CHAPITRE

8

Logarithme Népérien

8.1 Fonction logarithme népérien

8.1.1 Fonction réciproque de la fonction exponentielle

Définition 1.8.

La fonction *exponentielle* est :

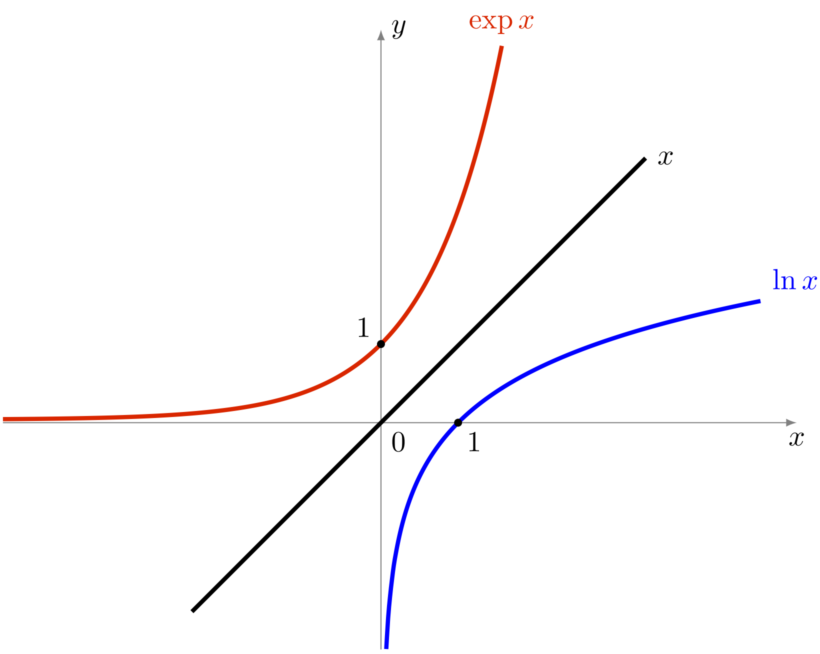
- ________________ sur $\mathbb{R}$.
- ____ sur $\mathbb{R}$.
- $a > 0 \in$ donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires dans le cas des fonctions strictement croissantes, pour tout réel $a > 0$, il existe un unique réel x tel que $\mathrm{e}^x = a$.

Définition 2.8.

La fonction qui, à tout réel $x > 0$, associe le réel $\ln(x)$ s'appelle *fonction logarithme népérien* que l'on note ln : cette fonction est définie sur $]0\,; +\infty[$ et c'est la *fonction réciproque* de la fonction exponentielle.

Propriété 1.8.

Dans un repère orthonormé, les courbes représentatives des fonctions *exponentielle* et *logarithme népérien* sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.



Propriétés 1.8.

- Pour tout $b > 0$ et pour tout réel a, $\mathrm{e}^a = b \Longleftrightarrow$.
- $\ln(1) =$ et $\ln(\mathrm{e}) =$.
- Pour tout réel $a > 0$, $\mathrm{e}^{\ln(a)} =$.
- Pour tout réel a, $\ln(\mathrm{e}^a) =$.

Application 1.8. Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \ln(5x - 2)$
2. $g(x) = \ln(-x^2 - 5x + 6)$

Application 2.8. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\mathrm{e}^x = 3$
2. $\mathrm{e}^{-5x+1} = 4$
3. $\ln(x) = -3$
4. $\ln(-3x + 4) = 0$

8.1.2 Relation fonctionnelle et propriétés algébriques

Propriété 2.8. *Relation fonctionnelle*
Pour tous x et y réels strictement positifs,

$$\boxed{\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y).}$$

Démonstration.

□

Propriété 3.8. *Conséquences*
Pour tous réels x et y strictement positifs :

- $\ln\left(\dfrac{1}{x}\right) =$.
- $\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) =$.
- $\forall n \in \mathbb{Z},\ \ln(x^n) =$.
- $\ln(\sqrt{x}) =$.

Démonstration. Prouvons la première égalité.

□

Application 3.8. Démontrer que $\ln(8) - \ln(2) + \ln(4) - \ln(16) = 0$.

CC BY NC

8.2 Étude de la fonction ln

8.2.1 Dérivée et variations

Propriétés 2.8. *Dérivées*

- La *fonction logarithme népérien* est *continue* et *dérivable* sur $]0\,;+\infty[$ et pour tout réel $x>0$,

$$\boxed{\ln'(x)=\frac{1}{x}}$$

- Soit u une fonction *dérivable* sur un intervalle I telle que, pour tout $x\in I$, $u(x)>0$.
  La fonction $\ln\circ u\;:\;x\to\ln(u(x))$ est dérivable sur I et :

$$\boxed{(\ln\circ u)'=\frac{u'}{u}}$$

Démonstration.

$\square$

Application 4.8. Calculer la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\ln(5x^2+x+3)$.

Propriété 4.8. *Sens de variation*
La fonction *logarithme népérien* est *strictement croissante* sur $]0\,;+\infty[$.

Conséquences :

Propriétés 3.8.
Pour tous réels a et b strictement positifs, on a :

- $\ln(a) = \ln(b) \iff$

- $\ln(a) \leqslant \ln(b) \iff$

  En particulier, on a :

- $\ln(a) \leqslant 0 \iff$

- $\ln(a) \geqslant 0 \iff$

Application 5.8. On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 85 \times 0,2^n + 15$.
Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels : $a_n < 15,004$.

8.2.2 Limites

Propriété 5.8.

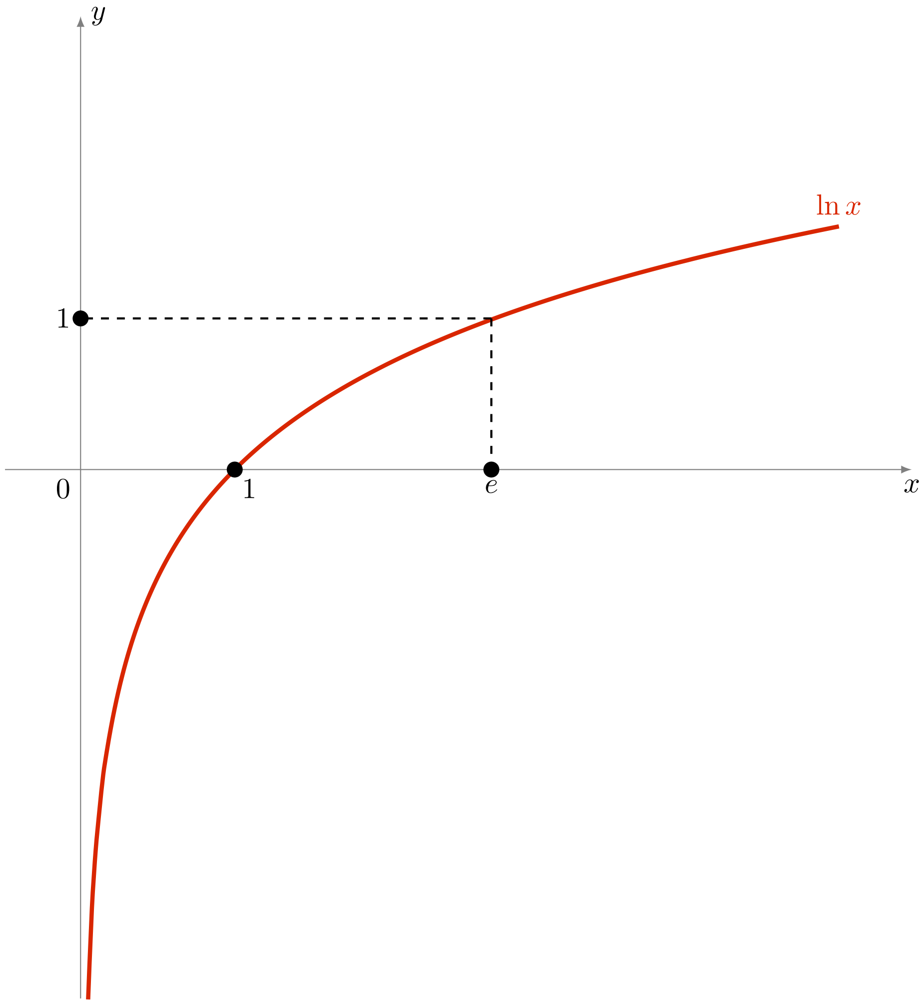
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$

Conséquences.

On peut dresser le tableau de variation de la fonction ln :

x	0	$+\infty$
Variation de ln	$-\infty$ ↗	$+\infty$

Courbe représentative de la fonction ln :



Propriété 6.8. *Croissances comparées*

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0.$

- $\lim\limits_{x \to 0} x \ln(x) = 0.$

  Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$,

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^n} = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} x^n \ln(x) = 0.$

Propriété 7.8. *Concavité*

La fonction *logarithme népérien* est *concave* sur $]0\,;\,+\infty[$: sa courbe représentative est donc toujours située *en dessous* de ses tangentes sur $]0\,;\,+\infty[$.

Démonstration.

□