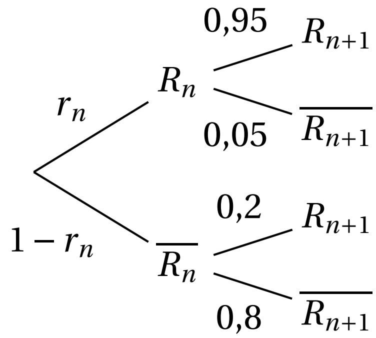
Exercice 1.

1. Voici l'arbre pondéré complété :



2. (a) R_n et $\overline{R_n}$ forment une partition de l'univers donc, d'après les probabilités totales on a :

$$\begin{aligned} r_{n+1} &= p\left(R_{n+1}\right) \\ &= p\left(R_n \cap R_{n+1}\right) + p\left(\overline{R_n} \cap R_{n+1}\right) \\ &= p_{R_n}\left(R_{n+1}\right) \times p\left(R_n\right) + p_{\overline{R_n}}\left(R_{n+1}\right) \times p\left(\overline{R_n}\right) \\ &= 0{,}95 r_n + 0{,}2\left(1 - r_n\right) \\ &= 0{,}75 r_n + 0{,}2 \end{aligned}$$

(b) On procède par récurrence : soit P_n : « $r_n \geqslant 0{,}8$ ».

Initialisation : $r_1 = p\left(R_1\right) = 0{,}9$ donc $r_1 \geqslant 0{,}8$ et P_1 est donc vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons P_n vraie ($r_n \geqslant 0{,}8$).
Montrons que P_{n+1} est vraie ($r_{n+1} \geqslant 0{,}8$) .
D'après l'hypothèse de récurrence : $r_n \geqslant 0{,}8$ et en multipliant cette inégalité par $0{,}75 > 0$ il vient $0{,}75 r_n \geqslant 0{,}6$ puis en additionnant 0,2 on a $0{,}75 r_n + 0{,}2 \geqslant 0{,}8$ soit $r_{n+1} \geqslant 0{,}8$ ce qui prouve que P_{n+1} est vraie.

Conclusion : P_1 est vraie et P_n est héréditaire à partir du rang $n = 1$, P_n est donc vraie pour tout entier naturel n non nul c'est-à-dire $r_n \geqslant 0{,}8$.

(c) $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} r_{n+1} - r_n &= 0{,}75 r_n + 0{,}2 - r_n \\ &= -0{,}25 r_n + 0{,}2 \end{aligned}$$

D'après la question précédente on a démontré que $r_n \geqslant 0{,}8$ donc en multipliant cette inégalité par $-0{,}25 < 0$, il vient $-0{,}25 r_n \leqslant -0{,}2$ puis en additionnant 0,2 on obtient $-0{,}25 r_n + 0{,}2 \leqslant 0$ soit $r_{n+1} - r_n \leqslant 0$ ce qui prouve que la suite $\left(r_n\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.

(d) La suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée par 0,8 donc la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une limite ℓ telle que $\ell \geqslant 0{,}8$.

(e) La suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente, soit ℓ sa limite.
On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = \ell$. De même $\lim\limits_{n\to+\infty} r_{n+1} = \ell$. Or $r_{n+1} = 0{,}75r_n + 0{,}2$.
Par passage à la limite il vient : $\lim\limits_{n\to+\infty} r_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}75r_n + 0{,}2 = 0$ soit $\ell = 0{,}75\ell + 0{,}2$.
On a rapidement $\ell = \dfrac{4}{5} = 0{,}8$.

3. (a) $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= r_{n+1} - 0{,}8 \\ &= 0{,}75r_n + 0{,}2 - 0{,}8 \\ &= 0{,}75r_n - 0{,}6 \\ &= 0{,}75\left(r_n - \frac{0{,}6}{0{,}75}\right) \\ &= 0{,}75(r_n - 0{,}8) \\ &= 0{,}75v_n \end{aligned}$$

On en déduit que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est géométrique de raison $q = 0{,}75$ et de premier terme $v_1 = r_1 - 0{,}8 = 0{,}9 - 0{,}8 = 0{,}1$.

(b) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = v_1 q^{n-1}$ soit $v_n = 0{,}1 \times 0{,}75^{n-1}$.
Or $v_n = r_n - 0{,}8$ donc $r_n = v_n + 0{,}8$ soit $r_n = 0{,}1 \times 0{,}75^{n-1} + 0{,}8$.

(c) $-1 < 0{,}8 < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}75^{n-1} = 0$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}1 \times 0{,}75^{n-1} = 0$ et enfin

$$\lim_{n\to+\infty} r_n = 0{,}8$$

.
À long terme, la probabilité que le client rapporte la bouteille du panier sera égale à 0,8.

4. (a) La suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante, de premier terme $r_1 = 0{,}9$ et de limite 0,8 : il existe donc un entier n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $r_n \leqslant 0{,}85$.

(b) Voici le programme complété :

```
def seuil():
    r=0.9
    n=1
    while r>=0.85 :
        n=n+1
        r=0.75*r+0.2
    return n
```

Exercice 2.

1. Pour tout entier naturel n non nul on a $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$ donc $0 \leqslant \dfrac{1+(-1)^n}{\sqrt{n}} \leqslant \dfrac{2}{\sqrt{n}}$.

   De façon évidente $\lim\limits_{n\to+\infty} 0 = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{\sqrt{n}} = 0$ donc d'après le théorème d'encadrement des limites :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{1+(-1)^n}{\sqrt{n}} = 0}.$$

2. Pour tout entier naturel n, $-1 \leqslant \cos(n^2) \leqslant 1$ puis en multipliant cet encadrement par $-2 < 0$, il vient :
   $-2 \leqslant -2\cos(n^2) \leqslant 2$ puis en additionnant n^3 il vient : $n^3 - 2 \leqslant n^3 - 2\cos(n^2) \leqslant n^3 + 2$.
   Or $\lim\limits_{n\to+\infty} n^3 - 2 = +\infty$ donc d'après le théorème de comparaison des limites :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} n^3 - 2\cos(n^2) = +\infty}.$$

3. Calculons $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5n^2}{n^2+6n+3}$

   On a une forme indéterminée du type « $\dfrac{\infty}{\infty}$ » donc on change d'écriture.
   Soit $n > 0$:

$$\begin{aligned} \frac{5n^2}{n^2+6n+3} &= \frac{\cancel{n^2}\times 5}{\cancel{n^2}\left(1+\dfrac{6}{n}+\dfrac{3}{n^2}\right)} \\ &= \frac{5}{1+\dfrac{6}{n}+\dfrac{3}{n^2}} \end{aligned}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to+\infty} 5 = 5 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} 1+\dfrac{6}{n}+\dfrac{3}{n^2} = 1 \end{array}\right\} \overset{\text{par quotient des limites}}{\Longrightarrow} \lim_{n\to+\infty} \frac{5}{1+\dfrac{6}{n}+\dfrac{3}{n^2}} = 5.$$

   Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5n^2}{n^2+6n+3} = 5$.