Chapitre

2

Suites numériques

Leonardo Pisano Fibonacci (v. 1175/ v. 1250) est le plus connu des mathématiciens du Moyen Âge. Il est surtout connu par la suite de nombres éponyme. Elle aurait été découverte en comptabilisant les lapins suite à leur reproduction. Fibonacci met au point la formule qui permet de déduire la quantité de lapins de la saison suivante à partir des quantités des saisons précédentes. Cette formule devient la première formule de récursion connue de l'histoire. Ce fut une contribution majeure à la partie des Mathématiques nommée combinatoire que l'on traitera au cours de l'année.

1. Rappels de l'an dernier

Définition 1.2

- Une **suite** est une application $u : \mathbb{N} \to$.
- Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $u(n)$ ou u_n le n-ème **terme** ou **terme général** de la suite.

La suite est notée u, ou plus souvent $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou simplement (u_n). Il arrive fréquemment que l'on considère des suites définies à partir d'un certain entier naturel n_0 plus grand que 0, on note alors $(u_n)_{n\geq n_0}$.

Exemples.

- $(\sqrt{n})_{n\geq 0}$ est la suite de termes : $0,\ 1,\ \sqrt{2},\ \sqrt{3},\ldots$
- $(F_n)_{n\geq 0}$ définie par $F_0 = 1$, $F_1 = 1$ et la relation $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pour $n \in \mathbb{N}$ (suite de Fibonacci). Les premiers termes sont 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... Chaque terme est la somme des deux précédents.

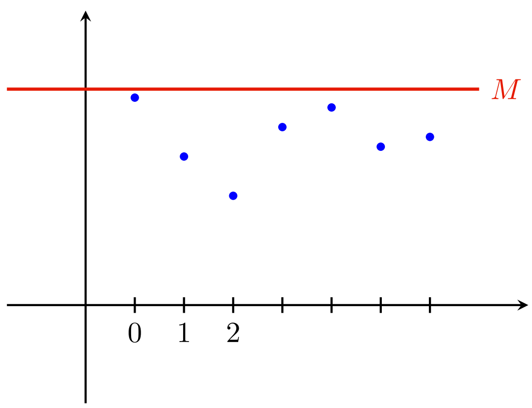
Définition 2.2

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique.

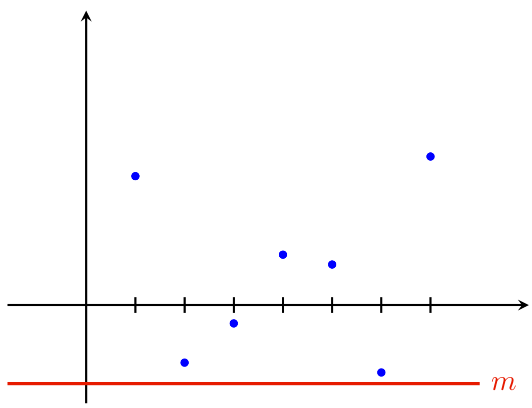
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **majorée** si : $\exists M \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq M.$
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **minorée** si : $\exists m \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geq m.$
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **bornée** si elle est majorée et minorée, ce qui revient à dire :

$$\exists (m, M) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad m \leq u_n \leq M.$$

Cas d'une suite .



Cas d'une suite .



Application 1.2. Démontrer que la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \cos(n^3) + 3$ est bornée.

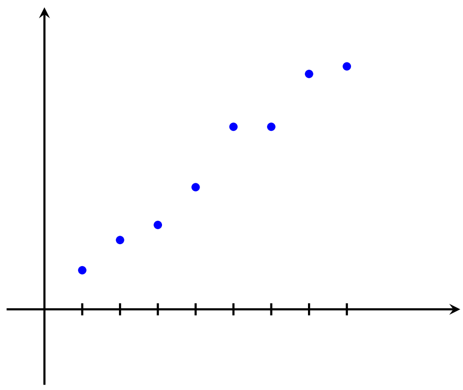
2. Sens de variation d'une suite

Définition 3.2

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique.

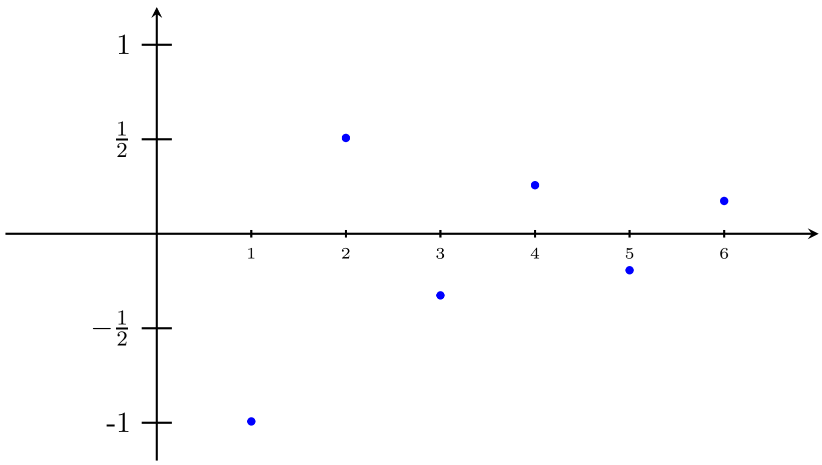
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **croissante** si $\quad \forall n \in \mathbb{N},$
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **strictement croissante** si $\quad \forall n \in \mathbb{N},$
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **décroissante** si $\quad \forall n \in \mathbb{N},$
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **strictement décroissante** si $\quad \forall n \in \mathbb{N},$
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **monotone** si elle est
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **strictement monotone** si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.

Exemple. Cas d'une suite croissante mais **non** strictement croissante.



Remarques.

- Il peut arriver qu'une suite soit **croissante** (resp. décroissante) à partir d'un certain rang n_0 : pour tout $n \geqslant n_0$, $u_{n+1} \geqslant u_n$ (resp. $u_{n+1} \leqslant u_n$).
- Il existe des suites **ni croissantes ni décroissantes**, par exemple la suite u définie pour tout entier naturel non nul par $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$:



- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante si et seulement si :
- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite à termes **strictement positifs**, elle est croissante si et seulement si :

Application 2.2. Étudier la monotonie des suites u et v définies par :

1. $u_{n+1} = -2u_n^2 + u_n$ et $u_0 = -3$ avec $n \in \mathbb{N}$
2. $v_n = \dfrac{2^n}{3^{n+4}}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$

3. Limite infinie d'une suite

3.1 Limite infinie

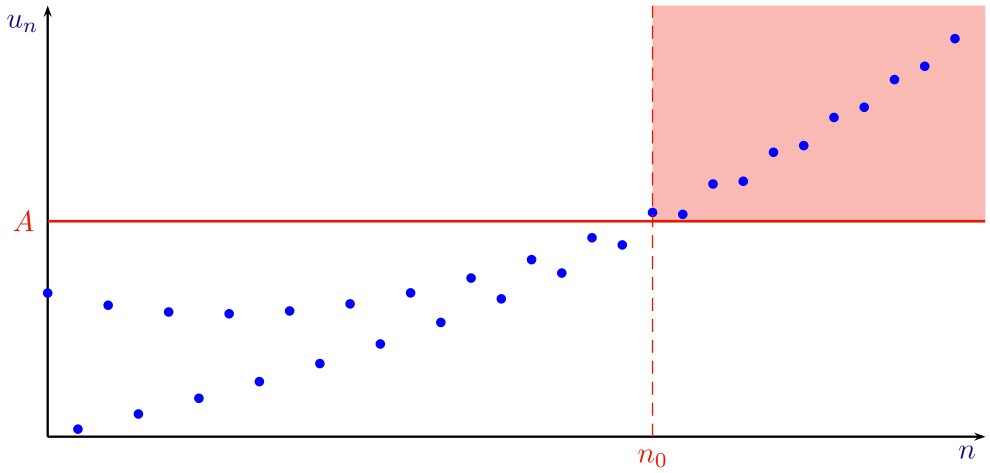
Définition 4.2

Une suite (u_n) a pour limite $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$, si tout intervalle de la forme $]A\,;+\infty[$ contient tous les termes u_n **à partir d'un certain rang.**

Autrement dit, pour tout réel A, il existe un entier n_0 tel que pour tout entier $n \geqslant n_0$, on ait $u_n > A$.
On note :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = \qquad}$$

On dit dans ce cas que la suite (u_n) **diverge** vers $+\infty$.



3.2 Premières limites à connaître

Propriété 1.2.

- $\lim\limits_{n \to +\infty} n =$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 =$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n} =$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} n^k =$ pour tout entier $k \geqslant 1$

Exercice 3. Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 2n + 1$.

1. Conjecturer la limite de la suite (u_n) en $+\infty$.

2. Résoudre l'inéquation $u_n > A$ où A est un réel donné.

3. Justifier alors que la suite (u_n) a pour limite $+\infty$.

4. Limite finie d'une suite

4.1 convergente

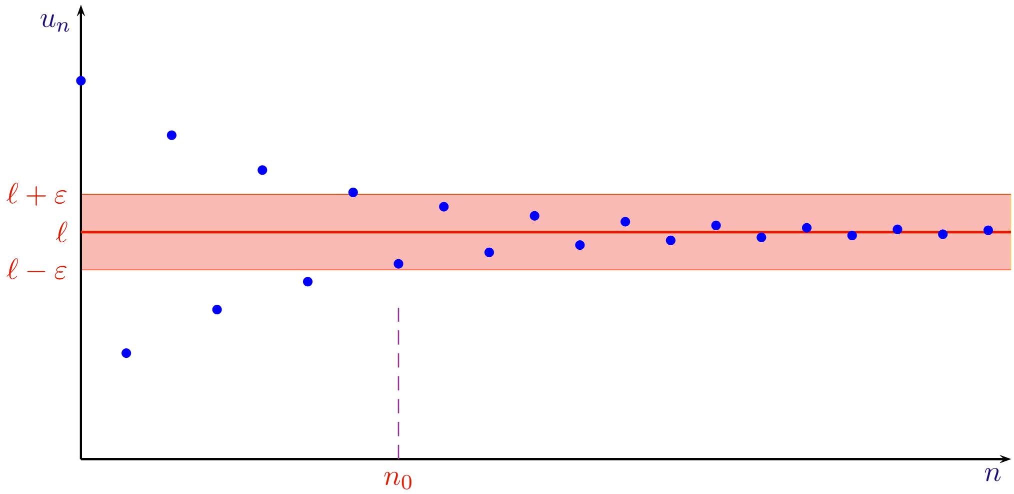
Définition 5.2

Une suite (u_n) admet pour limite le réel ℓ quand n tend vers $+\infty$, si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes de la suite **à partir d'un certain rang** n_0.

On note :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = \qquad\qquad}.$$

On dit dans ce cas que la suite (u_n) vers ℓ.



4.2 Suites de référence

Propriété 2.2.

- $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n^k} = 0$ pour tout entier $k \geqslant 1$

Théorème 3.2.

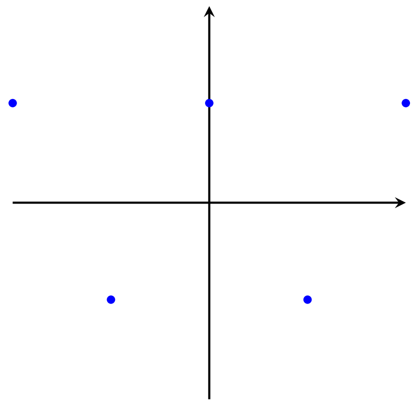
Si une suite (u_n) admet une limite le réel ℓ quand n tend vers $+\infty$ alors cette limite est unique et on note :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell}.$$

4.3 Des suites sans limite

Une suite n'a pas nécessairement de limite. C'est le cas par exemple pour les suites « alternées » ou celles dont les valeurs oscillent. Dans ces cas, on dira que ces suites sont également **divergentes.**

Exemple. La suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = (-1)^n$ alterne entre les valeurs -1 et 1 :



5. Théorèmes d'encadrement et de comparaison

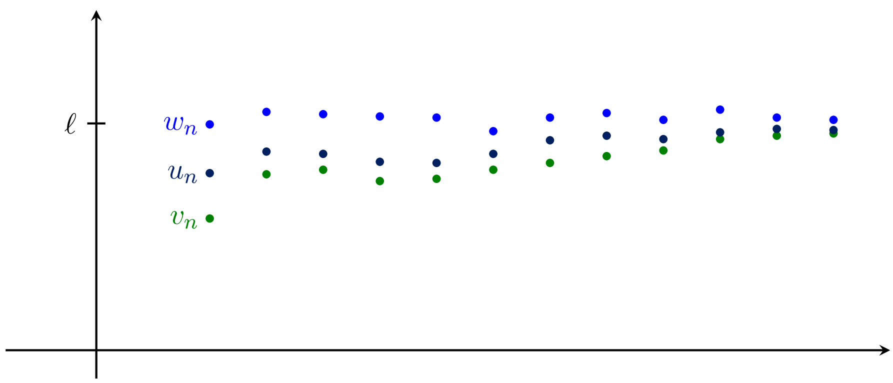
5.1 Théorème d'encadrement des limites dit « des gendarmes »

Théorème 4.2.

Si les suites (u_n), (v_n) et (w_n) sont telles que :

- à partir d'un certain rang $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$;
- (v_n) et (w_n) ont la même limite finie ℓ,

alors la suite (u_n) **converge** et a pour limite $\boldsymbol{\ell}$.



Démonstration.

□

Application 5.2. Déterminer la limite de la suite v définie sur $\mathbb{N}^*$ par $v_n = \dfrac{2+\cos n}{3n}$.

5.2 Théorème de comparaison

Théorème 6.2.
Soient (u_n), (v_n) deux suites définies sur $\mathbb{N}$.
Si à partir d'un certain rang, $u_n \geqslant v_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ alors :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty}.$$

Démonstration.

$\square$

Le même type de théorème existe pour $-\infty$ et il se démontre de la même manière.

Théorème 7.2.

Soient (u_n) et (v_n) deux suites définies sur $\mathbb{N}$.

Si à partir d'un certain rang, $u_n \leqslant v_n$ et si $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$ alors :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty}.$$

6. Opérations et limites

6.1 Somme

Limite de (u_n)	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$
Limite de (v_n)	ℓ'	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$
Limite de $(u_n + v_n)$	$\ell + \ell'$	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$

Dans le cas où $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$ on ne peut pas tirer de conclusion générale pour $(u_n + v_n)$, il s'agit d'une **forme indéterminée**, forme que l'on essaiera de lever en fonction de l'expression donnée. En tout état de cause, il n'y a pas de résultat général.

6.2 Produit

Limite de (u_n)	ℓ	$\ell \neq 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
Limite de (v_n)	ℓ'	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Limite de $(u_n \times v_n)$	$\ell \times \ell'$	$*\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

$*$: $+$ ou $-$ appliquer la règle des signes.
Dans le cas où $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \pm\infty$, on ne peut pas tirer de conclusion générale pour $(u_n \times v_n)$, il s'agit d'une **forme indéterminée** qui nécessitera une étude particulière.

6.3 Quotient

Limite de (u_n)	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$
Limite de (v_n)	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	$\ell' \neq 0$	$\ell' \neq 0$
Limite de $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0	$*\infty$	$*\infty$

$*$: $+$ ou $-$ appliquer la règle des signes.
Dans les cas où $\lim u_n = \pm\infty$ et $\lim v_n = \pm\infty$, $\lim u_n = 0$ et $\lim v_n = 0$, on ne peut pas tirer de conclusion générale pour $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$, il s'agit de **formes indéterminées**.

7. Limites de suites monotones

Propriété 3.2. Si une suite **croissante** a pour limite ℓ, alors tous les termes de la suite sont **inférieurs ou égaux** à ℓ.

Théorème 8.2.

- Une suite **croissante majorée converge**, c'est-à-dire admet une limite finie.
- Une suite **décroissante minorée converge**, c'est-à-dire admet une limite finie.

Ce théorème est un théorème d'existence, il justifie l'existence d'une limite finie mais ne précise pas cette limite.

Théorème 9.2.

- Une suite **croissante non majorée** a pour limite $+\infty$.
- Une suite **décroissante non minorée** a pour limite $-\infty$.

8. Limites de suites arithmétiques et géométriques

8.1 Suites arithmétiques

Propriété 4.2. Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.

- Si $r < 0$ on a $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.
- Si $r = 0$ alors la suite est **constante** et égale à u_0, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = u_0$.
- Si $r > 0$ alors on a $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

8.2 Suites géométriques

Propriété 5.2. Soit la suite géométrique (q^n) définie sur $\mathbb{N}$ avec q un réel.

- Si $q > 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.
- Si $q = 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 1$.
- Si $-1 < q < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.
- Si $q \leqslant -1$ alors la suite (q^n) n'a pas de limite.

Propriété 6.2. Soit (u_n) la suite géométrique de raison q et de premier terme u_0.

	$u_0 < 0$	$u_0 > 0$
$q \leqslant -1$	Pas de limite	
$-1 < q < 1$	la suite (u_n) tend vers 0	
$q = 1$	la suite (u_n) tend vers u_0	
$q > 1$	la suite (u_n) tend vers $-\infty$	la suite (u_n) tend vers $+\infty$

Application 10.2. Soit la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n + 1. \end{cases}$$

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_n \geqslant 2^{n-1}$.

2. En déduire que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.