CHAPITRE

5

NOMBRES COMPLEXES : PARTIE GÉOMÉTRIQUE

5.1 Image d'un nombre complexe et affixe

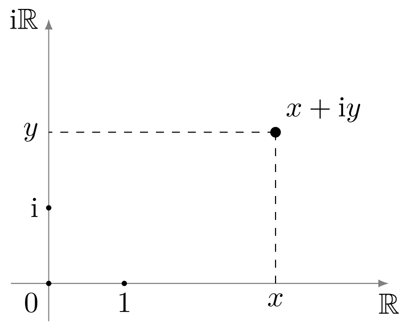
5.1.1 Affixe d'un point

Définitions.

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v})$:

- À tout nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$ avec x et y réels, on associe le point $M(x\,;\,y)$.
- Réciproquement à tout point $M(x\,;\,y)$ on associe le nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$.
- On dit que le point M est le *point image* du nombre complexe z et que z est *l'affixe* du point M.
- Le plan est alors appelé *plan complexe.*

Illustration :



Application 1.5.

1. Soit D d'affixe $-7+8\mathrm{i}$. Donner les coordonnées du point D.
2. Soit $E(3\,;\,-5)$. Donner l'affixe du point E.

► **Note 1.5.**
L'axe des abscisses est appelé *axe des réels* et l'axe des ordonnées, *axe des imaginaires purs.*

Propriété 1.5.
Soit A et B deux points du plan complexe d'affixe respective z_A et z_B.

- Les points A et B sont confondus *si et seulement si* $z_A = z_B$.
- Le milieu du segment $[AB]$ a pour affixe $\dfrac{z_A + z_B}{2}$.

Application 2.5. Dans le plan complexe, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = -3 + \mathrm{i}$, $z_B = 5 - 3\mathrm{i}$, $z_C = 1 + \mathrm{i}$ et $z_D = -7 + 5\mathrm{i}$.

1. Placer ces points dans le plan complexe et conjecturer la nature du quadrilatère $ABCD$.
2. Démontrer ou invalider cette conjecture.

5.1.2 Affixe d'un vecteur

Définition 1.5.

À tout complexe $z = x + \mathrm{i}y$ avec x et y réels, on associe le vecteur $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ du plan complexe.
On dit que le vecteur $\overrightarrow{w}$ est le *vecteur image* du nombre complexe z et que z est *l'affixe* du vecteur $\overrightarrow{w}$.

Propriétés 1.5.
Dans le plan complexe, on considère deux vecteurs $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{w'}$ d'affixes respectives z et z' et k un réel.

- Les vecteurs $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{w'}$ sont égaux *si et seulement si* $z = z'$.
- Le vecteur $\overrightarrow{w} + \overrightarrow{w'}$ a pour affixe $z + z'$.
- Le vecteur $k\overrightarrow{w}$ a pour affixe kz.

5.1.3 Lien entre affixe d'un point et affixe d'un vecteur

Propriétés 2.5.

- Soit M un point du plan complexe muni d'un repère $(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v})$ et z un nombre complexe.
  Le point M a pour *affixe* z si et seulement si le vecteur $\overrightarrow{OM}$ a pour affixe z.
- Soient A et B deux points du plan complexe d'affixes respectives z_A et z_B.
  Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$.

Application 3.5. On donne A$(-4-2\mathrm{i})$, B$(3-\mathrm{i})$ et C(-1). Déterminer l'affixe du point D telle que le quadrilatère $ACBD$ soit un parallélogramme.

5.2 Module d'un nombre complexe

5.2.1 Définition

Définition 2.5.

Soit le nombre complexe de forme algébrique $z = x + \mathrm{i}y$ et M l'image de z dans le plan complexe.
Le module de z, noté $|z|$, est le réel positif noté $|z|$ tel que :

$$\boxed{|z| = \sqrt{z\ \overline{z}} = x^2 + y^2}$$

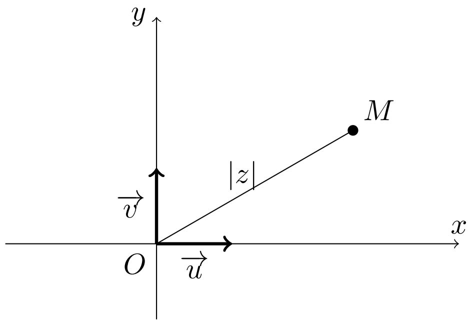
Remarque.
Si z est *réel*, $|z| = \sqrt{z\ \overline{z}} = \sqrt{z^2} = |z|$ donc le module de z est bien la valeur absolue de z et la notation utilisée pour le module est cohérente.
La notion de module dans $\mathbb{C}$ généralise donc celle de valeur absolue dans $\mathbb{R}$.

Application 5.5. Calculer les modules des complexes suivants :

1. $z_1 = 5 + \mathrm{i}$.
2. $z_2 = -3 + 2\mathrm{i}$.
3. $z_3 = -6$.
4. $z_4 = 9\mathrm{i}$.

Propriétés 3.5.

- Soit z un nombre complexe et M le point image associé dans le repère $(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v})$, $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ qui n'est autre que la norme du vecteur $\overrightarrow{OM}$ c'est-à-dire la distance OM, ainsi $|z| = OM$.



- Soit A et B deux points d'affixes respectives z_A et z_B.
  On a alors :

$$\boxed{AB = |z_B - z_A| = |z_A - z_B|}$$

Application 6.5. Soit $A(1 + 2\mathrm{i})$, $B(2)$ et $C(-1 + \mathrm{i})$ dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v})$.

1. Placer ces points dans le plan complexe et conjecturer la nature du triangle ABC.
2. Démontrer ou invalider cette conjecture.

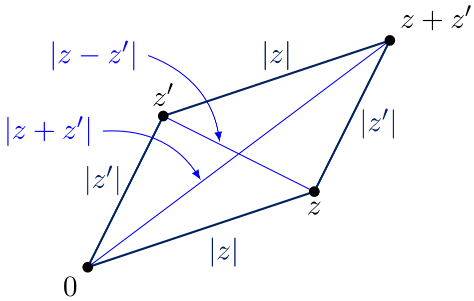
5.2.2 Propriétés du module

Propriétés 4.5.
Soit z un nombre complexe de forme algébrique $z = x + \mathrm{i}y$ avec $(x\,;\,y) \in \mathbb{R}^2$.

1. $z = 0 \iff |z| = 0$
2. $|z|^2 = z \times \overline{z} = x^2 + y^2$
3. $|z| = |-z| = |\overline{z}| = |-\overline{z}|$

Propriétés 5.5.
On considère z et z' deux nombres complexes.

1. $|zz'| = |z||z'|$
2. Si $z \neq 0$, $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$
3. Si $z \neq 0$, $\left|\frac{z'}{z}\right| = \frac{|z'|}{|z|}$
4. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|z^n| = |z|^n$
5. Si $z \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $|z^n| = |z|^n$
6. $|z + z'| \leqslant |z| + |z'|$: inégalité triangulaire.
7. $|z + z'| = |z| + |z'| \iff \exists k \in \mathbb{R}^+ / z' = kz \quad \text{ou} \quad z = kz'$ (cas d'égalité).



Application 7.5. Déterminer les modules des complexes suivants :

1. $z_1 = (1 + \mathrm{i})(2 - 4\mathrm{i})$
2. $z_2 = (1 + \mathrm{i})^{15}$
3. $z_3 = \dfrac{3 - \mathrm{i}}{2 + 5\mathrm{i}}$
4. $z_4 = \dfrac{(-3 + 4\mathrm{i})^5}{(5 - 4\mathrm{i})^4}$

5.2.3 Nombres complexes de module 1

Définition 3.5.
Soit z un nombre complexe. z est de module 1 si et seulement si $|z| = 1$. L'ensemble des nombres complexes de module 1 est noté $\mathbb{U}$.
Ainsi $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\}$

► **Note 2.5.**
Dans le plan complexe, l'ensemble des points images des éléments de $\mathbb{U}$ est *le cercle trigonométrique.*

Propriétés 6.5.

1. Si $(z\,;\,z') \in \mathbb{U}^2$ alors $zz' \in \mathbb{U}$
2. Si $z \in \mathbb{U}$ alors $\frac{1}{z} \in \mathbb{U}$
3. Si $(z\,;\,z') \in \mathbb{U}^2$ alors $\frac{z'}{z} \in \mathbb{U}$

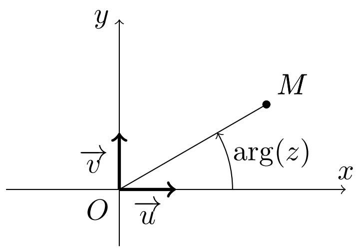
5.3 Arguments d'un nombre complexe

5.3.1 Notion d'arguments

Définition 4.5.
Soit z un nombre complexe *non nul* d'image M.
On appelle *argument* de z *toute mesure en radian* de l'angle orienté :

$$\boxed{\arg(z) = (\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{\mathrm{OM}})}$$

Si θ est un argument de z, $\theta + 2k\pi$ en est également un pour tout $k \in \mathbb{Z}$.
On note $\theta = \arg(z)\ [2\pi]$ et on lit « θ égal à arg de z modulo 2π ».



Remarques.
- 0 *n'a pas d'argument.*
- Tout nombre *réel positif* a un argument égal à 0.
- Tout nombre *réel négatif* a un argument égal à π.
- Tout nombre *imaginaire pur* $\mathrm{i}y$ avec $y > 0$ a un argument égal à $\dfrac{\pi}{2}$.
- Tout nombre *imaginaire pur* $\mathrm{i}y$ avec $y < 0$ a un argument égal à $-\dfrac{\pi}{2}$.

Propriétés 7.5.
- Soient z un nombre complexe non nul et $\overrightarrow{w}$ le vecteur image associé.
  On a alors $(\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{w}) = \arg(z)\ [2\pi]$
- Soient A et B deux points *distincts* d'affixes respectives z_A et z_B.
  On a alors $(\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{AB}) = \arg(z_B - z_A)\ [2\pi]$

5.3.2 Propriétés sur les arguments

Propriétés 8.5.
Soit z un nombre complexe *non nul.*

- $\arg(\overline{z}) = -\arg(z)\ [2\pi]$
- $\arg(-z) = \arg(z) + \pi\ [2\pi]$
- $\arg(-\overline{z}) = -\arg(z) + \pi\ [2\pi]$
- $z \in \mathbb{R} \iff \arg(z) = 0\ [\pi]$
- $z \in \mathrm{i}\mathbb{R} \iff \arg(z) = \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$

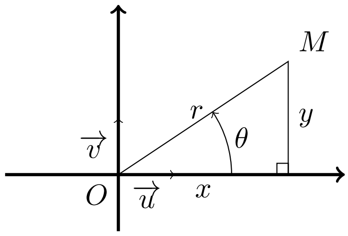
5.3.3 Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul

Soit z un nombre complexe non nul.
Son module $|z| = r$ et un argument θ permettent de caractériser son image M sur le plan, au même titre que les coordonnées $(x\,;\,y)$.
Le couple $[r\,;\theta]$ forme alors ce que l'on appelle les *coordonnées polaires* du point M. On passe des coordonnées polaires aux coordonnées cartésiennes par les relations :

$$x = r\cos\theta \quad \text{et} \quad y = r\sin\theta$$

En effet, d'après la figure ci-contre,

$$\sin(\theta) = \frac{y}{r} \quad \text{et} \quad \cos(\theta) = \frac{x}{r}$$



Définition 5.5.
Soit z un nombre complexe non nul de forme algébrique $z = x + \mathrm{i}y$ un nombre complexe de module r et d'argument θ. D'après la remarque précédente, on a :

$$z = x + iy = r\cos\theta + \mathrm{i}r\sin\theta = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$$

Cette dernière expression est appelée *forme trigonométrique* de z.

Application 8.5.

1. Calculer un argument des nombres complexes suivants :
   (a) $z_1 = -2$
   (b) $z_2 = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$
2. Déterminer la forme algébrique du complexe z_3 tel que $|z_3| = 2$ et $\arg(z_3) = -\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$.
3. Déterminer la forme trigonométrique de $z_4 = 2\sqrt{3} - 2\mathrm{i}$.

Propriété 2.5.
Soient z et z' deux nombres complexes *non nuls*.

$$\boxed{z = z' \iff |z| = |z'| \quad \text{et} \quad \arg(z) = \arg(z')\ [2\pi]}$$

Propriétés 9.5.
Soient z et z' deux nombres complexes *non nuls*.

- $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi]$
- $\arg\left(\dfrac{1}{z}\right) = -\arg(z)\ [2\pi]$
- $\arg\left(\dfrac{z'}{z}\right) = \arg(z') - \arg(z)\ [2\pi]$
- $\forall n \in \mathbb{Z},\ \arg(z^n) = n\arg(z)\ [2\pi]$