Exercice 1.

1. $3\mathrm{i}z - 1 = 5z - 1 \Leftrightarrow (3\mathrm{i} - 5)z = 0 \Leftrightarrow z = 0.$

2. $(4 - \overline{z})(\overline{z} - 5 + \mathrm{i}) = 0 \iff 4 - \overline{z} = 0 \quad \text{ou} \quad \overline{z} - 5 + \mathrm{i} = 0 \iff z = 4 \quad \text{ou} \quad z = 5 + \mathrm{i}.$

3. On pose $z = x + \mathrm{i}y$ avec $(x\,;\,y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
3z - 2\overline{z} = -5 + \mathrm{i} &\Leftrightarrow 3(x + \mathrm{i}y) - 2(x - \mathrm{i}y) + 5 - \mathrm{i} = 0 \\
&\Leftrightarrow 3x + 3\mathrm{i}y - 2x + 2\mathrm{i}y + 5 - \mathrm{i} = 0 \\
&\Leftrightarrow x + 5 + (5y - 1)\mathrm{i} = 0 \\
&\Leftrightarrow x + 5 = 0 \quad \text{et} \quad 5y - 1 = 0 \\
&\Leftrightarrow x = -5 \quad \text{et} \quad y = \frac{1}{5} \text{ donc } \mathscr{S}_{\mathbb{C}} = \left\{-5 + \frac{1}{5}\mathrm{i}\right\}
\end{aligned}$$

Exercice 2.

1. $z^2 - 6z + 13 = 0$: $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 13 = -16 = (4\mathrm{i})^2$.

$\Delta < 0$: l'équation a donc deux solutions complexes conjuguées : $z_1 = \dfrac{6 - 4\mathrm{i}}{2} = 3 - 2\mathrm{i}$ et $z_2 = \overline{z_1} = 3 + 2\mathrm{i}$ donc $\mathscr{S}_{\mathbb{C}} = \{3 - 2\mathrm{i}\,;\,3 + 2\mathrm{i}\}$.

2. $\mathrm{i}z = \sqrt{3}z^2 \iff z(\sqrt{3} - \mathrm{i}) = 0$.

Or $z(\sqrt{3} - \mathrm{i}) = 0 \iff z = 0 \quad \text{ou} z = \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ donc $\mathscr{S}_{\mathbb{C}} = \left\{0\,;\, \dfrac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{i}\right\}$

3. $9z^2 + 49 = 0 \iff z^2 = -\dfrac{49}{9} = \left(\dfrac{7}{3}\mathrm{i}\right)^2$.

$z^2 = \left(\dfrac{7}{3}\mathrm{i}\right)^2 \iff z = \pm\dfrac{7}{3}\mathrm{i}$ donc $\mathscr{S}_{\mathbb{C}} = \left\{-\dfrac{7}{3}\mathrm{i}\,;\,\dfrac{7}{3}\mathrm{i}\right\}$.

Exercice 3. On considère le polynôme $P(z) = z^3 - (16 - \mathrm{i})z^2 + (89 - 16\mathrm{i})z + 89\mathrm{i}$.

1. $P(-\mathrm{i}) = 0$ donc $-\mathrm{i}$ est une racine de P.

2. Facile : $P(z) = (z + \mathrm{i})(z^2 - 16z + 89)$.

3. On résout les équation $z + \mathrm{i} = 0$ et $z^2 + 16z + 89 = 0$. On obtient $\mathscr{S}_{\mathbb{C}} = \{-\mathrm{i}\,;\,-8 - 5\mathrm{i}\,;\,8 + 5\mathrm{i}\}$.

Exercice 4.

On considère le polynôme P défini sur $\mathbb{C}$ par $P(z) = z^4 + \mathrm{i}z^3 - 125z - 125\mathrm{i}$ où z est un complexe.

1. $(z + \mathrm{i})(z^3 - 125) = z^4 + \mathrm{i}z^3 - 125z - 125\mathrm{i} = P(z)$.

2. On a $z^3 - 125 = z^3 - 5^3$ donc $z^3 - 125 = (z - 5)(z^2 + 5z + 25)$.

Les racines de $z^2 + 5z + 25$ sont $\alpha = \dfrac{-5 - 5\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$ et $\overline{\alpha} = \dfrac{-5 + 5\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$ donc :

$$z^4 + \mathrm{i}z^3 - 125z - 125\mathrm{i} = (z + \mathrm{i})(z - 5)(z - \alpha)(z - \overline{z}).$$

Exercice 5. On verra ça en classe.