CHAPITRE 6

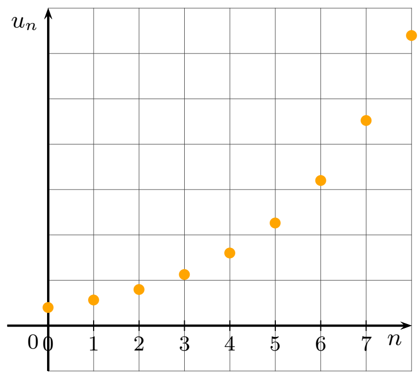
Évolution des modèles exponentiels

6.1 Sens de variation des modèles exponentiels

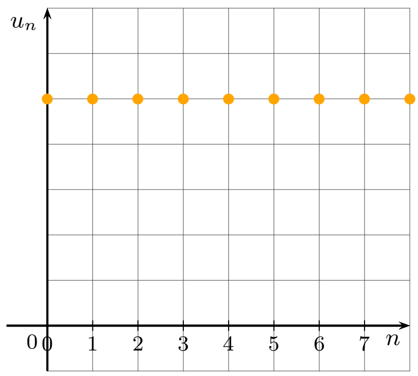
6.1.1 Sens de variation des suites géométriques

Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 > 0$ et de raison $q > 0$.

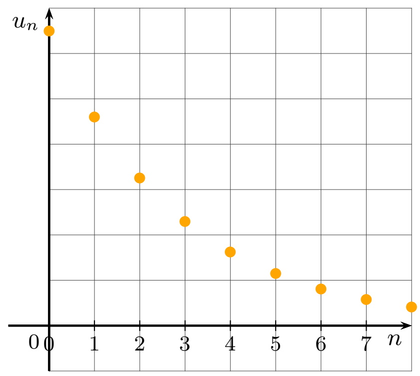
Si $q > 1$ alors la suite (u_n) est *strictement croissante.*



Si $q = 1$ alors la suite (u_n) est *constante.*



Si $0 < q < 1$ alors la suite (u_n) est *strictement décroissante.*



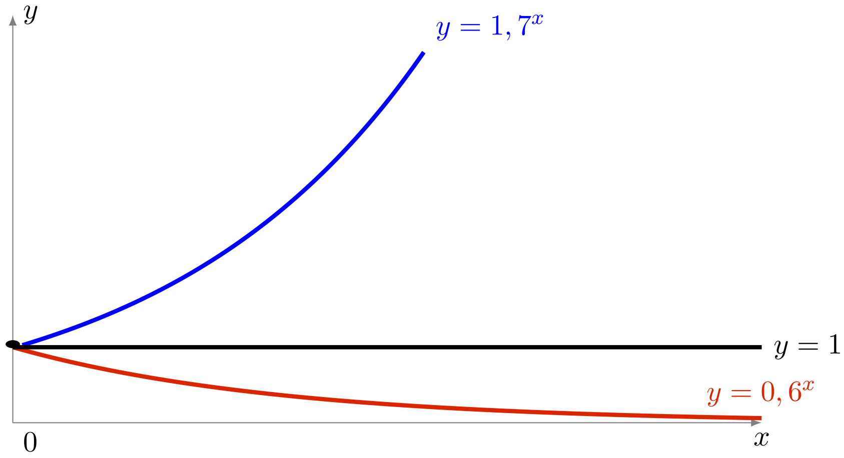
Exemple 1.6.
Déterminer le sens de variation de la suite géométrique définie pour tout entier naturel n par $u_n = 50 \times 1,12^n$.

6.1.2 Sens de variation des fonctions exponentielles

Propriétés 1.6.
Soit a un réel *strictement positif.*

- Si $a > 1$ alors la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = a^x$ est *strictement croissante* sur $[0\,;\,+\infty[$.
- Si $0 < a < 1$ alors la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = a^x$ est *strictement décroissante* sur $[0\,;\,+\infty[$.
- Si $a = 1$ alors la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = 1^x = 1$ est *constante* sur $[0\,;\,+\infty[$.

Exemple 2.6.



Propriétés 2.6.
Soit k un réel *non nul*.

- Si $k > 0$ alors les fonctions f et g définies sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = a^x$ et $g(x) = ka^x$ ont *le même sens de variation* sur $[0\,;\,+\infty[$.
- Si $k < 0$ alors les fonctions f et g définies sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = a^x$ et $g(x) = ka^x$ ont *des sens de variation contraires* sur $[0\,;\,+\infty[$.

Exemple 3.6.
Déterminer le sens de variation de la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = -4 \times 2,6^x$.

6.2 Taux d'évolution moyen

6.2.1 Évolutions successives

Définition.

On appelle *taux d'évolution* tout *nombre décimal positif.*
Généralement, un taux s'écrit sous la forme d'une fraction de dénominateur 100 ou sous forme *d'un pourcentage.*

Exemple 4.6.
$\dfrac{7}{100} = 0,07 = 7\%.$

Propriétés 3.6.
On considère une quantité Q et un *taux d'évolution* de $t\%$.

- Lorsque Q subit n *augmentations* de $t\%$ alors la nouvelle valeur de Q est égale à :

$$Q \times \left(1 + \frac{t}{100}\right)^n$$

- Lorsque Q subit n *diminutions* de $t\%$ alors la nouvelle valeur de Q est égale à :

$$Q \times \left(1 - \frac{t}{100}\right)^n$$

Exemple 5.6.
Soit une quantité Q coûtant 150 €.
Cette quantité subit quatre diminutions de 8%.
Calculer le prix de cette nouveau quantité.

6.2.2 Taux d'évolution moyen

Propriétés 4.6.
Soit Q une quantité et $t\%$ un taux d'évolution.

- Q subit une *augmentation* de $t\%$ équivaut à Q subit n *augmentations successives* de *taux constant* égal à :

$$\left(1 + \frac{t}{100}\right)^{\frac{1}{n}} - 1.$$

- Q subit une *diminution* de $t\%$ équivaut à Q subit n *diminutions successives* de *taux constant* égal à :

$$1 - \left(1 - \frac{t}{100}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Exemple 6.6.
Un article a augmenté de 7% en quatre ans.
Calculer l'augmentation moyenne de cet article.