Question de cours.

1. Si $a \equiv b\ [n]$ alors il existe un entier relatif k tel que $a = b + nk$. On multiplie cette égalité par $m \neq 0$, il vient : $ma = mb + n(mk)$ avec $mk \in \mathbb{Z}$ donc $ma - mb$ multiple de n et par suite $ma \equiv mb\ [n]$.
2. $2 \times 11 \equiv 2 \times 9\ [4]$ mais 11 n'est pas congru à 9 modulo 4 donc la réciproque est fausse.

Exercice 1. On raisonne modulo 3. Pour cela, on utilise un tableau de congruences :

$n \equiv \ldots\ [3]$	0	1	2
$n^2 + 5 \equiv \ldots\ [3]$	5 soit 2	6 soit 0	9 soit 0
$n(n^2 + 5) \equiv \ldots\ [3]$	0	0	0

$\forall n \in \mathbb{Z}$, $(n^2 + 5) \equiv 0\ [3]$ ce qui justifie que pour tout entier relatif n, $n(n^2 + 5)$ est divisible par 3.

Exercice 2. On raisonne modulo 5. Pour cela, on utilise un tableau de congruences :

$x \equiv \ldots\ [5]$	0	1	2	3	4
$2x \equiv \ldots\ [5]$	0	2	4	6 soit 1	8 soit 3
$x^3 \equiv \ldots\ [5]$	0	1	8 soit 3	27 soit 2	64 soit 4

On en déduit que $2x \equiv 3\ [5] \iff x \equiv 4\ [5]$ et $x^3 \equiv 3\ [5] \iff x \equiv 2\ [5]$.

Exercice 3.

1. $2^{10} = 1024 = 100 \times 10 + 24$ donc $2^{10} \equiv 24\ [100]$.
   $2^{20} = 2^{10} \times 2^{10}$. Comme $2^{10} \equiv 24\ [100]$ alors $2^{20} \equiv 24^2\ [100]$ soit $2^{20} \equiv 576\ [100]$.
   Enfin $576 = 100 \times 5 + 76$ avec $0 \leqslant 76 < 100$ donc le reste dans la division euclidienne de 2^{20} par 100 est 76.
2. Soit $\mathscr{P}_n$: $76^n \equiv 76\ [100]$.
   - Initialisation : si $n = 1$ on a $76^1 = 76$ et $76 \equiv 76\ [100]$ donc $\mathscr{P}_1$ est vraie.
   - Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathscr{P}_n$ vraie.
     Par hypothèse de récurrence $76^n \equiv 76\ [100]$ donc en multipliant par 76, il vient $76^{n+1} \equiv 76^2\ [100]$. Or $76^2 = 5776 = 57 \times 100 + 76$ donc $76^2 \equiv 76\ [100]$ ce qui implique que $76^{n+1} \equiv 76\ [100]$ et par suite $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.
   - $\mathscr{P}_1$ est vraie et $\mathscr{P}_n$ est vraie à partir du rang $n = 1$, donc $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n non nul.
3. $2^{1000} = (2^{20})^{50}$. Or $2^{20} \equiv 76\ [100]$ donc $2^{1000} \equiv 76^{50}\ [100]$.
   D'après la question précédente, pour tout entier naturel n non nul, $76^n \equiv 76\ [100]$ donc $76^{50} \equiv 76\ [100]$ donc $2^{1000} \equiv 76\ [100]$: le reste dans la division euclidienne de 2^{1000} par 100 est 76 donc les deux derniers chiffres dans l'écriture décimale de 2^{1000} sont 76 (7 et 6).

Exercice 4.

1. On raisonne modulo 2. On a $2 \equiv 0\ [2]$, $3 \equiv 1\ [2]$ et $6 \equiv 0\ [2]$ donc pour tout entier naturel n non nul, $2^n \equiv 0\ [2]$, $3^n \equiv 1\ [2]$ et $6^n \equiv 0\ [2]$.
   Ainsi par addition : $u_n \equiv 0\ [2]$ ce qui démontre que u_n est pair.
2. n est pair : il existe donc $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $n = 2k$.
   On peut donc écrire : $u_n = u_{2k} = 2^{2k} + 3^{2k} + 6^{2k} - 1 = 4^k + 9^k + 2^{2k} \times 3^{2k} - 1 = 4^k + 4^k \times 9^k + 9^k - 1$.
   Comme $4 \equiv 0\ [4]$, $4^k \equiv 0\ [4]$; $4^k \times 9^k \equiv 0\ [4]$;
   $9 \equiv 1\ [4]$, donc $9^k \equiv 1\ [4]$, d'où par addition : $u_{2k} \equiv 0 + 0 + 1 - 1 = 0\ [4]$, c'est-à-dire que u_{2k} est un multiple de 4.