★★☆☆☆ **Exercice 1** **/10**

Dans une école de statistique, après étude des dossiers des candidats, le recrutement se fait de deux façons :

- 10 % des candidats sont sélectionnés sur dossier. Ces candidats doivent ensuite passer un oral à l'issue duquel 60 % d'entre eux sont finalement admis à l'école.
- Les candidats n'ayant pas été sélectionnés sur dossier passent une épreuve écrite à l'issue de laquelle 20 % d'entre eux sont admis à l'école.

### Partie 1

On choisit au hasard un candidat à ce concours de recrutement. On notera :

- $D$ l'évènement « le candidat a été sélectionné sur dossier » ;
- $A$ l'évènement « le candidat a été admis à l'école » ;
- $\overline{D}$ et $\overline{A}$ les évènements contraires des évènements $D$ et $A$ respectivement.

1. Traduire la situation par un arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité que le candidat soit sélectionné sur dossier et admis à l'école.
3. Montrer que la probabilité de l'évènement $A$ est égale à 0,24.
4. On choisit au hasard un candidat admis à l'école. Quelle est la probabilité que son dossier n'ait pas été sélectionné ?

### Partie 2

1. On admet que la probabilité pour un candidat d'être admis à l'école est égale à 0,24.

   On considère un échantillon de sept candidats choisis au hasard, en assimilant ce choix à un tirage au sort avec remise. On désigne par $X$ la variable aléatoire dénombrant les candidats admis à l'école parmi les sept tirés au sort.

   (a) Démontrer que la variable aléatoire $X$ suit une loi binomiale dont vous préciserez les paramètres.

   (b) Calculer la probabilité qu'un seul des sept candidats tirés au sort soit admis à l'école. On donnera une réponse arrondie arrondie au millième.

   (c) Calculer la probabilité qu'au moins cinq des sept candidats tirés au sort soient admis à cette école. On donnera une réponse arrondie au millième.

   (d) Calculer la probabilité qu'au plus trois des sept candidats tirés au sort soient admis à cette école. On donnera une réponse arrondie au millième.

2. Un lycée présente $n$ candidats au recrutement dans cette école, où $n$ est un entier naturel non nul.

   On admet que la probabilité pour un candidat quelconque du lycée d'être admis à l'école est égale à 0,24 et que les résultats des candidats sont indépendants les uns des autres.

   (a) Donner l'expression, en fonction de $n$, de la probabilité qu'aucun candidat issu de ce lycée ne soit admis à l'école.

   (b) À partir de quelle valeur de l'entier $n$ la probabilité qu'au moins un élève de ce lycée soit admis à l'école est-elle supérieure ou égale à 0,99 ?

★★☆☆☆ **Exercice 2** **/7**

En 2020, une influenceuse sur les réseaux sociaux compte 1000 abonnés à son profil. On modélise le nombre d'abonnés ainsi : chaque année, elle perd 10 % de ses abonnés auxquels s'ajoutent 250 nouveaux abonnés. Pour tout entier naturel $n$, on note $u_n$ le nombre d'abonnés à son profil en l'année $(2020+n)$, suivant cette modélisation. Ainsi $u_0 = 1000$.

1. Calculer $u_1$.

2. Justifier que pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = 0{,}9u_n + 250$.

3. La fonction Python nommée « suite » est définie ci-dessous. Dans le contexte de l'exercice, interpréter la valeur renvoyée par suite(10).

```
def suite( n) :
  u = 1000
  for i in range(n) :
    u = 0,9*u + 250
  return u
```

4. (a) Montrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel $n$, $u_n \leqslant 2500$.
   (b) Démontrer que la suite $(u_n)$ est croissante.

5. Soit $(v_n)$ la suite définie par $v_n = u_n - 2500$ pour tout entier naturel $n$.
   (a) Montrer que la suite $(v_n)$ est une suite géométrique de raison 0,9 et de terme initial $v_0 = -1500$.
   (b) Pour tout entier naturel $n$, exprimer $v_n$ en fonction de $n$ et montrer que :
   $$u_n = -1500 \times 0{,}9^n + 2500.$$
   (c) Déterminer, avec la calculatrice, la limite de la suite $(u_n)$ et interpréter dans le contexte de l'exercice.

6. **Bonus** : écrire un programme qui permet de déterminer en quelle année le nombre d'abonnés dépassera 2200.

   Déterminer cette année.

★★★☆☆ **Exercice 3** **/3**

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + 3n^2 - n. \end{cases}$$

1. Pour tout réel $x$, on pose $A(x) = x(x-1)^2 + 3x^2 - x$.
   Développer, réduire et factoriser $A(x)$.

2. Montrer que, pour tout entier naturel $n$, $u_n = n(n-1)^2$.