Exercice 1

On donne le nombre complexe $z = \dfrac{1+\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}$.

Exercice 1

On donne le nombre complexe $z = \dfrac{1+\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}$.

1. $z = \dfrac{1+\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}$ donc

Exercice 1

On donne le nombre complexe $z = \dfrac{1+\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}$.

1. $z = \dfrac{1+\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}$ donc $z = \dfrac{(1+\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})}{1^2+2^2}$ soit

Exercice 1

On donne le nombre complexe $z = \dfrac{1+\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}$.

1. $z = \dfrac{1+\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}$ donc $z = \dfrac{(1+\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})}{1^2+2^2}$ soit $z = \dfrac{1-2\mathrm{i}+\mathrm{i}+2}{5}$
   c'est-à-dire :

Exercice 1

On donne le nombre complexe $z = \dfrac{1+\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}$.

1. $z = \dfrac{1+\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}$ donc $z = \dfrac{(1+\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})}{1^2+2^2}$ soit $z = \dfrac{1-2\mathrm{i}+\mathrm{i}+2}{5}$ c'est-à-dire :

$$z = \frac{3}{5} - \frac{1}{5}\mathrm{i}.$$

Exercice 1

On donne le nombre complexe $z = \dfrac{1+\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}$.

1. $z = \dfrac{1+\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}$ donc $z = \dfrac{(1+\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})}{1^2+2^2}$ soit $z = \dfrac{1-2\mathrm{i}+\mathrm{i}+2}{5}$ c'est-à-dire :
$$z = \frac{3}{5} - \frac{1}{5}\mathrm{i}.$$
2. $\dfrac{1+\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}} + \dfrac{1-\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}} =$

Exercice 1

On donne le nombre complexe $z = \dfrac{1+\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}$.

1. $z = \dfrac{1+\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}$ donc $z = \dfrac{(1+\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})}{1^2+2^2}$ soit $z = \dfrac{1-2\mathrm{i}+\mathrm{i}+2}{5}$ c'est-à-dire :
$$z = \frac{3}{5} - \frac{1}{5}\mathrm{i}.$$
2. $\dfrac{1+\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}} + \dfrac{1-\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}} = z + \overline{z}$.

Exercice 1

On donne le nombre complexe $z = \dfrac{1+\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}$.

1. $z = \dfrac{1+\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}$ donc $z = \dfrac{(1+\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})}{1^2+2^2}$ soit $z = \dfrac{1-2\mathrm{i}+\mathrm{i}+2}{5}$ c'est-à-dire :
$$z = \frac{3}{5} - \frac{1}{5}\mathrm{i}.$$
2. $\dfrac{1+\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}} + \dfrac{1-\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}} = z + \overline{z}$.
Ainsi $\dfrac{1+\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}} + \dfrac{1-\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}} =$

Exercice 1

On donne le nombre complexe $z = \dfrac{1+\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}$.

1. $z = \dfrac{1+\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}$ donc $z = \dfrac{(1+\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})}{1^2+2^2}$ soit $z = \dfrac{1-2\mathrm{i}+\mathrm{i}+2}{5}$ c'est-à-dire :
$$z = \frac{3}{5} - \frac{1}{5}\mathrm{i}.$$
2. $\dfrac{1+\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}} + \dfrac{1-\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}} = z + \overline{z}$.
Ainsi $\dfrac{1+\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}} + \dfrac{1-\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}} = 2\mathrm{Re}(z) = \dfrac{6}{5}$.

Exercice 2

1. $-\mathrm{i} + (2\mathrm{i} + 1)z = 4 + \mathrm{i}$

Exercice 2

1. $-\mathrm{i} + (2\mathrm{i}+1)z = 4+\mathrm{i} \Longleftrightarrow (1+2\mathrm{i})z = 4+2\mathrm{i}$

Exercice 2

1. $-\mathrm{i} + (2\mathrm{i}+1)z = 4+\mathrm{i} \iff (1+2\mathrm{i})z = 4+2\mathrm{i}$
   $\iff z = \dfrac{4+2\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}} =$

Exercice 2

1. $-\mathrm{i} + (2\mathrm{i}+1)z = 4 + \mathrm{i} \Longleftrightarrow (1+2\mathrm{i})z = 4 + 2\mathrm{i}$
$\Longleftrightarrow z = \dfrac{4+2\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}} = z = \dfrac{(4+2\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})}{1^2+2^2} \Longleftrightarrow$

Exercice 2

1. $-\mathrm{i} + (2\mathrm{i}+1)z = 4+\mathrm{i} \iff (1+2\mathrm{i})z = 4+2\mathrm{i}$
$\iff z = \dfrac{4+2\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}} = z = \dfrac{(4+2\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})}{1^2+2^2} \iff z = \dfrac{8}{5} - \dfrac{6}{5}\mathrm{i}$ donc :
$$\mathscr{S}_{\mathbb{C}} = \left\{\frac{8}{5} - \frac{6}{5}\mathrm{i}\right\}.$$

Exercice 2

1. $-\mathrm{i} + (2\mathrm{i}+1)z = 4+\mathrm{i} \iff (1+2\mathrm{i})z = 4+2\mathrm{i}$
$\iff z = \dfrac{4+2\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}} = z = \dfrac{(4+2\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})}{1^2+2^2} \iff z = \dfrac{8}{5} - \dfrac{6}{5}\mathrm{i}$ donc :
$$\mathscr{S}_{\mathbb{C}} = \left\{\frac{8}{5} - \frac{6}{5}\mathrm{i}\right\}.$$
2. $(\mathrm{i}z + 4 - \mathrm{i})(\overline{z} - 4\mathrm{i}) = 0$

Exercice 2

1. $-\mathrm{i} + (2\mathrm{i}+1)z = 4+\mathrm{i} \iff (1+2\mathrm{i})z = 4+2\mathrm{i}$
$\iff z = \dfrac{4+2\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}} = z = \dfrac{(4+2\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})}{1^2+2^2} \iff z = \dfrac{8}{5} - \dfrac{6}{5}\mathrm{i}$ donc :
$$\mathscr{S}_{\mathbb{C}} = \left\{\frac{8}{5} - \frac{6}{5}\mathrm{i}\right\}.$$
2. $(\mathrm{i}z + 4 - \mathrm{i})(\overline{z} - 4\mathrm{i}) = 0 \iff \mathrm{i}z + 4 - \mathrm{i} = 0 \quad \text{ou} \quad \overline{z} - 4\mathrm{i} = 0$

Exercice 2

1. $-\mathrm{i} + (2\mathrm{i}+1)z = 4+\mathrm{i} \iff (1+2\mathrm{i})z = 4+2\mathrm{i}$
$\iff z = \dfrac{4+2\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}} = z = \dfrac{(4+2\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})}{1^2+2^2} \iff z = \dfrac{8}{5} - \dfrac{6}{5}\mathrm{i}$ donc :
$$\mathscr{S}_{\mathbb{C}} = \left\{\frac{8}{5} - \frac{6}{5}\mathrm{i}\right\}.$$
2. $(\mathrm{i}z + 4 - \mathrm{i})(\overline{z} - 4\mathrm{i}) = 0 \iff \mathrm{i}z + 4 - \mathrm{i} = 0 \quad \text{ou} \quad \overline{z} - 4\mathrm{i} = 0$
$\iff z = \dfrac{-4+\mathrm{i}}{\mathrm{i}} \quad \text{ou} \quad \overline{z} = 4\mathrm{i}$

Exercice 2

1. $-\mathrm{i} + (2\mathrm{i}+1)z = 4+\mathrm{i} \iff (1+2\mathrm{i})z = 4+2\mathrm{i}$
$\iff z = \dfrac{4+2\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}} = z = \dfrac{(4+2\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})}{1^2+2^2} \iff z = \dfrac{8}{5} - \dfrac{6}{5}\mathrm{i}$ donc :
$$\mathscr{S}_{\mathbb{C}} = \left\{\frac{8}{5} - \frac{6}{5}\mathrm{i}\right\}.$$
2. $(\mathrm{i}z + 4 - \mathrm{i})(\overline{z} - 4\mathrm{i}) = 0 \iff \mathrm{i}z + 4 - \mathrm{i} = 0 \quad \text{ou} \quad \overline{z} - 4\mathrm{i} = 0$
$\iff z = \dfrac{-4+\mathrm{i}}{\mathrm{i}} \quad \text{ou} \quad \overline{z} = 4\mathrm{i}$
$\iff z = 1 + 4\mathrm{i} \quad \text{ou} \quad z = -4\mathrm{i}$ donc

Exercice 2

1. $-\mathrm{i} + (2\mathrm{i}+1)z = 4+\mathrm{i} \iff (1+2\mathrm{i})z = 4+2\mathrm{i}$
$\iff z = \dfrac{4+2\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}} = z = \dfrac{(4+2\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})}{1^2+2^2} \iff z = \dfrac{8}{5} - \dfrac{6}{5}\mathrm{i}$ donc :
$$\mathscr{S}_{\mathbb{C}} = \left\{\frac{8}{5} - \frac{6}{5}\mathrm{i}\right\}.$$
2. $(\mathrm{i}z + 4 - \mathrm{i})(\overline{z} - 4\mathrm{i}) = 0 \iff \mathrm{i}z + 4 - \mathrm{i} = 0 \quad \text{ou} \quad \overline{z} - 4\mathrm{i} = 0$
$\iff z = \dfrac{-4+\mathrm{i}}{\mathrm{i}} \quad \text{ou} \quad \overline{z} = 4\mathrm{i}$
$\iff z = 1 + 4\mathrm{i} \quad \text{ou} \quad z = -4\mathrm{i}$ donc :
$$\mathscr{S}_{\mathbb{C}} = \{1+4\mathrm{i}\,;\, -4\mathrm{i}\}.$$

Exercice 2

1. $-\mathrm{i}+(2\mathrm{i}+1)z=4+\mathrm{i} \Longleftrightarrow (1+2\mathrm{i})z=4+2\mathrm{i}$
   $\Longleftrightarrow z=\dfrac{4+2\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}=z=\dfrac{(4+2\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})}{1^2+2^2} \Longleftrightarrow z=\dfrac{8}{5}-\dfrac{6}{5}\mathrm{i}$ donc :
   $$\mathscr{S}_{\mathbb{C}}=\left\{\frac{8}{5}-\frac{6}{5}\mathrm{i}\right\}.$$
2. $(\mathrm{i}z+4-\mathrm{i})(\overline{z}-4\mathrm{i})=0 \Longleftrightarrow \mathrm{i}z+4-\mathrm{i}=0 \quad \text{ou} \quad \overline{z}-4\mathrm{i}=0$
   $\Longleftrightarrow z=\dfrac{-4+\mathrm{i}}{\mathrm{i}} \quad \text{ou} \quad \overline{z}=4\mathrm{i}$
   $\Longleftrightarrow z=1+4\mathrm{i} \quad \text{ou} \quad z=-4\mathrm{i}$ donc :
   $$\mathscr{S}_{\mathbb{C}}=\{1+4\mathrm{i}\,;\,-4\mathrm{i}\}.$$
3. Posons $z=x+\mathrm{i}y$ avec x et y réels.

Exercice 2

1. $-\mathrm{i} + (2\mathrm{i}+1)z = 4 + \mathrm{i} \iff (1+2\mathrm{i})z = 4 + 2\mathrm{i}$
   $\iff z = \dfrac{4+2\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}} = z = \dfrac{(4+2\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})}{1^2+2^2} \iff z = \dfrac{8}{5} - \dfrac{6}{5}\mathrm{i}$ donc :
   $$\mathscr{S}_{\mathbb{C}} = \left\{\frac{8}{5} - \frac{6}{5}\mathrm{i}\right\}.$$
2. $(\mathrm{i}z + 4 - \mathrm{i})(\overline{z} - 4\mathrm{i}) = 0 \iff \mathrm{i}z + 4 - \mathrm{i} = 0 \quad \text{ou} \quad \overline{z} - 4\mathrm{i} = 0$
   $\iff z = \dfrac{-4+\mathrm{i}}{\mathrm{i}} \quad \text{ou} \quad \overline{z} = 4\mathrm{i}$
   $\iff z = 1 + 4\mathrm{i} \quad \text{ou} \quad z = -4\mathrm{i}$ donc :
   $$\mathscr{S}_{\mathbb{C}} = \{1 + 4\mathrm{i}\,;\, -4\mathrm{i}\}.$$
3. Posons $z = x + \mathrm{i}y$ avec x et y réels.
   $z - 2\overline{z} + \mathrm{i} = 4 \iff x + \mathrm{i}y - 2(x - \mathrm{i}y) = 4 - \mathrm{i}.$
   $\iff -x + 3\mathrm{i}y = 4 - \mathrm{i}.$

Exercice 2

1. $-\mathrm{i} + (2\mathrm{i}+1)z = 4+\mathrm{i} \iff (1+2\mathrm{i})z = 4+2\mathrm{i}$
   $\iff z = \dfrac{4+2\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}} = z = \dfrac{(4+2\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})}{1^2+2^2} \iff z = \dfrac{8}{5} - \dfrac{6}{5}\mathrm{i}$ donc :
   $$\mathscr{S}_{\mathbb{C}} = \left\{\frac{8}{5} - \frac{6}{5}\mathrm{i}\right\}.$$
2. $(\mathrm{i}z + 4 - \mathrm{i})(\overline{z} - 4\mathrm{i}) = 0 \iff \mathrm{i}z + 4 - \mathrm{i} = 0 \quad \text{ou} \quad \overline{z} - 4\mathrm{i} = 0$
   $\iff z = \dfrac{-4+\mathrm{i}}{\mathrm{i}} \quad \text{ou} \quad \overline{z} = 4\mathrm{i}$
   $\iff z = 1 + 4\mathrm{i} \quad \text{ou} \quad z = -4\mathrm{i}$ donc :
   $$\mathscr{S}_{\mathbb{C}} = \{1+4\mathrm{i}\,;\,-4\mathrm{i}\}.$$
3. Posons $z = x + \mathrm{i}y$ avec x et y réels.
   $z - 2\overline{z} + \mathrm{i} = 4 \iff x + \mathrm{i}y - 2(x - \mathrm{i}y) = 4 - \mathrm{i}.$
   $\iff -x + 3\mathrm{i}y = 4 - \mathrm{i}.$
   En identifiant parties réelles et imaginaires, il vient :

Exercice 2

1. $-\mathrm{i} + (2\mathrm{i}+1)z = 4+\mathrm{i} \iff (1+2\mathrm{i})z = 4+2\mathrm{i}$
$\iff z = \dfrac{4+2\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}} = z = \dfrac{(4+2\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})}{1^2+2^2} \iff z = \dfrac{8}{5} - \dfrac{6}{5}\mathrm{i}$ donc :
$$\mathscr{S}_{\mathbb{C}} = \left\{\frac{8}{5} - \frac{6}{5}\mathrm{i}\right\}.$$
2. $(\mathrm{i}z + 4 - \mathrm{i})(\overline{z} - 4\mathrm{i}) = 0 \iff \mathrm{i}z + 4 - \mathrm{i} = 0 \quad \text{ou} \quad \overline{z} - 4\mathrm{i} = 0$
$\iff z = \dfrac{-4+\mathrm{i}}{\mathrm{i}} \quad \text{ou} \quad \overline{z} = 4\mathrm{i}$
$\iff z = 1 + 4\mathrm{i} \quad \text{ou} \quad z = -4\mathrm{i}$ donc :
$$\mathscr{S}_{\mathbb{C}} = \{1+4\mathrm{i}\,;\,-4\mathrm{i}\}.$$
3. Posons $z = x + \mathrm{i}y$ avec x et y réels.
$z - 2\overline{z} + \mathrm{i} = 4 \iff x + \mathrm{i}y - 2(x - \mathrm{i}y) = 4 - \mathrm{i}.$
$\iff -x + 3\mathrm{i}y = 4 - \mathrm{i}.$
En identifiant parties réelles et imaginaires, il vient : $-x = 4$ et
$3y = -1$ donc

Exercice 2

1. $-\mathrm{i}+(2\mathrm{i}+1)z=4+\mathrm{i} \iff (1+2\mathrm{i})z=4+2\mathrm{i}$
$\iff z=\dfrac{4+2\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}=z=\dfrac{(4+2\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})}{1^2+2^2} \iff z=\dfrac{8}{5}-\dfrac{6}{5}\mathrm{i}$ donc :
$$\mathscr{S}_{\mathbb{C}}=\left\{\frac{8}{5}-\frac{6}{5}\mathrm{i}\right\}.$$
2. $(\mathrm{i}z+4-\mathrm{i})(\overline{z}-4\mathrm{i})=0 \iff \mathrm{i}z+4-\mathrm{i}=0 \quad \text{ou} \quad \overline{z}-4\mathrm{i}=0$
$\iff z=\dfrac{-4+\mathrm{i}}{\mathrm{i}} \quad \text{ou} \quad \overline{z}=4\mathrm{i}$
$\iff z=1+4\mathrm{i} \quad \text{ou} \quad z=-4\mathrm{i}$ donc :
$$\mathscr{S}_{\mathbb{C}}=\{1+4\mathrm{i}\,;\,-4\mathrm{i}\}.$$
3. Posons $z=x+\mathrm{i}y$ avec x et y réels.
$z-2\overline{z}+\mathrm{i}=4 \iff x+\mathrm{i}y-2(x-\mathrm{i}y)=4-\mathrm{i}.$
$\iff -x+3\mathrm{i}y=4-\mathrm{i}.$
En identifiant parties réelles et imaginaires, il vient : $-x=4$ et $3y=-1$ donc $x=-4$ et $y=-\dfrac{1}{3}$ d'où

Exercice 2

1. $-\mathrm{i}+(2\mathrm{i}+1)z=4+\mathrm{i} \iff (1+2\mathrm{i})z=4+2\mathrm{i}$
   $\iff z=\dfrac{4+2\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}=z=\dfrac{(4+2\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})}{1^2+2^2} \iff z=\dfrac{8}{5}-\dfrac{6}{5}\mathrm{i}$ donc :
   $$\mathscr{S}_{\mathbb{C}}=\left\{\frac{8}{5}-\frac{6}{5}\mathrm{i}\right\}.$$
2. $(\mathrm{i}z+4-\mathrm{i})(\overline{z}-4\mathrm{i})=0 \iff \mathrm{i}z+4-\mathrm{i}=0 \quad \text{ou} \quad \overline{z}-4\mathrm{i}=0$
   $\iff z=\dfrac{-4+\mathrm{i}}{\mathrm{i}} \quad \text{ou} \quad \overline{z}=4\mathrm{i}$
   $\iff z=1+4\mathrm{i} \quad \text{ou} \quad z=-4\mathrm{i}$ donc :
   $$\mathscr{S}_{\mathbb{C}}=\{1+4\mathrm{i}\,;\,-4\mathrm{i}\}.$$
3. Posons $z=x+\mathrm{i}y$ avec x et y réels.
   $z-2\overline{z}+\mathrm{i}=4 \iff x+\mathrm{i}y-2(x-\mathrm{i}y)=4-\mathrm{i}.$
   $\iff -x+3\mathrm{i}y=4-\mathrm{i}.$
   En identifiant parties réelles et imaginaires, il vient : $-x=4$ et $3y=-1$ donc $x=-4$ et $y=-\dfrac{1}{3}$ d'où $z=-4-\dfrac{1}{3}\mathrm{i}.$
   Conclusion : $\mathscr{S}_{\mathbb{C}}=\left\{-4-\dfrac{1}{3}\mathrm{i}\right\}.$

Exercice 3

Soit z un complexe non réel et u un complexe différent de 1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur u pour que $\dfrac{z - u\overline{z}}{1-u}$ soit réel.

Exercice 3

Soit z un complexe non réel et u un complexe différent de 1.
Donner une condition nécessaire et suffisante sur u pour que $\dfrac{z - u\overline{z}}{1 - u}$ soit réel.
On pose $Z = \dfrac{z - u\overline{z}}{1 - u}$.

Exercice 3

Soit z un complexe non réel et u un complexe différent de 1.
Donner une condition nécessaire et suffisante sur u pour que $\dfrac{z-u\overline{z}}{1-u}$ soit réel.
On pose $Z = \dfrac{z-u\overline{z}}{1-u}$. Z réel $\Longleftrightarrow Z = \overline{Z}$.

Exercice 3

Soit z un complexe non réel et u un complexe différent de 1.
Donner une condition nécessaire et suffisante sur u pour que $\dfrac{z-u\overline{z}}{1-u}$ soit réel.

On pose $Z = \dfrac{z-u\overline{z}}{1-u}$. Z réel $\Longleftrightarrow Z = \overline{Z}$.

$Z = \overline{Z} \Longleftrightarrow \dfrac{z-u\overline{z}}{1-u} = \dfrac{\overline{z}-\overline{u}z}{1-\overline{u}}$

Exercice 3

Soit z un complexe non réel et u un complexe différent de 1.
Donner une condition nécessaire et suffisante sur u pour que $\dfrac{z - u\overline{z}}{1 - u}$ soit réel.

On pose $Z = \dfrac{z - u\overline{z}}{1 - u}$. Z réel $\iff Z = \overline{Z}$.

$Z = \overline{Z} \iff \dfrac{z - u\overline{z}}{1 - u} = \dfrac{\overline{z} - \overline{u}z}{1 - \overline{u}} \iff (z - u\overline{z})(1 - \overline{u}) = (1 - u)(\overline{z} - \overline{u}z)$

Exercice 3

Soit z un complexe non réel et u un complexe différent de 1.
Donner une condition nécessaire et suffisante sur u pour que $\dfrac{z-u\overline{z}}{1-u}$ soit réel.

On pose $Z = \dfrac{z-u\overline{z}}{1-u}$. Z réel $\iff Z = \overline{Z}$.

$Z = \overline{Z} \iff \dfrac{z-u\overline{z}}{1-u} = \dfrac{\overline{z}-\overline{u}z}{1-\overline{u}} \iff (z-u\overline{z})(1-\overline{u}) = (1-u)(\overline{z}-\overline{u}z)$

$\iff z-\overline{u}z-u\overline{z}+u\overline{u}\overline{z} = \overline{z}-\overline{u}z-u\overline{z}+u\overline{u}z$

Exercice 3

Soit z un complexe non réel et u un complexe différent de 1.
Donner une condition nécessaire et suffisante sur u pour que $\dfrac{z-u\overline{z}}{1-u}$ soit réel.

On pose $Z=\dfrac{z-u\overline{z}}{1-u}$. Z réel $\iff Z=\overline{Z}$.

$Z=\overline{Z} \iff \dfrac{z-u\overline{z}}{1-u}=\dfrac{\overline{z}-\overline{u}z}{1-\overline{u}} \iff (z-u\overline{z})(1-\overline{u})=(1-u)(\overline{z}-\overline{u}z)$

$\iff z-\overline{u}z-u\overline{z}+u\overline{u}\overline{z}=\overline{z}-\overline{u}z-u\overline{z}+u\overline{u}z$

$\iff z-\overline{z}+u\overline{u}\overline{z}-u\overline{u}z=0$

Exercice 3

Soit z un complexe non réel et u un complexe différent de 1.
Donner une condition nécessaire et suffisante sur u pour que $\dfrac{z-u\overline{z}}{1-u}$ soit réel.
On pose $Z = \dfrac{z-u\overline{z}}{1-u}$. Z réel $\iff Z = \overline{Z}$.

$Z = \overline{Z} \iff \dfrac{z-u\overline{z}}{1-u} = \dfrac{\overline{z}-\overline{u}z}{1-\overline{u}} \iff (z-u\overline{z})(1-\overline{u}) = (1-u)(\overline{z}-\overline{u}z)$
$\iff z-\overline{u}z-u\overline{z}+u\overline{u}\overline{z} = \overline{z}-\overline{u}z-u\overline{z}+u\overline{u}z$
$\iff z-\overline{z}+u\overline{u}\overline{z}-u\overline{u}z = 0$
$\iff (z-\overline{z})(1-u\overline{u}) = 0$

Exercice 3

Soit z un complexe non réel et u un complexe différent de 1.
Donner une condition nécessaire et suffisante sur u pour que $\dfrac{z-u\overline{z}}{1-u}$ soit réel.

On pose $Z=\dfrac{z-u\overline{z}}{1-u}$. Z réel $\iff Z=\overline{Z}$.

$Z=\overline{Z} \iff \dfrac{z-u\overline{z}}{1-u}=\dfrac{\overline{z}-\overline{u}z}{1-\overline{u}} \iff (z-u\overline{z})(1-\overline{u})=(1-u)(\overline{z}-\overline{u}z)$

$\iff z-\overline{u}z-u\overline{z}+u\overline{u}\overline{z}=\overline{z}-\overline{u}z-u\overline{z}+u\overline{u}z$

$\iff z-\overline{z}+u\overline{u}\overline{z}-u\overline{u}z=0$

$\iff (z-\overline{z})(1-u\overline{u})=0$

$\iff z=\overline{z}$

Exercice 3

Soit z un complexe non réel et u un complexe différent de 1.
Donner une condition nécessaire et suffisante sur u pour que $\dfrac{z-u\overline{z}}{1-u}$ soit réel.

On pose $Z = \dfrac{z-u\overline{z}}{1-u}$. Z réel $\iff Z = \overline{Z}$.

$Z = \overline{Z} \iff \dfrac{z-u\overline{z}}{1-u} = \dfrac{\overline{z}-\overline{u}z}{1-\overline{u}} \iff (z-u\overline{z})(1-\overline{u}) = (1-u)(\overline{z}-\overline{u}z)$

$\iff z - \overline{u}z - u\overline{z} + u\overline{u}\overline{z} = \overline{z} - \overline{u}z - u\overline{z} + u\overline{u}z$

$\iff z - \overline{z} + u\overline{u}\overline{z} - u\overline{u}z = 0$

$\iff (z-\overline{z})(1-u\overline{u}) = 0$

$\iff z = \overline{z} \quad \text{ou} \quad 1 - u\overline{u} = 0.$

Exercice 3

Soit z un complexe non réel et u un complexe différent de 1.
Donner une condition nécessaire et suffisante sur u pour que $\dfrac{z-u\overline{z}}{1-u}$ soit réel.

On pose $Z = \dfrac{z-u\overline{z}}{1-u}$. Z réel $\iff Z = \overline{Z}$.

$Z = \overline{Z} \iff \dfrac{z-u\overline{z}}{1-u} = \dfrac{\overline{z}-\overline{u}z}{1-\overline{u}} \iff (z-u\overline{z})(1-\overline{u}) = (1-u)(\overline{z}-\overline{u}z)$

$\iff z - \overline{u}z - u\overline{z} + u\overline{u}\overline{z} = \overline{z} - \overline{u}z - u\overline{z} + u\overline{u}z$

$\iff z - \overline{z} + u\overline{u}\overline{z} - u\overline{u}z = 0$

$\iff (z-\overline{z})(1-u\overline{u}) = 0$

$\iff z = \overline{z} \quad \text{ou} \quad 1 - u\overline{u} = 0.$

L'énoncé précise que z n'est pas réel donc $z \neq \overline{z}$ donc la condition nécessaire et suffisante pour que Z soit réel est que $u\overline{u} = 1$ avec $u \neq 1$.