CHAPITRE

2 Nombres complexes (1) : partie algébrique

2.1 Ensemble des nombres complexes

2.1.1 Préambule

L'équation $x+5=2$ a ses coefficients dans $\mathbb{N}$ mais pourtant sa solution $x=$ ______ n'est pas un entier naturel. Il faut ici considérer l'ensemble plus grand $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs.

$$\mathbb{N} \xhookrightarrow{x+5=2} \mathbb{Z} \xhookrightarrow{2x=-3} \mathbb{Q} \xhookrightarrow{x^2=2} \mathbb{R} \xhookrightarrow{x^2=-1} \mathbb{C}$$

De même l'équation $2x=-3$ a ses coefficients dans $\mathbb{Z}$ mais sa solution $x=$ ______ est dans l'ensemble plus grand des rationnels $\mathbb{Q}$. Continuons ainsi, l'équation $x^2=\frac{1}{2}$ à coefficients dans $\mathbb{Q}$, a ses solutions $x_1=$ ______ et $x_2=$ ______ dans l'ensemble des réels $\mathbb{R}$. Ensuite l'équation $x^2=-1$ a ses coefficients dans $\mathbb{R}$ et ses solutions $x_1=$ ______ et $x_2=$ ______ dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$.
Ce processus est-il sans fin ? Non ! Les nombres complexes sont en quelque sorte le bout de la chaîne...

Outre la résolution d'équations, les nombres complexes s'appliquent à la trigonométrie, à la géométrie (comme nous le verrons cette année) mais aussi à l'électronique, à la mécanique quantique, etc.

2.1.2 Forme algébrique d'un nombre complexe

Étant donné que certaines équations polynomiales à coefficients réels n'ont pas toujours de solution (comme l'équation $x^2=-1$), on cherche à construire un nouvel ensemble de nombres :

Théorème 1.2.
1. contenant tous les *nombres réels*,
2. muni de *deux opérations prolongeant l'addition et la multiplication des nombres réels et ayant les mêmes règles de calculs*,
3. contenant un élément noté i tel que __________,
4. Tout nombre z s'écrive de manière unique $z=x+\mathrm{i}y$ où a et b sont *des réels*,
5. Le nombre 0 s'écrit __________.

On *admettra* qu'un tel ensemble existe : il s'agit de l'ensemble des nombres complexes noté $\mathbb{C}$.

Définition 1.2.

L'écriture $z = x + \mathrm{i}y$ unique est appelée *forme algébrique* du complexe z.

- Le *nombre réel* x est appelé *partie* ________________ de z et notée $\mathrm{Re}(z)$.
- Le *nombre réel* y est appelé *partie* ______________________ de z et notée $\mathrm{Im}(z)$.

Application 1.2. Soient $z = 5 + 4\mathrm{i}$ et $z' = 6 - 7\mathrm{i}$.

1. Écrire sous forme algébrique $z + z'$ et zz'.
2. En déduire $\mathrm{Re}(z + z')$ et $\mathrm{Im}(zz')$.

2.1.3 Identités remarquables

Propriété 1.2.
Soients a et b deux réels.

$$(a + \mathrm{i}b)^2 = a^2 - b^2 + 2ab\text{ß} \qquad (2.1)$$
$$(a - \mathrm{i}b)^2 = a^2 - b^2 - 2ab\mathrm{i} \qquad (2.2)$$
$$(a + \mathrm{i}b)(a - \mathrm{i}b) = a^2 + b^2 \qquad (2.3)$$

Démonstration.

____

____

____

□

2.1.4 La division dans $\mathbb{C}$

Théorème 2.2.
Tout nombre complexe non nul z admet un *unique inverse*, noté $\dfrac{1}{z}$.

Méthode

Pour obtenir la forme algébrique d'un quotient dans $\mathbb{C}$, on *multiplie* le numérateur et le dénominateur du quotient par *l'expression conjuguée* du dénominateur pour faire apparaître la troisième identité remarquable.

Application 2.2. Déterminer l'inverse de $3 + 2\mathrm{i}$.

2.1.5 Conjugué

Définition 2.2.
On appelle *conjugué* du nombre complexe $z = x + iy$ le nombre complexe noté $\overline{z}$ défini par :

$$\boxed{\overline{z} = \rule{3cm}{0.4pt}}.$$

Exemples. $\overline{3-2i} =$ ______ $\overline{5+i} =$ ______ $\overline{3} =$ ______ $\overline{i} =$ ______

Propriété 2.2.
Soient z et z' deux nombres complexes.

1. $\overline{\overline{z}} = z$
2. $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
3. $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$
4. $\overline{z^n} = \overline{z}^n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$
5. $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z}}$
6. $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$ pour $z' \neq 0$

Application 3.2. Donner la forme algébrique de $z = \dfrac{2+i}{3-2i}$.

2.2 Techniques opératoires

2.2.1 Nombres réels, nombres imaginaires purs

Propriété 3.2.
1. z *réel* $\Longleftrightarrow \mathrm{Im}(z) = 0 \Longleftrightarrow z = \overline{z}$.
2. z *imaginaire pur* $\Longleftrightarrow \mathrm{Re}(z) = 0 \Longleftrightarrow z = -\overline{z}$.

Application 4.2. Démontrer que le nombre complexe $z = \dfrac{2-7i}{-3+5i} - \dfrac{2+7i}{3+5i}$ est un nombre réel après avoir calculé $\overline{z}$.

2.2.2 Formule du binôme de Newton

Propriété 4.2. *admise*
Soit a et b deux nombres complexes. On a alors :

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} a^s b^{n-s}}.$$

Remarque. On peut calculer les coefficients binomiaux $\dbinom{n}{k}$ à l'aide du triangle de Pascal.

Application 5.2. Calculer $(1+4\mathrm{i})^3$ puis vérifier le résultat à la calculatrice.

2.2.3 Équations dans $\mathbb{C}$

Propriété 5.2.
Deux nombres complexes sont *égaux* si et seulement si ils ont *même partie réelle* et *même partie imaginaire.*

Démonstration.

□

Application 6.2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $2z+3+\mathrm{i}=-\overline{z}+1+4\mathrm{i}$ en posant $z=x+\mathrm{i}y$ où x et y sont réels.