Devoir surveillé nº5

1. L'apéritif /2

Soient a un entier non nul et b et m des entiers.
Démontrer que si a divise b alors ma divise mb.

2. L'entrée /4

1. Déterminer l'ensemble des entiers relatifs n tels que $3n + 2$ divise 17.
2. Déterminer l'ensemble des entiers relatifs n tels que $n + 5$ divise $3n + 4$.

3. Le plat de résistance /4

Le reste dans la division euclidienne d'un entier a par 7 est 4 et le reste dans la division euclidienne d'un entier b par 7 est 3.

1. Démontrer que $a + b$ est divisible par 7.
2. Quel est le reste dans la division euclidienne de a^2 par 7 ?

4. Le dessert /8

Pour tout entier naturel n on pose :

$$a_n = 4^{2n+2} - 1 \text{ et } b_n = 4^{2n+2} - 15n - 6.$$

1. (a) Vérifier que pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 16a_n + 15$.
   (b) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, 15 divise a_n.
2. (a) Démontrer que pour tout entier naturel n, $b_{n+1} - b_n = 15a_n$.
   (b) En déduire que, pour tout entier naturel n, 225 divise b_n.

5. Le digestif /2

Soient a, b et c trois entiers.
Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a, b et c pour que le polynôme défini sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 1$ admette une racine dans $\mathbb{Z}$.

Supposez n racine entière de P....

Devoir surveillé n°5*

1. L'apéritif /2

Soient a et b deux entiers.
On considère l'affirmation : si 6 divise a et 6 divise $a+b$ alors 6 divise b.
Dire si cette affirmation est vraie ou fausse en justifiant la réponse donnée.

2. L'entrée /4

1. Déterminer l'ensemble des entiers relatifs n tels que $4n+2$ divise 11.
2. Déterminer l'ensemble des entiers relatifs n tels que $2n+5$ divise $3n+4$.

3. Le plat de résistance /4

1. Dresser la liste des diviseurs positifs de 91.
2. Dans la division euclidienne de 97 par un entier b le reste est 6.
   Donner les valeurs possibles de b et du quotient.

4. Le dessert /8

Soient a et b deux entiers.

1. (a) Vérifier que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $a^{k+1} - b^{k+1} = a(a^k - b^k) + b^k(a-b)$.
   (b) Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a - b$ divise $a^n - b^n$.
2. En utilisant la question 1.b., montrer que si n est un entier naturel impair alors $a+1$ divise $a^n + 1$.
3. Montrer que si $a \geqslant 3$ et si n est un entier naturel supérieur ou égal à 2 alors $a^n - 1$ admet au moins 3 diviseurs positifs.

5. Le digestif /2

Soient a, b et c trois entiers.
Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a, b et c pour que le polynôme défini sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx - 1$ admette une racine dans $\mathbb{Z}$.

Supposez n racine entière de P....