CHAPITRE

9 Géométrie repérée

9.1 Vecteurs dans un repère

9.1.1 Différents repères

Définition 1.9.

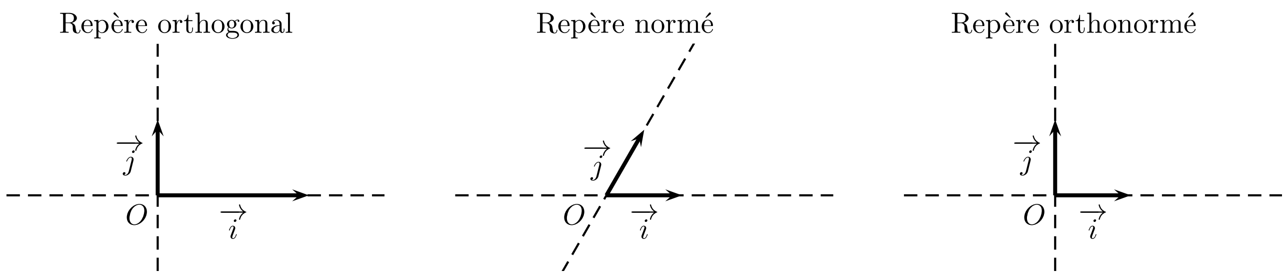
Soient O un point du plan et $\vec{i}$ et $\vec{j}$ deux vecteurs de ce plan de *directions différentes*.
(O; $\vec{i}$; $\vec{j}$) est appelé __________ du plan : O est appelé ____________________ du repère et le couple ($\vec{i}$; $\vec{j}$) est appelé __________ du repère.

Définitions.

Soit un repère (O; $\vec{i}$; $\vec{j}$) du plan.

1. Si les directions de $\vec{i}$ et de $\vec{j}$ sont orthogonales, le repère est dit ____________________
2. Si les normes de $\vec{i}$ et de $\vec{j}$ sont égales à 1, le repère est dit ____________________
3. Si les directions de $\vec{i}$ et de $\vec{j}$ sont orthogonales et que les normes de $\vec{i}$ et de $\vec{j}$ sont égales à 1, le repère est dit ____
4. Sinon, le repère est dit ____________________

Illustrations.

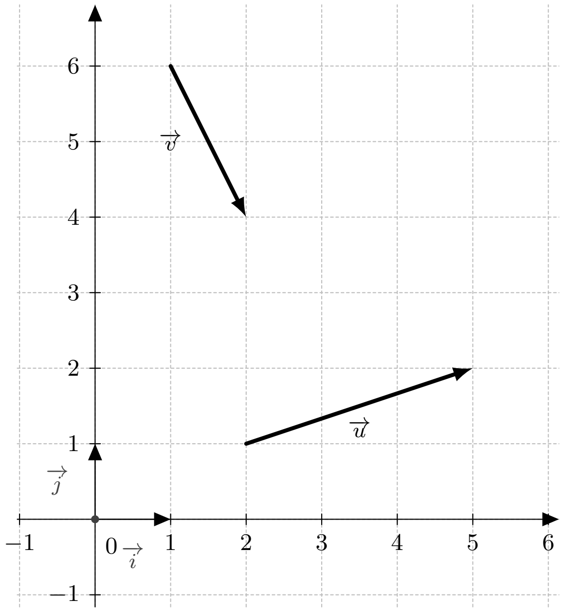


Définition 2.9.

Dans ce repère, si un vecteur $\vec{u}$ est égal à $\vec{u} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$ on dit que les coordonnées de $\vec{u}$ sont :

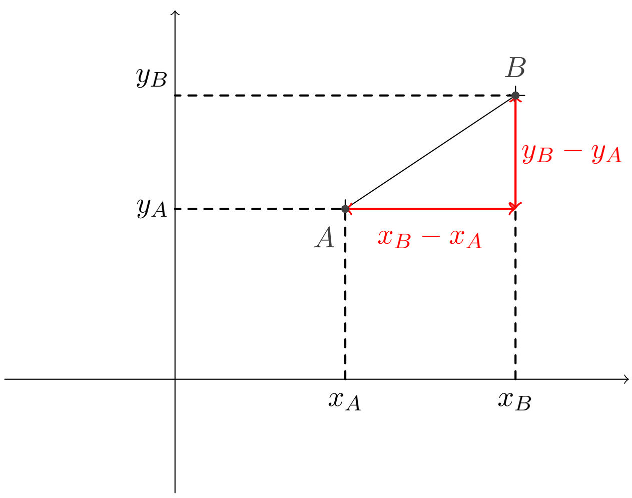
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ que l'on peut également noter } (x\,;\,y).$$

Exemple 1.9.
Déterminons les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$:



Ici les coordonnées de $\vec{u}$ sont $\begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$, les coordonnées de $\vec{v}$ sont $\begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$.

9.1.2 Coordonnées d'un vecteur



Propriété 1.9.
Dans un repère les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ que l'on peut aussi noter :

$$(x_B - x_A \,;\, y_B - y_A)$$

Propriété 2.9.

Dans un repère, on considère $\overrightarrow{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

$$\boxed{\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v} \iff x = x' \quad \text{et} \quad y = y'}.$$

Application 1.9. Dans un repère $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j})$, on considère les points $A(1\,;\,2)$, $B(5\,;\,4)$, $C(2\,;\,1)$, $D(-2\,;\,-1)$ et $E(6\,;\,2)$.

1. Montrer que le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.
2. Calculer les coordonnées du point G pour que le quadrilatère CBEG est un parallélogramme.

9.1.3 Somme de vecteurs

Propriété 3.9.

Dans un repère, soit les vecteurs $\overrightarrow{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

Dans ce repère, $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$.

Application 2.9. Dans un repère $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j})$, on donne $\overrightarrow{u}(1\,;\,2)$ et $\overrightarrow{v}(-4\,;\,7)$.
Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$.

9.1.4 Produit d'un vecteur par un réel

Dans un repère, on considère le vecteur $\overrightarrow{u}(x\,;\,y)$.
Le vecteur $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{u}$ a pour coordonnées $(x + x\,;\,y + y)$, soit $(2x\,;\,2y)$. On le note $2\overrightarrow{u}$.
De même Le vecteur $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{u} + \overrightarrow{u}$ a pour coordonnées $(x+x+x\,;\,y+y+y)$, soit $(3x\,;\,3y)$. On le note $3\overrightarrow{u}$.
De manière générale, on pose la définition suivante :

Définition 3.9.

Dans un repère, soit le vecteur $\overrightarrow{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et k un nombre réel.

Le vecteur $k\overrightarrow{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$ dans ce repère.

Application 3.9. Soit dans un repère $\overrightarrow{u}(2\,;\,1)$.
Calculez les coordonnées des vecteurs $4\overrightarrow{u}$ et $-6\overrightarrow{u}$.

9.2 Vecteurs colinéaires

Définition 4.9.

Deux vecteurs *non nuls* $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont *colinéaires* signifie qu'ils ont *la même direction*. Il existe alors un réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$.

▶ Note 1.9.
Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur.

Définition 5.9.

On considère deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

On appelle *déterminant* de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ noté $\det(\vec{u}\ ;\ \vec{v})$ ou $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$, est le nombre défini par :

$$\boxed{\det(\vec{u}\ ;\ \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - yx' \text{ (différence des produits en croix)}}.$$

Propriété 4.9.

Dans un repère, on considère deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement les coordonnées de ces deux vecteurs sont proportionnelles, c'est-à-dire si et seulement si $xy' = x'y$ ou encore :

$$\boxed{\det(\vec{u}\ ;\ \vec{v}) = 0}.$$

Application 4.9. Soit dans un repère, $\vec{u}(1\,;\,\sqrt{2}+1)$ et $\vec{v}(\sqrt{2}-1\,;\,1)$.
Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils colinéaires ?

9.2.1 Applications de la colinéarité de vecteurs

Propriétés.
Soient A, B, C et D quatre points du plan distincts deux à deux.

1. Les droites (AB) et (CD) sont *parallèles* si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont *colinéaires*.
2. Les points A, B et C sont *alignés* si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont *colinéaires*.

Application 5.9. Soit $M(1\,;\,4)$, $N(3\,;\,3)$ et $P(7\,;\,1)$.
Démontrer que les points M, N et P sont alignés.

9.3 Milieu et longueur d'un segment

9.3.1 Coordonnées du milieu d'un segment

Propriété 5.9.
On se place dans un repère quelconque.
Soient $A(x_A\,;\,y_A)$ et $B(x_B\,;\,y_B)$ et $I(x_I\,;\,y_I)$ milieu de $[AB]$.

Alors :

$$\boxed{x_I = \frac{x_A + x_B}{2} \qquad \text{et } y_I = \frac{y_A + y_B}{2}.}$$

Application 6.9. On se place dans un repère orthonormé $(\mathrm{O}; \vec{i}\,; \vec{j}\,)$ et on donne les points $A(4\,;\,0)$ et $G(-2\,;\,6)$. Calculez les coordonnées du point K milieu du segment $[AG]$.

9.3.2 Calculs de distances

Propriété 6.9.
Dans un repère **orthonormé**, la distance AB entre les points $\mathrm{A}(x_\mathrm{A}\,;\,y_\mathrm{A})$ et $\mathrm{B}(x_\mathrm{B}\,;\,y_\mathrm{B})$ est telle que :

$$\boxed{AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Application 7.9. On se place dans un repère orthonormé $(\mathrm{O}; \vec{i}\,; \vec{j}\,)$ et on donne les points $A(-4\,;\,-1)$, $B(4\,;\,-2)$, et $C(-2\,;\,2)$.

1. Calculez les distances AB, AC et BC.
2. Le triangle ABC est-il rectangle ?

