○○○ **Exercice 1.**
Quel est le format de chacune des matrices suivantes ?

- $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$;
- $B = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -5 \\ 2 & 5 & -4 \\ 7 & -4 & 9 \\ 6 & 7 & 9 \end{pmatrix}$;
- $C = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 1 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$;
- $D = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

●○○ **Exercice 2.**

On pose $A = (a_{i,j})$ la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

1. Quelles valeurs peuvent prendre i et j ?
2. Préciser la valeur de $a_{2,3}$.
3. Écrire chacun des autres coefficients sous la forme $a_{i,j}$.

●○○ **Exercice 3.**
La matrice $B = (b_{i,j})$ est telle que $b_{i,j} = i + 3j$ pour $1 \leqslant i \leqslant 4$ et $1 \leqslant j \leqslant 2$.

1. Quel est le format de cette matrice ?
2. Écrire la matrice B avec tous ses coefficients.

○○○ **Exercice 4.**

1. Calculer $A + B$ et $5A - 4B$ avec :
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & -9 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}.$$
2. Reprendre la question précédente avec les matrices :
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -4 & 2 \end{pmatrix} \text{ et}$$
$$B = \begin{pmatrix} 4 & 7 & -3 \\ 10 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & -5 \end{pmatrix}.$$

○○○ **Exercice 5.**
On considère les matrices :
$$A = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 5 & -3 \end{pmatrix} \text{ et}$$
$$D = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$
Parmi les opérations suivantes, effectuer celles qu'il est possible d'effectuer :
$$A + B,\ 3D,\ A + 3D,\ B - 2C.$$

●○○ **Exercice 6.**
Effectuer les multiplications suivantes :

1. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} -2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} 7 & 0 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

●○○ **Exercice 7.**
Effectuer les multiplications suivantes :

1. $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

●○○ **Exercice 8.**
Effectuer les multiplications suivantes :

1. $\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 2 & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$.
2. $\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

●○○ **Exercice 9.**
Effectuer les multiplications suivantes :

1. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 24 \\ 2 & 4 & -5 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 7 & 0 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

●○○ **Exercice 10.**
Effectuer les multiplications suivantes :

1. $\begin{pmatrix} 1 & -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

●○○ **Exercice 11.**
Effectuer les multiplications suivantes :

1. $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & -2 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

●○○ **Exercice 12.**
Effectuer les multiplications suivantes :

1. $\begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & b & 3 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$.

2. $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

●○○ **Exercice 13.**
Effectuer, à la main, les multiplications suivantes puis vérifier les résultats à la calculatrice :

1. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -10 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

●○○ **Exercice 14.**
Effectuer les multiplications suivantes :

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$

●○○ **Exercice 15.**
Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.
Déterminer, parmi les calculs suivants, ceux qu'il est possible d'effectuer et indiquer la taille de la matrice résultat :

1. $A \times B$, $A - C$, A^2, B^2 et C^2.
2. Effectuer alors les calculs jugés « possibles ».

○○○ **Exercice 16.**
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer AB et BA.
2. Commenter.

○○○ **Exercice 17.**
On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ et
$B = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.
Montrer que A est l'inverse de B.

●○○ **Exercice 18.**
On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -3 & 4 & 6 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer la matrice P telle que :
$$M = P + I_3$$
2. Calculer P^2. En déduire M^2.

●●○ **Exercice 19.**
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
On note I la matrice identité : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $A^2 - 3A + 2I = O$ où O désigne la matrice nulle..
2. En déduire que la matrice A est inversible et déterminer son inverse.

●○○ **Exercice 20.**
Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$.
Démontrer que pour tout entier naturel n non nul,
$$A^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{pmatrix}$$

●●○ **Exercice 21.**
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2, A^3 et A^4.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Émettre une conjecture sur A^n.
3. (a) Montrer que $A = I_2 + B$ où $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   (b) Calculer B^2. En déduire A^2 puis A^3 en fonction de I_2 et B.
4. (a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul, $A^n = I_2 + nB$.
   (b) Écrire A^n avec tous ses coefficients.

●●○ **Exercice 22.**
On considère les matrices P et Q définies par :
$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le produit $P \times Q$.
2. En déduire que P est inversible et écrire son inverse.

●●○ **Exercice 23.**
Soit la matrice A définie par $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Calculer A^2, A^3 et A^4.
2. En déduire A^{-1}.

●●○ **Exercice 24.**
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que $A^2 = 2A + I_2$.
2. En déduire que A est inversible et donner A^{-1}.

●●● Exercice 25.
On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer qu'il existe une matrice N, carrée d'ordre 3, telle que $A = I + N$.
2. Vérifier que $N^3 = 0$.
3. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$A^n = I + nN + \frac{n(n-1)}{2}N^2.$$

●○○ Exercice 26.
Soit (S) : $\left\{\begin{array}{rcl} 3x+4y & = & -6 \\ 2x+5y & = & 10 \end{array}\right.$ le système d'inconnues réelles x et y et on pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -6 \\ 10 \end{pmatrix}$. Résoudre le système en utilisant la méthode du pivot.

●●○ Exercice 27.
Résoudre les systèmes 3×3 suivants en utilisant la méthode du pivot :

1. $\left\{\begin{array}{rcl} x+y-z & = & 2 \\ -x+y+z & = & 4 \\ 2x-y+z & = & -5 \end{array}\right.$
2. $\left\{\begin{array}{rcl} 4x+2y+9z & = & 22 \\ 2x+8y+7z & = & 44 \\ 5x+6y+3z & = & 85 \end{array}\right.$

●●○ Exercice 28.
Dans le plan muni d'un repère, on considère les points A(5 ; 2), B(4 ; 3) et C(1 ; 0).
On cherche une parabole $\mathscr{P}$: $y = ax^2 + bx + c$ passant par les points A, B et C.
Écrire sous forme matricielle un système vérifié par a, b et c puis répondre à la question posée.

●●● Exercice 29.
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$

1. On appelle I la matrice identité d'ordre 2. Vérifier que $A^2 = A + 2I$.
2. En déduire une expression de A^3 et une expression de A^4 sous la forme
   $\alpha A + \beta I$ où α et β sont des réels.
3. On considère les suites (r_n) et (s_n) définies par $r_0 = 0$ et $s_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

   $$\left\{\begin{array}{rcl} r_{n+1} & = & r_n + s_n \\ s_{n+1} & = & 2r_n \end{array}\right.$$

   Démontrer que, pour tout entier naturel n,

   $$A^n = r_nA + s_nI.$$
4. Démontrer que la suite (k_n) définie pour tout entier naturel n par $k_n = r_n - s_n$ est géométrique de raison -1.
   En déduire, pour tout entier naturel n, une expression explicite de k_n en fonction de n.
5. On admet que la suite (t_n) définie pour tout entier naturel n par
   $t_n = r_n + \frac{(-1)^n}{3}$ est géométrique de raison 2.
   En déduire, pour tout entier naturel n, une expression explicite de t_n en fonction de n.
6. Déduire des questions précédentes, pour tout entier naturel n, une expression explicite de r_n et s_n en fonction de n.
7. En déduire alors, pour tout entier naturel n, une expression des coefficients de la matrice A^n.

●●● Exercice 30.
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, la matrice identité d'ordre 3 : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et la matrice nulle d'ordre 3 notée $O_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Pour tout réel x, on définit la matrice :

$$(*) \quad M(x) = I + xA + \frac{x^2}{2}A^2.$$

1. Calculer A^2 et A^3 et en déduire A^n pour tout entier naturel $n > 3$.
2. Soit x et y deux nombres réels.
   Montrer en utilisant $(*)$ que :

   $$M(x)M(y) = M(x+y).$$
3. Montrer que pour tout entier naturel n :

   $$(M(x))^n = M(nx).$$
4. Calculer $M(0)$ et $M(1)$.
5. Calculer $(M(1))^n$ pour tout entier naturel n.