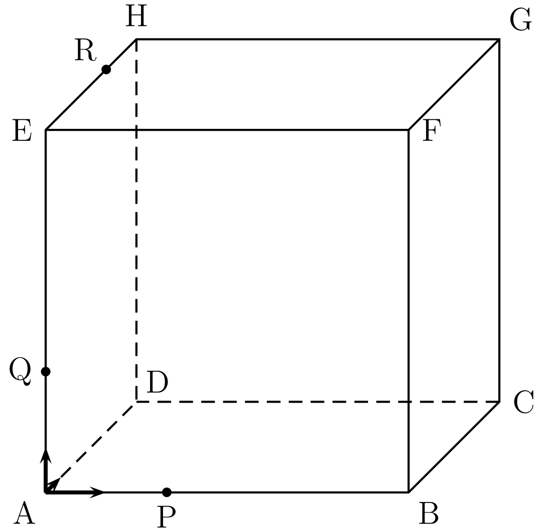
Devoir surveillé n°7 : espace/fonction/suite

Exercice 1. **/10**



Dans l'espace, on considère un cube ABCDEFGH de centre Ω et d'arête de longueur 6.
Les points P, Q et R sont définis par :

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AE} \text{ et } \overrightarrow{HR} = \frac{1}{3}\overrightarrow{HE}.$$

Dans tout ce qui suit on utilise le repère orthonormé $\left(A\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$ avec :

$$\vec{\imath} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB},\ \vec{\jmath} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AD} \text{ et } \vec{k} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AE}.$$

Dans ce repère, on a par exemple :

$$B(6\ ;\ 0\ ;\ 0), F(6\ ;\ 0\ ;\ 6) \text{ et } R(0\ ;\ 4\ ;\ 6).$$

1. (a) Donner, sans justifier, les coordonnées des points P, Q et Ω.
   (b) Déterminer les nombres réels b et c tels que $\vec{n}\,(1\ ;\ b\ ;\ c)$ soit un vecteur normal au plan (PQR) .
   (c) En déduire qu'une équation du plan (PQR) est : $x - y + z - 2 = 0$.
2. (a) On note Δ la droite perpendiculaire au plan (PQR) passant par le point Ω, centre du cube.
   Donner une représentation paramétrique de la droite Δ.
   (b) En déduire que la droite Δ coupe le plan (PQR) au point I de coordonnées $\left(\frac{8}{3}\ ;\ \frac{10}{3}\ ;\ \frac{8}{3}\right)$.
   (c) Calculer la distance ΩI.
3. On considère les points J(6 ; 4 ; 0) et K(6 ; 6 ; 2).
   (a) Justifier que le point J appartient au plan (PQR).
   (b) Vérifier que les droites (JK) et (QR) sont parallèles.
   (c) Sur la figure donnée en annexe, tracer la section du cube par le plan (PQR).
   On laissera apparents les traits de construction, ou bien on expliquera la démarche.

Exercice 2. **/10**

Partie A

On considère la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x-1}{x+1} - \mathrm{e}^{-x}$$

et l'on désigne par $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

1. Calculer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$. Que peut-on en déduire pour la courbe $(\mathcal{C})$?
2. Calculer $f'(x)$, en déduire les variations de f sur $[0\,;\,+\infty[$.
3. Déterminer une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ en son point d'abscisse 0.
4. (a) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α puis vérifier que α appartient à $]1\,;\,2[$.
   (b) Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-1} de α.
   (c) Démontrer que $\mathrm{e}^{\alpha} = \dfrac{\alpha+1}{\alpha-1}$.

Partie B

n désigne un entier naturel non nul. On considère la fonction f_n définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f_n(x) = \frac{x-n}{x+n} - \mathrm{e}^{-x}.$$

1. Vérifier que $f_n'(x) = \dfrac{2n}{(x+n)^2} + \mathrm{e}^{-x}$ et donner son signe sur $[0\,;\,+\infty[$. Préciser $f_n(0)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$.
   Dresser le tableau de variations de f_n.
2. (a) Calculer $f_n(n)$; quel est son signe ?
   (b) Démontrer, par récurrence que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $\mathrm{e}^{n+1} > 2n+1$.
   En déduire le signe de $f_n(n+1)$.
   (c) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une solution unique sur $[n\,;\,n+1]$; cette solution sera notée u_n.
3. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{n}$.

Nom :