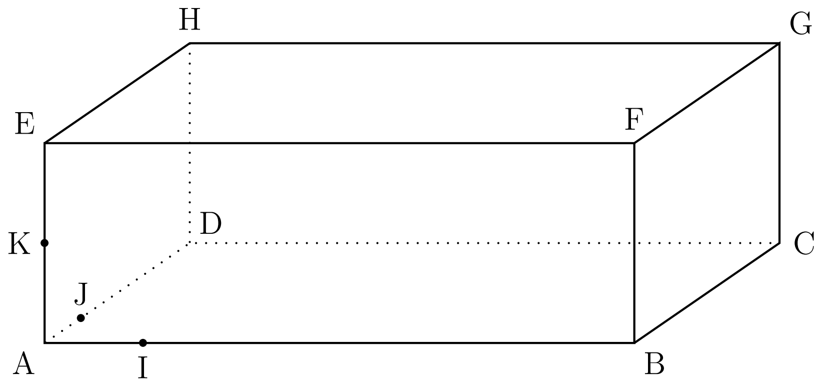
Devoir surveillé n°7 : mini bac blanc

Exercice 1 — 35 minutes — **/5**

On considère le pavé droit ABCDEFGH ci-dessous, pour lequel $AB = 6$, $AD = 4$ et $AE = 2$.
I, J et K sont les points tels que $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$.



On se place dans le repère orthonormé $\left(A ; \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}, \overrightarrow{AK}\right)$.
Ainsi dans ce repère le point I a pour coordonnées $(1 ; 0 ; 0)$.

1. Justifier, sans calcul, que les points I, J et G forment un plan de l'espace.
2. Vérifier que le vecteur $\overrightarrow{n}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -9 \end{pmatrix}$ est normal au plan (IJG).
3. Déterminer une équation cartésienne du plan (IJG).
4. Justifier qu'une représentation paramétrique de la droite (BF) est :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 6 \\ y & = & 0, \qquad t \in \mathbb{R} \\ z & = & 2t \end{array}\right.$$

5. Calculer les coordonnées du point d'intersection L du plan (IJG) et de la droite (BF).
6. Le point L appartient-il au segment [BF] ? Justifier.

Exercice 2 — 35 minutes — **/5**

Soient f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

1. Déterminer l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.

2. On se propose d'étudier la position relative de la courbe $\mathcal{C}_f$ et de la droite (Δ).

   Pour cela on considère la fonction h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - x - 2$.

   (a) Calculer la limite de la fonction h en $-\infty$.

   (b) Justifier que, pour tout réel $x \neq 0$, $h(x) = x\left(\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}} - 1 - \dfrac{2}{x}\right)$.
   En déduire la limite de la fonction h en $+\infty$.

   (c) On note h' la fonction dérivée de la fonction h sur $\mathbb{R}$.
   Pour tout réel x, calculer $h'(x)$ et étudier le signe de $h'(x)$ suivant les valeurs de x.

   (d) Dresser le tableau de variations de la fonction h sur $\mathbb{R}$.

   (e) En déduire que, pour tout réel x, $2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1 \geqslant x + 1$.

   (f) Que peut-on en déduire quant à la position relative de la courbe $\mathcal{C}_f$ et de la droite (Δ) ?

Exercice 3 — 20 minutes — **/5**

Partie A

Une entreprise, spécialisée dans la fabrication de parfums, souhaite créer deux parfums, l'un à la rose et l'autre au jasmin.
Elle achète donc les deux variétés de fleurs à deux producteurs, A et B, pour ses créations.
Le directeur passe la commande suivante :

- 65 % de la quantité nécessaire provient du producteur A ;
- parmi la quantité provenant du producteur A, 70 % sont des roses ;
- parmi la quantité provenant du producteur B, il y a autant de roses que de jasmin.

On s'intéresse à une fleur au hasard.
On considère les évènements suivants :

A : « La fleur provient du producteur A » ;

R : « La fleur est une rose ».

1. Réaliser un arbre de probabilités représentant la situation.
2. Le directeur a besoin d'au moins 60 % de roses pour ses créations. Sa commande peut-elle convenir ? Justifier la réponse.

3. Sachant que la fleur est une rose, quelle est la probabilité qu'elle provienne du producteur A ? Arrondir le résultat à $0,001$ près.

Partie B

Un employé prend au hasard 100 flacons parmi les parfums à la rose ou au jasmin. Ce tirage est assimilé à un tirage avec remise car le nombre de flacons est très grand.
On suppose que la probabilité que le flacon contienne du jasmin est de $0,37$.
Soit X la variable aléatoire qui, dans le lot de 100 flacons, associe le nombre de flacons contenant du jasmin.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
2. Calculer la probabilité d'obtenir dans le lot exactement 40 flacons contenant du jasmin. Arrondir la probabilité à $0,001$ près.
3. Déterminer la probabilité d'obtenir au moins 30 flacons contenant du jasmin. Arrondir la probabilité à $0,001$ près.

Exercice 4 — 20 minutes — **/5**

Une entreprise conçoit des verres optiques. Après le brassage du verre liquide pendant plusieurs heures, vient le processus de refroidissement. La température du verre doit subir un abaissement régulier afin que le verre se solidifie sans se cristalliser.
On modélise l'évolution de la température du verre en fonction du temps à l'aide de la suite (u_n) définie par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 1500 \\ u_{n+1} & = & 0,9u_n + 2,4 \text{ pour tout entier naturel } n \end{array}\right.$$

Ainsi, pour tout entier naturel n, on note u_n la température du verre en degrés Celsius au bout de n minutes et u_0 désigne la température initiale du processus de refroidissement.

1. Conjecturer, à la calculatrice, la limite de la suite (u_n).
2. (a) Démontrer que pour tout entier naturel n : $24 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1500$.
   (b) Justifier la convergence de la suite (u_n) puis en déduire sa limite ℓ.
   Interpréter la valeur de ℓ dans le contexte de l'exercice.
3. On considère le script suivant écrit en langage Python :

```
def seuil(p) :
    n=0
    u = 1500
    while u>p :
        n =n+1
        u = 0.9*u+2.4
    return(n)
```

   (a) On entre dans la console seuil(25). Justifier que le programme s'arrête.
   (b) Préciser la valeur retournée en fin de programme et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.