CHAPITRE

12

Droites et systèmes

12.1 Retour sur la colinéarité de vecteurs

▶ **Note 1.12.** *Rappel sur le déterminant*
Le *déterminant* associé aux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est le nombre réel noté det défini par :

$$\boxed{\det(\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y}$$

▶ **Note 2.12.** *Rappel sur la colinéarité*
$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ colinéaires $\Longleftrightarrow \det(\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{v}) = 0$.

12.2 Équations cartésiennes de droites

12.2.1 Étude d'un exemple

Dans un repère, on considère les points $A\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$.

12.2.2 Cas général

Théorème 1.12.
Le plan est muni d'un repère.

1. Toute droite (d) du plan admet une équation de la forme $ax + by + c = 0$ avec $(a\,;\,b) \neq (0\,;\,0)$.
2. Un point appartient à la droite (d) *si et seulement* si ses coordonnées vérifient cette équation. Cette équation est appelée *équation cartésienne* de la droite (d).

Application 1.12. Soit la droite (d) d'équation $5x + 2y - 12 = 0$.
Les points $A\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$ appartiennent-ils à la droite (d) ?

Théorème 2.12.
Le plan est muni d'un repère.

Toute droite admettant une équation de la forme $ax+by+c = 0$ avec $(a\,;\,b) \neq (0\,;\,0)$ admet $\vec{v}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ comme vecteur directeur.

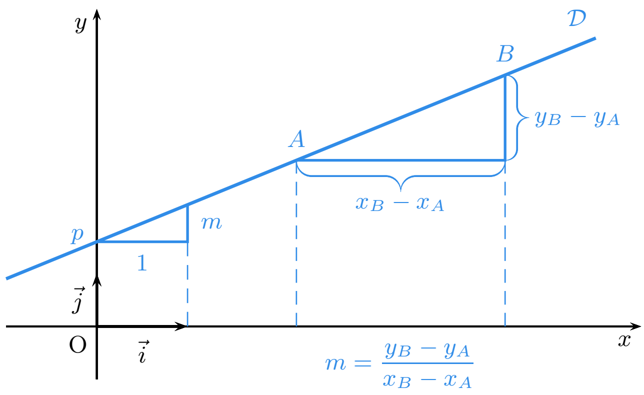
Application 2.12. Soit la droite (d) d'équation $x - 4y + 6 = 0$.
Préciser les coordonnées d'un vecteur directeur de la droite (d).

Application 3.12. Soit la droite (d) d'équation $2x - 5y + 2 = 0$.
Montrer que $P\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$ appartient à (d), préciser les coordonnées d'un vecteur directeur $\vec{u}$ de cette droite puis représenter graphiquement cette droite (d).

12.3 Équations réduites de droites

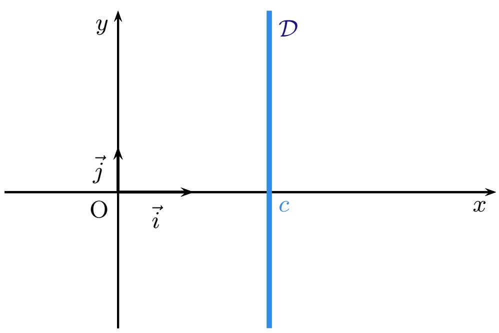
Propriété 1.12.
1. Toute droite non parallèle à l'axe des ordonnées a une équation réduite de la forme $y = mx + p$ où m et p sont deux réels.
2. Toute droite parallèle à l'axe des ordonnées admet une équation de la forme $x = k$ avec k réel.

Illustrations.
1. Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y = mx + p$:



   - Le nombre réel m est le coefficient directeur de la droite $\mathcal{D}$;
   - Le nombre réel p est l'ordonnée à l'origine de la droite $\mathcal{D}$;
   - Le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$.

2. Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation $x = c$:



   - La droite $\mathcal{D}$ n'a pas de coefficient directeur ;
   - $\overrightarrow{j}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$.

12.4 Droites parallèles, droites sécantes

Propriété 2.12.
Soient (d) et (d') d'équation respective $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$.
Alors (d) et (d') sont *parallèles* si et seulement tout vecteur directeur de la droite (d) est *colinéaire* à tout vecteur directeur de la droite (d').

Application 4.12. Soit la droite (d) d'équation $(d) : 2x - 3y + 7 = 0$ et $(d') : -4x + 6y - 2 = 0$.
Démontrer que (d) et (d') sont parallèles.

12.5 Système d'équations linéaires

Définition.

Un *système linéaire* de deux équations à deux inconnues x et y est la donnée de deux équations de la forme $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$, où a, b, c, a', b' et c' sont des réels donnés.

▶ Note 3.12.
Résoudre un système linéaire de deux équations à deux inconnues x et y c'est trouver tous les couples $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ vérifiant les deux équations.

Application 5.12. Résoudre les systèmes $\begin{cases} y = 3x + 5 \\ y = 5x - 3 \end{cases}$ et $\begin{cases} 3x - 2y = -4 \\ 2x + 6y = 1 \end{cases}$