15 Selon les autorités sanitaires d'un pays, 7 % des habitants sont affectés par une certaine maladie.

Dans ce pays, un test est mis au point pour détecter cette maladie. Ce test a les caractéristiques suivantes :

- Pour les individus malades, le test donne un résultat négatif dans 20 % des cas ;
- Pour les individus sains, le test donne un résultat positif dans 1 % des cas.

Une personne est choisie au hasard dans la population et testée.
On considère les évènements suivants :

- M « la personne est malade » ;
- T « le test est positif ».

1. Calculer la probabilité de l'évènement $M \cap T$. On pourra s'appuyer sur un arbre pondéré.
2. Démontrer que la probabilité que le test de la personne choisie au hasard soit positif, et de 0,0653.
3. Dans un contexte de dépistage de la maladie, est-il plus pertinent de connaître $\mathbf{P}_M(T)$ ou $\mathbf{P}_T(M)$?
4. On considère dans cette question que la personne choisie au hasard a eu un test positif.

   Quelle est la probabilité qu'elle soit malade ? On arrondira le résultat à 10^{-2} près.

Les événements M et T sont-ils indépendants ? Justifier.

16 Au cours de la fabrication d'une paire de lunettes, la paire de verres doit subir deux traitements notés T1 et T2.

On prélève au hasard une paire de verres dans la production.

On désigne par A l'évènement : « la paire de verres présente un défaut pour le traitement T1 ».

On désigne par B l'évènement : « la paire de verres présente un défaut pour le traitement T2 ».

Une étude a montré que :

— la probabilité qu'une paire de verres présente un défaut pour le traitement T1 notée $P(A)$ est égale à 0,1.

— la probabilité qu'une paire de verres présente un défaut pour le traitement T2 notée $P(B)$ est égale à 0,2.

— la probabilité qu'une paire de verres ne présente aucun des deux défauts est 0,75.

1. Compléter le tableau suivant avec les probabilités correspondantes :

	A	$\overline{A}$	Total
B			
$\overline{B}$			
Total			1

2. (a) Déterminer, en justifiant la réponse, la probabilité qu'une paire de verres, prélevée au hasard dans la production, présente un défaut pour au moins un des deux traitements T1 ou T2.

   (b) Donner la probabilité qu'une paire de verres, prélevée au hasard dans la production, présente deux défauts, un pour chaque traitement T1 et T2.

   (c) Les évènements A et B sont-ils indépendants ? Justifier la réponse.
3. Calculer la probabilité qu'une paire de verres, prélevée au hasard dans la production, présente un défaut pour un seul des deux traitements.
4. Calculer la probabilité qu'une paire de verres, prélevée au hasard dans la production, présente un défaut pour le traitement T2, sachant que cette paire de verres présente un défaut pour le traitement T1.

17 Une entreprise fait fabriquer des paires de chaussettes auprès de trois fournisseurs $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_3$.

Dans l'entreprise, toutes ces paires de chaussettes sont regroupées dans un stock unique.

La moitié des paires de chaussettes est fabriquée par le fournisseur $\mathcal{F}_1$, le tiers par le fournisseur $\mathcal{F}_2$ et le reste par le fournisseur $\mathcal{F}_3$.

Une étude statistique a montré que :

- 5 % des paires de chaussettes fabriquées par le fournisseur $\mathcal{F}_1$ ont un défaut ;
- 1,5 % des paires de chaussettes fabriquées par le fournisseur $\mathcal{F}_2$ ont un défaut ;
- sur l'ensemble du stock, 3,5 % des paires de chaussettes ont un défaut.

On considère les évènements F_1, F_2, F_3 et D suivants :

- F_1 : « La paire de chaussettes prélevée est fabriquée par le fournisseur $\mathcal{F}_1$ » ;
- F_2 : « La paire de chaussettes prélevée est fabriquée par le fournisseur $\mathcal{F}_2$ » ;
- F_3 : « La paire de chaussettes prélevée est fabriquée par le fournisseur $\mathcal{F}_3$ » ;
- D : « La paire de chaussettes prélevée présente un défaut ».

On prélève au hasard une paire de chaussettes dans le stock de l'entreprise.

1. Traduire en termes de probabilités les données de l'énoncé en utilisant les évènements précédents.

   Dans la suite, on pourra utiliser un arbre pondéré associé à cette expérience.
2. Calculer la probabilité qu'une paire de chaussettes prélevée soit fabriquée par le fournisseur $\mathcal{F}_1$ et présente un défaut.
3. Calculer la probabilité de l'évènement $F_2 \cap D$.
4. En déduire la probabilité de l'évènement $F_3 \cap D$.
5. Sachant que la paire de chaussettes prélevée est fabriquée par le fournisseur $\mathcal{F}_3$, quelle est la probabilité qu'elle présente un défaut ?

18 Dans une région touristique, une société propose un service de location de vélos pour la journée.

La société dispose de deux points de location distinctes, le point A et le point B. Les vélos peuvent être empruntés et restitués indifféremment dans l'un où l'autre des deux points de location.

On admettra que le nombre total de vélos est constant et que tous les matins, à l'ouverture du service, chaque vélo se trouve au point A ou au point B.

D'après une étude statistique :

- Si un vélo se trouve au point A un matin, la probabilité qu'il se trouve au point A le matin suivant est égale à $0,84$;
- Si un vélo se trouve au point B un matin la probabilité qu'il se trouve au point B le matin suivant est égale à $0,76$.

À l'ouverture du service le premier matin, la société a disposé la moitié de ses vélos au point A, l'autre moitié au point B.

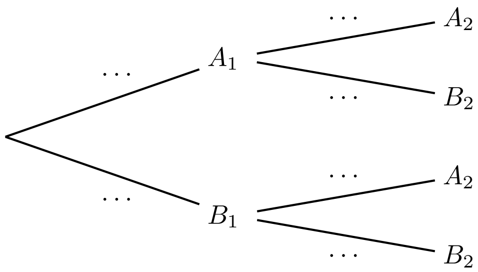
On considère un vélo de la société pris au hasard.

Pour tout entier naturel non nul n, on définit les évènements suivants :

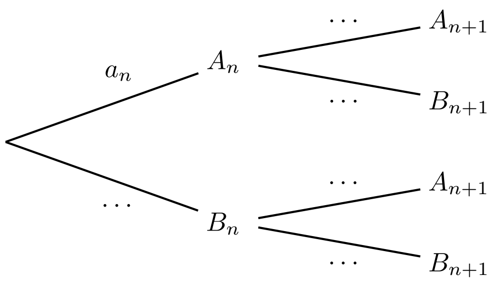
- A_n : « le vélo se trouve au point A le n-ième matin »
- B_n : « le vélo se trouve au point B le n-ième matin ».

Pour tout entier naturel non nul n, on note a_n la probabilité de l'évènement A_n et b_n la probabilité de l'évènement B_n. Ainsi $a_1 = 0,5$ et $b_1 = 0,5$.

1. Compléter l'arbre pondéré ci-dessous qui modélise la situation pour les deux premiers matins :



2. (a) Calculer a_2.
   (b) Le vélo se trouve au point A le deuxième matin. Calculer la probabilité qu'il se soit trouvé au point B le premier matin. La probabilité sera arrondie au millième.
3. (a) Compléter l'arbre pondéré ci-dessous qui modélise la situation pour les n-ième et $n+1$-ième matins.



   (b) Justifier que pour tout entier naturel non nul n, $a_{n+1} = 0,6a_n + 0,24$.
4. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel non nul n, $a_n = 0,6 - 0,1 \times 0,6^{n-1}$.
5. Déterminer la limite de la suite (a_n) et interpréter cette limite dans le contexte de l'exercice.
6. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $a_n \geqslant 0,599$ et interpréter le résultat obtenu dans le contexte de l'exercice.

19 Une entreprise dispose d'un parc de 600 ordinateurs neufs. La probabilité que l'un d'entre eux tombe en panne pendant la première année est de $0,1$. La panne de l'un des ordinateurs n'affecte pas les autres machines du parc.

1. Justifier que cette situation correspond à un schéma de Bernoulli et donner ses paramètres.
2. On considère la variable aléatoire X correspondant au nombre d'ordinateurs tombant en panne durant la première année. Quelle est la loi de probabilité de X ?
3. Calculer la probabilité que 20 appareils tombent en panne la première année.
4. Calculer la probabilité que 40 appareils au moins tombent en panne durant la première année.

20 Dans une entreprise, un stage de formation à l'utilisation d'un nouveau logiciel de gestion a été suivi par 25 % du personnel. On choisit dix personnes dans l'entreprise, qui possède un effectif suffisamment grand pour assimiler ce choix à un tirage avec remise. On note X le nombre de personnes choisies qui ont suivi le stage.

1. Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale. Préciser ses paramètres.
2. Calculer $\mathbf{P}(X = 3)$.
   Que représente ce nombre ?
3. Calculer la probabilité que quatre personnes au plus parmi les dix choisies aient suivi le stage.
4. Calculer la probabilité qu'au moins cinq personnes parmi les dix choisies aient suivi le stage.

21 Une variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n = 35$ et $p = 0,71$.
Calculer à 10^{-3} près les probabilités suivantes :

1. $\mathbf{P}(X = 25)$
2. $\mathbf{P}(X \leqslant 30)$
3. $\mathbf{P}(X < 20)$
4. $\mathbf{P}(X > 21)$
5. $\mathbf{P}(X \geqslant 12)$

22 X est une variable aléatoire qui suit une loi binomiale telle que :

$$\mathbf{P}(X = 4) = \binom{13}{4} \times 0,3^4 \times 0,7^9$$

Déterminer $\mathbf{P}(X = 8)$.

23 X est une variable aléatoire qui suit une loi binomiale telle que :

$$\mathbf{P}(X=5)=\binom{17}{5}\times 0,2^5\times\cdots^{12}$$

1. Compléter les pointillés précédents.
2. Inventer un énoncé de situation faisant intervenir cette variable aléatoire.

24 Les douanes s'intéressent aux importations de casques audio portant le logo d'une certaine marque. Les saisies des douanes permettent d'estimer que :

- 20 % des casques audio portant le logo de cette marque sont des contrefaçons ;
- 2 % des casques non contrefaits présentent un défaut de conception ;
- 10 % des casques contrefaits présentent un défaut de conception.

L'agence des fraudes commande au hasard sur un site internet un casque affichant le logo de la marque. On considère les évènements suivants :

- C : « le casque est contrefait » ;
- D : « le casque présente un défaut de conception » ;

Dans l'ensemble de l'exercice, les probabilités seront arrondies à 10^{-3} si nécessaire.

Partie 1

1. Calculer $\mathbf{P}(C\cap D)$. On pourra s'appuyer sur un arbre pondéré.
2. Démontrer que $\mathbf{P}(D)=0,036$.
3. Le casque a un défaut. Quelle est la probabilité qu'il soit contrefait ?

Partie 2

On commande n casques portant le logo de cette marque. On assimile cette expérience à un tirage aléatoire avec remise. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de casques présentant un défaut de conception dans ce lot.

1. Dans cette question, $n=35$.
   (a) Justifier que X suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n,\ p)$ où $n=35$ et $p=0,036$.
   (b) Calculer la probabilité qu'il y ait parmi les casques commandés, exactement un casque présentant un défaut de conception.
   (c) Calculer $\mathbf{P}(X\leqslant 1)$.
2. Dans cette question, n n'est pas fixé.
   Quel doit être le nombre minimal de casques à commander pour que la probabilité qu'au moins un casque présente un défaut soit supérieur à $0,99$?

25 Le directeur d'une grande entreprise a proposé à l'ensemble de ses salariés un stage de formation à l'utilisation d'un nouveau logiciel.

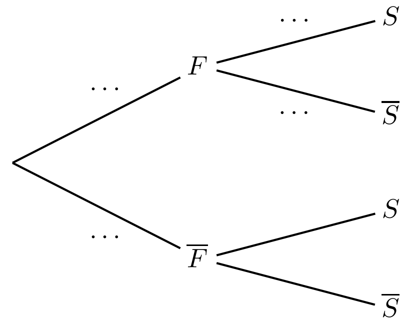
Ce stage a été suivi par 25 % des salariés.

Dans cette entreprise, 52 % des salariés sont des femmes, parmi lesquelles 40 % ont suivi le stage.

On interroge au hasard un salarié de l'entreprise et on considère les évènements :

- F : « le salarié interrogé est une femme »,
- S : « le salarié interrogé a suivi le stage ».

1. Donner la probabilité de l'évènement S.
2. Compléter les pointillés de l'arbre pondéré ci-contre sur les quatre branches indiquées :



3. Démontrer que la probabilité que la personne interrogée soit une femme ayant suivi le stage est égale à $0,208$.
4. On sait que la personne interrogée a suivi le stage. Quelle est la probabilité que ce soit une femme ?
5. directeur affirme que, parmi les hommes salariés de l'entreprise, moins de 10 % ont suivi le stage.
   Justifier l'affirmation du directeur.
6. On note X la variable aléatoire qui à un échantillon de 20 salariés de cette entreprise choisis au hasard associe le nombre de salariés de cet échantillon ayant suivi le stage. On suppose que l'effectif des salariés de l'entreprise est suffisamment important pour assimiler ce choix à un tirage avec remise.
   (a) Déterminer, en justifiant, la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X.
   (b) Déterminer, à 10^{-3} près, la probabilité que 5 salariés dans un échantillon de 20 aient suivi le stage.
   (c) Le programme ci-dessous, écrit en langage Python, utilise la fonction **binomiale**(i,n,p) créée pour l'occasion qui renvoie la valeur de la probabilité $P(X=i)$ dans le cas où la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres n et p.

```
def proba(k) :
  P=0
  for i in range(0,k+1) :
    P=P+binomiale(i,20,0.25)
  return P
```

   Déterminer, à 10^{-3} près, la valeur renvoyée par ce programme lorsque l'on saisit proba(5) dans la console Python.
   Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.
   (d) Déterminer, à 10^{-3} près, la probabilité qu'au moins 6 salariés dans un échantillon de 20 aient suivi le stage.