Chapitre

0

Raisonner par récurrence

1. Préambule

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n - n \end{cases}$$

1. Calculer les trois premiers termes de cette suite.

2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = 2^n + n + 1$.
   (a) Calculer les trois premiers termes de cette suite.

   (b) Quelle conjecture peut-on émettre ? __________

   (c) À quelle difficulté est-on confrontés ? __________

2. Principe de récurrence

Le raisonnement par récurrence peut se comparer à la théorie des dominos : on considère une suite de dominos rangés de telle sorte que si un domino tombe alors le suivant tombera. Si on fait tomber le premier domino alors le second tombera, puis le troisième, ...etc.. Conclusion : si le premier domino tombe alors tous tomberont. Tout repose en fait sur le principe de propagation "si l'un tombe alors le suivant aussi"

Le raisonnement par récurrence repose sur le principe suivant :

$$\text{Si} \quad \underbrace{\mathscr{P}_0 \text{ est vraie}}_{\text{Initialisation}} \quad \text{et si :} \quad \underbrace{\forall n \in \mathbb{N}, \quad (\mathscr{P}_n \Longrightarrow \mathscr{P}_{n+1}),}_{\text{Hérédité}} \quad \text{alors :} \quad \forall n,\ \mathscr{P}_n.$$

Toute autre rédaction est exclue. Commencer l'hérédité par « supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}_n$ est vraie » est une erreur GRAVISSIME. En effet, si on suppose la proposition vraie pour TOUS les rangs, que reste-t-il à prouver ? On ne peut jamais montrer ce qu'on prend comme hypothèse.

Retour sur l'exemple initial. On souhaite démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^n + n + 1$.

Rédaction à avoir

Soit $\mathscr{P}_n$, $u_n = 2^n + n + 1$.

- **Initialisation.** Par définition on a $u_0 = 2$ et $2^0 + 0 + 1 = 2$ donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $\mathscr{P}_n$ vraie c'est-à-dire $u_n = 2^n + n + 1$.
  Montrons que $\mathscr{P}_{n+1}$ vraie c'est-à-dire $u_{n+1} = 2^{n+1} + n + 2$.
  D'après l'énoncé : $u_{n+1} = 2u_n - n$ et par hypothèse de récurrence : $u_n = 2^n + n + 1$.
  Ainsi $u_{n+1} = 2(2^n + n + 1) - n$ soit $u_{n+1} = 2^{n+1} + n + 2$.

  Conclusion : $\mathscr{P}_0$ vraie et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad (\mathscr{P}_n \Longrightarrow \mathscr{P}_{n+1})$ donc : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^n + n + 1$.

3. Récurrence double (hors programme)

Il arrive parfois qu'on ne sache pas déduire $\mathscr{P}_{n+1}$ de $\mathscr{P}_n$ mais seulement $\mathscr{P}_{n+2}$ de $\mathscr{P}_n$ et $\mathscr{P}_{n+1}$. Le principe de récurrence prend alors la forme suivante :

$$\text{Si} \quad \underbrace{\mathscr{P}_0 \text{ et } \mathscr{P}_1 \text{ sont vraies}}_{\text{Initialisation}} \quad \text{et si :} \quad \underbrace{\forall n \in \mathbb{N}, \quad (\mathscr{P}_n \text{ et } \mathscr{P}_{n+1}) \Longrightarrow \mathscr{P}_{n+2},}_{\text{Hérédité}} \quad \text{alors :} \ \forall n,\ \mathscr{P}_n.$$

Exemple. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $u_0 = 4$, $u_1 = 5$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$$

. Démontrons que pour tout entier naturel n : $u_n = 2^n + 3$.