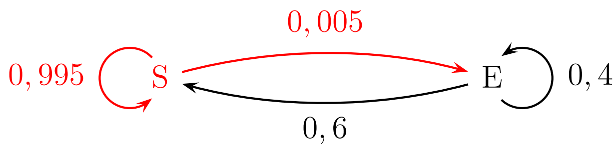
## Partie A.Partie A - Étude d'un premier milieu

1. Voici le graphe complété :




2. La matrice de transition dans le milieu 1 est donc : $A = \begin{pmatrix} 0,995 & 0,005 \\ 0,6 & 0,45 \end{pmatrix}$

3. (a) On a $\det(P) = 121 \neq 0$ et donc $P$ est inversible et son inverse est :

$$P^{-1} = \frac{1}{121}\begin{pmatrix} 120 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (b) On a $D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,395 \end{pmatrix}$

4. Soit $\mathcal{P}_n$ la proposition $A^n = PD^nP^{-1}$. On va démontrer cette proposition par récurrence.

   **Initialisation**

   On prend $n = 0$. On appelle $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice identité d'ordre 2.

   $A^n = A^0 = I_2$ et $D^n = D^0 = I_2$ donc $PD^nP^{-1} = PD^0P^{-1} = PI_2P^{-1} = PP^{-1} = I_2$

   Pour $n = 0$, $A^n = PD^nP^{-1}$, donc la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie au rang 0.

   **Hérédité**

   Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie, c'est-à-dire $A^n = PD^nP^{-1}$ (hypothèse de récurrence).

   $A^{n+1} = A^1 \times A^n = (PD^1P^{-1}) \times (PD^nP^{-1}) = PD\left(P^{-1}P\right)D^nP^{-1} = PDI_2D^nP^{-1} = PDD^nP^{-1}$
   $= PD^{n+1}P^{-1}$

   Donc la proposition est vraie au rang $n + 1$.

   **Conclusion**

   La proposition est vraie au rang 0 ; elle est héréditaire pour tout $n \geqslant 0$ : la proposition est vraie pour tout $n \geqslant 0$ : pour tout entier naturel $n$, $A^n = PD^nP^{-1}$.

5. On sait que $X_n = X_0A^n$ donc

   $X_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \times \dfrac{1}{121}\begin{pmatrix} 120 + 0,395^n & 1 - 0,395^n \\ 120\left(1 - 0,395^n\right) & 1 + 120 \times 0,395^n \end{pmatrix} = \dfrac{1}{121}\begin{pmatrix} 120 + 0,395^n & 1 - 0,395^n \end{pmatrix}.$

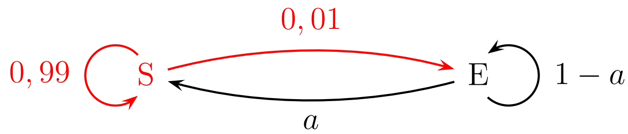
   Or $X_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ donc, pour tout $n$, $a_n = \dfrac{120 + 0,395^n}{121}$.

6. $-1 < 0,395 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,395^n = 0$ ; il s'ensuit que $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \dfrac{120}{121}$.

   La probabilité sur le long terme que l'atome soit dans un état stable est donc égale à $\dfrac{120}{121}$.

## Partie B - Étude d'un second milieu

1. La nouvelle situation peut être représentée par le graphe probabiliste suivant :




On a pour tout $n$, $\begin{cases} a_{n+1} = 0,99\,a_n + a\,b_n \\ b_{n+1} = 0,01\,a_n + (1-a)\,b_n \end{cases}$

Ce qui s'écrit sous forme matricielle : $\begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,99 & 0,01 \\ a & 1-a \end{pmatrix}$.

La matrice de transition dans le milieu 2 est donc : $M = \begin{pmatrix} 0,99 & 0,01 \\ a & 1-a \end{pmatrix}$.

2. Après un temps très long, dans le milieu 2, la proportion d'atomes excités se stabilise autour de 2 %. On admet qu'il existe un unique vecteur $X$, appelé état stationnaire, tel que $XM = X$, et que $X = \begin{pmatrix} 0,98 & 0,02 \end{pmatrix}$.

$$XM = X \iff \begin{pmatrix} 0,98 & 0,02 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,99 & 0,01 \\ a & 1-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,98 & 0,02 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 0,98 \times 0,99 + 0,02a & = 0, \\ 0,98 \times 0,01 + 0,02\,(1-a) & = 0, \end{cases}$$

$$\iff 0,98 \times 0,01 = 0,02a \iff a = 0,49$$

La valeur de $a$ cherchée est $0,49$.