★★☆☆☆ Exercice 1 **/7**

Au début de l'année 2021, une colonie d'oiseaux comptait 40 individus. L'observation conduit à modéliser l'évolution de la population par la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 & = & 40 \\ u_{n+1} & = & 0{,}008\,u_n\,(200-u_n) \end{cases}$$

où u_n désigne le nombre d'individus au début de l'année $(2021+n)$.

1. Donner une estimation, selon ce modèle, du nombre d'oiseaux dans la colonie au début de l'année 2022.

2. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,100]$ par $f(x) = 0{,}008x(200-x)$.

a. Résoudre dans l'intervalle $[0\,;\,100]$ l'équation $f(x) = x$.

b. Vérifier que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0\,;\,100]$ et dresser son tableau de variations.

c. En remarquant que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$ démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n :

$$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 100.$$

d. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

e. Déterminer la limite ℓ de la suite (u_n). Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

3. On considère le programme suivant écrit en langage Python :

```
def seuil(p) :
    n=0
    u = 40
    while u < p :
      n =n+1
      u = 0.008*u*(200-u)
    return(n+2021)
```

L'exécution de seuil(100) ne renvoie aucune valeur. Expliquer pourquoi.

★★★★☆ **Exercice 2** **/6**

Partie A

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = x\mathrm{e}^{-x}$.

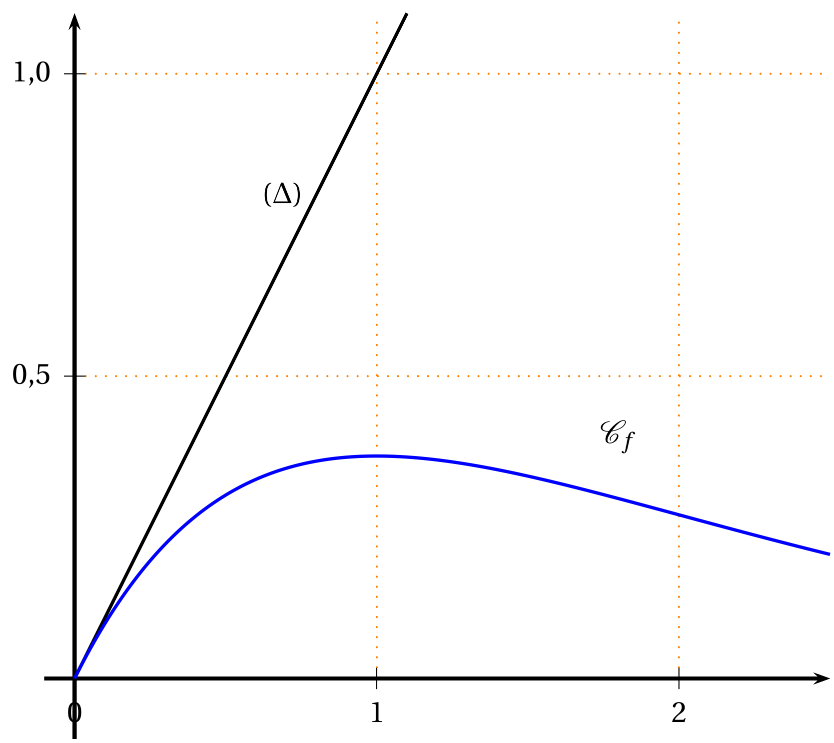
1. **a.** Rappeler le résultat de la limite $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$.
   b. Démontrer que la droite d'équation $y = 0$ est asymptote à la courbe représentative de la fonction f.
2. Calculer la dérivée f' de la fonction f sur $[0\,;+\infty[$ et en déduire le tableau de variations de f sur $[0\,;\ +\infty[$.

On donne ci-dessous la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f dans un repère du plan. La droite (Δ) d'équation $y = x$ a aussi été tracée.

Partie B

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Placer sur le graphique donné ci-dessous, en utilisant la courbe $\mathscr{C}_f$ et la droite (Δ), les points A_0, A_1 et A_2 d'ordonnées nulles et d'abscisses respectives u_0, u_1 et u_2. Laisser les tracés explicatifs apparents.
2. **a.** Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.
   b. *Dans cette question toute trace de recherche même incomplète sera prise en considération dans l'évaluation.*
   La suite (u_n) est-elle convergente ? Si oui, quelle est sa limite ?



★★★☆☆ Exercice 3 **/5**

Calculer, si elles existent, les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 4\\ x<4}} \frac{\mathrm{e}^x}{4-x}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x^3}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x \sin(2022x)$
4. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x + 2\cos(x)$
5. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{xy-x-y+1}{x-1}$ où y est un réel quelconque.

★☆☆☆☆ Exercice 4 **/2**

Calculer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = \mathrm{e}^{-\sqrt{x}}$ sur $I =]0\,;+\infty[$.

2. $f_2(x) = \sqrt{4\mathrm{e}^x + 12}$ sur $I = \mathbb{R}$.

3. $f_3(x) = \left(\mathrm{e}^{-x+9} - x^2\right)^{30}$ sur $I = \mathbb{R}$.