Chapitre

3

# Limites et dérivation

La notion d'infini a turlupiné les plus grands esprits pendant des siècles. De rudes batailles philosophico-mathématiques ont été menées de l'Antiquité à nos jours.
Même si la conception de limite est encore en évolution, celle que vous avez découverte en classe de Première a vu le jour en 1850 grâce au charmant WEIERSTRASS et avait échappé à GALILÉE, DESCARTES, PASCAL, LEIBNIZ, NEWTON, etc. bref : du beau monde...et on vous demande d'assimiler cette notion en quelques semaines !
L'humanité ayant pris son temps pour l'acquérir, n'hésitez pas vous non plus à réfléchir calmement à ce à quoi peut ressembler un « infiniment grand »et un « infiniment petit ».
Cela vous permettra peut-être d'éviter d'écrire, comme tant d'autres lycéens, de grosses bêtises sur vos copies au moment de calculer des limites.

## 1. Limite d'une fonction à l'infini

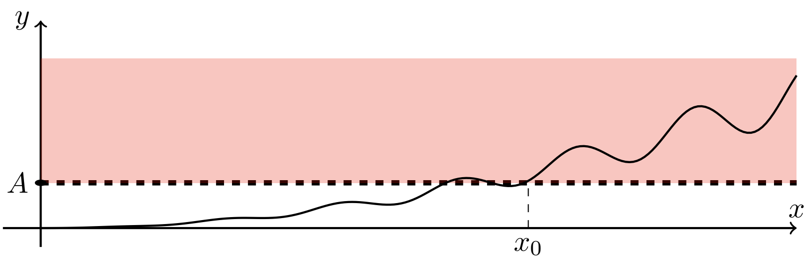
### 1.1 Limite infinie à l'infini

**Définition 1.3**

On considère une fonction $f$ définie sur un intervalle de la forme $]a\,;+\infty[$.
On dit que $f$ a **pour limite** $+\infty$ **en** $+\infty$ lorsque tout intervalle de la forme $]A\,;+\infty[$ contient toutes les valeurs de $x$ dès que $x$ est **suffisamment grand.**
On écrit :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.}$$

**Illustration :**



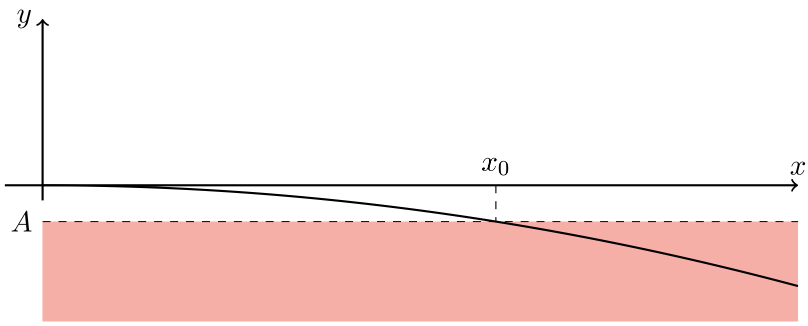

**Remarque.** Je vous laisse adapter cette définition pour cet énoncé au cas d'une limite en $-\infty$.

**Définition 2.3**

On considère une fonction $f$ définie sur un intervalle de la forme $]a\,;+\infty[$.
On dit que $f$ a **pour limite** $-\infty$ **en** $+\infty$ lorsque tout intervalle de la forme $]-\infty\,;A[$ contient toutes les valeurs de $x$ dès que $x$ est suffisamment grand.
On écrit :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty.}$$

**Illustration :**




**Remarque.** Je vous laisse adapter cette définition pour cet énoncé au cas d'une limite en $-\infty$.

**Propriété 1.3 (Limites de référence).**

**1.** En $+\infty$ :

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$

(b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$

(c) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^p = +\infty$ si $p \geqslant 1$

(d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$

**2.** En $-\infty$ :

(a) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$

(b) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^p = +\infty$ si $p$ est pair et $-\infty$ si $p$ est impair.

## ★ Démonstration de l'exponentielle en $+\infty$

## 1.2 Limite finie à l'infini

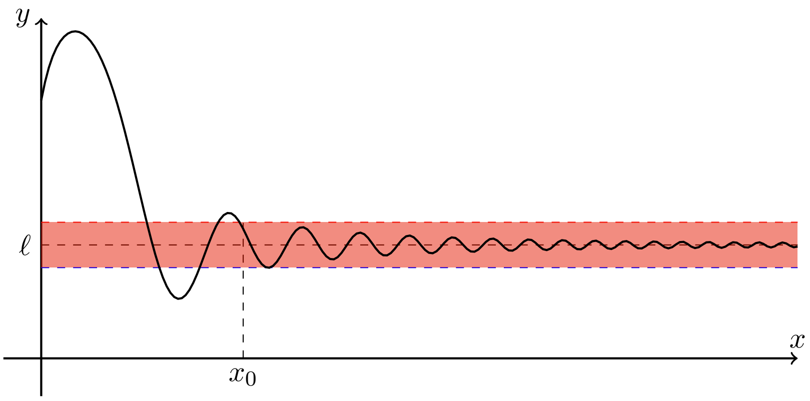
**Définition 3.3**

On considère une fonction $f$ définie sur un intervalle de la forme $]a\,;+\infty[$ et un réel $\ell$.
On dit que $f$ a **pour limite $\ell$ en $+\infty$** lorsque tout intervalle $I$ ouvert contenant $\ell$ (comme $]\ell-\varepsilon,\ell+\varepsilon[$) contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que $x$ est **suffisamment grand**. Il existe un réel $x_0$ tel que pour tout $x \geqslant x_0$, $f(x) \in I$. On écrit :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell.}$$

**Remarque.** Je vous laisse de nouveau adapter cet énoncé au cas d'une limite en $-\infty$.

**Illustration :**




**Propriété 2.3 (Limites de référence).**

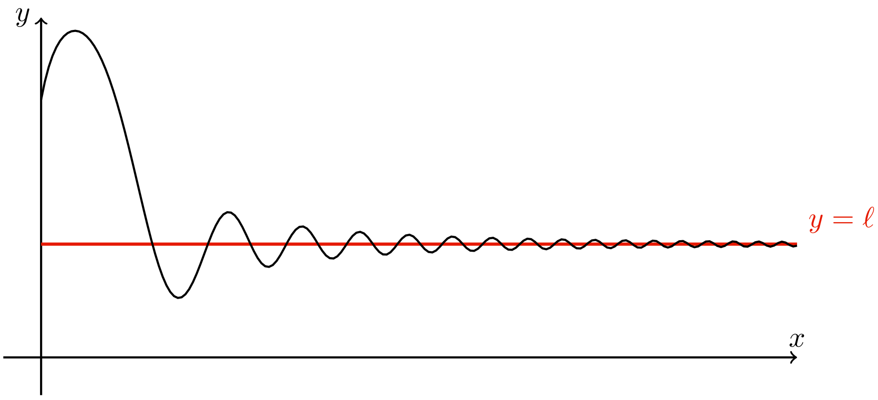
1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$
4. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0$
5. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$
6. $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0.$

**★ Démonstration de l'exponentielle en $-\infty$**

**Définition 4.3**

Lorsque $f$ a pour limite $\ell$ en $+\infty$ (resp. -$\infty$), on dit que la droite d'équation $y = \ell$ est **asymptote horizontale** à la courbe représentative de la fonction $f$ notée $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$ (resp. -$\infty$).

**Exemple.**



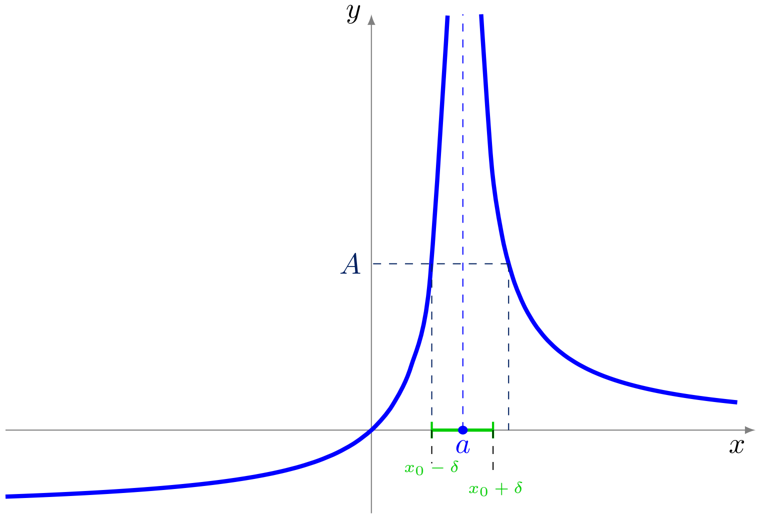

Dans cet exemple $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$, ce qui implique que la droite d'équation $y = \ell$ est **asymptote horizontale** à la courbe représentative de $f$ au voisinage de $+\infty$.

## 2. Limite infinie d'une fonction en un réel

**Définition 5.3**

On considère une fonction $f$ définie sur un ensemble ouvert dont le réel $a$ est une borne.
On dit que $f$ a **pour limite $+\infty$ en $a$** lorsque tout intervalle de la forme $]A\,;+\infty[$ contient toutes les valeurs de $x$ dès que ***x* est assez proche de *a***.
On écrit :

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = +\infty.}$$




**Définition 6.3**

On dit que $f$ admet pour $+\infty$ en $a$ à droite lorsque tout intervalle $]A\,;+\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que $x$ est **assez proche** de $a$, $x$ **restant strictement supérieur** à $a$.
On écrit :

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = +\infty.}$$

**Remarque.** Je vous laisse encore adapter cet énoncé au cas d'une limite en $a$ par valeurs inférieures.

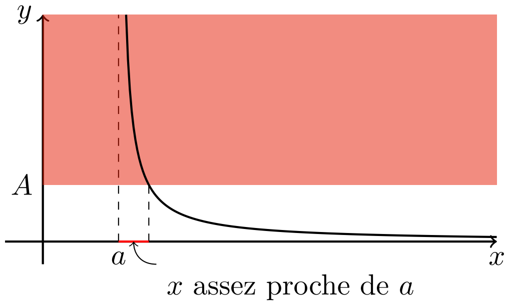
**Propriété 3.3 (Limites de référence).**

- $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty.$
- $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{x} = -\infty.$
- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty.$
- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$

**Définition 7.3**

Lorsque $f$ a pour limite $+\infty$ ou $-\infty$ en $a$ (ou à droite de $a$, ou à gauche de $a$), on dit que la droite d'équation $x = a$ est **asymptote verticale** à la courbe représentative de la fonction $f$.

**Exemple.**




**Application 1.3.** On considère une fonction $f$ dérivable dont le tableau de variation est donné ci-dessous :

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| signe de $f'(x)$ | | $-$ | \|\| | $-$ | $0$ | $+$ | |
| Variations de $f$ | $5$ ↘ | | $-\infty$ \|\| $+\infty$ | ↘ | $-4$ | ↗ | $2$ |

Préciser les différentes asymptotes à la courbe représentative de la fonction $f$.

# 3. Théorèmes d'opérations

## 3.1 Limites et opérations

Les principaux résultats sur les calculs de limites ont été vus au chapitre 2, avec les formes indéterminées.
Un exemple pour illustrer avec une rédaction possible :

**Application 2.3.** On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ par $f(x) = \dfrac{1}{2x-4}$.

Déterminer les limites de $f$ eux bornes de son ensemble de définition et en déduire l'existence d'asymptotes à la courbe représentative de $f$.

Il existe des limites que l'on ne pourra calculer à l'aide des opérations algébriques déjà vues. Par exemple, comment peut-on procéder pour calculer la limite de $f\ :\ x \mapsto \mathrm{e}^{-\sqrt{x}}$ en $+\infty$ ?

## 3.2 Limite d'une composée

Pour décrire une fonction, on peut parfois la décomposer en enchaînements de fonctions plus simples, comme les fonctions de référence vues en 1re comme $x \mapsto x^2$, $x \mapsto \mathrm{e}^x$, $x \mapsto \dfrac{1}{x}$...

**Définition 8.3**

Soient deux fonctions $u$ et $v$ définies sur deux ensembles $I$ et $J$ tels que l'image de $I$ par $u$ est contenue dans $J$ : $u(I) \subset J$.
La fonction obtenue en appliquant successivement $u$, puis $v$, s'appelle la **composée** de la fonction $u$ par la fonction $v$ et est notée $v \circ u$, ou parfois.
Pour tout réel $x$ de $I$ :

$$\boldsymbol{(v \circ u)(x) = v[u(x)]}.$$

**Théorème 3.3.**
Soient $\omega$, $\Omega$ et $\ell$ des réels ou l'infini et $u$ et $v$ deux fonctions, alors

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\omega} u(x) = \Omega \\ \lim\limits_{T\to\Omega} v(T) = \ell\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to\omega} v\circ u(x) = \ell$$

**Application 4.3.** Retour sur l'exemple avec $f\ : x \mapsto \mathrm{e}^{-\sqrt{x}}$ en $+\infty$.

## 3.3 Limites et comparaisons

On dispose de théorèmes analogues à ceux déjà vus pour les suites.
Soient deux fonctions $f$ et $g$ définies sur un intervalle $]a\,;+\infty[$ telles que pour tout réel $x > a$, $g(x) \geqslant f(x)$.

**Théorème 5.3.**
1. Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.
2. Si $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

**Remarque.** On obtient des théorèmes analogues en $-\infty$.

**Application 6.3.** Déterminer la limite, si elle existe, de $3x - \sin x$ en $-\infty$.

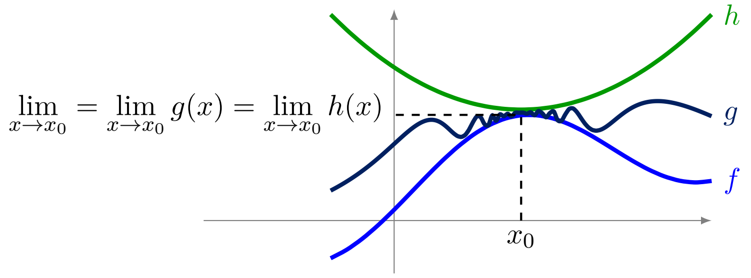
**Théorème 7.3.**

Soit $x_0$ un réel ou $x_0 = \pm\infty$.

Si $f \leqslant g \leqslant h$ et si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = \ell \in \mathbb{R}$, alors :

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} g(x) = \ell}.$$

**Illustration.**




**Application 8.3.** Déterminer la limite, si elle existe, de $\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$ en $+\infty$.

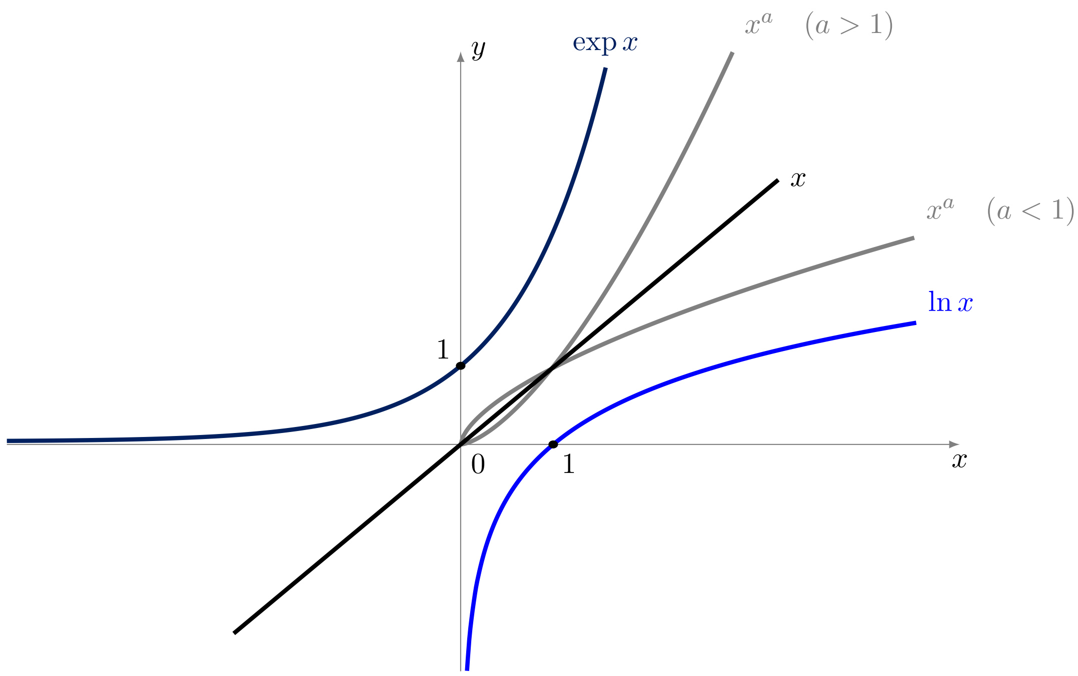
## 3.4 Croissances comparées

**Propriété 4.3.** Soit $n$ un entier naturel.

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^n} = +\infty, \qquad \lim_{x \to -\infty} x^n \mathrm{e}^x = 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{x}} = 0}$$

**Application 9.3.** Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} x\mathrm{e}^x + 2x - 4$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{3x}}{x}$.

**Illustration des croissances comparées :**




# 4. Compléments sur la dérivation

## 4.1 Dérivée de la composée

**Propriété 5.3.** Soit $v$ une fonction dérivable sur un intervalle $J$ telle que pour tout réel $x$ de l'intervalle $I$, $u(x) \in I$. La fonction $(v \circ u)$ est **dérivable** sur $I$ et :

$$\boxed{(v \circ u)' = u' \times (v' \circ u)}.$$

## 4.2 Cas particuliers

### 4.2.1 Dérivée de $u^n$

**Propriété 6.3.** Soit $n$ un entier non nul $n$. Si $u$ est une fonction **dérivable** sur un intervalle $I$ et si lorsque $n$ est **strictement négatif**, $u$ ne s'annule pas sur $I$, alors la fonction $u^n$ est dérivable sur $I$ et :

$$\boxed{(u^n)' = nu'u^{n-1}}$$

### 4.2.2 Dérivée de $\sqrt{u}$

**Propriété 7.3.** Si $u$ est une fonction **dérivable** et **strictement positive** sur un intervalle $I$ alors la fonction $\sqrt{u}$ est dérivable sur $I$ et :

$$\boxed{(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}}$$

### 4.2.3 Dérivée de $e^u$

**Propriété 8.3.** Si $u$ est une fonction **dérivable** sur un intervalle $I$ alors la fonction $e^u$ est dérivable sur $I$ et :

$$\boxed{(e^u)' = u'e^u}$$

**Application 10.3.** Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = e^{-x^2+6x+4} \text{ sur } I = \mathbb{R} \text{ et } f_2(x) = (3x^2 + 7x - 5)^9 \text{ sur } I = \mathbb{R}.$$