Dans un pays de population constante égale à 120 millions, les habitants vivent soit en zone rurale, soit en ville. Les mouvements de population peuvent être modélisés de la façon suivante :

- en 2010, la population compte 90 millions de ruraux et 30 millions de citadins ;
- chaque année, 10 % des ruraux émigrent à la ville ;
- chaque année, 5 % des citadins émigrent en zone rurale.

Pour tout entier naturel n, on note :

- R_n l'effectif de la population rurale, exprimé en millions d'habitants, en l'année $2010 + n$,
- C_n l'effectif de la population citadine, exprimé en millions d'habitants, en l'année $2010 + n$.

On a donc $R_0 = 90$ et $C_0 = 30$.

1. On considère les matrices $M = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,05 \\ 0,1 & 0,95 \end{pmatrix}$ et, pour tout entier naturel n,, $U_n = \begin{pmatrix} R_n \\ C_n \end{pmatrix}$.
   (a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = MU_n$.
   (b) Calculer U_1. En déduire le nombre de ruraux et le nombre de citadins en 2011.
2. Pour tout entier naturel n non nul, rappeler l'expression de U_n en fonction de M^n et de U_0.
3. Soit la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ est la matrice inverse de P et on la notera P^{-1}.
4. (a) On pose $\Delta = P^{-1}MP$. Calculer Δ.
   (b) Démontrer que : $M = P\Delta P^{-1}$.
   (c) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul :
   $$M^n = P\Delta^n P^{-1}.$$
5. (a) On admet que le calcul matriciel précédent donne :
   $$M^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times 0,85^n & \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times 0,85^n \\ \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \times 0,85^n & \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times 0,85^n \end{pmatrix}.$$
   En déduire que, pour tout entier naturel n, $R_n = 50 \times 0,85^n + 40$ et déterminer l'expression de C_n en fonction de n.
   (b) Déterminer la limite de R_n et de C_n lorsque n tend vers $+\infty$.
   Que peut-on en conclure pour la population étudiée ?