●○○ Exercice 123.
On considère la suite de matrices colonnes (U_n) définie par $U_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = AU_n$ avec $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0,5 \end{pmatrix}$.

1. Calculer à la main U_1 et U_2.
2. Exprimer U_n en fonction de n et donner la matrice U_5 à l'aide de la calculatrice.

●●○ Exercice 124.
On considère la suite de matrices colonnes (U_n) définie par $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = AU_n$ avec $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
La suite (U_n) a-t-elle un état stable ?

●●○ Exercice 125.
On considère deux suites de nombres réels (x_n) et (y_n) vérifiant pour tout entier naturel :
$x_{n+1} = 5x_n + 3y_n$ et $y_{n+1} = -2x_n + 6y_n$.

1. On donne $x_3 = 284$ et $y_3 = -56$.
Déterminer x_0 et y_0 grâce au calcul matriciel.
2. Déterminer x_6 et y_6 grâce au calcul matriciel.

●●○ Exercice 126.
On considère la suite de matrices colonnes (U_n) définie par $U_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = AU_n$ avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 4 \\ 8 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.
Déterminer si cette suite possède un état stable.

●●○ Exercice 127.
On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 \\ 0 & 0,1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,4 \end{pmatrix}$ et $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et on considère la suite de matrices (U_n) telles que pour tout entier naturel n,

$$U_{n+1} = AU_n + B.$$

1. Déterminer une matrice colonne U telle que $U = AU + B$.
2. On pose $V = U_n - U$.
   (a) Montrer que pour tout entier naturel n, $V_{n+1} = AV_n$ et en déduire l'expression de V_n en fonction de n.
   (b) En déduire l'expression de U_n en fonction de n.
3. Étudier la convergence de la suite (U_n).

●●○ Exercice 128.
On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $U_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
On considère la suite (U_n) de matrices colonnes par :

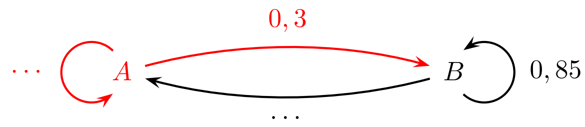
$$U_{n+1} = AU_n + C.$$

Montrer que la suite (U_n) converge vers une matrice limite L à déterminer.

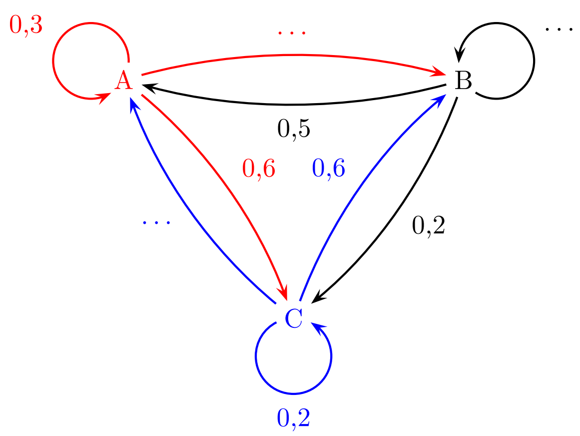
●○○ Exercice 129.
Dans chacun des cas suivants, justifier que la matrice P est une matrice de transition, puis représenter le graphe pondéré associé à P.

1. $P = \begin{pmatrix} 0,25 & 0,75 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$.
2. $P = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 & 0 \\ 0,3 & 0,2 & 0,5 \\ 0,2 & 0 & 0,8 \end{pmatrix}$.
3. $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{5}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

○○○ Exercice 130.
1. Compléter le graphe suivant puis donner la matrice de transition associée :



2. Mêmes questions qu'au **1.** avec le graphe suivant :



●●○ Exercice 131.
Pour déterminer la distribution après n transitions d'une chaîne de Markov, Lorea a écrit le script de la fonction distribution d'argument n suivant :

```
def distribution(n):
        x,y=0.5,0.5
        for i in range(n):
          x,y=0.25*x+0.5*y,0.75*x+0.5*y
        return x,y
```

1. Donner la matrice de transition et la distribution initiale de cette chaîne de Markov.
2. À l'aide de cette fonction, conjecturer le comportement asymptotique de cette chaîne.
3. Vérifier le résultat précédent par le calcul.

●●○ Exercice 132.
La matrice $P = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 \\ 0,8 & 0,2 \end{pmatrix}$ est la matrice de transition associée à une chaîne de Markov.

1. Représenter le graphe associé.
2. Déterminer la distribution invariante de cette chaîne. En déduire le comportement asymptotique de cette chaîne.

●●● Exercice 133.
Un atome d'hydrogène peut se trouver dans deux états différents, l'état stable et l'état excité. À chaque nanoseconde, l'atome peut changer d'état.

Partie A - Étude d'un premier milieu

Dans cette partie, on se place dans un premier milieu (milieu 1) où, à chaque nanoseconde, la probabilité qu'un atome passe de l'état stable à l'état excité est $0,005$, et la probabilité qu'il passe de l'état excité à l'état stable est $0,6$.

On observe un atome d'hydrogène initialement à l'état stable.

On note a_n la probabilité que l'atome soit dans un état stable et b_n la probabilité qu'il se trouve dans un état excité, n nanosecondes après le début de l'observation.

On a donc $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$.

On appelle X_n la matrice ligne $X_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$.

L'objectif est de savoir dans quel état se trouvera l'atome d'hydrogène à long terme.

1. Vérifier que $a_2 = 0,993025$
   et $b_2 = 0,006975$.
2. Déterminer la matrice A telle que, pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = X_n A$.
   A est appelée matrice de transition dans le milieu 1.
   On rappelle alors que, pour tout entier naturel n,
   $X_n = X_0 A^n$.
3. On définit la matrice P par $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 120 \end{pmatrix}$.
   On admet que P est inversible et que
   $$P^{-1} = \frac{1}{121}\begin{pmatrix} 120 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$
   Déterminer la matrice D définie par :
   $$D = P^{-1}AP.$$
4. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $A^n = PD^nP^{-1}$.
5. On admet par la suite que, pour tout entier naturel n,
   $$A^n = \frac{1}{121}\begin{pmatrix} 120 + 0,395^n & 1 - 0,395^n \\ 120\,(1 - 0,395^n) & 1 + 120 \times 0,395^n \end{pmatrix}.$$
   En déduire une expression de a_n en fonction de n.
6. Déterminer la limite de la suite (a_n). Conclure.

Partie B - Étude d'un second milieu

Dans cette partie, on se place dans un second milieu (milieu 2), dans lequel on ne connaît pas la probabilité que l'atome passe de l'état excité à l'état stable. On note a cette probabilité supposée constante. On sait, en revanche, qu'à chaque nanoseconde, la probabilité qu'un atome passe de l'état stable à l'état excité est $0,01$.

1. Donner, en fonction de a, la matrice de transition M dans le milieu 2.
2. Après un temps très long, dans le milieu 2, la proportion d'atomes excités se stabilise autour de $2\,\%$.
   On admet qu'il existe un unique vecteur X, appelé état stationnaire, tel que $XM = X$, et
   que $X = \begin{pmatrix} 0,98 & 0,02 \end{pmatrix}$.
   Déterminer la valeur de a.