Chapitre

5

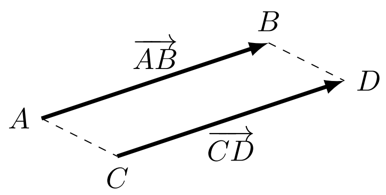
Droites et plans de l'espace

1. Vecteurs de l'espace

1.1 Définition d'un vecteur de l'espace

Définition 1.5

Soient A et B deux points de l'espace.
On associe le **vecteur** $\overrightarrow{AB}$ à la translation qui transforme A en B.
Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si et seulement si ____________ est un parallélogramme (éventuellement aplati).
On peut alors noter $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ et on dit que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont des ________________________ du vecteur $\overrightarrow{u}$.



Remarques :

- Deux vecteurs sont égaux s'ils ont même ____
- Lorsque A et B sont **confondus**, on dit que le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est ______ et on le note $\overrightarrow{0}$.

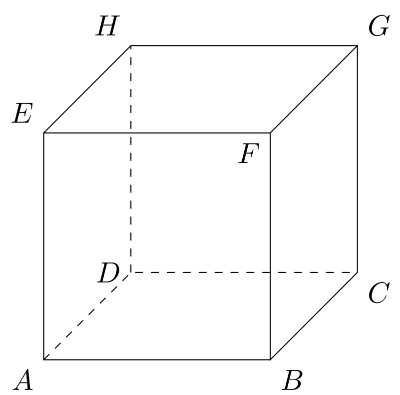
Théorème 1.5

Soit $\overrightarrow{u}$ et A un point de l'espace. Il existe un unique point M tel que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{u}$ et on dit que $\overrightarrow{AM}$ est le représentant de $\overrightarrow{u}$ d'origine A.

Application 1.5.

On considère le cube $ABCDEFGH$ représenté ci-dessous. Construire les points M et N tels que :

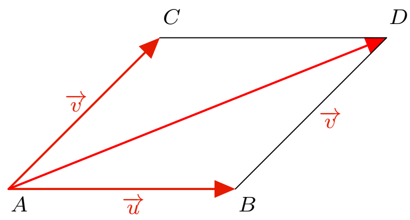
- $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EH}$.
- $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{HE}$.



1.2 Opérations sur les vecteurs de l'espace

Définition 2.5

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace de représentants respectifs $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$.
La **somme** des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est le vecteur noté $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ de représentant $\overrightarrow{AD}$ tel que $ABDC$ soit un parallélogramme.



Propriété 1.5 (Relation de Chasles). Pour tous points A, B et C de l'espace, $\overrightarrow{AB}+$______ $= \overrightarrow{AC}$.

Propriété 2.5.

- Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul. Le vecteur $k\overrightarrow{u}$ est le vecteur qui a :
  - la **même direction** que le vecteur $\overrightarrow{u}$;
  - le **même sens** que $\overrightarrow{u}$ si $k > 0$, le **sens contraire** de $\overrightarrow{u}$ si $k < 0$;
  - pour norme $|k| \times \|\overrightarrow{u}\|$.
- Pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$ et pour tout réel k, $0\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$.

Propriété 3.5. Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace et k et k' deux réels.

- $k\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0} \iff k = 0 \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.
- $k(k'\overrightarrow{u}) = kk'\overrightarrow{u}$.
- $(k + k')\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{u} + k'\overrightarrow{u}$.
- $k(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = k\overrightarrow{u} + k\overrightarrow{v}$.

Définition 3.5

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace.
On dit que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont **colinéaires** s'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{u} =$ ou $\overrightarrow{v} =$.

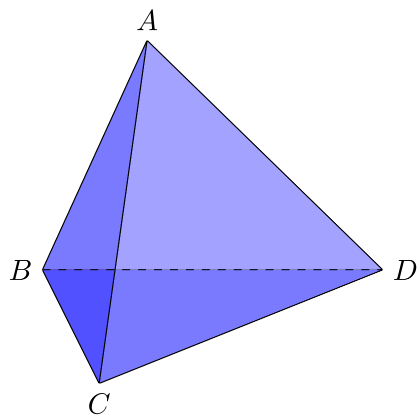
Remarques.

- Deux vecteurs non nuls sont **colinéaires** si et seulement si
- Le vecteur nul est **colinéaire à tout vecteur**.

Application 2.5.

On considère le tétraèdre ABCD représenté ci-dessous.

1. Construire les points M et N tels que $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{CN} = 2\overrightarrow{BC}$.
2. Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{MC}$ et $\overrightarrow{AN}$ sont colinéaires.



2. Droites et plans de l'espace

2.1 Caractérisation vectorielle d'une droite

Définition 4.5

Soient A et B deux points **distincts** de l'espace. La droite (AB) est l'ensemble des points M tels que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont : on a donc $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$ où $k \in \mathbb{R}$ et le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur de la droite (AB).

2.2 Caractérisation vectorielle d'un plan

Définition 5.5

Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs de l'espace tels que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont **pas colinéaires**.
$\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont **coplanaires** lorsqu'il existe deux réels x et y tels que : $\overrightarrow{w} = x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v}$.
On dit alors que le vecteur $\overrightarrow{w}$ est une **combinaison linéaire** des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

Définition 6.5

- On dit que des points sont **coplanaires** s'il existe un plan qui contient ces plans.

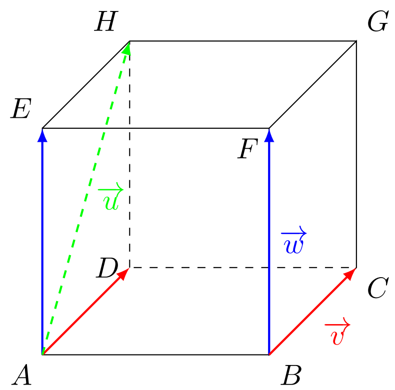
Soit A, B et C trois points **non alignés** de l'espace.

- Le **plan** (ABC) est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$, où $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$.
- Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont des **vecteurs directeurs** du plan (ABC).
$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est une **base** de ce plan et $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est un **repère** de ce plan.

Remarque. Trois points sont **toujours** coplanaires.

Propriété 4.5. Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs de l'espace tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AD}$.
$\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont **coplanaires** si et seulement si les points A, B, C et D sont **coplanaires**.

Propriété 5.5. Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs de l'espace tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AD}$.
$\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont **coplanaires** si et seulement si les points A, B, C et D sont **coplanaires**.



3. Positions relatives de droites et de plans

3.1 Positions relatives de deux droites

Définition 7.5

Soit d une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ et d' une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u'}$.

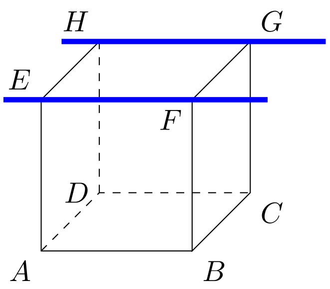
- d et d' sont **parallèles** lorsque $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ sont ____________________
- d et d' sont **coplanaires** lorsqu'il existe un plan qui contient d et d' et non coplanaires sinon.

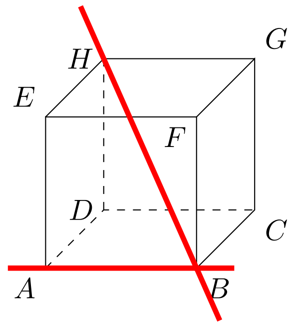
Propriété 6.5. Soient A, B, C et D quatre points distincts de l'espace.

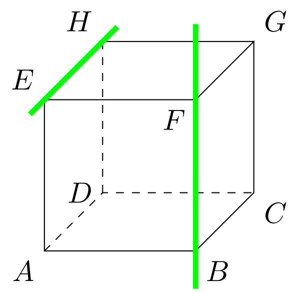
- Les droites (AB) et (CD) sont **coplanaires** si les points A, B, C et D sont **coplanaires**, c'est-à-dire s'il existe un plan contenant les quatre points A, B, C et D.

- Deux droites sont **coplanaires** si et seulement si elles sont **sécantes** ou **parallèles**.
- Si deux droites sont **non coplanaires**, alors leur intersection est **vide**.

Exemples.







....

....

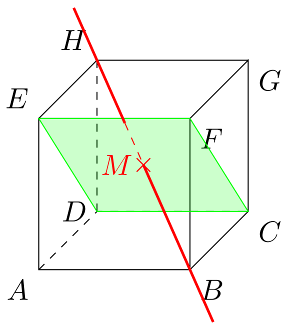
....

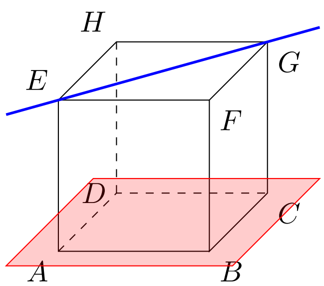
3.2 Positions relatives d'une droite et d'un plan

Définitions et propriétés.

- Une droite est **parallèle à un plan** lorsqu'elle admet un vecteur directeur colinéaire à un vecteur directeur de ce plan.
- Si une droite **n'est pas parallèle à un plan**, alors elle a un ....

Exemples.





....

....

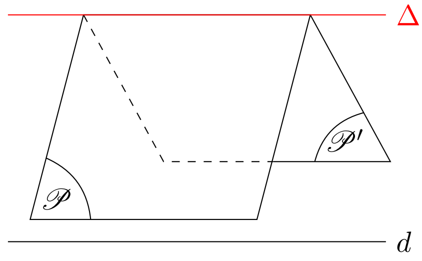
....

3.3 Positions relatives de deux plans

Définition et propriétés.

- Deux plans sont **parallèles** lorsqu'ils admettent un même couple de vecteurs directeurs non colinéaires.
- Deux plans non parallèles sont sécants suivant une droite.

- Lorsque deux plans sont parallèles, tout plan coupant l'un coupe l'autre et les droites d'intersection sont parallèles.
- **Théorème du toit.** Soit d une droite parallèle à deux plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sécants en une droite Δ. Alors d est parallèle à Δ.



4. Repères de l'espace

4.1 Base de l'espace

Définition 8.5

Une **base de l'espace** est formée d'un triplet de vecteurs $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ non coplanaires.

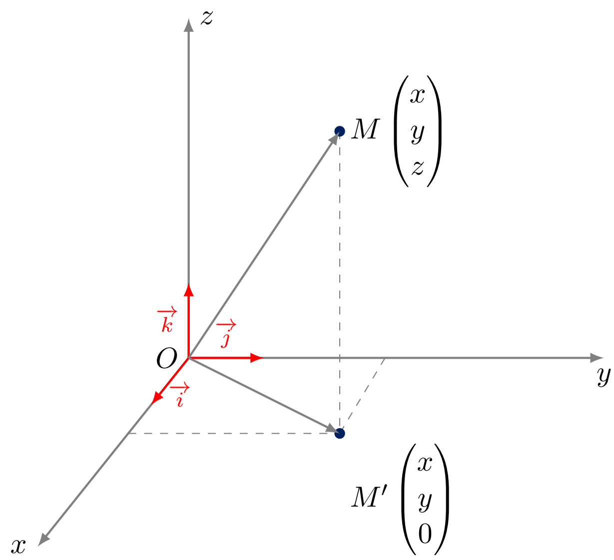
Propriété et définition. Soit $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ une base de l'espace.
Pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$ de l'espace, il existe un unique triplet $(x\,;\,y\,;\,z)$ tel que $\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$.

$(x\,;\,y\,;\,z)$ sont les **coordonnées** de $\overrightarrow{u}$ dans cette base et on note $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

4.2 Repère de l'espace

Définition 9.5

Un **repère de l'espace** est formé d'un point donné O et d'une base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. On note $(O\,;\,\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ un tel repère et O est l'**origine** du repère.



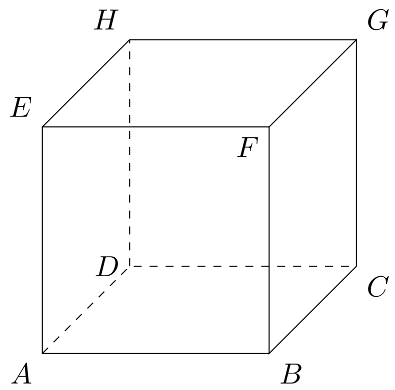
Proposition et définition.

Soit $(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k})$ un repère de l'espace. Pour tout point M de l'espace, il existe un unique triplet $(x\,;y\,;z)$ tel que $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$, ce triplet $(x\,;y\,;z)$ ou encore $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est le triplet **de coordonnées** du point M dans le repère $(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k})$ et z est appelée la cote de M.

Propriété 7.5. On se place dans un repère $(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k})$ de l'espace.

1. Pour deux points A$\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}$ et B$\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{pmatrix}$ on a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$
2. Coordonnées de K milieu de [AB] : $\begin{pmatrix} \dfrac{x_B + x_A}{2} \\ \dfrac{y_B + y_A}{2} \\ \dfrac{z_B + z_A}{2} \end{pmatrix}$
3. Si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ alors $\vec{u} + \vec{v}\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \\ z + z' \end{pmatrix}$ et pour tout réel λ on a $\lambda\vec{u}\begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix}$

Application 3.5. On considère le cube $ABCDEFGH$ donné ci-contre :



1. Soit $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{AE}$.
   Justifier que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de l'espace.

2. Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{BH}$ en fonction de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$. En déduire leurs coordonnées dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

4.3 Caractérisations d'une droite de l'espace

Définition 10.5

Soit $\mathrm{A}(x_A, y_A, z_A)$ un point et $\overrightarrow{u}(a\,;\,b\,;\,c)$ un vecteur non nul. La droite $\mathscr{D}$ passant par A de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ est l'ensemble des points M de l'espace tels qu'il existe un réel λ tel que $\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \lambda\overrightarrow{u}$.

Conséquence immédiate : la droite $\mathscr{D}$ peut être représentée par un système paramétrique.

Propriété 8.5. Un point $\mathrm{M}(x, y, z)$ appartient à la droite $\mathscr{D}$ passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}(a\,;\,b\,;\,c)$ si, et seulement si, il existe un réel t tel que

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & x_A + at \\ y & = & y_A + bt \\ z & = & z_A + ct \end{array}\right.$$

Ce système est une **représentation paramétrique** de la droite $\mathscr{D}$. Le paramètre est t.

Il n'existe pas d'équation cartésienne de droite dans l'espace !

Application 4.5. Donner une représentation paramétrique de la droite passant par les points :

$$\mathrm{A}\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ et } \mathrm{B}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Application 5.5. Soit une droite d de représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2 + 3t \\ y & = & -1 + t, \quad t \in \mathbb{R} \\ z & = & 1 - 2t \end{array}\right.$$

1. Donner les coordonnées d'un vecteur directeur de cette droite d.

2. Donner les coordonnées de deux points de cette droite.

3. Le point P$(-1\,;\,-2\,;\,-5)$ appartient-il à d ?

4.4 Représentation paramétrique d'un plan

Propriété 9.5.
Un point M(x, y, z) appartient au plan $\mathscr{P}$ passant par A et de vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}(a, b, c)$ et $\overrightarrow{u}(\alpha, \beta, \gamma)$ si, et seulement si, il existe deux réels t et t' tels que

$$\begin{cases} x &= x_A + at + \alpha t' \\ y &= y_A + bt + \beta t' \\ z &= z_A + ct + \gamma t' \end{cases}$$

Ce système est une **représentation paramétrique** du plan $\mathscr{P}$ de paramètre est t et t'.

Application 6.5. Dans un repère de l'espace, on considère les points A$(3\,;\,3\,;\,0)$, B$(5\,;\,4\,;\,-2)$ et C$(6\,;\,2\,;\,1)$.

1. Démontrer que les trois points A, B et C définissent un plan $\mathscr{P}$.

2. Déterminer une représentation paramétrique de ce plan.