3.1 Équations du second degré à coefficients réels

3.1.1 Équations du type $az^2 + bz + c = 0$, $a \neq 0$

Propriété 1.3.
Soit l'équation du second degré $az^2 + bz + c = 0$ avec $a \neq 0$, b et c des réels.
Cette équation admet toujours des solutions dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$.
À l'aide de son discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$, on distingue *trois cas* :

1. Si $\Delta = 0$, il existe une *unique* solution : $z = -\dfrac{b}{2a}$.
2. Si $\Delta > 0$, il existe *deux solutions réelles* : $z = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.
3. Si $\Delta < 0$, il existe *deux solutions complexes conjuguées* : $z = \dfrac{-b \pm \mathrm{i}\sqrt{|\Delta|}}{2a}$.

Application 1.3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2z + 5 = 0$.

3.1.2 Cas particulier : équations du type $z^2 = a$, $a \neq 0$

Propriété 2.3.
L'équation $z^2 = a$ admet *toujours deux solutions* dans $\mathbb{C}$:

1. Si $a > 0$, les solutions sont les *réels* :
2. Si $a < 0$, les solutions sont les *imaginaires purs* :

Application 2.3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + 16 = 0$.

3.1.3 Factorisation d'un polynôme du second degré

Propriété 3.3.
Soient a, b et c trois réels avec $a \neq 0$.
On considère le polynôme P tel que, pour tout z de $\mathbb{C}$, on ait : $P(z) = az^2 + bz + c$.
On note z_1 et z_2 les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$, avec éventuellement $z_1 = z_2$ si $\Delta = 0$.
Alors pour tout z de $\mathbb{C}$, on a :

$$\boxed{P(z) = a(z - z_1)(z - z_2)}$$

Application 3.3. Factoriser dans $\mathbb{C}$, $P(z) = z^2 - 4z + 8$.

3.2 Factorisation des polynômes

3.2.1 Fonction polynôme

Définitions.

1. Soient n un entier naturel et $a_0,\ a_1,\ a_2, \cdots a_n$ des réels (éventuellement complexes) avec $a_n \neq 0$.
   Une *fonction polynôme* ou *polynôme* P est une fonction définie sur $\mathbb{C}$ pouvant s'écrire, pour tout complexe z, sous la forme :
   $$\boxed{P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0}$$
2. On appelle *polynôme nul* le polynôme P tel que pour tout complexe z,
   $$\boxed{P(z) = 0}$$
3. Si P n'est pas le polynôme nul, n est le *degré* de P.
4. On appelle *racine* de P tout nombre complexe z_0 tel que :
   $$\boxed{P(z_0) = 0}$$

Application 4.3. Soit P le polynôme défini sur $\mathbb{C}$ par $P(z) = z^3 - (1 + \mathrm{i})z^2 + z - 1 - \mathrm{i}$.

1. Quel est le degré de P ?
2. Montrer que i est racine de P.

Propriété 4.3. *Admise*
Un polynôme est le polynôme nul si et seulement si *tous ses coefficients sont nuls.*

3.2.2 Factorisation par $z - \alpha$

Définition 1.3.

On dit qu'un polynôme P est *factorisable* (ou divisible) par $z - \alpha$ s'il existe un polynôme Q tel que pour tout complexe z :

$$\boxed{P(z) = (z - \alpha)Q(z)}$$

Application 5.3. Soit le polynôme P défini dans $\mathbb{C}$ par : $P(z) = z^3 - 12z^2 + 48z - 128$.

1. Montrer que 8 est une racine de P.
2. En déduire les réels a et b tels que $P(z) = (z - 8)(z^2 + az + b)$.
3. En déduire l'ensemble des racines de P.

Propriété 5.3.
Soit a un nombre complexe.
Pour tout complexe z et tout entier naturel non nul, $z^n - a^n$ est *factorisable* par $z - a$ et :

$$\boxed{z^n - a^n = (z-a)(z^{n-1} + az^{n-2} + a^2 z^{n-2} + \cdots + a^{n-2}z + a^{n-1} = (z-a)\left(\sum_{k=0}^{n-1} a^k z^{n-1-k}\right)}$$

Application 6.3. Soit $P(z) = z^3 - 27$. Factoriser P dans $\mathbb{C}$.

Propriété 6.3.
Le polynôme P est *factorisable* par $z - a$ si et seulement si a est une *racine* de P.

Application 7.3. Soit $P(z) = z^3 - 3z^2 + 4z - 12$ avec $z \in \mathbb{C}$.
Démontrer que $P(z)$ est factorisable par $z + 2\mathrm{i}$ puis factoriser au maximum $P(z)$.

3.2.3 Polynôme et racines

Propriété 7.3.
Un polynôme non nul de degré n admet *au plus* n racines distinctes.