CHAPITRE

5

Modèles exponentiels

5.1 Phénomènes discrets

5.1.1 Suites géométriques

Définition 1.5.

Soit q un nombre réel *strictement positif*.
Une suite (u_n) est une *suite géométrique* si et seulement si, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = qu_n$$

▶ Note 1.5.

— q est appelée la *raison* de la suite géométrique (u_n).

— $u_{n+1} = qu_n$ s'appelle la *relation de récurrence* de la suite géométrique.

Exemple 1.5.

La suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 7,1u_n$.
Cette suite (u_n) est géométrique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison $q = 7,1$.

Propriété 1.5.

La suite (u_n) est géométrique de premier terme u_0 et de raison q *si et seulement si* on a $u_n = u_0 \times q^n$.

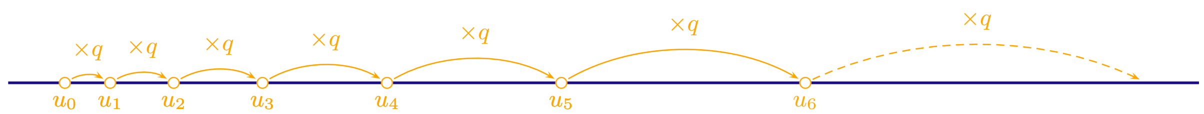
▶ Note 2.5.

L'égalité $u_n = u_0 \times q^n$ s'appelle l'*expression explicite* de la suite géométrique (u_n).

Exemple 2.5.

Soit la suite (u_n) la suite géométrique de raison $q = 0,4$ et de premier terme $u_0 = 300$.
Déterminer l'expression récurrente de la suite (u_n) puis son expression explicite.

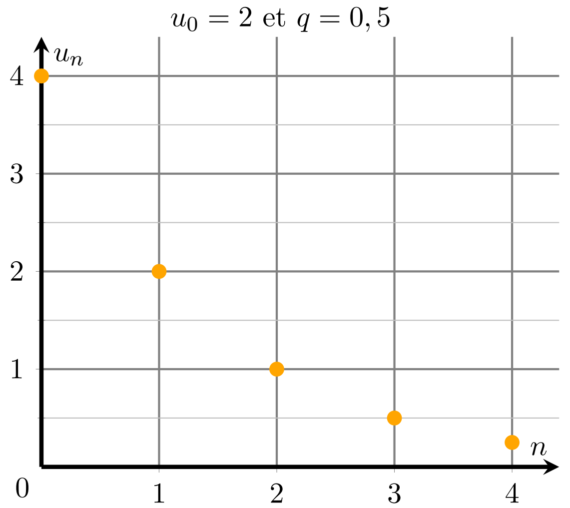
Illustration.

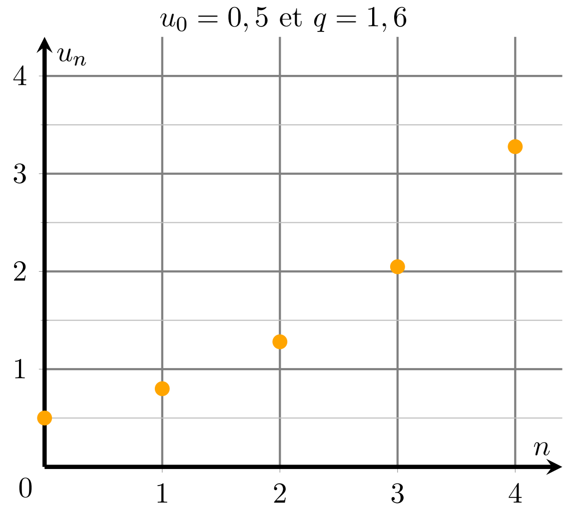


5.1.2 Représentation graphique

Définition 2.5.

Une *suite géométrique* se représente par un nuage de points de coordonnées $(n\,;\,u_n)$.
Une *suite géométrique* a une *croissance* ou *décroissance* exponentielle.





5.2 Phénomènes continus

5.2.1 Fonctions $x \; : \longmapsto a^x$

Définition 3.5.

Soit a un réel *strictement* positif.
La fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = a^x$ est appelée *fonction exponentielle* de base a.
Cette fonction est le prolongement à tout nombre x positif de la suite géométrique (u_n), de premier terme u_0 et de raison a définie pour tout entier naturel n par $u_n = a^n$.

▶ **Note 3.5.**
Pour tout réel $a > 0$ et tout réel $x > 0$ on a $a^x > 0$.

Exemple 3.5.
La fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = 3,14^x$ est la fonction exponentielle de base ____________.

5.2.2 Propriétés algébriques

Propriétés.

- Pour tout réel a strictement positif, $a^0 = 1$.
- Pour tous réels x et y :

$$a^x \times a^y = a^{\cdots} \tag{5.1}$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{\cdots} \tag{5.2}$$

$$(a^x)^y = \, = a^{\cdots} \tag{5.3}$$

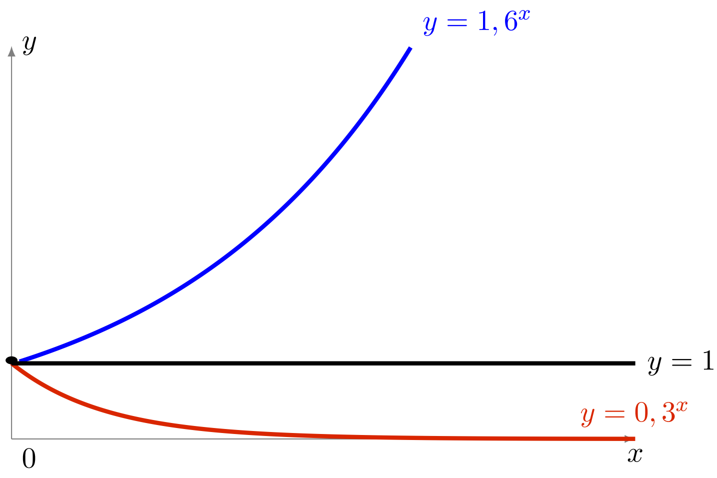
Exemple 4.5.
Dans chaque cas, écrire le résultat sous la forme $4,2^x$ où x est un nombre réel.

1. $4,2^{2,1} \times 4,2^{5,9}$
2. $\dfrac{4,2^{5,2}}{4,2^{3,3}}$
3. $\left(4,2^{3,1}\right)^{10}$

5.2.3 Représentation graphique

Propriété 2.5.
Soit a un réel strictement positif.
On peut représenter la courbe représentative de la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = a^x$ à l'aide d'une calculatrice voire d'un logiciel de géométrie dynamique.

Exemple 5.5.



5.2.4 Racine n – ième d'un nombre réel positif

Propriété 3.5.
Soit a un réel strictement positif et n un entier naturel non nul.
L'équation $b^n = a$ *d'inconnue* b, admet une solution unique positive : $b = a^{\frac{1}{n}}$.
$a^{\frac{1}{n}}$ s'appelle la *racine* n – ième de a et on la note aussi :

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

Exemple 6.5.
Résoudre dans $[0\,;\,+\infty[$ les équations suivantes :

1. $x^3 = 50$
2. $x^6 = 64$
3. $x^{10} = 11$