



Denis Guedj
1940/2010

D'impossibles à imaginaires, d'imaginaires à complexes. Combien d'idées, de systèmes politiques, de théories, de procédés ont suivi ce chemin pour devenir "réalité" !

1. Équations du second degré à coefficients réels

1.1 Équations du type $az^2 + bz + c = 0$, $a \neq 0$

Propriété 1.3. Soit l'équation du second degré $az^2 + bz + c = 0$ avec $a \neq 0$, b et c des réels. Cette équation admet toujours des solutions dans l'ensemble des nombres complexes \mathbb{C} .

À l'aide de son discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$, on distingue **trois cas** :


1. Si $\Delta = 0$, il existe une **unique** solution $z = -\frac{b}{2a}$.
2. Si $\Delta > 0$, il existe **deux solutions réelles** $z = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.
3. Si $\Delta < 0$, il existe **deux solutions complexes conjuguées** $z = \frac{-b \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$.

Application 1.3. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $z^2 - 2z + 5 = 0$.

1.2 Cas particulier : équations du type $z^2 = a$, $a \neq 0$

Propriété 2.3. L'équation $z^2 = a$ admet **toujours deux solutions** dans \mathbb{C} :

1. Si $a > 0$, les solutions sont les **réels** :
2. Si $a < 0$, les solutions sont les **imaginaires purs** :

 **Application 2.3.** Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $z^2 + 16 = 0$.

1.3 Factorisation d'un polynôme du second degré

Propriété 3.3. Soit a , b et c trois réels avec $a \neq 0$.

On considère le polynôme P tel que, pour tout z de \mathbb{C} , on ait : $P(z) = az^2 + bz + c$.

On note z_1 et z_2 les solutions dans \mathbb{C} de l'équation $P(z) = 0$, avec éventuellement $z_1 = z_2$ si $\Delta = 0$.

Alors pour tout z de \mathbb{C} , on a :

$$P(z) = a(z - z_1)(z - z_2).$$

 **Application 3.3.** Factoriser dans \mathbb{C} , $P(z) = z^2 - 4z + 8$.

2. Factorisation des polynômes

2.1 Fonction polynôme

Définition 1.3

1. Soit n un entier naturel et $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ des réels (éventuellement complexes) avec $a_n \neq 0$.

Une **fonction polynôme** ou **polynôme** P est une fonction définie sur \mathbb{C} pouvant s'écrire, pour tout complexe z , sous la forme :

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0.$$

2. On appelle **polynôme nul** le polynôme P tel que pour tout complexe x ,

$$P(z) = 0.$$

3. Si P n'est pas le polynôme nul, n est le **degré** de P .

4. On appelle **racine** de P tout nombre complexe z_0 tel que :

$$P(z_0) = 0.$$

 **Application 4.3.** Soit P le polynôme défini sur \mathbb{C} par $P(z) = z^3 - (1 + i)z^2 + z - 1 - i$.

1. Quel est le degré de P ?

2. Montrer que i est racine de P .


Propriété 4.3 (admise). Un polynôme est le polynôme nul si et seulement si **tous ses coefficients sont nuls**.

2.2 Factorisation par $z - \alpha$

Définition 2.3

On dit qu'un polynôme P est **factorisable** (ou divisible) par $z - \alpha$ s'il existe un polynôme Q tel que pour tout complexe z :

$$P(z) = (z - \alpha)Q(z).$$

 **Application 5.3.** Soit le polynôme P défini dans \mathbb{C} par : $P(z) = z^3 - 12z^2 + 48z - 128$.

1. Montrer que 8 est une racine de P .


2. En déduire les réels a et b tels que $P(z) = (z - 8)(z^2 + az + b)$.

3. En déduire l'ensemble des racines de P .

Propriété 5.3. Soit a un nombre complexe.

Pour tout complexe z et tout entier naturel non nul, $z^n - a^n$ est **factorisable** par $z - a$ et :

$$z^n - a^n = (z - a)(z^{n-1} + az^{n-2} + a^2z^{n-3} + \dots + a^{n-2}z + a^{n-1}) = (z - a) \left(\sum_{k=0}^{n-1} a^k z^{n-1-k} \right).$$

 **Application 6.3.** Soit $P(z) = z^3 - 27$. Factoriser P dans \mathbb{C} .
