

12.1 Somme de deux variables aléatoires

12.1.1 1^{re} définition

Définition 1.12.

Soient X et Y deux variables aléatoires associées à une même expérience d'univers fini Ω et a un réel.

$X + Y$ et aX sont deux variables aléatoires définies sur Ω qui prennent comme valeur pour un événement donné respectivement : la _____ des valeurs de X et Y et le _____ de a par X .

Exemple 1.12.

On lance deux dés, l'un tétraédrique numéroté de 1 à 4 et l'autre cubique numéroté de 1 à 6. On appelle X et Y les variables aléatoires associées respectivement aux résultats du dé tétraédrique et du dé cubique.

- $X + Y$ est la variable aléatoire qui prend les valeurs : _____.

- $2X$ est la variable aléatoire qui prend les valeurs : _____.



► Note 1.12.

On peut généraliser la somme à n variables aléatoires

Par exemple, lançons trois dés cubiques de couleurs différentes et notons X , Y et Z les résultats des dés de chaque couleur. On peut considérer la variable $X + Y + Z$ qui prend les valeurs :

12.1.2 Linéarité de l'espérance et additivité de la variance

Propriétés.

Soient X et Y deux variables aléatoires d'un univers Ω et a un réel.

- *Linéarité de l'espérance* : $\mathbf{E}(X + Y) = \mathbf{E}(X) + \mathbf{E}(Y)$ et $\mathbf{E}(aX) = a\mathbf{E}(X)$.

ATTENTION! Si les variables X et Y sont *indépendantes* :

- *Additivité de la variance* : $\mathbf{V}(X + Y) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y)$ et $\mathbf{V}(aX) = a^2\mathbf{V}(X)$.

► Note 2.12.

On considérera l'indépendance des variables au sens intuitif du terme c'est à dire que le résultat de X n'influe pas sur le résultat de Y comme dans le lancement de deux dés.

Exemple 2.12.

Prendre l'exemple initial en calculant $\mathbf{E}(X + Y)$, $\mathbf{E}(2X)$, $\mathbf{V}(X + Y)$ et $\mathbf{V}(3X)$.

► Note 3.12.

On peut *généraliser* les résultats de l'espérance et de la variance à la somme de n variables.

12.2 Somme de variables identiques et indépendantes

12.2.1 Décomposition d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale

Théorème 1.12.

Soient n variables aléatoires indépendantes X_1, X_2, \dots, X_n suivant la même loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$. La variable aléatoire $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ suit alors la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

Exemple 3.12.

Soit X_i suivant une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(0, 13)$ pour $i \in \llbracket 1; 10 \rrbracket$, alors $S_{10} = X_1 + X_2 + \dots + X_{10}$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(10; 0, 13)$.

Théorème 2.12.

Toute variable aléatoire X suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ peut se décomposer en *une somme* de n variables indépendantes S_n .

$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ où X_i avec $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ suit une même loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$.

► Note 4.12.

Ce théorème permet de démontrer l'expression de l'espérance et de la variance d'une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

En effet si X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, on peut décomposer X en somme de n variables indépendantes suivant la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ d'espérance p et de variance $p(1 - p)$.

12.2.2 Échantillon d'une variable aléatoire

Définition 2.12.

Soit une variable X suivant une loi de probabilité.

Une liste de variables indépendantes (X_1, X_2, \dots, X_n) suivant cette même loi est appelée *échantillon* de taille n associé à X

On pose $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ et $M_n = \frac{S_n}{n}$, on a alors :

$$\mathbf{E}(S_n) = n\mathbf{E}(X) \quad (12.1)$$

$$\mathbf{E}(M_n) = \mathbf{E}(X) \quad (12.2)$$

$$\mathbf{V}(S_n) = n\mathbf{V}(X) \quad (12.3)$$

$$\mathbf{V}(M_n) = \frac{\mathbf{V}(X)}{n} \quad (12.4)$$

Démonstration. Prouvons la 12.3.

□

► **Note 5.12.**

Plus la taille n de l'échantillon est *grand* plus la *variance* de M_n est *petite* donc plus la valeur de M_n se *rapproche* de l'espérance de X .

Exemple 4.12.

Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée par le tableau suivant. On considère un échantillon (X_1, X_2, \dots, X_n) de la loi suivie par X et la variable aléatoire moyenne M_n :

x_i	-10	5	20
$\mathbf{P}(X = x_i)$	0,25	0,55	0,2

Déterminons la taille de l'échantillon n à partir de laquelle la variance de M_n devient inférieure à 0,05.

12.3 Concentration et loi des grands nombres

12.3.1 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Théorème 3.12.

Soit X une variable aléatoire d'espérance μ et de variance \mathbb{V} .

$$\forall \delta \in]0; +\infty[, \mathbf{P}(|X - \mu| \geq \delta) \leq \frac{\mathbb{V}}{\delta^2}$$

► Note 6.12.

La probabilité que X se trouve en dehors de l'intervalle $[\mu - \delta; \mu + \delta]$ est inférieure à $\frac{\mathbb{V}}{\delta^2}$. Cette inégalité conduit à la *loi des grands nombres*.

Exemple 5.12.

La taille moyenne d'une femme française est de 1,65 m et la variance est évaluée à 0,0025.

Majorons la proportion des femmes françaises dont la taille est inférieure ou égale à 1,55 ou supérieure ou égale à 1,75.

Soit T_F la variable aléatoire associée à la taille d'une femme française.

On a donc $\mu = 1,65$ et $\mathbb{V} = 0,0025$.

12.3.2 Application à un intervalle de rayon de k fois l'écart-type

Théorème 4.12.

Soit X une variable aléatoire d'espérance μ et d'écart-type σ .

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbf{P}(|X - \mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$$

Exemple 6.12.

Sur une roue de loterie il y a 4 secteurs rouges sur 10.

On fait tourner 20 fois la roue en notant par X le nombre de fois où la roue tombe sur un secteur rouge.

La variable aléatoire X suit alors la loi binomiale $\mathcal{B}(20; 0,4)$.

Majorons la probabilité que X soit en dehors de l'intervalle centrée en μ et de rayon 2σ .

12.3.3 Inégalité de concentration

Théorème 5.12.

Soient (X_1, X_2, \dots, X_n) un échantillon de n variables aléatoires d'espérance μ et de variance \mathbf{V} et M_n la variable aléatoire moyenne de cet échantillon.

$$\forall \delta \in]0; +\infty[, \mathbf{P}(|M_n - \mu| \geq \delta) \leq \frac{\mathbf{V}}{n\delta^2}$$

Exemple 7.12.

On prend un dé tétraédrique bien équilibré dont on a déterminé l'espérance $\mu = 2,5$ et la variance $\mathbf{V} = 1,25$.

Combien de lancers du dé tétraédrique doit-on faire pour s'assurer au seuil de 95 % que la moyenne des résultats des lancers est dans l'intervalle $]2,45; 2,55[$?

12.3.4 Loi des grands nombres

Théorème 6.12.

Soit (X_1, X_2, \dots, X_n) un échantillon de n variables aléatoires d'espérance μ et M_n la variable aléatoire moyenne de cet échantillon.

$$\forall \delta \in]0; +\infty[, \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(|M_n - \mu| \geq \delta) = 0$$

► Note 7.12.

Pour un δ donné aussi petit soit-il, la limite de la probabilité que M_n soit en dehors de l'intervalle $[\mu - \delta; \mu + \delta]$ est nulle.

Ce théorème montre de façon rigoureuse, que lorsqu'on lance un grand nombre de fois une pièce de monnaie bien équilibrée, on a une chance sur deux en moyenne que la pièce tombe sur « pile » ou sur « face ».