Exercice 1.

1. L'année 2022 est l'année 2021 + 1, donc on doit calculer u_1.

   $u_1 = 0{,}008u_0(200 - u_0) = 0{,}008 \times 40 \times 160 = 51{,}2$.

   L'estimation est donc de 51,2 oiseaux (arrondie à 51 animaux).

2. Résolvons $f(x) = x$.

   $$\begin{aligned} f(x) = x &\iff 0{,}008x(200 - x) = x \\ &\iff 1{,}6x - 0{,}008x^2 = x \\ &\iff 0{,}008x^2 - 0{,}6x = 0 \\ &\iff x(0{,}008x - 0{,}6) = 0 \\ &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad 0{,}008x - 0{,}6 = 0 \\ &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \frac{0{,}6}{0{,}008} = 75 \end{aligned}$$

   $S_{[0\,;\,100]} = \{0\,;75\}$.

3. (a) On étudie les variations de f sur l'intervalle $[0\,;100]$.
   f est dérivable sur $[0\,;100]$ et pour tout réel x de cet intervalle on a :

   $$\begin{aligned} f'(x) &= 0{,}008\,(200 - x) + 0{,}08x \times (-1) \\ &= 0{,}008\,(200 - x - x) \\ &= 0{,}008\,(200 - 2x) \end{aligned}$$

   On a $0{,}008 > 0$ et pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;100]$ on a $0 \leqslant x \leqslant 100$ puis en multipliant par -2 il vient $0 \geqslant -2x \geqslant -200$ puis en additionnant 200 on aboutit à $200 \geqslant 200 - 2x \geqslant 0$: ainsi $f'(x) \leqslant 0$ ce qui prouve que la fonction f est strictement croissante sur $[0\,;100]$.

   (b) Soit pose P_n la proposition : « $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 100$ ».

   - Initialisation : On a $u_0 = 40$ et $u_1 = 51{,}2$, donc on a bien $0 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 100$ donc la propriété P_0 est vraie.
   - Hérédité : Soit n un entier naturel . On suppose P_n vraie.

     $$\begin{aligned} P_n &\implies 0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 100 \\ &\implies f(0) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(100) \qquad f \text{ est strictement croissante sur } [0\ ;\ 100] \\ &\implies 0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 80 \qquad \text{car } f(0) = 0;\ f(100) = 80 \\ &\implies 0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 100 \\ &\implies P_{n+1} \end{aligned}$$

     Ainsi, P_{n+1} est vraie.
   - Conclusion : P_0 est vraie, et P_n est héréditaire à partir du rang $n = 0$, on en déduit que P_n est vraie pour tout entier naturel n.

     $$\forall n \in \mathbb{N}; \quad 0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 100$$

   (c) $u_n \leqslant u_{n+1}$: la suite (u_n) est croissante et $u_n \leqslant 100$, la suite (u_n) est majorée par 100 : elle converge donc vers une limite ℓ telle que $\ell \leqslant 100$.

   (d) La suite $(u_n$ est convergente, soit ℓ sa limite.
   On a donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$. De même $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = \ell$. Or $u_{n+1} = 0{,}008(200 - u_n)$.
   Par passage à la limite il vient : $\ell = 0{,}008(200 - \ell)$.
   Cette équation a été résolue à la question 2 : $\ell = 0$ ou $\ell = 75$.
   Or la suite (u_n) est croissante et $u_0 = 40$ donc $\ell \geqslant 40$ donc $\ell = 75$.

4. Le principe de cette fonction `seuil(p)` est de renvoyer l'année où l'estimation dépasse le seuil `p`, notre suite ici est croissante et converge vers 75, donc elle est majorée par 75. Aucun terme ne dépassera donc 75, et le test de la boucle `while` sera toujours satisfait, donc on aura une fonction qui tourne de façon infinie et ne renvoie donc aucun résultat.

Exercice 2.

Partie 1

1. **a.** D'après le cours, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$.

b. On calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. On a une forme indéterminée du type « $\infty \times 0$ » donc on change d'écriture.

$x\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x}$.
Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$ d'après la question précédente donc par inverse des limites $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} = 0$ ce qui équivaut à $\lim\limits_{x \to +\infty} x\mathrm{e}^{-x} = 0$: la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à la courbe représentative de la fonction f au voisinage de $+\infty$.

2. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0\,;\,+\infty[$ et pour réel x appartenant à $[0\,;\,+\infty[$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \times \mathrm{e}^{-x} + x\left(-1 \times \mathrm{e}^{-x}\right) \\ &= \mathrm{e}^{-x} - x\mathrm{e}^{-x} \\ &= (1-x)\,\mathrm{e}^{-x} \end{aligned}$$

Pour tout réel x, $\mathrm{e}^{-x} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $1-x$; $f(0) = 0$ et $f(1) = \mathrm{e}^{-1} \simeq 0{,}37$

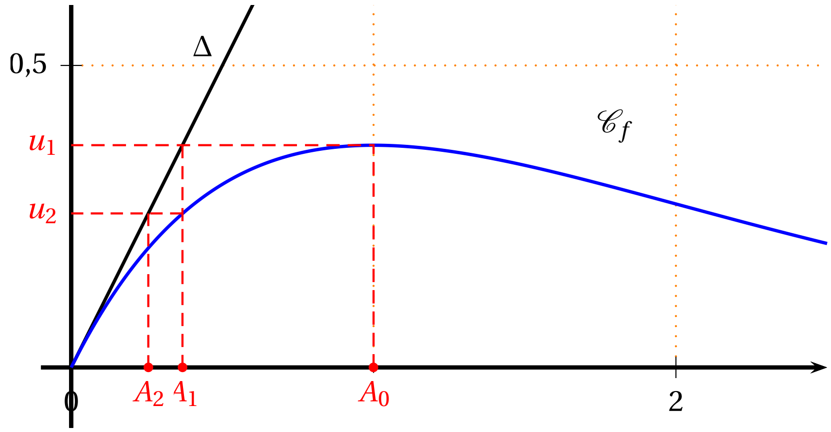
D'où le tableau de variation de la fonction f sur $[0\,;\,+\infty[$:

x	0		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
variation de f	0	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

Partie 2

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. On place sur le graphique, en utilisant la courbe $\mathscr{C}_f$ et la droite Δ, les points A_0, A_1 et A_2 d'ordonnées nulles et d'abscisses respectives u_0, u_1 et u_2.



2. **a.** Soit $\mathscr{P}_n$ la proposition « $u_n > 0$ ».

- *Initialisation* : $u_0 = 1 > 0$ donc la proposition est vraie au rang 0.
- *Hérédité* : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}_n$ vraie c'est-à-dire $u_n > 0$.
  Montrons que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie c'est-à-dire que $u_{n+1} > 0$.
  Par hypothèse de récurrence, $u_n > 0$ et on sait que $\mathrm{e}^{-u_n} > 0$ donc par produit $u_n\mathrm{e}^{-u_n} > 0$ soit $u_{n+1} > 0$.
  $\mathscr{P}_{n+1}$ est donc vraie.
- La propriété $\mathscr{P}_n$ est vérifiée au rang 0, et elle est héréditaire à partir du rang $n = 0$: elle est donc vraie pour tout $n \geqslant 0$.

On a donc démontré que, pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.

b. Pour étudier la convergence de la suite (u_n), étudions le sens de variation de la suite (u_n).
On a démontré que pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.
Ainsdi pour tout réel $u_n > 0$:

$$\begin{aligned}
-u_n < 0 &\iff \mathrm{e}^{-u_n} < \mathrm{e}^0 && \text{croissance de la fonction exponentielle}\\
&\iff \mathrm{e}^{-u_n} < 1\\
&\iff u_n\mathrm{e}^{-u_n} < u_n && \text{car } u_n > 0\\
&\iff u_{n+1} < u_n
\end{aligned}$$

La suite (u_n) est donc décroissante. De plus $u_n > 0$, la suite (u_n) est décroissante, minorée par 0, donc la suite (u_n) est convergente vers une limite ℓ telle que $\ell \geqslant 0$.
La suite $(u_n$ est convergente, soit ℓ sa limite.
On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$. De même $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$. Or $u_{n+1} = u_n\mathrm{e}^{-u_n}$.
Par passage à la limite il vient : $\ell = \ell\mathrm{e}^{-\ell}$.

$$\begin{aligned}
\ell = \ell\mathrm{e}^{-\ell} &\iff \ell(1-\mathrm{e}^{-\ell}) = 0\\
&\iff \ell = 0 \quad \text{ou} \quad (1-\mathrm{e}^{-\ell}) = 0\\
&\iff \ell = 0 \quad \text{ou} \quad \mathrm{e}^{-\ell} = \mathrm{e}^0\\
&\iff \ell = 0
\end{aligned}$$

Donc la suite (u_n) converge vers 0.

Exercice 3.

1. $\lim\limits_{\substack{x\to 4\\x<4}} \dfrac{e^x}{4-x}$

   $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{\substack{x\to 4\\x<4}} e^x = e^4\\ \lim\limits_{\substack{x\to 4\\x<4}} 4-x = 0^{(+)}\end{array}\right\}\overset{\text{par quotient des limites}}{\Longrightarrow}\quad \lim\limits_{\substack{x\to 4\\x<4}} \dfrac{e^x}{4-x} = +\infty.$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x^3}$.

   $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} -x^3 = -\infty\\ \lim\limits_{T\to-\infty} e^T = 0\end{array}\right\}\overset{\text{par composition des limites}}{\Longrightarrow}\quad \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x^3} = 0.$

3. $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x\sin(2022x)$.
   Pour tout réel x on a $-1 \leqslant \sin(2022x) \leqslant 1$ donc $-e^x \leqslant e^x\sin(2022x) \leqslant e^x$.
   Or $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} -e^x = 0$ donc d'après le théorème d'encadrement des limites :

$$\lim_{x\to-\infty} e^x\sin(2022x) = 0.$$

4. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x + 2\cos(x)$. Pour tout réel x on a $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$ donc $-2 \leqslant 2\cos(x) \leqslant 2$ puis $-2+e^x \leqslant e^x + 2\cos(x) \leqslant 2+e^x$.
   Or $\lim\limits_{x\to+\infty} -2+e^x = +\infty$ donc d'après le théorème de comparaisons des limites :

$$\lim_{x\to+\infty} e^x + 2\cos(x) = +\infty.$$

5. $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{xy-x-y+1}{x-1}$ où y est un réel quelconque.
   On a une forme indéterminée du type « $\dfrac{0}{0}$ » on change d'écriture.
   On a $xy-x-y+1 = x(y-1)-(y-1) = (x-1)(y-1)$ et ainsi $\dfrac{xy-x-y+1}{x-1} = y-1$.
   $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{xy-x-y+1}{x-1} = \lim\limits_{x\to1} y-1 = y-1$.

Exercice 4.

1. $f_1'(x) = -\dfrac{1}{2\sqrt{x}}e^{-\sqrt{x}}$
2. $f_2'(x) = \dfrac{2e^x}{\sqrt{4e^x+12}}$
3. $f_3'(x) = 30(e^{-x+4}+2x)\left(e^{-x+9}-x^2\right)^{29}$