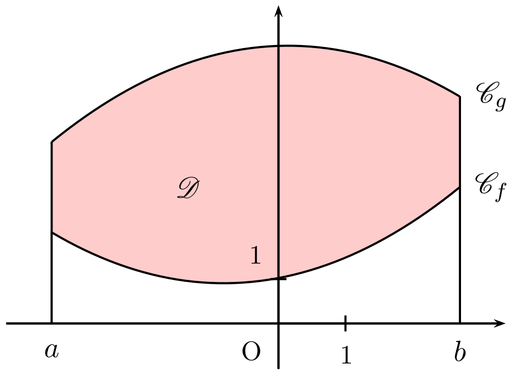


► **Note 3.9.**
Dans le cas d'une fonction f *continue* et de *signe quelconque* sur $[a\,;\,b]$, l'aire de $\mathscr{D}_f$ est la *somme des aires algébriques* des domaines définis par des intervalles sur lesquels f garde un *signe constant.*
Dans l'exemple ci-contre, exprimons l'aire du domaine colorée à l'aide d'intégrales :



Propriété 3.9. *Admise*
Soit f et g deux fonctions *continues* sur un intervalle $[a\,;\,b]$ telles que $f \leqslant g$ sur $[a\,;\,b]$.
On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ leurs courbes représentatives dans un repère orthogonal.
L'aire du domaine $\mathscr{D}$ délimité par les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$, exprimée en unité d'aire, est égale à :

$$\boxed{\int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)\,dx}$$

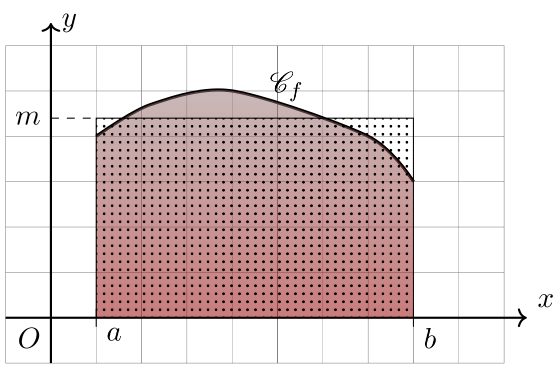


9.3.2 Valeur moyenne

Définition 4.9.
Soient a et b deux réels tels que $b > a$.
La *valeur moyenne* d'une fonction f continue sur l'intervalle $[a;b]$ est :

$$m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$$

Illustration.



La zone rosée et le rectangle ont la même aire.
En effet, $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = m(b-a)$.

9.4 Les exercices du chapitre

○○○ **Exercice 131.**
Calculer les intégrales suivantes :

1. $I = \displaystyle\int_1^4 \frac{3}{x}\,dx$
2. $J = \displaystyle\int_0^2 -3t^2 + 1\,dt$
3. $K = \displaystyle\int_0^1 (s+1)^2\,ds$
4. $L = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{4}} \mathrm{e}^{2y}\,dy$

●○○ **Exercice 132.**
Calculer les intégrales suivantes :

1. $I = \displaystyle\int_1^4 \frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt$
2. $J = \displaystyle\int_0^5 \frac{1}{u+3}\,du$
3. $K = \displaystyle\int_1^2 -\frac{2}{x^3}\,dx$
4. $L = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\,dx$

●○○ **Exercice 133.**
Calculer les intégrales suivantes :

1. $I = \displaystyle\int_0^2 -2t^3 + 4t^2 - 5t\,dt$
2. $J = \displaystyle\int_{10}^{12} \frac{2u}{u^2-8}\,du$
3. $K = \displaystyle\int_1^2 6x(x^2+4)^3\,dx$
4. $L = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\sin\left(3y + \frac{\pi}{2}\right)\,dy$

●○○ **Exercice 134.**
Sans chercher à la calculer, donner le signe de chaque intégrale suivante :

1. $I = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^3}\,dx$
2. $J = \displaystyle\int_1^3 (\ln(t))^4\,dt$
3. $K = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\,dt$
4. $L = \displaystyle\int_1^4 (1-y)\sqrt{1+y}\,dy$

●○○ Exercice 135.

On note I l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{3x+4}{x+1}\,dx$.

1. Démontrer que pour tout réel x, on a $\dfrac{3x+1}{x+1} = 3 + \dfrac{1}{x+1}$.
2. En déduire la valeur exacte de I puis une valeur approchée au dixième.
3. À l'aide d'un raisonnement analogue, calculer $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{2x-5}{x+1}\,dx$.

●○○ Exercice 136.

Calculer les intégrales suivantes :

1. $I = \displaystyle\int_0^1 -3\mathrm{e}^{-3x}\,dx$
2. $J = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \pi\cos(\pi x)\,dx$
3. $K = \displaystyle\int_{-1}^1 15t^4(t^5+2)^3\,dt$
4. $L = \displaystyle\int_0^1 -\frac{1}{(y+1)^2}\,dy$
5. $M = \displaystyle\int_1^3 \frac{2x^3-x^2+4}{x}\,dx$.

●●○ Exercice 137.

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ et la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{x^3}{1+x^2}$.

1. Démontrer que $I_1 = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{2}\ln(2)$.
2. Soit $I_2 = \displaystyle\int_0^1 g(x)\,dx$.
   (a) Calculer $I_2 + I_1$.
   (b) En déduire la valeur de I_2.

●○○ Exercice 138.

Soit f une fonction dont le tableau de variation est donné ci-après :

x	-6		1		3		7
Variation de f	4	$\nearrow$	7	$\searrow$	-3	$\nearrow$	-1

1. Donner le signe de $\displaystyle\int_{-6}^1 f(t)\,dt$.
2. Donner le signe de $\displaystyle\int_3^5 f(t)\,dt$.
3. Donner un encadrement de $\displaystyle\int_{-6}^1 f(t)\,dt$.
4. Donner un encadrement de $\displaystyle\int_3^5 f(t)\,dt$.
5. Peut-on connaître le signe de $\displaystyle\int_1^3 f(t)\,dt$? Justifier.

○○○ **Exercice 139.**

1. Démontrer que la fonction G définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $G(x) = (x^2+x)\ln(x)$ est une primitive de la fonction g définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = x+1+(2x+1)\ln(x)$ sur $[1\,;\,2]$.
2. En déduire la valeur de $I = \displaystyle\int_1^2 g(x)\,dx$.

●●○ **Exercice 140.**

En utilisant une intégration par parties, calculer :

1. $\displaystyle\int_0^{\pi} x\sin(x)\,dx$.
2. $\displaystyle\int_0^{1} x\mathrm{e}^x\,dx$.
3. $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} x\ln(x)\,dx$.

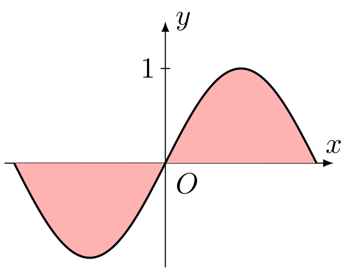
●●○ **Exercice 141.**

En utilisant une intégration par parties, calculer :

1. $\displaystyle\int_0^{\pi} x\mathrm{e}^{-2x}\,dx$.
2. $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \ln(x)\,dx$.

●○○ **Exercice 142.**

On considère la surface colorée ci-dessous construite dans un repère orthonormé avec la courbe de la fonction f définie sur $[-\pi\,;\,\pi]$ par $f(x) = \sin(x)$.



Calculer son aire en unité d'aire du repère.

●●● **Exercice 143.**

Pour tout entier naturel n, on pose :

$$u_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{nt}}{1+\mathrm{e}^t}\,dt.$$

1. Calculer u_0.
2. Simplifier $u_1 + u_0$ puis en déduire u_1.
3. Démontrer que pour tout entier naturel n ;
$$u_{n+1} + u_n = \frac{\mathrm{e}^n - 1}{n}.$$
4. Démontrer que pour tout entier naturel n,
$$u_{n+1} - u_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{nt}(\mathrm{e}^t - 1)}{1+\mathrm{e}^t}\,dt.$$

En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

●●● Exercice 144.

Pour tout entier naturel n non nul, on considère la suite (I_n) définie par :

$$I_n = \int_0^1 x^n \mathrm{e}^{x^2}\, dx.$$

1. Démontrer que la suite (I_n) est minorée par 0.
2. Montrer que la suite (I_n) est décroissante. Qu'en déduire pour la suite (I_n) ?
3. Montrer que pour tout entier naturel non nul,

$$\frac{1}{n+1} \leqslant I_n \leqslant \frac{\mathrm{e}}{n+1}.$$

4. En déduire la limite de la suite (I_n).

●●● Exercice 145.

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \int_0^1 (1-t)^n \mathrm{e}^t\, \mathrm{d}t$$

1. Vérifier que $u_0 = \mathrm{e} - 1$.
2. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = (n+1)u_n - 1$$

3. En déduire la valeur de u_1 et de u_2.
4. Soient f_2 et f_1 les fonctions définies sur $[0\,;\,1]$ par :

$$f_1(x) = (1-x)\mathrm{e}^x \text{ et } f_2(x) = (1-x)^2\mathrm{e}^x$$

   (a) Étudier sur $[0\,;\,1]$ la position relative des courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ associées respectivement aux fonctions f_1 et f_2.
   (b) En déduire l'aire de la surface délimitée par les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.

CHAPITRE

10

Combinatoire et dénombrement

10.1 Objectifs du chapitre

Sujets vus au grand oral : quelle est la probabilité que deux élèves de votre groupe classe soient nés le même jour ? Le paradoxe du chevalier de Méré : est-il plus avantageux, lorsqu'on joue au dé, de parier sur l'apparition d'un 6 en lançant 4 fois le dé ou de lancer 24 fois deux dés ?

10.2 Principe additif, multiplicatif

Soient m et n deux entiers naturels. E et F ont respectivement n et m éléments.
Soit k un entier naturel.

10.2.1 Principe additif et multiplicatif

Propriété 1.10. *Principe additif*
Si E et F sont *disjoints* alors le nombre d'éléments de $E \cup F$ est __________

Exemple 1.10.
Soient $E = \{a\,;\, b\}$ et $F = \{1\,;\, 2\,;\, 3\}$.
E et F sont disjoints, $n =$ _____ et $m =$ _____ donc $E \cup F$ est composée de __________ éléments.
On a $E \cup F =$

Définition 1.10.
Un couple de deux éléments a et b de E est la donnée de ces deux éléments dans un ordre particulier. On le note $(a\,;\, b)$. De la même façon, un triplet de trois éléments de E est la donnée de ces trois éléments dans un ordre particulier. On le note $(a\,;\, b\,;\, c)$.

Définition 2.10. *Produit cartésien*
Le *produit cartésien* de E et F noté $E \times F$ est l'ensemble des couples $(e\,;\, f)$ tels que :

$$e \in E \text{ et } f \in F$$

.

Propriété 2.10. *Principe multiplicatif*
$E \times F$ est composé de __________ éléments.

10.2.2 Dénombrement des k-uplets

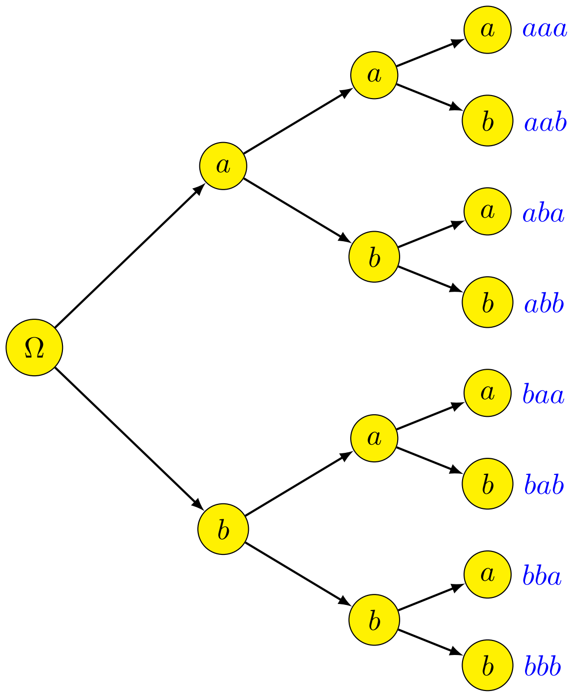
Définition 3.10.

> Un *k-uplet* de E est une liste ordonnée $(e_1\,;\,e_2\,;\,\ldots\,;\,e_k)$ de k éléments de E.
> On note E^k l'ensemble des k-uplets de E.

Exemple 2.10.
Un code de carte bancaire est un __________ de $E =$

Propriété 3.10.
Soit E un ensemble de n éléments.
Le nombre de k-uplets de E est __________.

Exemple 3.10.
Soit $E = \{a\,;\,b\}$. Puisque $n = 2$, le nombre de 3-uplets est __________ :



Définition 4.10.

> Une partie de E est un ensemble d'éléments de E.

Exemple 4.10.
Soit $E = \{a\,;\,b\,;\,c\}$.
Les parties de E sont ________, ________, ________, ________, ________, ________, ________ et ________.
E comporte donc _____ éléments..

Propriété 4.10.
Le nombre de parties de E est 2^n.

Démonstration. Soit $E = (e_1\,;\, e_2\,;\, \ldots\,;\, e_n)$.
On associe à chaque partie P de E un unique n-uplet de l'ensemble $[0\,;\,1]$ de la manière suivante : pour tout entier i entre 1 et n, on note 1 si e_i est dans P et 0, sinon, et réciproquement (code binaire). Par exemple, on associe à $\{e_1\,,\, e_3\}$ le n-uplet $\{1\,,0\,,1\,,0\,,\ldots\,,0\}$: $\{e_1\,,\, e_3\} \mapsto \{1\,,0\,,1\,,0\,,\ldots\,,0\}$. Ainsi, le nombre de parties de E est égal au nombre de n-uplets de l'ensemble $\{0\,;\,1\}$, c'est-à-dire 2^n. □

10.3 Dénombrement des k-uplets d'éléments distincts

Soient k et n deux entiers naturels tels que $1 \leqslant k \leqslant n$ et E un ensemble à n éléments.

10.3.1 Nombre de k-uplets d'éléments distincts

Définition 5.10.
On appelle *k-uplet d'éléments distincts* de E un k-uplet de E pour lequel tous ses éléments sont *distincts*.

Exemple 5.10.
Soit $E = \{a\,;\, b\,;\, c\,;\, d\}$.
$(a\,;\, b\,;\, c)$ est un 3-uplet d'éléments distincts de E.
En revanche ____________ n'en est pas un car l'élément b est répété.

Propriété 5.10.
Le nombre de k-uplets d'éléments *distincts* de E est égal à :

$$\boxed{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}$$

Démonstration.

□

Exemple 6.10.
Lors d'une course de 100 m disputée par 9 athlètes, il y a ____________ podiums possibles.

10.3.2 Factorielle d'une entier naturel

Définition 6.10.

Soit n un entier naturel non nul.
On appelle *factorielle* n, noté $n!$, le produit de tous les entiers naturels entre 1 et n.
Ainsi :

$$\boxed{n! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times n}$$

Exemple 7.10.
$5! =$ ________________ et $(n+1)! =$ ____.

Propriété 6.10.
Le nombre de k-uplets d'éléments distincts de E est égal à $\dfrac{n!}{(n-k)!}$.

10.3.3 Nombre de permutations

Définition 7.10.

Une *permutation* d'un ensemble E a n éléments est un n-uplet d'éléments *distincts* de E.

Propriété 7.10.
Le *nombre de permutations* de E est ____________________________ soit ___________.

Exemple 8.10.
Le classement des 20 équipes du championnat de football de ligue 1 est une permutation de l'ensemble des 20 équipes.

10.4 Combinaisons

Soit k et n deux entiers naturels tels que $0 \leqslant k \leqslant n$ et E un ensemble à n éléments.

10.4.1 Nombre de combinaisons

Définition 8.10.

Une *combinaison* de k éléments de E est une partie de E à k éléments.
On note $\dbinom{n}{k}$ le nombre de combinaisons de k éléments de E.

Exemple 9.10.
Soit $E = \{a\,;\,b\,;\,c\,;\,d\}$ on a donc $n =$ _____.

- Les combinaisons formées d'un élément de E sont $\{\ldots\}$, $\{\ldots\}$, $\{\ldots\}$ et $\{\ldots\}$: il y en a $\ldots$donc $\dbinom{\ldots}{\ldots} = 4$.
- Les combinaisons formées de deux éléments de E sont $\{\ldots\,;\,\ldots\}$, $\{\ldots\,;\,\ldots\}$, $\{\ldots\,;\,\ldots\}$, $\{\ldots\,;\,\ldots\}$, $\{\ldots\,;\,\ldots\}$ et $\{\ldots\,;\,\ldots\}$: il y en a donc $\dbinom{\ldots}{\ldots} = \ldots$.

Propriété 8.10.
Soit $0 \leqslant k \leqslant n$. On a $\displaystyle\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}$.

Démonstration. $\displaystyle\binom{n}{k}$ est le nombre de combinaisons de k éléments parmi n de E.
Il y a $n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)$ $k-$uplets d'éléments distincts deux à deux distincts de E. Pour obtenir un $k-$uplet d'éléments deux à deux distincts de E, il suffit d'abord de choisir une combinaison de k éléments de E puis de les ordonner.
Ainsi $n(n-1)\ldots(n-k+1) = \displaystyle\binom{n}{k} \times k!$ d'où le résultat. □

En particulier :

$$\boxed{\binom{n}{0} = 1, \quad \binom{n}{1} = n, \quad \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}, \quad \binom{n}{n} = 1}.$$

Exemple 10.10.
Soit $\displaystyle\binom{5}{3} =$ ________________ $= 10$.

Propriété 9.10.
Soit $0 \leqslant k \leqslant n$. On a $\displaystyle\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Démonstration. Dénombrer les parties à k éléments revient à dénombrer les parties à $n-k$ éléments qui en sont les complémentaires. □

Exemple 11.10.
Soit $\displaystyle\binom{5}{3} = \binom{5}{2}$.

Application 1.10. Une urne contient quatre boules blanches numérotées de 1 à 4, trois boules vertes numérotées de 1 à 3 et deux boules noires numérotées de 1 à 2. On tire simultanément trois boules de cette urne.

1. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
2. Combien y a-t-il de tirages contenant trois boules de la même couleur ?
3. Combien y a-t-il de tirages au moins une boule noire ?
4. Combien y a-t-il de tirages contenant un seul numéro impair ?

Propriété 10.10.
Soit n un entier naturel alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

Démonstration. Par définition, pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, $\binom{n}{k}$ est le nombre de combinaisons de E. Autrement dit, $\binom{n}{k}$ est le nombre de parties de E composée de k éléments. Ainsi d'après le principe additif, $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ est égal au nombre de parties de E (les parties de 0 à n éléments). Or il y a 2^n parties de E. Par conséquent, $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$. □

10.5 Triangle de Pascal

10.5.1 Relation de Pascal

Propriété 11.10. *Formule de Pascal*
Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$ et tout entier naturel k tel que $1 \leqslant k \leqslant n-1$, on a :

$$\boxed{\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}}$$

Démonstration. Soient E un ensemble à n éléments et k un entier naturel tel que $1 \leqslant k \leqslant n-1$.
$\binom{n}{k}$ est le nombre de parties à k éléments de E. Soit a un élément de E.

- Soit a un élément de E. Parmi toutes les partie à k éléments de E, il y en a de deux sortes :
  — celles qui contiennent l'élément a.
  Dénombrer ces parties revient à déterminer le nombre de combinaisons de $k-1$ éléments d'un ensemble à $n-1$ éléments. Leur nombre est $\binom{n-1}{k-1}$.
  — celles qui ne contiennent pas l'élément a. Dénombrer ces parties revient à déterminer le nombre de combinaisons de k éléments d'un ensemble à $n-1$ éléments. Leur nombre est $\binom{n-1}{k}$.
- D'après le principe additif on a donc :

□

10.5.2 Le triangle de Pascal

▶ **Note 1.10.**

La relation de Pascal permet de calculer de façon algorithmique les coefficients $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$.

Néanmoins, on peut aussi calculer les $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ à l'aide du tableau ci-dessous appelé *triangle de Pascal* :

k							
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1
	0	1	2	3	4	5	6
				n			

▶ **Note 2.10.**
Pour tous réels a et b et pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} a^k b^{n-k}}$$

La formule ainsi obtenue est appelée *formule du binôme de Newton* et les $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ sont appelés *coefficients binomiaux.*

Application 2.10. Démontrer, à l'aide de la formule précédente, que pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$,

$$(2+\sqrt{5})^n + (2-\sqrt{5})^n \in \mathbb{N}$$

10.6 Les exercices du chapitre

○○○ Exercice 146.
E et F désignent deux ensembles disjoints composés respectivement de 4 éléments et de 5 éléments. Calculer le nombre d'éléments de :

1. $E \cup F$.
2. $E \times F$.
3. E^3.
4. F^2.

●○○ Exercice 147.
$E = \{0\,;\,1\}$.

1. La liste ordonnée $(1\,;\,0\,;\,1)$ est un k-uplet de E. Combien vaut k ?
2. Déterminer avec soin le nombre de 3-uplets (ou triplets) de E.

●○○ Exercice 148.
$E = \{a\,;\,b\,;\,c\,;\,d\}$.

1. (a) Lister les 2-uplets de E. Combien y en a-t-il ?
   (b) Quelle formule du cours permet de retrouver ce résultat sans lister tous les couples de E ?
2. (a) Lister tous les couples d'éléments distincts de E. Combien y en-a-t-il ?
   (b) Quelle formule du cours permet de retrouver ce résultat ?

●○○ Exercice 149.
Soit $E = \{e_1\,;\,e_2\,;\,e_3\,;\,e_4\,;\,e_5\,;\,e_6\}$.

1. Expliquer pourquoi le nombre de 3-uplets d'éléments distincts de E est égal à $6 \times 5 \times 4$.
2. Combien y a-t-il de 4-uplets d'éléments distincts de E ?

●○○ Exercice 150.
Soit $E = \{0\,;\,1\,;\,2\}$.

1. Quelle valeur doit-on donner à k pour qu'une permutation soit un k-uplet d'éléments distincts de E ?
2. Lister toutes les permutations de E ? Combien y en-a-t-il ?
3. Quelle formule du cours permet d'obtenir le résultat précédent ?

●○○ Exercice 151.
Soit $E = \{p\,;\,q\,;\,r\,;\,s\}$.

1. Lister les combinaison de 3 éléments de E. Combien y en-a-t-il ?
2. Le nombre de combinaisons de 3 éléments de E est $\binom{4}{3}$.
   Rappeler une formule permettant de calculer ce coefficient puis vérifier le résultat obtenu à la question précédente ?
3. (a) Sans les listes, déterminer le nombre de combinaisons de 2 éléments de E.
   (b) Vérifier le résultat de la question précédente en listant toutes les combinaisons de deux éléments de E.

●○○ **Exercice 152.**
Soit $E = \{e\,;\,f\,;\,g\,;\,h\}$.

1. Expliquer pourquoi $\{e\,;\,f\,;\,g\}$ n'est pas une permutation de E.
2. Expliquer pourquoi $\{e\,;\,f\,;\,e\}$ n'est pas une permutation de E.
3. Expliquer pour quoi le nombre de permutations de E est $4 \times 3 \times 2 \times 1$.
   Comment note-t-on ce nombre ?

●○○ **Exercice 153.**
Soit $E = \{a\,;\,b\,;\,1\,;\,2\}$.

1. Combien y a-t-il de 5-uplets de E ?
2. Combien y a-t-il de 5-uplets de E commençant par la lettre b ?

●●○ **Exercice 154.**
Un code PIN de smartphone est un code confidentiel composé de 4 chiffres.

1. Combien y a-t-il de codes PIN différents ?
2. Combien y a-t-il de codes PIN différents commençant par le chiffre 3 ?

●●○ **Exercice 155.**

1. Soit E un ensemble à 9 éléments.
   Combien y a-t-il de permutation de E ?
2. La première phase de la coupe du Monde de handball est organisée en poules de 6 équipes.
   (a) Combien y a-t-il de classements possibles dans le groupe de la France ?
   (b) Combien y a-t-il de classements possibles si la France termine première et l'Australie dernière ?

●○○ **Exercice 156.**
Le mot « THAMS » est un anagramme du mot MATHS.
Combien existe t-il d'anagrammes du mot MATHS ? Reprendre cette question avec le mot ANANAS.

●●○ **Exercice 157.**
On donne le programme Python incomplet. Le compléter afin qu'il puisse retourner le nombre $n!$:

```
def factorielle(n):
    P=1
    for i in range (1,...):
        P=.....
    return(......)
```

●○○ **Exercice 158.**

1. Calculer $\dfrac{5!}{3!2!}$.
2. Donner un coefficient binomial qui est égal à ce nombre.

●○○ **Exercice 159.**

1. Vérifier, par un calcul, que $\dbinom{7}{4} = 35$.
2. En déduire la valeur de $\dbinom{7}{3}$.

●○○ **Exercice 160.**

1. En 1^{re} générale, un élève doit choisir 3 spécialités parmi les douze proposées.
   Combien y a-t-il de triplettes possibles ?
2. En terminale, les élèves doivent garder deux des trois spécialités choisies en 1^{re}.
   Combien de possibilités s'offrent à Corentin qui arrive en Terminale pour choisir ses spécialités ?
3. Un parcours est constitué d'une triplette en 1^{re} et d'une doublette de ces spécialités conservées en Terminale.
   (a) Justifier qu'il y a 660 parcours différents.
   (b) Coline a choisi les Maths en 1^{re} et Terminale.
   Combien de parcours correspondent à ce choix ?

●○○ **Exercice 161.**

1. Marylène possède 5 jeans et 7 tee-shirts. Elle part en vacances et décide d'emmener 2 jeans et 3 tee-shirts.
   (a) Justifier que le nombre de possibilités qu'elle a pour choisir ses jeans et tee-shirts est $\binom{5}{2} \times \binom{7}{3}$.
   (b) Calculer ce nombre.
2. Son mari Xan possède quant à lui 10 jeans, 13 tee-shirts et 7 paires de chaussures. Il décide de partir avec 6 jeans, 10 tee-shirts et 4 paires de chaussures.
   Combien a-t-il de manières pour remplir sa valise ?

●●○ **Exercice 162.**

Soit n un entier naturel non nul. Simplifier les expressions suivantes :

1. $\dfrac{(n-1)!}{(n+1)!}$
2. $\dfrac{n!}{n} - (n-1)!$
3. $\dfrac{(2n+1)!}{(2n-1)!}$
4. $\dfrac{(n-1)!}{n!} - \dfrac{n!}{(n+1)!}$

●○○ **Exercice 163.**

Une course oppose 20 concurrents, dont Émile.

1. Combien y-a-t-il de podiums possibles ?
2. Combien y-a-t-il de podiums possibles où Émile est premier ?
3. Combien y-a-t-il de podiums possibles dont Émile fait partie ?
4. On souhaite récompenser les 3 premiers en leur offrant un prix identique à chacun. Combien y-a-t-il de distributions de récompenses possibles ?

●●○ **Exercice 164.**
Un cadenas possède un code à 3 chiffres, chacun des chiffres pouvant être un chiffre de 1 à 9.

1. (a) Combien y-a-t-il de codes possibles ?
   (b) Combien y-a-t-il de codes se terminant par un chiffre pair ?
   (c) Combien y-a-t-il de codes contenant au moins un chiffre 4 ?
   (d) Combien y-a-t-il de codes contenant exactement un chiffre 4 ?
2. Dans cette question on souhaite que le code comporte obligatoirement trois chiffres distincts.
   (a) Combien y-a-t-il de codes possibles ?
   (b) Combien y-a-t-il de codes se terminant par un chiffre impair ?
   (c) Combien y-a-t-il de codes comprenant le chiffre 6 ?

CHAPITRE

11

Loi des grands nombres

11.1 Somme de deux variables aléatoires

11.1.1 1[re] définition

Définition 1.11.
Soient X et Y deux variables aléatoires associées à une même expérience d'univers fini Ω et a un réel.
$X+Y$ et aX sont deux variables aléatoires définies sur Ω qui prennent comme valeur pour un événement donné respectivement : la ________________ des valeurs de X et Y et le ________________ de a par X.

Exemple 1.11.

On lance deux dés, l'un tétraédrique numéroté de 1 à 4 et l'autre cubique numéroté de 1 à 6. On appelle X et Y les variables aléatoires associées respectivement aux résultats du dé tétraédrique et du dé cubique.

- $X + Y$ est la variable aléatoire qui prend les valeurs : ________________________________.
- $2X$ est la variable aléatoire qui prend les valeurs : ________________________________

▶ **Note 1.11.**
On peut généraliser *la somme* à n variables aléatoires
Par exemple, lançons *trois* dés cubiques de couleurs différentes et notons X, Y et Z les résultats des dés de chaque couleur. On peut considérer la variable $X + Y + Z$ qui prend les valeurs :

____

11.1.2 Linéarité de l'espérance et additivité de la variance

Propriétés.
Soient X et Y deux variables aléatoires d'un univers Ω et a un réel.

- *Linéarité de l'espérance :* $\mathbf{E}(X+Y) = \mathbf{E}(X) + \mathbf{E}(Y)$ et $\mathbf{E}(aX) = a\mathbf{E}(X)$.

  ATTENTION ! Si les variables X et Y sont *indépendantes* :
- *Additivité de la variance :* $\mathbf{V}(X+Y) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y)$ et $\mathbf{V}(aX) = a^2\mathbf{V}(X)$.

▶ **Note 2.11.**
On considérera l'indépendance des variables au sens intuitif du terme c'est à dire que le résultat de X n'influe pas sur le résultat de Y comme dans le lancement de deux dés.

Exemple 2.11.
Prendre l'exemple initial en calculant $\mathbf{E}(X+Y)$, $\mathbf{E}(2X)$, $\mathbf{V}(X+Y)$ et $\mathbf{V}(3X)$.

▶ **Note 3.11.**
On peut *généraliser* les résultats de l'espérance et de la variance à la somme de n variables.

11.2 Somme de variables identiques et indépendantes

11.2.1 Décomposition d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale

Théorème 1.11.
Soient n variables aléatoires indépendantes $X_1, X_2, \ldots, X_n$ suivant la même loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$.
La variable aléatoire $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ suit alors la loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$.

Exemple 3.11.
Soit X_i suivant une loi de Bernoulli $\mathscr{B}(0,13)$ pour $i \in [\![1\,;\,10]\!]$, alors $S_{10} = X_1 + X_2 + \ldots + X_{10}$ suit la loi binomiale $\mathscr{B}(10\,;\,0,13)$.

Théorème 2.11.
Toute variable aléatoire X suivant la loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$ peut se décomposer en *une somme* de n *variables indépendantes* S_n.
$S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ où X_i avec $i \in [\![1\,;\,n]\!]$ suit une même loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$.

▶ **Note 4.11.**
Ce théorème permet de démontrer l'expression de l'espérance et de la variance d'une loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$.
En effet si X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$, on peut décomposer X en somme de n variables indépendantes suivant la loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$ d'espérance p et de variance $p(1-p)$.

11.2.2 Échantillon d'une variable aléatoire

Définition 2.11.
Soit une variable X suivant une loi de probabilité.
Une liste de variables indépendantes $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ suivant cette même loi est appelée *échantillon* de taille n associé à X
On pose $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ et $M_n = \dfrac{S_n}{n}$, on a alors :

$$\mathbf{E}(S_n) = n\mathbf{E}(X) \quad (11.1)$$
$$\mathbf{E}(M_n) = \mathbf{E}(X) \quad (11.2)$$
$$\mathbf{V}(S_n) = n\mathbf{V}(X) \quad (11.3)$$
$$\mathbf{V}(M_n) = \frac{\mathbf{V}(X)}{n} \quad (11.4)$$

Démonstration. Prouvons la 12.3.

□

▶ **Note 5.11.**
Plus la taille n de l'échantillon est *grand* plus la *variance* de M_n est *petite* donc plus la valeur de M_n se *rapproche* de l'espérance de X.

Exemple 4.11.
Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée par le tableau suivant. On considère un échantillon $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ de la loi suivie par X et la variable aléatoire moyenne M_n :

x_i	-10	5	20
$\mathbf{P}(X = x_i)$	$0,25$	$0,55$	$0,2$

Déterminons la taille de l'échantillon n à partir de laquelle la variance de M_n devient inférieure à 0,05.

11.3 Concentration et loi des grands nombres

11.3.1 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Théorème 3.11.
Soit X une variable aléatoire d'espérance μ et de variance $\mathbb{V}$.

$$\boxed{\forall \delta \in]0\,;\,+\infty[, \mathbf{P}(|X-\mu| \geqslant \delta) \leqslant \frac{\mathbb{V}}{\delta^2}}$$

► **Note 6.11.**
La probabilité que X se trouve en dehors de l'intervalle $[\mu - \delta\,;\,\mu + \delta]$ est inférieure à $\dfrac{\mathbf{V}}{\delta^2}$.
Cette inégalité conduit à la *loi des grands nombres.*

Exemple 5.11.
La taille moyenne d'une femme française est de $1,65$ m et la variance est évaluée à $0,0025$.
Majorons la proportion des femmes françaises dont la taille est inférieure ou égale à $1,55$ ou supérieure ou égale à $1,75$.
Soit T_F la variable aléatoire associée à la taille d'une femme française.
On a donc $\mu = 1,65$ et $\mathbb{V} = 0,002\,5$.

11.3.2 Application à un intervalle de rayon de k fois l'écart-type

Théorème 4.11.
Soit X une variable aléatoire d'espérance μ et d'écart-type σ.

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbf{P}(|X-\mu| \geqslant k\sigma) \leqslant \frac{1}{k^2}}$$

Exemple 6.11.
Sur une roue de loterie il y a 4 secteurs rouges sur 10.
On fait tourner 20 fois la roue en notant par X le nombre de fois où la roue tombe sur un secteur rouge.
La variable aléatoire X suit alors la loi binomiale $\mathscr{B}(20\,;\,0,4)$.
Majorons la probabilité que X soit en dehors de l'intervalle centrée en μ et de rayon 2σ.

11.3.3 Inégalité de concentration

Théorème 5.11.
Soient $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ un échantillon de n variables aléatoires d'espérance μ et de variance $\mathbf{V}$ et M_n la variable aléatoire moyenne de cet échantillon.

$$\boxed{\forall \delta \in]0\,;\,+\infty[,\ \mathbf{P}(|M_n - \mu| \geqslant \delta) \leqslant \frac{\mathbf{V}}{n\delta^2}}$$

Exemple 7.11.
On prend un dé tétraédrique bien équilibré dont on a déterminé l'espérance $\mu = 2,5$ et la variance $\mathbf{V} = 1,25$.
Combien de lancers du dé tétraédrique doit-on faire pour s'assurer au seuil de 95 % que la moyenne des résultats des lancers est dans l'intervalle $]2,45\,;\,2,55[$?

11.3.4 Loi des grands nombres

Théorème 6.11.
Soit $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ un échantillon de n variables aléatoires d'espérance μ et M_n la variable aléatoire moyenne de cet échantillon.

$$\boxed{\forall \delta \in]0\,;\,+\infty[,\ \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(|M_n - \mu| \geqslant \delta) = 0}$$

► **Note 7.11.**
Pour un δ donné aussi petit soit-il, la limite de la probabilité que M_n soit en dehors de l'intervalle $[\mu - \delta\,;\,\mu + \delta]$ est nulle.
Ce théorème montre de façon rigoureuse, que lorsqu'on lance un grand nombre de fois une pièce de monnaie bien équilibrée, on a une chance sur deux en moyenne que la pièce tombe sur « pile » ou sur « face ».

11.4 Les exercices du chapitre

○○○ **Exercice 165.**
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes sur un même univers fini. La loi de probabilité de X est donnée par :

x_i	0	3
$\mathbf{P}(X = x_i)$	$0,4$	$0,6$

Pour la variable aléatoire Y : $\mathbf{E}(Y) = 2,5$ et $\mathbf{V}(Y) = 1,2$.

1. Calculer $\mathbf{E}(X+Y)$.
2. Calculer $\mathbf{E}(3Y)$.
3. Calculer $\mathbf{V}(X+Y)$.

●○○ **Exercice 166.**
Les jours où elle s'entraîne au jet de 7 mètres au handball, Elia fait 30 tirs le matin et 50 l'après-midi. Elle marque avec une probabilité égale à $0,46$ le matin et une probabilité égale à $0,78$ l'après-midi. Tous les tirs sont supposés indépendants.
Soit X (respectivement Y) la variable aléatoire donnant le nombre de tirs réussis par Elia le matin (respectivement l'après-midi).

1. Donner la loi suivie par X et celle suivie par Y.
2. Que représente $X+Y$?
3. Calculer $\mathbf{E}(X+Y)$ et en donner une interprétation.

●○○ **Exercice 167.**
Quand il joue au bowling, Arthur a une probabilité de $0,1$ pour faire un strike. Il lance 10 fois la boule de manière indépendante. Pour tout entier i entre 1 et 10, X_i est la variable aléatoire prenant 1 s'il réussit un strike et 0 sinon, au $i-$ème lancer.

1. Que peut-on dire de la variable aléatoire X définie par $X = X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_{10}$?
2. Calculer $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{V}(X)$.

●○○ **Exercice 168.**
On lance 30 dés équilibrés à 6 faces numérotées de 1 à 6. On considère la variable aléatoire Z donnant le nombre de 4 obtenu sur les 30 dés.

1. Déterminer une loi de probabilité associée à 30 variables aléatoires indépendantes $Z_1,\ Z_2, \cdots Z_{30}$ telle que $Z = Z_1 + Z_2 + Z_3 + \cdots + Z_{30}$.
2. Calculer $\mathbf{E}(Z)$ et en donner une interprétation.

●●○ **Exercice 169.**
On lance 100 dés équilibrés à 6 faces numérotées de 1 à 6. On considère la variable aléatoire X donnant la somme des résultats de tous les dés.

1. Décomposer X en une somme de variables aléatoires indépendantes suivant toutes une même loi de probabilité que l'on précisera.
2. Calculer $\mathbf{E}(X)$ et interpréter ce résultat.

●●○ **Exercice 170.**

X est une variable aléatoire d'espérance $5,6$ et d'écart-type $\frac{1}{4}$.
On considère un échantillon de taille n, $(X_1\,;\cdots X_n)$ de variables aléatoires suivant la loi de X ainsi que les variables aléatoires $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ est $M_n = \dfrac{X_1 + X_2 + \cdots X_n}{n}$.

1. Calculer $\mathbf{E}(S_n)$ et $\mathbf{V}(S_n)$.
2. Calculer $\mathbf{E}(M_n)$ et $\mathbf{V}(M_n)$.

○○○ **Exercice 171.**

Soit Y une variable aléatoire.
Compléter les pointillés :

1. $Y \in]0\,;\,10[\Longleftrightarrow |Y - \cdots| < \cdots$
2. $Y \in [45\,;\,51] \Longleftrightarrow |Y - \cdots| \leqslant \cdots$
3. $Y \in]-\infty\,;\,12] \cup [16\,;\,+\infty[\Longleftrightarrow |Y - \cdots| \geqslant \cdots$
4. $Y \in]-\infty\,;\,2[\cup]24\,;\,+\infty[\Longleftrightarrow |Y - \cdots| > \cdots$

○○○ **Exercice 172.**

Soit B une variable aléatoire.
On donne $\mathbf{P}(|B + 12| \geqslant 5) \leqslant 0,11$.
Donner une minoration de $\mathbf{P}(|B + 12| < 5)$.

○○○ **Exercice 173.**

Soit Z une variable aléatoire.
Sachant que $\mathbf{P}(Z \in [7\,;\,8]) = 0,25$ et $\mathbf{P}(Z \in]8\,;\,13]) = 0,3$;

1. Déterminer $\mathbf{P}(|Z - 10| \leqslant 3)$.
2. En déduire $\mathbf{P}(|Z - 10| > 3)$.

●●○ **Exercice 174.**

La consommation d'eau quotidienne en litres d'une ou d'un français pris au hasard dans la population est donnée par une variable aléatoire C telle que $\mathbf{E}(C) = 150$ et $\mathbf{V}(C) = 900$.

1. Justifier qu'au moins 75 % de la population française consomment entre 90 et 210 litres d'eau par jour.
2. Est-il vrai de dire « la probabilité que l'écart entre C et 150 soit strictement inférieur à 90 litres est supérieure à 0,85 » ?

