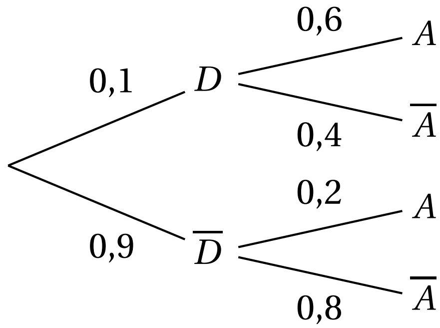
Exercice 1.

Partie 1

1. Voici l'arbre pondéré modélisant la situation :



2. On a $P(D \cap A) = P(D) \times P_D(A) = 0{,}1 \times 0{,}6 = 0{,}06$ donc la probabilité que le candidat soit sélectionné sur un dossier et soit admis à l'école est égale à 0,06.

3. D et $\overline{D}$ forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilité totales :

$$\begin{aligned} P(A) &= P(D \cap A) + P\left(\overline{D} \cap A\right) \\ &= 0{,}06 + P\left(\overline{D}\right) \times P_{\overline{D}}(A) \\ &= 0{,}06 + 0{,}9 \times 0{,}2 \\ &= 0{,}24 \end{aligned}$$

La probabilité de l'événement A est bien égale à 0,24.

4. On cherche $P_A\left(\overline{D}\right)$.

$$\begin{aligned} P_A\left(\overline{D}\right) &= \frac{P\left(A \cap \overline{D}\right)}{P(A)} \\ &= \frac{0{,}18}{0{,}24} \\ &= 0{,}75 \end{aligned}$$

Sachant qu'un candidat est admis à l'école, la probabilité que son dossier ne soit pas sélectionné est égale à 0,75.

Partie 2

1. (a) L'expérience est la répétition de sept épreuves identiques et indépendantes où seuls deux cas sont possibles :
   - Soit le candidat est admis avec la probabilité $p = 0{,}24$.
   - Soit il ne l'est pas avec la probabilité $q = 1 - p = 0{,}76$.

   X désignant le nombre de candidats admis à l'école parmi les sept, X désigne la loi binomiale de paramètres $n = 7$ et $p = 0{,}24$.

(b) On a $P(X=1)=\binom{7}{1}\times 0{,}24\times 0{,}76^6\approx 0{,}324$ donc la probabilité que, sur les sept candidats, un seul soit admis est environ égale à 0,324.

(c) On a $P(X\geqslant 5)=1-P(X\leqslant 4)$.
La calculatrice $P(X\leqslant 4)\approx 0{,}989$ donc $P(X\geqslant 5)\approx 0{,}011$: la probabilité qu'au moins cinq des sept candidats soient admis à cette école est environ égale à 0,011.

(d) On peut utiliser directement la calculatrice : $P(X\leqslant 3)\approx 0{,}938$ donc la probabilité qu'au plus trois des sept candidats soient admis à cette école est environ égale à 0,938.

2. (a) Dans cette configuration, X suit la loi binomiale de paramètres n et $p=0{,}24$.
$P(X=0)=\binom{n}{0}\times 0{,}24^0\times 0{,}76^n=0{,}76^n$.

(b) La probabilité d'avoir au moins un candidat reçu est $1-P(X=0)=1-0{,}76^n$.
Il faut donc déterminer le plus petit entier naturel n tel que $1-0{,}76^n\geqslant 0{,}99$.
On a $1-0{,}76^{16}<0{,}99$ et $1-0{,}76^{17}>0{,}99$: on retient $n=17$. Il faut donc au minimum 17 candidats.

Exercice 2.

1. On a donc $u_1=1000\times\left(1-\dfrac{10}{100}\right)+250=1000\times 0.9+250=900+250=1150$.

2. Enlever 10% d'une quantité c'est multiplier par $1-\dfrac{10}{100}=1-0.10=0.90$.
Le nombre d'abonnés de l'année précédente est donc multiplié par 0.9; on ajoute ensuite chaque année 250 nouveaux abonnés, donc pour tout naturel n :

$$u_{n+1}=0.9u_n+250.$$

3. $u(10)$ donne le nombre d'abonnés au bout de 10 ans; une calculatrice donne environ 1977.

4. (a) Soit $P_n\ :\ u_n\leqslant 2250$.

Initialisation : on a $u_0=1000\leqslant 2500$: donc P_0 est vraie.
Hérédité : soit $n\in\mathbb{N}$. Supposons P_n vraie ($u_n\leqslant 2500$).
Montrons que P_{n+1} vraie ($u_{n+1}\leqslant 2500$).
Par hypothèse de récurrence : $u_n\leqslant 2500$ et en multipliant chaque membre de

cette inégalité par $0.9 > 0$ respectant l'ordre, on a donc $0.9u_n \leqslant 0.9 \times 2500$ ou $0.9u_n \leqslant 2250$, puis en ajoutant 250 à chaque membre :

$0.9u_n + 250 \leqslant 2250 + 250$, soit $u_{n+1} \leqslant 2500$ ce qui montre que P_{n+1} vraie.

Conclusion : P_0 est vraie et P_n est héréditaire à partir du rang $n = 0$, elle est donc vraie pour tout entier naturel n.
$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant 2500$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 0.9u_n + 250 - u_n \\ &= -0.1u_n + 250 \end{aligned}$$

Or d'après la question précédente : $u_n \leqslant 2500$, puis en multipliant par $-0{,}1 < 0$ il vient $-250 \leqslant -0.1u_n$ et en ajoutant à chaque membre 250 : $0 \leqslant -0.1u_n + 250$.

On a donc pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ soit $u_{n+1} \geqslant u_n$: la suite (u_n) est bien croissante.

5. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 2500 \\ &= 0.9u_n + 250 - 2500 \\ &= 0.9u_n - 2250 \\ &= 0.9\,(u_n - 2500) \\ &= 0.9v_n \end{aligned}$$

Pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = 0.9v_n$ ce qui prouve que la suite (v_n) est la suite géométrique de raison 0.9 et de terme initial $v_0 = u_0 - 2500 = 1000 - 2500$ soi $v_0 = -1500$.

(b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times q^n$ donc $v_n = -1500 \times 0.9^n$.

Or $v_n = u_n - 2500 \iff u_n = v_n + 2500 = 2500 - 1500 \times 0.9^n$.

(c) La calculatrice donne $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2500$. La suite étant croissante, on peut donc dire, qu'à long terme, le nombre d'abonnés n'excèdera pas les 2500.

6. Voici un programme possible :

```
n = 0
u = 1000
  while u < 2200 :
    u = 0,9*u + 250
    n = n+1
  return n
```

Le programme s'arrêtera la 16e année.

Exercice 3.

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + 3n^2 - n. \end{cases}$$

1. Pour tout réel x,

$$\begin{array}{rcl} A(x) & = & x(x-1)^2 + 3x^2 - x \\ & = & x(x^2 - 2x + 1) + 3x^2 - x \\ & = & x^3 + x^2 \\ & = & x^2(x+1) \end{array}$$

2. Soit $P_n\ :\ u_n = n(n-1)^2$.
Initialisation : on a $u_0 = 0$ et $0(0-1)^2 = 0$ donc P_0 est vraie.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons P_n vraie ($u_n = n(n-1)^2$).
Montrons que P_{n+1} vraie ($u_{n+1} = n^2(n+1)$).
On a $u_{n+1} = u_n + 3n^{-}n$ et par hypothèse de récurrence $u_n = n(n-1)^2$ donc :

$$\begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & n(n-1)^2 + n(n-1)^2 \\ & = & A(n) \\ & = & n^2(n+1) \end{array}$$

Ce qui montre que P_{n+1} vraie.

Conclusion : P_0 est vraie et P_n est héréditaire à partir du rang $n = 0$, elle est donc vraie pour tout entier naturel n.