CHAPITRE

11

Combinatoire et dénombrement

11.1 Objectifs du chapitre

Sujets vus au grand oral : quelle est la probabilité que deux élèves de votre groupe classe soient nés le même jour ? Le paradoxe du chevalier de Méré : est-il plus avantageux, lorsqu'on joue au dé, de parier sur l'apparition d'un 6 en lançant 4 fois le dé ou de lancer 24 fois deux dés ?

11.2 Principe additif, multiplicatif

Soient m et n deux entiers naturels. E et F ont respectivement n et m éléments.
Soit k un entier naturel.

11.2.1 Principe additif et multiplicatif

Propriété 1.11. *Principe additif*
Si E et F sont *disjoints* alors le nombre d'éléments de $E \cup F$ est ____________

Exemple 1.11.
Soients $E = \{a\,;\,b\}$ et $F = \{1\,;\,2\,;\,3\}$.
E et F sont disjoints, $n =$ ______ et $m =$ ______ donc $E \cup F$ est composée de ____________ éléments.
On a $E \cup F =$

Définition 1.11.
Un couple de deux éléments a et b de E est la donnée de ces deux éléments dans un ordre particulier. On le note $(a\,;\,b)$. De la même façon, un triplet de trois éléments de E est la donnée de ces trois éléments dans un ordre particulier. On le note $(a\,;\,b\,;\,c)$.

Définition 2.11. *Produit cartésien*
Le *produit cartésien* de E et F noté $E \times F$ est l'ensemble des couples $(e\,;\,f)$ tels que :

$$e \in E \text{ et } f \in F$$

.

Propriété 2.11. *Principe multiplicatif*
$E \times F$ est composé de ____________ éléments.

11.2.2 Dénombrement des k-uplets

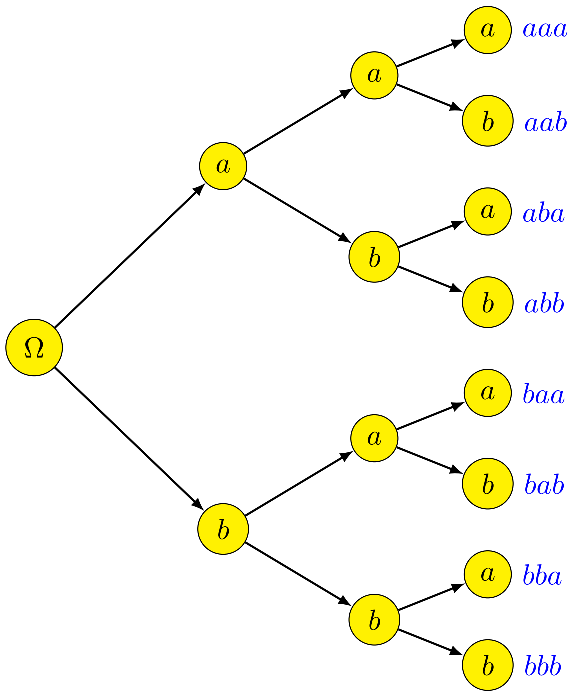
Définition 3.11.

Un *k-uplet* de E est une liste ordonnée $(e_1\,;\,e_2\,;\,\dots\,;\,e_k)$ de k éléments de E.
On note E^k l'ensemble des k-uplets de E.

Exemple 2.11.
Un code de carte bancaire est un ________ de $E =$

Propriété 3.11.
Soit E un ensemble de n éléments.
Le nombre de k-uplets de E est ________.

Exemple 3.11.
Soit $E = \{a\,;\,b\}$. Puisque $n = 2$, le nombre de 3-uplets est ________ :



Définition 4.11.

Une partie de E est un ensemble d'éléments de E.

Exemple 4.11.
Soit $E = \{a\,;\,b\,;\,c\}$.
Les parties de E sont ________, ________, ________, ________, ________, ________, ________ et ________.
E comporte donc ______ éléments..

Propriété 4.11.
Le nombre de parties de E est 2^n.

Démonstration. Soit $E = (e_1\,;\, e_2\,;\, \dots\,;\, e_n)$.
On associe à chaque partie P de E un unique n-uplet de l'ensemble $[0\,;\,1]$ de la manière suivante : pour tout entier i entre 1 et n, on note 1 si e_i est dans P et 0, sinon, et réciproquement (code binaire). Par exemple, on associe à $\{e_1\,,\, e_3\}$ le n-uplet $\{1\,,0\,,1\,,0\,,\dots\,,0\}$: $\{e_1\,,\, e_3\} \mapsto \{1\,,0\,,1\,,0\,,\dots\,,0\}$. Ainsi, le nombre de parties de E est égal au nombre de n-uplets de l'ensemble $\{0\,;\,1\}$, c'est-à-dire 2^n. □

11.3 Dénombrement des k-uplets d'éléments distincts

Soient k et n deux entiers naturels tels que $1 \leqslant k \leqslant n$ et E un ensemble à n éléments.

11.3.1 Nombre de k-uplets d'éléments distincts

Définition 5.11.
On appelle *k-uplet d'éléments distincts* de E un k-uplet de E pour lequel tous ses éléments sont *distincts.*

Exemple 5.11.
Soit $E = \{a\,;\, b\,;\, c\,;\, d\}$.
$(a\,;\, b\,;\, c)$ est un 3-uplet d'éléments distincts de E.
En revanche ____________ n'en est pas un car l'élément b est répété.

Propriété 5.11.
Le nombre de k-uplets d'éléments *distincts* de E est égal à :

$$\boxed{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}$$

Démonstration.

□

Exemple 6.11.
Lors d'une course de 100 m disputée par 9 athlètes, il y a ____________ podiums possibles.

11.3.2 Factorielle d'une entier naturel

Définition 6.11.
Soit n un entier naturel non nul.
On appelle *factorielle* n, noté $n!$, le produit de tous les entiers naturels entre 1 et n.
Ainsi :

$$\boxed{n! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times n}$$

Exemple 7.11.
$5! =$ ______ et $(n+1)! =$ ______________________.

Propriété 6.11.
Le nombre de k-uplets d'éléments distincts de E est égal à $\dfrac{n!}{(n-k)!}$.

11.3.3 Nombre de permutations

Définition 7.11.
Une *permutation* d'un ensemble E a n éléments est un n-uplet d'éléments *distincts* de E.

Propriété 7.11.
Le *nombre de permutations* de E est ______________ soit ______.

Exemple 8.11.
Le classement des 20 équipes du championnat de football de ligue 1 est une permutation de l'ensemble des 20 équipes.

11.4 Combinaisons

Soit k et n deux entiers naturels tels que $0 \leqslant k \leqslant n$ et E un ensemble à n éléments.

11.4.1 Nombre de combinaisons

Définition 8.11.
Une *combinaison* de k éléments de E est une partie de E à k éléments.
On note $\displaystyle\binom{n}{k}$ le nombre de combinaisons de k éléments de E.

Exemple 9.11.
Soit $E = \{a\,;\,b\,;\,c\,;\,d\}$ on a donc $n =$ ___.

- Les combinaisons formées d'un élément de E sont $\{\dots\}$, $\{\dots\}$, $\{\dots\}$ et $\{\dots\}$: il y en a $\dots$donc $\displaystyle\binom{\dots}{\dots} = 4$.
- Les combinaisons formées de deux éléments de E sont $\{\dots\,;\,\dots\}$, $\{\dots\,;\,\dots\}$, $\{\dots\,;\,\dots\}$, $\{\dots\,;\,\dots\}$, $\{\dots\,;\,\dots\}$ et $\{\dots\,;\,\dots\}$: il y en a donc $\displaystyle\binom{\dots}{\dots} = \dots$.

Propriété 8.11.

Soit $0 \leqslant k \leqslant n$. On a $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}$.

Démonstration. $\binom{n}{k}$ est le nombre de combinaisons de k éléments parmi n de E.
Il y a $n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)$ $k-$uplets d'éléments distincts deux à deux distincts de E. Pour obtenir un $k-$uplet d'éléments deux à deux distincts de E, il suffit d'abord de choisir une combinaison de k éléments de E puis de les ordonner.
Ainsi $n(n-1)\ldots(n-k+1) = \binom{n}{k} \times k!$ d'où le résultat. □

En particulier :

$$\boxed{\binom{n}{0} = 1, \quad \binom{n}{1} = n, \quad \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}, \quad \binom{n}{n} = 1}.$$

Exemple 10.11.

Soit $\binom{5}{3} = \rule{5cm}{0.4pt} = 10$.

Propriété 9.11.

Soit $0 \leqslant k \leqslant n$. On a $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Démonstration. Dénombrer les parties à k éléments revient à dénombrer les parties à $n-k$ éléments qui en sont les complémentaires. □

Exemple 11.11.

Soit $\binom{5}{3} = \binom{5}{2}$.

Application 1.11. Une urne contient quatre boules blanches numérotées de 1 à 4, trois boules vertes numérotées de 1 à 3 et deux boules noires numérotées de 1 à 2. On tire simultanément trois boules de cette urne.

1. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
2. Combien y a-t-il de tirages contenant trois boules de la même couleur ?
3. Combien y a-t-il de tirages au moins une boule noire ?
4. Combien y a-t-il de tirages contenant un seul numéro impair ?

Propriété 10.11.

Soit n un entier naturel alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

Démonstration. Par définition, pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, $\binom{n}{k}$ est le nombre de combinaisons de E. Autrement dit, $\binom{n}{k}$ est le nombre de parties de E composée de k éléments. Ainsi d'après le principe additif, $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ est égal au nombre de parties de E (les parties de 0 à n éléments). Or il y a 2^n parties de E. Par conséquent, $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$. □

11.5 Triangle de Pascal

11.5.1 Relation de Pascal

Propriété 11.11. *Formule de Pascal*
Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$ et tout entier naturel k tel que $1 \leqslant k \leqslant n-1$, on a :

$$\boxed{\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}}$$

Démonstration. Soient E un ensemble à n éléments et k un entier naturel tel que $1 \leqslant k \leqslant n-1$.
$\binom{n}{k}$ est le nombre de parties à k éléments de E. Soit a un élément de E.

- Soit a un élément de E. Parmi toutes les partie à k éléments de E, il y en a de deux sortes :
  - celles qui contiennent l'élément a.
    Dénombrer ces parties revient à déterminer le nombre de combinaisons de $k-1$ éléments d'un ensemble à $n-1$ éléments. Leur nombre est $\binom{n-1}{k-1}$.
  - celles qui ne contiennent pas l'élément a. Dénombrer ces parties revient à déterminer le nombre de combinaisons de k éléments d'un ensemble à $n-1$ éléments. Leur nombre est $\binom{n-1}{k}$.
- D'après le principe additif on a donc :

□

11.5.2 Le triangle de Pascal

▶ Note 1.11.

La relation de Pascal permet de calculer de façon algorithmique les coefficients $\binom{n}{k}$.

Néanmoins, on peut aussi calculer les $\binom{n}{k}$ à l'aide du tableau ci-dessous appelé *triangle de Pascal* :

k							
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1
	0	1	2	3	4	5	6
				n			

▶ Note 2.11.
Pour tous réels a et b et pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}}$$

La formule ainsi obtenue est appelée *formule du binôme de Newton* et les $\binom{n}{k}$ sont appelés *coefficients binomiaux.*

Application 2.11. Démontrer, à l'aide de la formule précédente, que pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$,

$$(2+\sqrt{5})^n + (2-\sqrt{5})^n \in \mathbb{N}.$$