CHAPITRE

5

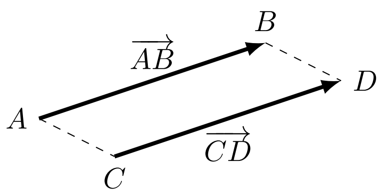
Droites et plans de l'espace

5.1 Vecteurs de l'espace

5.1.1 Définition d'un vecteur de l'espace

Définition 1.5.

Soient A et B deux points de l'espace.
On associe le *vecteur* $\overrightarrow{AB}$ à la translation qui transforme A en B.
Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si et seulement si ____________ est un parallélogramme (éventuellement aplati).
On peut alors noter $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ et on dit que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont des ________________________ du vecteur $\overrightarrow{u}$.



▶ **Note 1.5.**

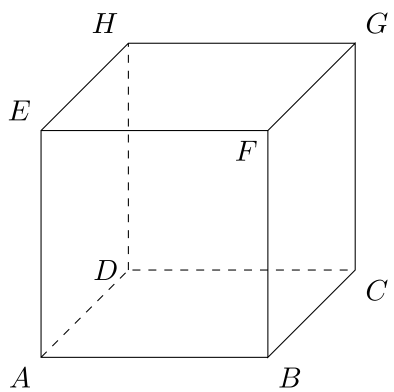
- Deux vecteurs sont égaux s'ils ont même ____
- Lorsque A et B sont **confondus**, on dit que le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est ______ et on le note $\overrightarrow{0}$.

Théorème 1.5. *admis*
Soient $\overrightarrow{u}$ et A un point de l'espace. Il existe un unique point M tel que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{u}$ et on dit que $\overrightarrow{AM}$ est le représentant de $\overrightarrow{u}$ d'origine A.

Application 1.5.

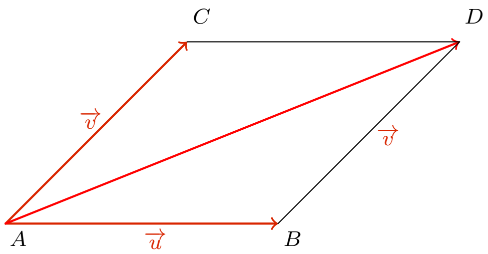
On considère le cube $ABCDEFGH$ représenté ci-dessous. Construire les points M et N tels que :

- $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EH}$.
- $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{HE}$.



5.1.2 Opérations sur les vecteurs de l'espace

Définition 2.5.
Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace de représentants respectifs $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$.
La *somme* des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est le vecteur noté $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ de représentant $\overrightarrow{AD}$ tel que $ABDC$ soit un parallélogramme.



Propriété 1.5. *Relation de Chasles*
Pour tous points A, B et C de l'espace, $\overrightarrow{AB} + \_\_\_\_\_ = \overrightarrow{AC}$.

Propriétés 1.5.
- Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul. Le vecteur $k\overrightarrow{u}$ est le vecteur qui a :
  - la *même direction* que le vecteur $\overrightarrow{u}$;
  - le *même sens* que $\overrightarrow{u}$ si $k > 0$, le *sens contraire* de $\overrightarrow{u}$ si $k < 0$;
  - pour *norme* $|k| \times \|\overrightarrow{u}\|$.
- Pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$ et pour tout réel k, $0\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$.

Propriétés 2.5.
Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace et k et k' deux réels.
- $k\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0} \iff k = 0 \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.
- $k(k'\overrightarrow{u}) = kk'\overrightarrow{u}$.
- $(k + k')\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{u} + k'\overrightarrow{u}$.
- $k(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = k\overrightarrow{u} + k\overrightarrow{v}$.

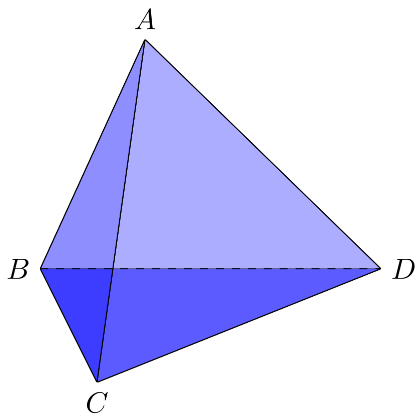
Définition 3.5.
Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace.
On dit que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont *colinéaires* s'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{u} =$ ou $\overrightarrow{v} =$.

► **Note 2.5.**
- Deux vecteurs non nuls sont *colinéaires* si et seulement si
- Le vecteur nul est *colinéaire à tout vecteur.*

Application 2.5.

On considère le tétraèdre $ABCD$ représenté ci-dessous.

1. Construire les points M et N tels que $\overrightarrow{BM} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{CN} = 2\overrightarrow{BC}$.
2. Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{MC}$ et $\overrightarrow{AN}$ sont colinéaires.



5.2 Droites et plans de l'espace

5.2.1 Caractérisation vectorielle d'une droite

Définition 4.5.

Soient A et B deux points *distincts* de l'espace. La droite (AB) est l'ensemble des points M tels que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont __________________ : on a donc $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$ où $k \in \mathbb{R}$ et le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur ____________ de la droite (AB).

5.2.2 Caractérisation vectorielle d'un plan

Définition 5.5.

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace tels que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont *pas colinéaires.*
$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont *coplanaires* lorsqu'il existe deux réels x et y tels que : $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$.
On dit alors que le vecteur $\vec{w}$ est une **combinaison linéaire** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Définitions 1.5.

- On dit que des points sont *coplanaires* s'il existe un plan qui contient ces plans.

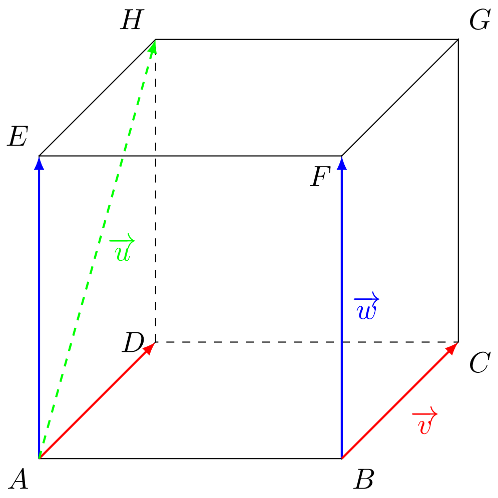
  Soient A, B et C trois points *non alignés* de l'espace.

- Le *plan* (ABC) est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$, où $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$.

- Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont des *vecteurs directeurs* du plan (ABC).
  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est une *base* de ce plan et $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est un *repère* de ce plan.

▶ **Note 3.5.**
Trois points sont *toujours* coplanaires.

Propriété 2.5.
Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs de l'espace tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AD}$.
$\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont *coplanaires* si et seulement si les points A, B, C et D sont *coplanaires*.



5.3 Positions relatives de droites et de plans

5.3.1 Positions relatives de deux droites

Définitions 2.5.

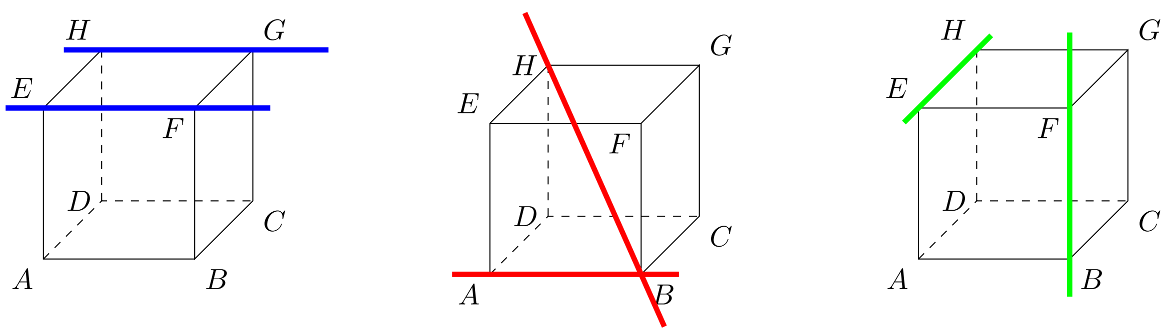
Soit d une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ et d' une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u'}$.

- d et d' sont *parallèles* lorsque $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ sont ____________________
- d et d' sont *coplanaires* lorsqu'il existe un plan qui contient d et d' et non coplanaires sinon.

Propriétés 3.5.
Soient A, B, C et D quatre points distincts de l'espace.

- Les droites (AB) et (CD) sont *coplanaires* si les points A, B, C et D sont *coplanaires*, c'est-à-dire s'il existe un plan contenant les quatre points A, B, C et D.
- Deux droites sont *coplanaires* si et seulement si elles sont *sécantes* ou *parallèles*.
- Si deux droites sont *non coplanaires*, alors leur intersection est *vide*.

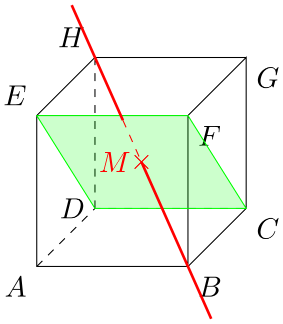
Exemple 1.5.

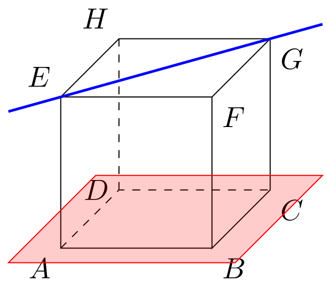


5.3.2 Positions relatives d'une droite et d'un plan

Propriétés 4.5.
- Une droite est *parallèle à un plan* lorsqu'elle admet un vecteur directeur colinéaire à un vecteur directeur de ce plan.
- Si une droite *n'est pas parallèle à un plan*, alors elle coupe ce plan en un ____________.

Exemple 2.5.





____

____

____

____

____

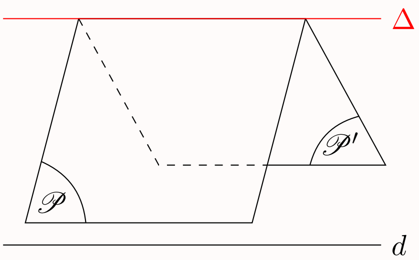
____

5.3.3 Positions relatives de deux plans

Propriétés 5.5.
- Deux plans sont *parallèles* lorsqu'ils admettent un même couple de vecteurs directeurs non colinéaires.
- Deux plans *non parallèles sont sécants suivant une droite.*
- Lorsque deux plans sont parallèles, tout plan coupant l'un coupe l'autre et les droites d'intersection sont parallèles.

► **Note 4.5.**
Ces propriétés seront très utiles pour les sections de solides.

Théorème 2.5. *Théorème du toit*
Soit d une droite parallèle à deux plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sécants en une droite Δ.
Alors d est parallèle à Δ.



5.4 Repères de l'espace

5.4.1 Base de l'espace

Définition 6.5.

Une *base de l'espace* est formée d'un triplet de vecteurs $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ non coplanaires.

Propriété 3.5.

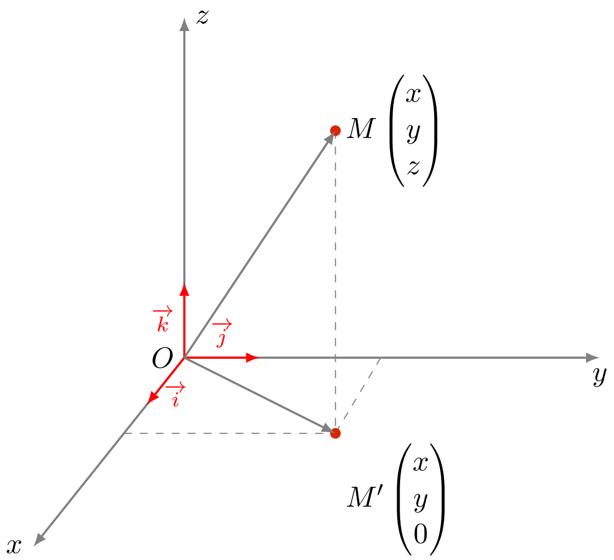
Soit $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ une base de l'espace.
Pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$ de l'espace, il existe un unique triplet $(x\,;\,y\,;\,z)$ tel que $\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$.

$(x\,;\,y\,;\,z)$ sont les *coordonnées* de $\overrightarrow{u}$ dans cette base et on note $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

5.4.2 Repère de l'espace

Définition 7.5.

Un *repère de l'espace* est formé d'un point donné O et d'une base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. On note $(O\,;\,\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ un tel repère où O est l'*origine* du repère.



Propriété 4.5.

Soit $(O\,;\,\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\,;\,\overrightarrow{k})$ un repère de l'espace. Pour tout point M de l'espace, il existe un unique triplet $(x\,;\,y\,;\,z)$ tel que $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$, ce triplet $(x\,;\,y\,;\,z)$ ou encore $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est le triplet *de coordonnées* du point M dans le repère $(O\,;\,\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\,;\,\overrightarrow{k})$ et z est appelée la cote de M.

Propriétés 6.5.
On se place dans un repère $(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k})$ de l'espace.

1. Pour deux points A$\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}$ et B$\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{pmatrix}$ on a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$
2. Coordonnées de K milieu de [AB] : $\begin{pmatrix} \dfrac{x_B + x_A}{2} \\ \dfrac{y_B + y_A}{2} \\ \dfrac{z_B + z_A}{2} \end{pmatrix}$
3. Si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ alors $\vec{u} + \vec{v}\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \\ z + z' \end{pmatrix}$ et pour tout réel λ on a $\lambda\vec{u}\begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix}$

5.4.3 Caractérisations d'une droite de l'espace

Définition 8.5.
Soient $A(x_A, y_A, z_A)$ un point et $\vec{u}(a\,;\,b\,;\,c)$ un vecteur non nul. La droite $\mathscr{D}$ passant par A de vecteur directeur $\vec{u}$ est l'ensemble des points M de l'espace tels qu'il existe un réel λ tel que :

$$\overrightarrow{AM} = \lambda\vec{u}$$

▶ **Note 5.5.**
Conséquence immédiate : la droite $\mathscr{D}$ peut être représentée par un système paramétrique.

Propriété 5.5.
Un point $M(x, y, z)$ appartient à la droite $\mathscr{D}$ passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}(a\,;\,b\,;\,c)$ si, et seulement si, il existe un réel t tel que

$$\left\{\begin{array}{lll} x & = & x_A + at \\ y & = & y_A + bt \\ z & = & z_A + ct \end{array}\right.$$

Ce système est une *représentation paramétrique* de la droite $\mathscr{D}$ dont le paramètre est t.

▶ **Note 6.5.**
Il n'existe pas d'équation cartésienne de droite dans l'espace !

Application 3.5. Donner une représentation paramétrique de la droite passant par les points :

$$\text{A}\begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ et B}\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Application 4.5. Soit une droite d de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x &= 5+3t \\ y &= -1+4t, \quad t \in \mathbb{R} \\ z &= 1-t \end{cases}$$

1. Donner les coordonnées d'un vecteur directeur de cette droite d.
2. Donner les coordonnées de deux points de cette droite.
3. Le point $T(-1\,;\,-9\,;\,3)$ appartient-il à d ?

5.4.4 Représentation paramétrique d'un plan

Propriété 6.5.
Un point $M(x,y,z)$ appartient au plan $\mathscr{P}$ passant par A et de vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}(a,b,c)$ et $\overrightarrow{u}(\alpha,\beta,\gamma)$ si, et seulement si, il existe deux réels t et t' tels que

$$\begin{cases} x &= x_A + at + \alpha t' \\ y &= y_A + bt + \beta t' \\ z &= z_A + ct + \gamma t' \end{cases}$$

Ce système est une *représentation paramétrique* du plan $\mathscr{P}$ de paramètres est t et t'.

Démonstration.

□

Application 5.5. Dans un repère de l'espace, on considère les points $A(3\,;\,3\,;\,0)$, $B(5\,;\,4\,;\,-2)$ et $C(6\,;\,2\,;\,1)$.

1. Démontrer que les trois points A, B et C définissent un plan $\mathscr{P}$ de l'espace.
2. Déterminer une représentation paramétrique de ce plan.