3

Polynômes

I. Taux de variation

Définition 1

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbf{R}$, et a et b deux nombres de l'intervalle I, distincts.
Le **taux de variation** de f entre a et b est le nombre :

$$\boxed{\tau = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}}.$$

Exemple. Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = 5x + 1$.
Calculer le taux de variation de f entre 2 et 4.

II. Polynôme du second degré

Définition 2

Les fonctions de la forme $x \mapsto ax^2 + b$ (avec a et b des nombres réels, et $a \neq 0$) et $x \mapsto a(x - x_1)(x - x_2)$ (avec a, x_1, x_2 des nombres réels, et $a \neq 0$) sont des **polynômes du second degré**.

Propriété 1 (Représentation graphique)

La représentation graphique d'une fonction polynôme du second degré est une **parabole** :

1. si $a < 0$, la fonction est d'abord **croissante** puis **décroissante**, et admet un **maximum** ;
2. si $a > 0$, la fonction est d'abord **décroissante** puis **croissante**, et admet un **minimum**.

Propriété 2 (Sommet)

1. La parabole représentative d'un polynôme de la forme $f(x) = ax^2 + b$ a pour sommet $S(0\,;\,b)$.
2. La parabole représentative d'un polynôme de la forme $f(x) = a\,(x - x_1)\,(x - x_2)$ a pour sommet $S(\alpha\,;\,\beta)$, avec :

$$\boxed{\alpha = \frac{x_1 + x_2}{2} \text{ et } \beta = f(\alpha)}.$$

La parabole est **symétrique** par rapport à la droite de coordonnées α (où α est l'abscisse de son sommet).

Exemple. Soient les deux polynômes du second degré définis sur $\mathbf{R}$ par :

$$f(x) = 3x^2 + 1 \text{ et } g(x) = -(x-1)(x+2).$$

1. Identifier les nombres a, b, x_1 ou x_2 sur ces deux expressions.

2. Dans un repère, placer le sommet de chacune des courbes, puis tracer son allure.

Propriété 3 (♥ Tableau de variations)

	$a < 0$	$a > 0$
$f(x) = ax^2 + b$	x : $-\infty$ … 0 … $+\infty$ f : $\nearrow$ b $\searrow$	x : $-\infty$ … 0 … $+\infty$ f : $\searrow$ b $\nearrow$
$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$	x : $-\infty$ … α … $+\infty$ f : $\nearrow$ $f(\alpha)$ $\searrow$	x : $-\infty$ … α … $+\infty$ f : $\searrow$ $f(\alpha)$ $\nearrow$

Exemple. On considère les deux fonctions définies sur $\mathbf{R}$ par :

$$f(x) = -4x^2 - 1 \text{ et } g(x) = 2(x-4)(x+1).$$

Pour chacune des deux fonctions :

1. Dresser son tableau de variations.

2. Déterminer la valeur de ses extremums.

Propriété 4 (Racines)

Soit un polynôme du second degré de la forme $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.
L'équation $f(x) = 0$ a deux solutions, qui sont appelées **racines du polynôme**, et sont égales à x_1 et x_2.
Dans le cas où $x_1 = x_2$, il n'y a qu'une racine appelée **racine double**.

Exemple.

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3(x-4)(x+2)$.
   (a) Résoudre $f(x) = 0$.

   (b) Déterminer les coordonnées du sommet de la parabole associée à f.

   (c) Placer le sommet et les racines dans un repère, et tracer l'allure de la courbe.

   (d) Par lecture graphique, dresser le tableau de signes de f.

2. Soit g la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $g(x) = 4x^2 + 1$.
   (a) Résoudre $g(x) = 0$.

(b) Dresser le tableau de signes de g.

III. Polynôme de degré 3

Définition 3

Les fonctions de la forme $x \mapsto ax^3 + b$ (avec a et b des nombres réels, et $a \neq 0$) et $x \mapsto a\,(x - x_1)\,(x - x_2)\,(x - x_3)$ (avec x_1, x_2, x_3 des nombres réels distincts, et $a \neq 0$) sont des *polynômes du troisième degré*.

Propriété 5 (♥ Variations)

- Fonction de la forme $x \longmapsto ax^3 + b$:
  - — si $a < 0$, la fonction est **décroissante** ;
  - — si $a > 0$, la fonction est **croissante**.
- Fonction de la forme $x \longmapsto a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$:
  - — si $a < 0$, la fonction est **décroissante**, puis **croissante**, puis **décroissante** ;
  - — si $a > 0$, la fonction est **croissante**, puis **décroissante**, puis **croissante**.

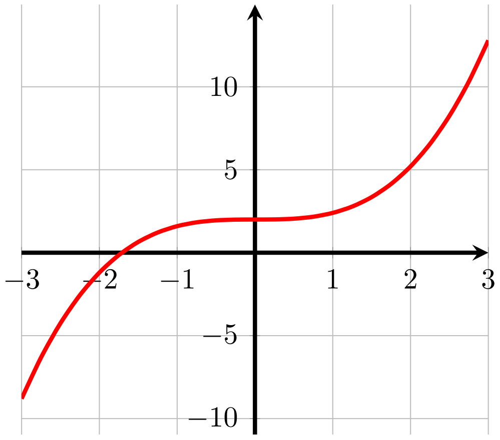
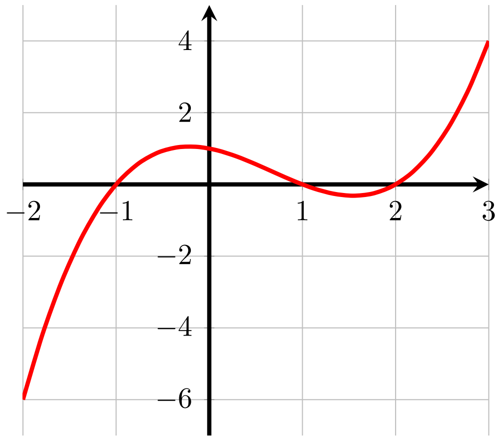
	$a < 0$	$a > 0$
$f(x) = ax^3 + b$	x : $-\infty$ $+\infty$ f : ↘	x : $-\infty$ $+\infty$ f : ↗
$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$	x : $-\infty$ $+\infty$ f : ↘ ↗ ↘	x : $-\infty$ $+\infty$ f : ↗ ↘ ↗

Exemple. Dresser le tableau de variations des deux fonctions suivantes :

1. $f(x) = -2x^3 + 4$

2. $g(x) = 4(x - 2)(x + 1)(x + 3)$

Propriété 6 (Allure des courbes)

$x \mapsto ax^3 + b$	$x \mapsto a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$
	

Exemple.

1. On définit la fonction f sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = -2x^3 + 3$.
   (a) Identifier a et b.

   (b) Dresser le tableau de variations de f.

2. On définit la fonction g sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2(x-2)(x+3)(x-1)$.
   (a) Identifier a, x_1, x_2, x_3.

   (b) Dresser le tableau de variations de g.

(c) Quelles sont les solutions de $g(x) = 0$?

(d) Dresser le tableau de signes de g.

Propriété 7

L'équation $a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = 0$ a trois solutions : $x = x_1$, $x = x_2$ ou $x = x_3$.