CHAPITRE 1

Probabilités discrètes

1.1 Rappels de l'an dernier

1.1.1 Probabilités conditionnelles

Définition 1.1.
Soit A un événement de probabilité non nulle.
On appelle probabilité de B *sachant* A, le nombre noté $\mathbf{P}_A(B)$ défini par :

$$\boxed{\mathbf{P}_A(B) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(A)}}$$

On en déduit une formule de calcul de la *probabilité d'une intersection.*

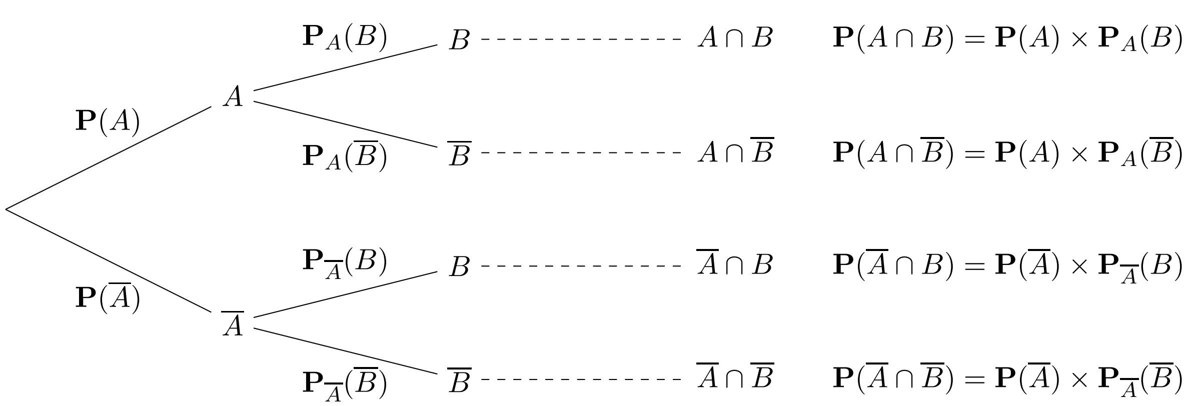
Propriété 1.1.
Soient A et B deux évènements d'un univers Ω tels que $\mathbf{P}(A) \neq 0$ et $\mathbf{P}(B) \neq 0$ on a :

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) \times \mathbf{P}_A(B) = \mathbf{P}(B) \times \mathbf{P}_B(A).$$

Cette écriture s'appelle la ____

1.1.2 Arbre et probabilité conditionnelle

Voici comment un arbre de probabilités est pondéré avec les probabilités conditionnelles :



Propriété 2.1. *Règles de calculs*

- La somme des branches issues d'un même __________ vaut toujours __________ ;
- La probabilité de l'événement correspondant à un chemin (constitué de plusieurs branches) est égale au ____________________ des probabilités inscrites sur chaque branche du chemin.
- La probabilité d'un événement est la _______________ des probabilités des chemins menant à cet événement.

Propriété 3.1. *Formule des probabilités totales*
On suppose que l'univers probabiliste est la réunion des événements A_1, A_2, $\dots$, A_n deux à deux incompatibles et de probabilité non nulle autrement dit les événements A_1, A_2, $\dots$, A_n forment une partition de l'univers : on parle alors de *système complet d'événements*.
Pour tout événement B de l'univers Ω :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(B) &= \mathbf{P}(A_1 \cap B) + \mathbf{P}(A_2 \cap B) + \cdots + \mathbf{P}(A_n \cap B) \\ &= \mathbf{P}(A_1) \times \mathbf{P}_{A_1}(B) + \mathbf{P}(A_2) \times \mathbf{P}_{A_2}(B) + \cdots + \mathbf{P}(A_n) \times \mathbf{P}_{A_n}(B)\end{aligned}$$

Dans le cas particulier où l'on a l'arbre plus haut, on a donc :

$$\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A \cap B) + \mathbf{P}(\overline{A} \cap B) = \mathbf{P}(A) \times \mathbf{P}_A(B) + \mathbf{P}(\overline{A}) \times \mathbf{P}_{\overline{A}}(B)$$

Méthode

La rédaction est la même que celle de l'an dernier. On veillera bien à définir les événements qui forment une partition de l'univers et on veillera à bien citer la formule des probabilités totales.

Exercice 1. ***D'après sujet bac Métropole 2022.***

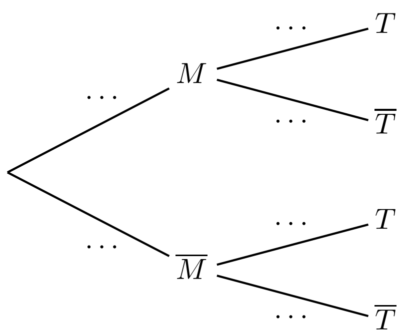
Le coyote est un animal sauvage proche du loup, qui vit en Amérique du Nord.
Dans l'état d'Oklahoma, aux États-Unis, 70 % des coyotes sont touchés par une maladie appelée ehrlichiose.
Il existe un test aidant à la détection de cette maladie. Lorsque ce test est appliqué à un coyote, son résultat est soit positif, soit négatif, et on sait que :

- Si le coyote est malade, le test est positif dans 97 % des cas.
- Si le coyote n'est pas malade, le test est négatif dans 95 % des cas.

Des vétérinaires capturent un coyote d'Oklahoma au hasard et lui font subir un test pour l'ehrlichiose.
On considère les évènements suivants :

- M : « le coyote est malade » ;
- T : « le test du coyote est positif ».

1. Compléter l'arbre pondéré ci-dessous qui modélise la situation.



2. Déterminer la probabilité que le coyote soit malade et que son test soit positif.

3. Démontrer que la probabilité de T est égale à $0,694$.

4. On appelle « valeur prédictive positive du test » la probabilité que le coyote soit effectivement malade sachant que son test est positif.

   Calculer la valeur prédictive positive du test. On arrondira le résultat au millième.

1.1.3 Indépendance

Définition 2.1.

> Soient A et B deux événements de probabilité non nulle.
> On dit que B est *indépendant* de A si $\mathbf{P}_A(B) = \mathbf{P}(B)$, autrement dit si la réalisation ou non de l'événement A n'a aucune influence sur celle de B.
> Dans ce cas, on a alors aussi $\mathbf{P}_B(A) = \mathbf{P}(A)$, autrement dit A est indépendant de B aussi.

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_B(A) &= \frac{\mathbf{P}(A\cap B)}{\mathbf{P}(B)}\\ &= \frac{\mathbf{P}(A)\times\mathbf{P}_A(B)}{\mathbf{P}(B)}\\ &= \frac{\mathbf{P}(A)\times\mathbf{P}(B)}{\mathbf{P}(B)}\\ &= \mathbf{P}(A)\end{aligned}$$

□

En échangeant les noms des événements, on remarque alors que c'est réciproque.
On dit alors simplement que les deux événements A et B sont *indépendants* si et seulement si l'une des deux égalités suivantes est vraie (ce qui implique que l'autre l'est aussi) :

$$\mathbf{P}_A(B)=\mathbf{P}(B) \qquad \text{ou} \qquad \mathbf{P}_B(A)=\mathbf{P}(A)$$

⚠ Ne pas confondre *indépendants* et *incompatibles.*
On rappelle que deux événements sont *incompatibles* si et seulement si $\mathbf{P}(A\cap B)=0$.

Propriété 4.1.
Soient A et B deux événements de probabilité non nulle.
A et B sont *indépendants si et seulement si* :

$$\mathbf{P}(A\cap B)=\mathbf{P}(A)\times\mathbf{P}(B)$$

Exercice 2. ***D'après sujet bac Asie 2022.***

Lors d'une kermesse, un organisateur de jeux dispose, d'une part, d'une roue comportant quatre cases blanches et huit cases rouges et, d'autre part, d'un sac contenant cinq jetons portant les numéros 1, 2, 3, 4 et 5. Le jeu consiste à faire tourner la roue, chaque case ayant la même probabilité d'être obtenue, puis à extraire un ou deux jetons du sac selon la règle suivante :

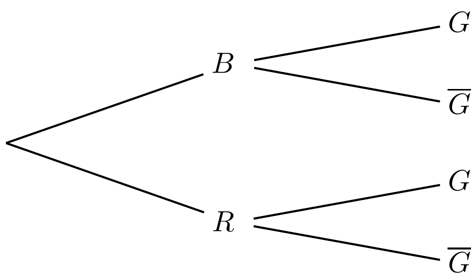
- si la case obtenue par la roue est blanche, alors le joueur extrait un jeton du sac ;
- si la case obtenue par la roue est rouge, alors le joueur extrait successivement et sans remise deux jetons du sac.

Le joueur gagne si le ou les jetons tirés portent tous un numéro impair.

1. Un joueur fait une partie et on note B l'évènement « la case obtenue est blanche », R l'évènement « la case obtenue est rouge » et G l'évènement « le joueur gagne la partie ».
   (a) Donner la valeur de la probabilité conditionnelle $\mathbf{P}_B(G)$.

   (b) On admettra que la probabilité de tirer successivement et sans remise deux jetons impairs est égale à $0,3$.

Compléter l'arbre de probabilité suivant :



2. (a) Montrer que $\mathbf{P}(G) = 0,4$.

   (b) Un joueur gagne la partie.
   Quelle est la probabilité qu'il ait obtenu une case blanche en lançant la roue ?

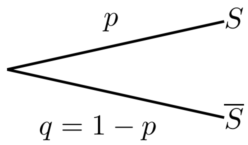
3. Les évènements B et G sont-ils indépendants ? Justifier.

1.2 Épreuve, loi et schéma de Bernoulli

1.2.1 Épreuve de Bernoulli

Définition 3.1.

Soit p un nombre réel appartenant à $[0\,;\,1]$.
On appelle *épreuve de Bernoulli* toute expérience aléatoire admettant exactement deux issues, appelées généralement **succès** S et ____________ $\overline{S}$ et de probabilités respectives p et $q = 1 - p$.



Exemples.

- Lancer une pièce de monnaie équilibrée et savoir si pile est obtenu est une épreuve de Bernoulli se succès S « pile a été obtenu » dont la probabilité est $p = 0,5$. L'échec $\overline{S}$ est « Face a été obtenu ».
- Interroger une personne dans la rue en France et lui demander si elle est gauchère est une épreuve de Bernoulli de succès S « La personne est gauchère » dont la probabilité est environ égale à $0,13$.

1.2.2 Loi de Bernoulli

Définition 4.1.

On réalise une épreuve de Bernoulli dont le succès S a pour probabilité p.
Une variable aléatoire X est **une variable aléatoire de Bernoulli** lorsqu'elle est à valeurs dans $\{0\,;\,1\}$ où la valeur 1 est attribuée au succès.
On dit alors que X suit la **loi de Bernoulli** de paramètre p.
Autrement dit, on a $\mathbf{P}(X = 1) = p$ et $\mathbf{P}(X = 0) = 1 - p$.
On peut résumer la loi de Bernoulli par le tableau suivant :

x_i	1	0
$\mathbf{P}\,(X = x_i)$	p	$1 - p$

Propriété 5.1.
Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de Bernoulli de paramètre p.
L'*espérance* mathématique de X est $E(X) = p$ et la *variance* est $V(X) = p(1 - p)$.

Démonstration. $E(X) = \mathbf{P}(X = 1) \times 1 + \mathbf{P}(X = 0) \times 0 = p$.
$V(X) = \mathbf{P}(X = 1) \times 1^2 + \mathbf{P}(X = 0) \times 0^2 - E(X)^2 = p(1 - p)$ □

1.2.3 Schéma de Bernoulli

Définition 5.1.

Soit n un entier naturel non nul.
Un *schéma de Bernoulli* est la répétition de n épreuves de Bernoulli *identiques* et *indépendantes*.

1.2.4 Loi binomiale

Soit n un entier naturel non nul et p un réel compris entre 0 et 1.

Définition 6.1.
On considère un schéma de Bernoulli de paramètres n et p et X la variable aléatoire comptant le nombre de succès contenus dans ce schéma.
On dit alors que X suit la *loi binomiale* de paramètres n et p, notée $\mathscr{B}(n\,;\,p)$.

Propriété 6.1.
La loi de la variable aléatoire X qui suit la *loi binomiale* de paramètres n et p est donnée pour tout entier k compris entre 0 et n, par :

$$\boxed{\mathbf{P}(X=k)=\binom{n}{k}\times p^k\times(1-p)^{n-k}}$$

(Probabilité de réaliser k succès sur les n expériences).
$\binom{n}{k}$ est appelé coefficient binomial et sera vu de façon approfondie dans un chapitre futur.

Propriété 7.1.
Si X suit la *loi binomiale* de paramètres n et p alors :

- $E(X)=np$
- $V(X)=np(1-p)$
- $\sigma(X)=\sqrt{np(1-p)}$

Démonstration. On a $E(X)=E(X_1+X_2+X_3+\cdots+X_n)=E(X_1)+E(X_2)+E(X_3)+\cdots+E(X_n)=np$.
$V(X)=V(X_1+X_2+X_3+\cdots+X_n)=V(X_1)+V(X_2)+V(X_3)+\cdots+V(X_n)=np(1-p)$. □

Retour sur l'exercice 1. On rappelle que la probabilité qu'un coyote capturé au hasard présente un test positif est de $0,694$.

1. Lorsqu'on capture au hasard cinq coyotes, on assimile ce choix à un tirage avec remise.
   On note X la variable aléatoire qui à un échantillon de cinq coyotes capturés au hasard associe le nombre de coyotes dans cet échantillon ayant un test positif.

   (a) Quelle est la loi de probabilité suivie par X ? Justifier et préciser ses paramètres.

(b) Calculer la probabilité que dans un échantillon de cinq coyotes capturés au hasard, un seul ait un test positif. On arrondira le résultat au centième.

(c) Un vétérinaire affirme qu'il y a plus d'une chance sur deux qu'au moins quatre coyotes sur cinq aient un test positif : cette affirmation est-elle vraie ? Justifier la réponse.

2. Pour tester des médicaments, les vétérinaires ont besoin de disposer d'un coyote présentant un test positif. Combien doivent-ils capturer de coyotes pour que la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux présente un test positif soit supérieure à $0,99$?