☆☆☆☆☆ Exercice 1 — 4 points

Soient m et n deux entiers relatifs. Démontrer que :

$$m \equiv 9n + 4 \quad [26] \iff n \equiv 3m + 14 \quad [26].$$

★★★☆☆ Exercice 2 — 7 points

On se place dans un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}\,;\,\vec{u}\,,\,\vec{v}\,)$.
On considère le point M_n d'affixe z_n où (z_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $z_0 = -1$ et pour tout entier naturel n par :

$$z_{n+1} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) z_n$$

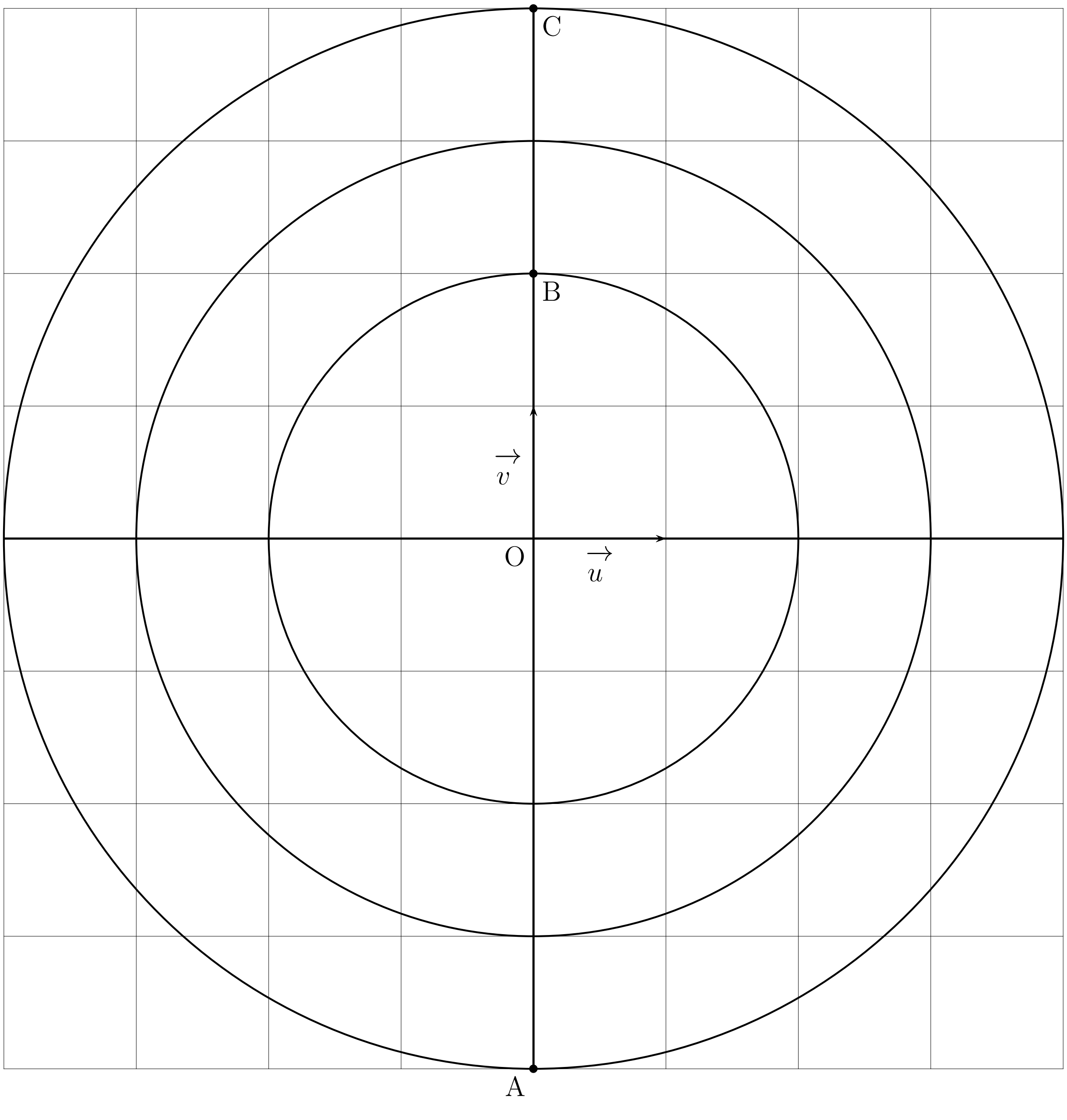
1. Déterminer le module et un argument de $\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
2. (a) Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, on a $|z_n| = 1$.
   (b) En déduire que le point M_n appartient à un cercle dont vous préciserez le centre et le rayon.
3. Démontrer que le point O est situé sur la médiatrice du segment $[M_n M_{n+1}]$.

★★☆☆☆ Exercice 3 — 9 points

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}\,;\,\vec{u}\,,\,\vec{v}\,)$.
Les points A, B et C ont pour affixes respectives $a = -4\mathrm{i}$, $b = 2\mathrm{i}$ et $c = 4\mathrm{i}$.

On considère les trois points A′, B′ et C′ d'affixes respectives $a' = ja$, $b' = jb$ et $c' = jc$ où j est le nombre complexe $-\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

1. Calculer la forme algébrique de a'.
   On admettra que $b = -\sqrt{3} - \mathrm{i}$ et $c' = -2\sqrt{3} - 2\mathrm{i}$.
2. (a) Déterminer le module et un argument de j.
   (b) En déduire le module et un argument de a', b' et c'.
3. Placer les points A′, B′ et C′ dans le repère donné en page 2.
4. Démontrer que les points A′, B′ et C′ sont alignés.
5. On note M le milieu du segment [A′C], N le milieu du segment [C′C] et P le milieu du segment [C′A].
   Démontrer que le triangle MNP est isocèle.


C
B
$\vec{v}$
O
$\vec{u}$
A