1. Nombres et écritures fractionnaires

Addition de nombres en écriture fractionnaire

Pour additionner deux fractions, il faut qu'elles soient au même dénominateur.
Pour cela, on peut utiliser la règle suivante : quelque soit les réels a, b et c avec b et c non nuls,

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times c}{b \times c}$$

Exemple 1 : quand un des dénominateurs est un multiple de l'autre :

$$\begin{aligned}\frac{1}{3} + \frac{5}{6} &= \frac{1 \times 2}{3 \times 2} + \frac{5}{6} \\ &= \frac{2}{6} + \frac{5}{6} \\ &= \frac{2+5}{6} \\ &= \frac{7}{6}\end{aligned}$$

Exemple 2 : on recherche un multiple commun aux dénominateur, dans le pire cas c'est le produit des dénominateur, comme ci-dessous :

$$\begin{aligned}\frac{5}{3} + \frac{7}{2} &= \frac{5 \times 2}{3 \times 2} + \frac{7 \times 3}{2 \times 3} \\ &= \frac{10}{6} + \frac{21}{6} \\ &= \frac{31}{6}\end{aligned}$$

Produit de deux nombres en écriture fractionnaire

Pour multiplier deux fractions, on applique la règle :

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$

Exemple 3 : On a $\frac{5}{4} \times \frac{7}{4} = \frac{5 \times 7}{4 \times 4} = \frac{35}{16}$
Enfin, diviser par une fraction revient à multiplier par son inverse.
Exemple 4 : On a $\frac{\frac{5}{4}}{\frac{7}{2}} = \frac{5}{4} \times \frac{2}{7} = \frac{5 \times 2}{4 \times 7} = \frac{10}{28} = \frac{5}{14}$.
et $\frac{5}{\frac{2}{3}} = 5 \times \frac{3}{2} = \frac{5 \times 3}{2} = \frac{15}{2}$.

Ex. 1 Écrire sous forme de fraction irréductible :

1. $A = \frac{1}{3} + \frac{-5}{12}$
2. $B = 7 - \frac{9}{4}$
3. $C = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \times \frac{3}{7}$
4. $D = \frac{1 + \frac{1}{3}}{\frac{6}{7}}$

2. Arithmétique

Nombre premier

Un **entier naturel** p est dit ***nombre premier*** s'il admet **exactement** ________________ diviseurs : ______ et ________________.

Exemple et contre-exemple.

1. 2 est premier car 2 a exactement deux diviseurs 1 et lui-même.
2. 1 n'est pas premier car 1 a un seul diviseur : lui-même.

Théorème admis

Tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 s'écrit soit comme une puissance d'un nombre premier soit comme produit de puissances de nombres premiers. Cette écriture est unique, à l'ordre des facteurs près.

Exemple : décomposons 924 en produit de facteurs premiers :

$$\begin{array}{r|l} 924 & 2 \\ 462 & 2 \\ 231 & 3 \\ 77 & 7 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

donc $924 = 2^2 \times 3 \times 7 \times 11$.

Ex. 2

Dresser la liste des dix premiers nombres premiers.

Ex. 3

1. Parmi les cinq nombres suivants, lesquels ne sont pas premiers ? Justifier pourquoi.

   19 27 67 87 121

2. Écrire le nombre 24 en produit de facteurs premiers.

Ex. 4 Parmi les trois propositions suivantes, laquelle correspond à la décomposition en produit de facteurs premiers du nombre 252 :

Proposition 1	Proposition 2	Proposition 3
$2^2 \times 9 \times 7$	$2 \times 2 \times 3 \times 21$	$2^2 \times 3^2 \times 7$

Ex. 5

1. Décomposer 558 et 775 en produit de facteurs premiers.
2. Rendre irréductible la fraction $\dfrac{558}{775}$.

Ex. 6

1. Décomposer en produit de facteurs premiers 56 et 45.
2. 56 et 45 sont-ils premiers entre eux ?
3. Dresser la liste des diviseurs de 45 puis de 56.

Ex. 7

1. Décomposer en produit de facteurs premiers 25×72 et 54×12.
2. En déduire le PGCD de $(25 \times 72\,; 54 \times 12)$.

Ex. 8

1. Décomposer en produit de facteurs premiers 375.
2. (a) Démontrer que 375 n'est pas un carré parfait.
   (b) Par quel plus petit entier naturel n doit-on multiplier 375 pour obtenir un carré parfait ? Justifier.

Multiples, diviseurs

S'il existe un entier relatif a tel que $a = bq$, alors a est un ***multiple*** de b et b est un ***diviseur*** de a.

Remarque : si $a = bq$, on dit aussi que b divise a ou que a est divisible par b.
Si on effectue la division euclidienne de a par b, le reste est nul.

Exemples.

1. $21 = 3 \times 7$ donc 21 est un multiple de 3 ou 3 divise 21.
2. 1081 est divisible par 23 car si l'on effectue la division euclidienne, le reste est nul :

$$\begin{array}{r|l} 1\,0\,8\,1 & 2\,3 \\ \cline{2-2} 1\,6\,1 & 4\,7 \\ 0 & \end{array}$$

Nombres pairs, impairs

1. Un nombre a entier est pair si c'est un multiple de 2, donc s'il existe un entier p tel que $a = 2p$.
2. Un nombre a entier est impair si ce n'est un multiple de 2, donc s'il existe un entier p tel que $a = 2p + 1$.

Exemples :

1. 13 est impair car $13 = 2 \times 6 + 1$
2. 26 est pair car $26 = 2 \times 13$.

Ex. 9

Compléter chaque phrase.

1. $144 = 24 \times 6$ donc 24 est un ____________ de 144.
2. $\dfrac{203}{29} = 7$ donc 203 est ____________ par 29 et par ____________
3. $395 = 79 \times 5$ donc 395 est un ____________ de 79 et de ____________.

Ex. 10

Vrai ou faux ? Justifier.

1. 81 est un diviseur de 3.
2. 185 est divisible par 5.
3. 253 est un multiple de 3.

Ex. 11

a désigne un nombre de $\mathbb{Z}$.
Démontrer que :

1. la différence de deux multiples de a est un multiple de a ;
2. le produit de deux multiples de a est un multiple de a.

Ex. 12

n désigne un nombre de $\mathbb{Z}$.

1. Écrire en fonction de n le nombre précédent et le nombre suivant n.
2. Additionner ces trois nombres. De quel nombre la somme est-elle un multiple ?
3. Énoncer une propriété traduisant cette propriété.

Ex. 13

Démontrer que le produit de deux nombres impairs est un nombre impair.

Ex. 14

Soit a un nombre pair et b un multiple de 3.
Démontrer que $c = a \times b$ est un multiple de 6.

Ex. 15

Démontrer que le produit de deux nombres impairs est un nombre impair.

Ex. 16

On admet ici que la somme de deux entiers impairs est un nombre pair.
Soit p un nombre premier avec $p \geqslant 3$.
Démontrer que le nombre $p + 7$ ne peut pas être premier.