
Devoir surveillé n°6 bis

★☆☆☆ Question de cours**/2**

Soient a , b , c et d deux entiers relatifs et n un entier naturel non nul.
Démontrer que si $a \equiv b [n]$ et si $c \equiv d [n]$ alors $a - c \equiv b - d [n]$.

★☆☆☆ Exercice 1**/2**

Pour quelles valeurs de l'entier naturel n : $n^3 - 5n$ est divisible par 4 ?

★☆☆☆ Exercice 2**/3**

Résoudre dans \mathbb{Z} , l'équation $x^2 + x + 3 \equiv 0 [5]$.

★★☆☆ Exercice 3**/7**

On considère la suite (u_n) d'entiers naturels définie par

$$\begin{cases} u_0 &= 14 \\ u_{n+1} &= 5u_n - 6 \text{ pour tout entier naturel } n \end{cases}$$

1. Montrer que, pour tout entier naturel n , $u_{n+2} \equiv u_n \pmod{4}$.
2. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $2u_n = 5^{n+2} + 3$.
3. En déduire que, pour tout entier naturel n , $2u_n \equiv 28 \pmod{100}$.

★★☆☆ Exercice 4**/6**

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose :

$$A(n) = n^4 + 1.$$

1. Étudier la parité de l'entier $A(n)$.
2. Montrer que, pour tout entier naturel n , $A(n)$ n'est pas un multiple de 3.
3. Montrer que pour tout entier d diviseur de $A(n)$: $n^8 \equiv 1 [d]$.