
Devoir surveillé n°6

☆☆☆☆ Question de cours**/2.5**

Soient a et b deux entiers relatifs, m un entier relatif non nul et n un entier naturel non nul.

1. Démontrer que si $a \equiv b [n]$ alors $ma \equiv mb [n]$.
2. La réciproque est-elle vraie? Autrement dit, si $ma \equiv mb [n]$ a-t-on $a \equiv b [n]$? Justifier.

☆☆☆☆ Exercice 1**/2.5**

Démontrer que pour tout entier relatif n , $n(n^2 + 5)$ est divisible par 3.

☆☆☆☆ Exercice 2**/4**

1. Déterminer l'ensemble des entiers x tels que $2x \equiv 3 [5]$.
2. Déterminer l'ensemble des entiers x tels que $x^3 \equiv 3 [5]$.

☆☆☆☆ Exercice 3**/7**

1. Justifier que $2^{10} \equiv 24 [100]$ et en déduire le reste dans la division euclidienne de 2^{20} par 100.
2. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $76^n \equiv 76 [100]$.
3. Déduire des questions précédentes les deux derniers chiffres dans l'écriture décimale de 2^{1000} .

☆☆☆☆ Exercice 4**/4**

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par :

$$u_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1.$$

1. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, u_n est pair.
2. Montrer que, pour tout entier naturel n pair non nul, u_n est divisible par 4.