○○○ **Exercice 116.**
Dans chacun des cas suivants, vérifier que la fonction f est une solution de l'équation différentielle (E) sur $\mathbb{R}$:

1. $f\ :\ x\ \mapsto 3x^2 - 5x + 9$; (E) : $y' = 6x - 5$.
2. $f\ :\ x\ \mapsto 1 - \mathrm{e}^{-2x+1}$; (E) : $y' = 2\mathrm{e}^{-2x+1}$.

●○○ **Exercice 117.**
La fonction g, définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}$ est solution de l'équation différentielle $y' = f$.

1. Déterminer la fonction f.
2. Écrire toutes les primitives de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
3. En déduire la fonction h telle que $h' = f$ et $h(0) = 0$.

●○○ **Exercice 118.**
Un mobile subit un mouvement rectiligne uniformément accéléré
d'accélération $a = 1,5$ m.s^{-2}. La vitesse du mobile au temps $t \geqslant 0$ (t en secondes), est $v(t)$, en m.s^{-1}, et sa position est donnée par $x(t)$, en mètres, avec $x(0) = 0$.

1. Sachant que la vitesse initiale du mobile est 2 m.s^{-1}, exprimer $v(t)$ en fonction de t.
2. En déduire $x(t)$ en fonction de t.

○○○ **Exercice 119.**
Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$:

1. $f(x) = x^2 - 3x + 7$
2. $f(x) = x^6 + 3x^5 - x^4$
3. $f(x) = 0,1x^4 + \dfrac{x^2}{10} - \dfrac{x}{100}$

●○○ **Exercice 120.**
Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive de la fonction f sur $]0\,;+\infty[$:

1. $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^3}$
2. $f(x) = \dfrac{1}{2x} + \dfrac{x}{2}$
3. $f(x) = \dfrac{5}{x^4} - \dfrac{3x^2}{2} + \dfrac{1}{7}$

●○○ **Exercice 121.**
On considère les fonctions f et F définies sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = (-x^2 + 2x + 1)\mathrm{e}^{-x}$ et $F(x) = (x^2 - 1)\mathrm{e}^{-x}$.

1. Vérifier que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire la primitive G de f telle que $G(0) = 5$.

●●○ **Exercice 122.**
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\mathrm{e}^x$.

1. Déterminer les valeurs de a et b pour que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par
$F(x) = (ax + b)\mathrm{e}^x$ soit une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire l'expression de la primitive de f s'annulant en 1.

●○○ **Exercice 123.**
Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

1. $y' = 3y$
2. $y' + 2y = 0$
3. $2y' = y$
4. $\dfrac{y}{5} = y'$

●○○ **Exercice 124.**

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) :
$$y' = 2\,023y.$$
2. Déterminer la solution de f de l'équation (E) telle que $f(0) = 2024$.

●○○ **Exercice 125.**
On considère l'équation différentielle :
$(E)\ :\ y' = -\dfrac{1}{2}y + 3$.

1. Donner la seule solution constante sur $\mathbb{R}$ de (E).
2. En déduire toutes les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

●○○ **Exercice 126.**
Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

1. $y' = -2y + 5$
2. $y' = y - 3$
3. $2y' + 7y = 6$
4. $3y' - 6y = 1$

●○○ **Exercice 127.**
Dans chacun des cas suivants, déterminer la solution f sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E) vérifiant la condition initiale donnée :

1. $y' = 5y - 2$ et $f(0) = -1$.
2. $y' = -5y + 4$ et $f(1) = 0$.
3. $y' = -1$ et $f(2) = 1$.

●●○ **Exercice 128.**
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par
$f(x) = x\mathrm{e}^x$ et l'équation différentielle : $(E)\ :\ y' = y + \mathrm{e}^x$.

1. Vérifier que la fonction f est une solution particulière de (E).
2. En déduire la seule solution g de l'équation (E) telle que $g(2) = 5$.

●●● Exercice 129.

On cherche à modéliser l'évolution du nombre, exprimé en millions, de foyers français possédant un téléviseur à écran plat, en fonction de l'année.

Soit $g(x)$ le nombre, exprimé en millions, de tels foyers l'année x.

On pose $x = 0$ en 2005, $g(0) = 1$ et g est une solution, qui ne s'annule pas sur $[0\ ;\ +\infty[$, de l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}) \quad ; \quad y' = \frac{1}{20}y(10 - y).$$

1. On considère une fonction y qui ne s'annule pas sur $[0\ ;\ +\infty[$ et on pose $z = \dfrac{1}{y}$.
   (a) Montrer que y est solution de (E) si et seulement si z est solution de l'équation différentielle :
   $$(\mathrm{E}_1) \quad : \quad z' = -\frac{1}{2}z + \frac{1}{20}.$$
   (b) Résoudre l'équation (E_1) et en déduire les solutions de l'équation (E).
2. Montrer que g est définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :
   $$g(x) = \frac{10}{9\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} + 1}.$$
3. Étudier les variations de g sur $[0\ ;\ +\infty[$.
4. Calculer la limite de g en $+\infty$ et interpréter le résultat.
5. En quelle année le nombre de foyers possédant un tel équipement dépassera-t-il 5 millions ?

●●● Exercice 130.

La conservation d'une variété de fruits nécessite de les placer, après la récolte et avant le stockage, dans un tunnel refroidissant à air pulsé.

On s'intéresse à l'évolution de la température du fruit en fonction du temps.

À l'instant $t = 0$, les fruits, dont la température est de 24 °C, sont placés dans le tunnel où l'air pulsé est à 2 °C.

On considère la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ qui à tout instant t, exprimé en heures, associe la température d'un fruit, exprimée en °C.

On admet que f est la solution de l'équation différentielle : $y' + 0,61y = 1,22$ avec $f(0) = 24$.

1. Résoudre l'équation différentielle $y' + 0,61y = 1,22$ où y est une fonction dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$.
2. En déduire que pour tout t de $[0\,;\,+\infty[$, $f(t) = 2 + 22\mathrm{e}^{-0,61t}$.
   La courbe représentative de f, notée $\mathcal{C}$, est donnée ci-contre.
3. Calculer la limite de $f(t)$ quand t tend vers $+\infty$. Interpréter graphiquement ce résultat pour la courbe représentative de f.
4. Par expérience, on observe que la température d'un fruit :
   — décroît ;
   — tend à se stabiliser à la température du tunnel où l'air pulsé est à 2 °C.
   La fonction f fournit-elle un modèle en accord avec ces observations ?
5. Déterminer graphiquement en faisant apparaître les traits de construction utiles :
   (a) la température d'un fruit au bout de 4 heures ;
   (b) au bout de combien de temps la température d'un fruit aura diminué de moitié par rapport à la température initiale.
6. On considère que la vitesse de refroidissement est satisfaisante lorsque la température d'un fruit baisse de $\frac{7}{8}$ en moins de 6 heures. Peut-on considérer que la vitesse de refroidissement est satisfaisante ?