PROBLÈME.

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \int_0^1 (1-t)^n \mathrm{e}^t \, \mathrm{d}t.$$

1. Vérifier que $u_0 = \mathrm{e} - 1$.
2. (a) Montrer à l'aide d'une intégration par parties que, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = (n+1)u_n - 1$$

.

   (b) En déduire la valeur de u_1 et de u_2.
3. Soient f_2 et f_1 les fonctions définies sur $[0\,;1]$ respectivement par $f_1(x) = (1-x)\mathrm{e}^x$ et $f_2(x) = (1-x)^2\mathrm{e}^x$.
   (a) Étudier sur $[0\,;1]$ la position relative des courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ associées respectivement aux fonctions f_1 et f_2.
   (b) En déduire l'aire de la surface délimitée par les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$. [1]
4. (a) Démontrer que la suite (u_n) est minorée par 0.
   (b) La suite (u_n) est décroissante. Justifier cette assertion.
   (c) La suite (u_n) est-elle convergente ? Justifier.
5. (a) Montrer que pour tout réel t de l'intervalle $[0\,;1]$ et pour tout entier naturel non nul n

$$(1-t)^n \mathrm{e}^t \leqslant \mathrm{e} \times (1-t)^n.$$

   (b) En déduire que pour tout n non nul, $u_n \leqslant \dfrac{\mathrm{e}}{n+1}$.
6. Déterminer la limite de la suite (u_n).

1. Pensez à utiliser la question 2.