☆☆☆☆☆ Exercice 1 — /3

Soient les complexes $z_1 = 5+2\mathrm{i}$ et $z_2 = -1-\mathrm{i}$.
Déterminer la forme algébrique de :

1. z_1^2
2. $\overline{z_1 - z_2}$.

★☆☆☆☆ Exercice 2 — /4

On donne le nombre complexe $z = \dfrac{1+2\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$.

1. Déterminer la forme algébrique de z.
2. En déduire sans aucun calcul la valeur de $\dfrac{1+2\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} + \dfrac{1-2\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$.

★☆☆☆☆ Exercice 3 — /4

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $(1+2\mathrm{i})z = 1-\mathrm{i}z$
2. $z + 3\overline{z} = \mathrm{i}+2$.

★★☆☆☆ Exercice 4 — /4

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système suivant, en utilisant la méthode du pivot :

$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ 2x-y+z=3 \\ -4x+y-z=-5 \end{cases}.$$

★★★★☆ Exercice 5 — /5

Soit A une matrice carrée d'ordre 3. On dit qu'un réel λ est une *valeur propre* de A s'il existe une matrice colonne non nulle X de taille 3×1 telle que $AX = \lambda X$. On dit alors que la matrice X est un *vecteur propre* associé à la valeur propre λ.

1. Dans cette question, on suppose que $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 \\ -2 & 9 & 6 \\ 5 & 1 & 7 \end{pmatrix}$.
   (a) Calculer AX où $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   (b) En déduire une valeur propre de A.[1]
2. On suppose désormais que A est une matrice carrée d'ordre 3 quelconque.
   (a) Démontrer que si λ est une valeur propre non nulle de A et si X est une matrice associée à λ alors, pour tout entier naturel n, $A^n X = \lambda^n X$.
   (b) Démontrer qu'un réel λ est une valeur propre de A si et seulement si la matrice $A - \lambda I_3$ n'est pas inversible.

1. Dédicace pour Pablo et Johan ahahhaha!!!!