97 Dans chacun des cas suivants, vérifier que la fonction f est une solution de l'équation différentielle (E) sur $\mathbb{R}$:

1. $f : x \to 3x^2 - 5x + 9$; $(E) : y' = 6x - 5$.
2. $f : x \to 1 - \mathrm{e}^{-2x+1}$; $(E) : y' = 2\mathrm{e}^{-2x+1}$.

98 Dans chacun des cas suivants, vérifier que la fonction f est une solution de l'équation différentielle (E) sur l'intervalle I :

1. $f : x \to (x-3)^4$; $(E) : y' = 4(x-3)^2$ et $I = \mathbb{R}$.
2. $f : x \to \frac{1}{2}\ln(2x-1)$
   $(E) : y' = \frac{1}{2x-1}$ et $I = \left]\frac{1}{2} ; +\infty\right[$.

99 La fonction g, définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}$ est solution de l'équation différentielle $y' = f$.

1. Déterminer la fonction f.
2. Écrire toutes les primitives de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
3. En déduire la fonction h telle que $h' = f$ et $h(0) = 0$.

100 Un mobile subit un mouvement rectiligne uniformément accéléré d'accélération $a = 1,5\ m.s^{-2}$. La vitesse du mobile au temps $t \geqslant 0$ (t en secondes), est $v(t)$, en $m.s^{-1}$, et sa position est donnée par $x(t)$, en mètres, avec $x(0) = 0$.

1. Sachant que la vitesse initiale du mobile est $2\ m.s^{-1}$, exprimer $v(t)$ en fonction de t.
2. En déduire $x(t)$ en fonction de t.

101 Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$:

1. $f(x) = x^2 - 3x + 7$
2. $f(x) = x^6 + 3x^5 - x^4$
3. $f(x) = 0,1x^4 + \frac{x^2}{10} - \frac{x}{100}$

102 Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive de la fonction f sur $]0 ; +\infty[$:

1. $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}$
2. $f(x) = \frac{1}{2x} + \frac{x}{2}$
3. $f(x) = \frac{5}{x^4} - \frac{3x^2}{2} + \frac{1}{7}$

103 On considère les fonctions f et F définies sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = (-x^2 + 2x + 1)\mathrm{e}^{-x}$ et $F(x) = (x^2 - 1)\mathrm{e}^{-x}$.

1. Vérifier que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire la primitive G de f telle que $G(0) = 5$.

104 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\mathrm{e}^x$.

1. Déterminer les valeurs de a et b pour que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = (ax+b)\mathrm{e}^x$ soit une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire l'expression de la primitive de f s'annulant en 1.

105 Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

1. $y' = 3y$
2. $y' + 2y = 0$
3. $2y' = y$
4. $\frac{y}{5} = y'$

106 Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

1. $y' = 3y$
2. $y' + 2y = 0$
3. $2y' = y$
4. $\frac{y}{5} = y'$

107

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) :
$$y' = 2\,020y.$$
2. Déterminer la solution de f de l'équation (E) telle que $f(0) = -5$.

108 Dans chacun des cas suivants, vérifier que la fonction f est une solution particulière sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E) :

1. $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{1+x}{10}}$ et $(E) : y' = 0,1y$.
2. $f(x) = \mathrm{e}^{3x-2} + 5$ et $(E) : y' = 3y - 15$.

109 On considère l'équation différentielle :
$(E) : y' = -\frac{1}{2}y + 3$.

1. Donner la seule solution constante sur $\mathbb{R}$ de (E).
2. En déduire toutes les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

110 Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

1. $y' = -2y + 5$
2. $y' = y - 3$
3. $2y' + 7y = 6$
4. $3y' - 6y = 1$

111 Dans chacun des cas suivants, déterminer la solution f sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E) vérifiant la condition initiale donnée :

1. $y' = 5y - 2$ et $f(0) = -1$.
2. $y' = -5y + 4$ et $f(1) = 0$.
3. $y' = -1$ et $f(2) = 1$.

112 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\mathrm{e}^x$ et l'équation différentielle : $(E)\ :\ y' = y + \mathrm{e}^x$.

1. Vérifier que la fonction f est une solution particulière de (E).
2. En déduire la seule solution g de l'équation (E) telle que $g(0) = 5$.

113 On modélise par $P(t)$ le nombre de bactéries (exprimé en milliers) présentes dans la cuve à l'instant t (exprimé en heures).

Pendant les 48 premières heures, la vitesse d'accroissement de la population est proportionnelle au nombre de bactéries. On admet donc que P est solution, sur $[0\,;\,48]$, de l'équation différentielle :

$(E)\ :\ y' = 0,02y$ où y désigne une fonction de la variable t.

1. Résoudre l'équation différentielle (E).
2. Que vaut $P(0)$? En déduire que pour tout réel de t de l'intervalle $[0\,;\,48]$, $P(t) = 3\mathrm{e}^{0,02t}$.
3. On admet le tableau de variation de P sur $[0\,;\,48]$:

t	0	48
Variation de P	3 ↗	7.835

   (a) Démontrer que l'équation $P(t) = 6$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[0\,;\,48]$.
   (b) Déterminer la valeur approchée de α au millième par excès puis donner la réponse en heures et minutes.
   (c) Interpréter le résultat précédent dans le contexte de l'exercice.

114 *On cherche à modéliser l'évolution du nombre, exprimé en millions, de foyers français possédant un téléviseur à écran plat, en fonction de l'année.*

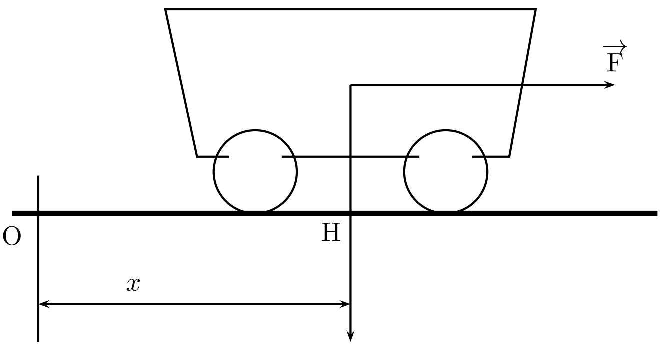
Soit $g(x)$ le nombre, exprimé en millions, de tels foyers l'année x.

On pose $x = 0$ en 2005, $g(0) = 1$ et g est une solution, qui ne s'annule pas sur $[0\ ;\ +\infty[$, de l'équation différentielle

$$(\mathrm{E})\quad ;\quad y' = \frac{1}{20}y(10 - y).$$

1. On considère une fonction y qui ne s'annule pas sur $[0\ ;\ +\infty[$ et on pose $z = \dfrac{1}{y}$.
   (a) Montrer que y est solution de (E) si et seulement si z est solution de l'équation différentielle :
   $$(\mathrm{E}_1)\quad :\quad z' = -\frac{1}{2}z + \frac{1}{20}.$$
   (b) Résoudre l'équation (E_1) et en déduire les solutions de l'équation (E).
2. Montrer que g est définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :
   $$g(x) = \frac{10}{9\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} + 1}.$$
3. Étudier les variations de g sur $[0\ ;\ +\infty[$.
4. Calculer la limite de g en $+\infty$ et interpréter le résultat.
5. En quelle année le nombre de foyers possédant un tel équipement dépassera-t-il 5 millions ?

115 Un chariot de masse 200 kg se déplace sur une voie rectiligne et horizontale. Il est soumis à une force d'entraînement constante $\overrightarrow{\mathrm{F}}$ de valeur 50 N. Les forces de frottement sont proportionnelles à la vitesse et de sens contraire ; le coefficient de proportionnalité a pour valeur absolue 25 N.m^{-1}.s.



La position du chariot est repérée par la distance x, en mètres, du point H à l'origine O du repère en fonction du temps t, exprimé en secondes. On prendra t dans l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$. Les lois de Newton conduisent à l'équation différentielle du mouvement

$$(\mathrm{E})\qquad 25x' + 200x'' = 50,\ \text{où}$$

x' est la dérivée de x par rapport au temps t,
x'' est la dérivée seconde de x par rapport au temps t.

1. On note $v(t)$ la vitesse du chariot au temps t ; on rappelle que $v(t) = x'(t)$.
   Prouver que x est solution de (E) si et seulement si x' est solution de l'équation différentielle (F) $\quad v' = -\dfrac{1}{8}v + \dfrac{1}{4}$.
   Résoudre l'équation différentielle (F).
2. On suppose que, à l'instant $t = 0$, on a : $x(0) = 0$ et $x'(0) = 0$.

(a) Calculer, pour tout nombre réel t positif, $x'(t)$.

(b) En déduire que l'on a, pour tout nombre réel t positif,

$x(t) = 2t - 16 + 16\mathrm{e}^{\frac{-t}{8}}$.

3. Calculer $\mathrm{V} = \lim\limits_{t \to +\infty} v(t)$. Pour quelles valeurs de t la vitesse du chariot est-elle inférieure ou égale à 90 % de sa valeur limite V ?
4. Quelle est la distance parcourue par le chariot au bout de 30 secondes ?

   On exprimera cette distance en mètres, au décimètre près.

116 La conservation d'une variété de fruits nécessite de les placer, après la récolte et avant le stockage, dans un tunnel refroidissant à air pulsé.

On s'intéresse à l'évolution de la température du fruit en fonction du temps.

À l'instant $t = 0$, les fruits, dont la température est de 24 °C, sont placés dans le tunnel où l'air pulsé est à 2 °C.

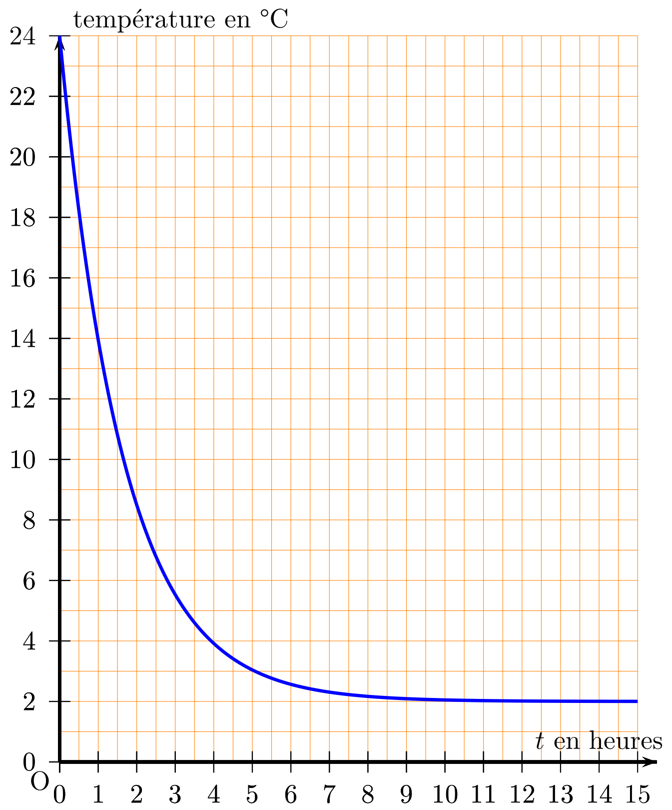
On considère la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ qui à tout instant t, exprimé en heures, associe la température d'un fruit, exprimée en °C.

On admet que f est la solution de l'équation différentielle : $y' + 0,61y = 1,22$ avec $f(0) = 24$.

1. Résoudre l'équation différentielle $y' + 0,61y = 1,22$ où y est une fonction dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$.
2. En déduire que pour tout t de $[0\,;\,+\infty[$, $f(t) = 2 + 22\mathrm{e}^{-0,61t}$.

   La courbe représentative de f, notée $\mathcal{C}$, est donnée ci-contre.
3. Calculer la limite de $f(t)$ quand t tend vers $+\infty$. Interpréter graphiquement ce résultat pour la courbe représentative de f.
4. Par expérience, on observe que la température d'un fruit :
   — décroît ;
   — tend à se stabiliser à la température du tunnel où l'air pulsé est à 2 °C.

   La fonction f fournit-elle un modèle en accord avec ces observations ?
5. Déterminer graphiquement en faisant apparaître les traits de construction utiles :
   (a) la température d'un fruit au bout de 4 heures ;
   (b) au bout de combien de temps la température d'un fruit aura diminué de moitié par rapport à la température initiale.
6. On considère que la vitesse de refroidissement est satisfaisante lorsque la température d'un fruit baisse de $\frac{7}{8}$ en moins de 6 heures. Peut-on considérer que la vitesse de refroidissement est satisfaisante ?



117 On se propose de démontrer qu'il existe une seule fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant la condition :

$$(\mathrm{C}) \quad \left\{ \begin{array}{lcl} f(-x)f'(x) & = & 1 \text{ pour tout nombre réel } x, \\ f(0) & = & -4 \end{array} \right.$$

(où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f) et de trouver cette fonction.

On suppose qu'il existe une fonction f satisfaisant la condition (C) et on considère alors la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(-x)f(x)$.

1. Démontrer que la fonction f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer la fonction dérivée de la fonction g.
3. En déduire que la fonction g est constante et déterminer sa valeur.
4. On considère l'équation différentielle (E) :

$$y' = \frac{1}{16}y.$$

   Montrer que la fonction f est solution de cette équation et qu'elle vérifie $f(0) = -4$.