CHAPITRE

9 Compléments sur les nombres complexes

Dans tout le chapitre, on se place dans un repère *orthonormé direct* $(O\,;\,\vec{u}\,,\vec{v})$.

9.1 Interprétation du module et de l'argument de $\dfrac{c-a}{b-d}$

9.1.1 Module de $\dfrac{c-a}{b-d}$

Propriété 1.9.
Soient quatre points *distincts* A, B et C et D d'affixes respectives a, b, c et d.
On a :

- $|c-a| = |a-c| = AC$
- $\left|\dfrac{c-a}{d-b}\right| = \dfrac{AC}{BD}$

9.1.2 Argument de $\dfrac{c-a}{b-d}$

Propriété 2.9.
Soient quatre points *distincts* A, B et C et D d'affixes respectives a, b, c et d.
On a :

$$\boxed{\arg\left(\dfrac{c-a}{d-b}\right) = (\overrightarrow{BD},\overrightarrow{AC})\ [2\pi]}$$

Application 1.9.

1. Soient A, B et C d'affixes respectives $a = 1+2\mathrm{i}$, $b = 2$ et $c = -1+\mathrm{i}$.
   (a) Calculer AB et AC.
   (b) Calculer $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$.
   (c) En déduire la nature du triangle ABC.
2. Dans chaque cas, déterminer l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant la condition :

   (a) $\left|\dfrac{z+4+\mathrm{i}}{z+5}\right| = 1$ (b) $\arg\left(\dfrac{z-3\mathrm{i}}{z-4}\right) = \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$

9.2 Racines n-ièmes de l'unité

Définition 1.9.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On appelle *racine n-ième* de l'unité, tout nombre complexe z tel que $z^n = 1$

Propriété 3.9.
Pour tout entier naturel n non nul, l'équation $z^n = 1$ admet *exactement* n racines distinctes : ce sont les nombres complexes de la forme $\omega_k = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}}$, $k \in [\![0\,;\,n-1]\!]$.

Remarques.

- Pour tout entier naturel n non nul, 1 est solution de $z^n = 1$.
- Les racines n-ièmes de l'unité sont les *racines* du polynôme $z^n - 1$.

Application 2.9. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $(z+3)^5 = 1$.
2. $z^3 = -64$.

Définition 2.9.
On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité :

$$\boxed{\mathbb{U}_n = \{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}},\ k \in [\![0\,;\,n-1]\!]\}}$$

Exemple 1.9.
Préciser les racines 2-ièmes de l'unité.

Propriété 4.9.

- Les points images de $\mathbb{U}_n$, pour $n \in \mathbb{N}^*$, appartiennent au *cercle trigonométrique*.
- Les points images de $\mathbb{U}_n$, pour $n \geqslant 3$, sont les sommets d'un *polygone régulier* à n sommets.

Exemple 2.9.
$n = 3$: les racines 3-ièmes de l'unité sont les affixes des sommets d'un triangle équilatéral.