CHAPITRE

5

Variables aléatoires

5.1 Répétition d'expériences indépendantes

Définition 1.5.

On parle d'expériences aléatoires *identiques et indépendantes* lorsque :

- la *même* expérience est répétée plusieurs fois ;
- l'issue d'une expérience *ne dépend pas* des précédentes.

Exemple 1.5.

Les cas suivants correspondent-ils à des répétitions d'expériences identiques et indépendantes ?

1. On lance trois fois le même dé truqué, et on regarde la face obtenue.

2. On lance trois pièces équilibrées, et on regarde la face obtenue.

3. On pioche trois boules dans une urne, avec remise.

4. On pioche trois boules dans une urne, sans remise.

5. On lance trois dés à 4, 6 et 8 faces, et on regarde la face obtenue.

Définition 2.5.

Dans le cas d'une répétition d'expériences aléatoires identiques et indépendantes, une issue est une liste de résultats et la probabilité de cette issue est le produit des probabilités de chacun des résultats de la liste.

Exemple 2.5.
On pioche avec remise trois boules dans une urne contenant une boule blanche (B), deux boules rouges (R) et trois boules vertes (V) et on regarde leur couleur.

- L'évènement RVR signifie :
- $\mathbf{P}(\text{RVB}) =$

Propriété 1.5.
On peut modéliser la répétition d'expériences identiques et indépendantes par un arbre de probabilités (ou arbre pondéré) respectant les règles suivantes :

- la *somme* des probabilités des branches issues d'un nœud est égale à 1.
- Le probabilité d'une issue d'un chemin est égale au *produit* des probabilités rencontrées sur le chemin.
- La probabilité d'un évènement est égale à *la somme* des probabilités des issues qui le composent.

Exemple 3.5.
Une pièce truquée a une probabilité $\frac{1}{3}$ de tomber sur pile. On la lance deux fois de suite. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement deux fois pile ?

Définition 3.5.
Une *épreuve de Bernoulli* de paramètre p est une expérience aléatoire qui ne comporte que deux issues contraires. L'une est appelée le *succès* (noté S), de probabilité p, et l'autre *échec* (noté $\overline{S}$), de probabilité $1 - p$.

Exemple 4.5.
Quel est le paramètre des épreuves de Bernoulli suivantes ?

1. On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes, et on observe si c'est un as.

2. On lance un dé équilibré à 6 faces, et on observe si la face obtenue est 6.

5.2 Variables aléatoires

Exemple 5.5.
On lance trois pièces de monnaies équilibrées.

1. Lister toutes les issues possibles.

2. On gagne 2€ pour chaque résultat *pile*, et on perd 1€ pour chaque résultat *face*.
   On note X le gain correspondant. Quelles sont les valeurs possibles de X ?

Définition 4.5.
Soit une expérience aléatoire d'univers $\mathbb{U}$.
Définir une *variable aléatoire* discrète X sur Ω, c'est associer à chaque issue de $\mathbb{U}$ un nombre réel. L'ensemble de ces réels est l'ensemble des valeurs prises par X.

Définition 5.5.
La *loi de probabilité* d'une variable aléatoire X, souvent donnée sous la forme d'un tableau, est la donnée de l'ensemble des valeurs x prises par X, associées à la probabilité de l'évènement $X = x$.

Exemple 6.5.
On reprend l'expérience de l'exemple , et on admet que les huit issues sont équiprobables, de probabilité $\frac{1}{8}$.

1. Dresser la loi de probabilité de X.

2. Calculer $\mathbf{P}(X = 6)$.

3. Quelle est la probabilité de gagner de l'argent ?

Définition 6.5.

Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilités est représentées dans le tableau ci-contre.

x	x_1	x_2	$\dots$	x_n
$P(X = x)$	p_1	p_2	$\dots$	p_n

L'espérance de X, notée $E(X)$, est le nombre : $E(X) = x_1 \times p_1 + x_2 \times p_2 + \dots x_n \times p_n$.

▶ Note 1.5.
L'espérance d'une variable aléatoire X est la valeur moyenne obtenue en répétant un grand nombre de fois l'expérience aléatoire.

Exemple 7.5.
On reprend la variable aléatoire X de l'exemple précédent.

1. Calculer $E(X)$.

____

____

____

2. On joue un grand nombre de fois à ce jeu. Quel est le gain moyen que l'on peut espérer obtenir ?

____

____

____

Définition 7.5.

Dans une épreuve de Bernoulli de paramètre p, on appelle *variable aléatoire de Bernoulli* la variable aléatoire qui prend la valeur 1 en cas de succès, et 0 en cas d'échec.

x_i	0	1
$\mathbf{P}(X = x_i)$		

Propriété 2.5.
L'espérance d'une variable aléatoire de Bernoulli X de paramètre p est : ______________.

Exemple 8.5.
On lance un dé équilibré à 6 faces, et on considère *Obtenir 6* comme un succès.

1. Cette épreuve est une épreuve de Bernoulli. Quel est son paramètre p ? ______________
2. Dresser la loi de probabilité de la variable de Bernoulli associée à cette épreuve.