Exercice 1.

1. $f'(-1) = 0$ (tangente horizontale) et $f'(0) = -1$.

2. $B(0\,;\,2)$ est le seul point d'inflexion de la courbe représentative de la fonction f : f change de convexité au point B. Par ailleurs, la courbe représentative de la fonction f est située en dessous de sa tangente en A d'abscisse -1 : donc f est concave sur $]-\infty\,;\,0]$ et convexe sur $[0\,;\,+\infty[$, on en déduit que $f'' \leqslant 0$ sur $]-\infty\,;\,0]$ et $f'' \geqslant 0$ sur $[0\,;\,+\infty[$.
   On en déduit le tableau de variation de f' sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Variation de f'	↘	-1	↗

3. D'après la question précédente, f' est croissante sur $]-\infty\,;\,0]$ et décroissante sur $[0\,;\,+\infty[$: la seule courbe qui satisfait ces critères est la courbe C_4.
   Par ailleurs, $f'' \leqslant 0$ sur $]-\infty\,;\,0]$ et $f'' \geqslant 0$ sur $[0\,;\,+\infty[$ donc la courbe représentative de f'' doit être située en dessous de l'axe des abscisses sur $]-\infty\,;\,0]$ et au dessus de l'axe des abscisses sur $[0\,;\,+\infty[$: ainsi f'' est représentée par C_2.

Exercice 2.

Partie A

1. La fonction p est dérivable sur $[-3\,;\,4]$.
   $\forall x \in [-3\,;\,4]$, $p'(x) = 3x^2 - 6x + 5$
   Ce trinôme du second degré n'admet aucune racine réelle ($\Delta = -24 < 0$) donc $\forall x \in [-3\,;\,4]$, $p'(x) > 0$ car $a = 3 > 0$: la fonction p est strictement croissante sur $[-3\,;\,4]$.
   On dresse le tableau de variation de p sur $[-3\,;\,4]$, avec $p(-3) = -68$ et $p(4) = 37$:

x	-3	α	4
Variation de p	-68 ↗	0	↗ 37

2.
   - p est continue car dérivable sur $[-3\,;\,4]$.
   - La fonction p est strictement croissante sur $[-3\,;\,4]$.

   Or $0 \in [-68\,;\,37] = f\left([-3\,;\,4]\right)$, donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires dans le cas des fonctions strictement croissantes, l'équation $p(x) = 0$ admet une unique solution, notée α, dans l'intervalle $[-3\,;\,4]$.

3. On localise α à l'unité : $-1 < \alpha < 0$ puis au dixième : $-0{,}2 < \alpha < -0{,}1$.
   Néanmoins, on veut une valeur approchée de α au dixième, on localise alors α au centième et il vient : $-0{,}18 < \alpha < -0{,}17$ donc par la méthode de balayage : $\alpha \approx -0{,}2$.

4. D'après les variations de la fonction p, et en utilisant le résultat précédent, on peut établir le tableau de signe de la fonction p sur $[-3\,;\,4]$:

x	-3		α		4
signe de $p(x)$		$-$	0	$+$	

Partie B

1. (a) f est dérivable sur $[-3\,;\,4]$.

$$\forall x \in [-3\ ;\ 4],\ f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x \times (1+x^2) - \mathrm{e}^x \times 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{\mathrm{e}^x(x^2-2x+1)}{(1+{}^2)^2} = \frac{(x-1)^2\ \mathrm{e}^x}{(1+x^2)^2}.$$

(b) $f'(x) = 0 \iff \dfrac{(x-1)^2\ \mathrm{e}^x}{(1+x^2)^2} = 0 \iff (x-1)^2\ \mathrm{e}^x \iff (x-1)^2 \iff x-1=0 \iff x=1.$

Et $f(1) = \dfrac{\mathrm{e}}{2}$. Donc au point d'abscisse 1, $\mathcal{C}_f$ admet une tangente horizontale d'équation $y = \dfrac{\mathrm{e}}{2}$.

2. (a) Avec la précision permise par le graphique, on peut voir que la fonction f est :

- convexe sur $[-3\,;\,0]$;
- concave sur $[0\,;\,1]$;
- convexe sur $[1\,;\,4]$.

Donc $\mathcal{C}_f$ admet deux points d'inflexion, aux abscisses $x = 0$ et $x = 1$.
Le toboggan semble donc assurer de bonnes sensations.

(b) $\forall x \in [-3\ ;\ 4] : f''(x) = \dfrac{p(x)(x-1)\mathrm{e}^x}{(1+x^2)^3}$

Recherchons les points d'inflexion, c'est-à-dire les valeurs de $x \in [-3\,;\,4]$ pour lesquelles $f''(x)$ s'annule et change de signe.
$\forall x \in [-3\,;\,4]$, $(1+x^2)^3 > 0$ et $\mathrm{e}^x > 0$ donc $f''(x)$ a le même signe que $p(x)(x-1)$.
On construit alors le tableau de signe suivant :

x	-3		α		1		4
signe de $p(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

f'' s'annule et change de signe en $x = \alpha$ et $x = 1$. Donc $\mathcal{C}_f$ admet deux points d'inflexion. Le toboggan assure donc de bonnes sensations.