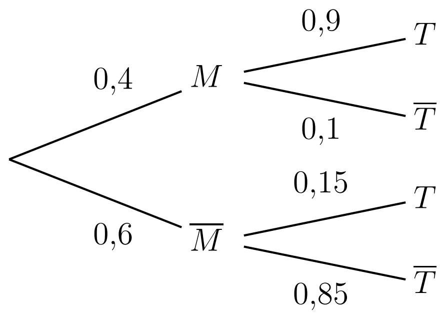
Exercice 1.

1. On traduit la situation par l'arbre pondéré ci-dessous :



2. On a $P(M \cap T) = P(M) \times P_M(T) = 0{,}4 \times 0{,}9 = 0{,}36$ donc la probabilité que le chat soit porteur de la maladie et que son test soit positif est égale à 0,36.

3. M et $\overline{M}$ forment une partition de l'univers, donc d'après la formule des probabilités totales :
$$\begin{array}{rcl} P(T) & = & P(M \cap T) + P\left(\overline{M} \cap T\right) \\ & = & 0{,}36 + P\left(\overline{M}\right) \times P_{\overline{M}}(T) \\ & = & 0{,}36 + 0{,}6 \times 0{,}15 \\ & = & 0{,}45 \end{array}$$
Donc la probabilité que le test du chat soit positif est bien égale à 0,45.

4. On cherche $P_T(M)$.
$$\begin{array}{rcl} P_T(M) & = & \dfrac{P(M \cap T)}{P(T)} \\ & = & \dfrac{0{,}36}{0{,}45} \\ & = & 0{,}8 \end{array}$$
Ainsi, sachant que le test est positif, la probabilité que le chat soit porteur de la maladie est égale à 0,8.

5. On a $P_T(M) = 0{,}8$ et $P(M) = 0{,}4$ donc $P_T(M) \neq P(M)$ ce qui prouve que les événements M et T ne sont pas indépendants : ils sont donc liés.

Exercice 2.

Soit $\mathscr{P}_n$: « $u_n = 2^{n+1} + 1$ ».
Initialisation : si $n = 1$ on a d'après l'énoncé $u_1 = 5$ et $2^2 + 1 = 5$ donc $\mathscr{P}_1$ est vraie.
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Supposons $\mathscr{P}_n$ vraie ($u_n = 2^{n+1} + 1$) et montrons que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie ($u_{n+1} = 2^{n+2} + 1$).
D'après l'énoncé, on a : $u_{n+1} = 2u_n - 1$ et par hypothèse de récurrence, on a $u_n = 2^{n+1} + 1$, on en déduit alors que :
$$\begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & 2(2^{n+1} + 1) - 1 \\ & = & 2^{n+2} + 2 - 1 \\ & = & 2^{n+2} + 1 \end{array}$$

$\mathscr{P}_{n+1}$ est donc vraie.

Conclusion : $\mathscr{P}_1$ est vraie et $\mathscr{P}_n$ est héréditaire à partir du rang $n=1$, on en déduit que $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = 2^{n+1}+1}$$

Exercice 3.

Soit $\mathscr{P}_n$: « $u_n = \dfrac{2}{2n+1}$ ».

Initialisation : si $n=0$ on a d'après l'énoncé $u_0 = 2$ et $\dfrac{2}{2\times 0+1=2}$ donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons $\mathscr{P}_n$ vraie ($u_n = \dfrac{2}{2n+1}$) et montrons que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie ($u_{n+1} = \dfrac{2}{2n+3}$).

D'après l'énoncé, on a : $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n}$ et par hypothèse de récurrence, on a $u_n = \dfrac{2}{2n+1}$, on en déduit alors que :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{\dfrac{2}{2n+1}}{1+\dfrac{2}{2n+1}} \\ &= \frac{\dfrac{2}{2n+1}}{\dfrac{2n+3}{2n+1}} \\ &= \frac{2}{\cancel{2n+1}} \times \frac{\cancel{2n+1}}{2n+3} \\ &= \frac{2}{2n+3} \end{aligned}$$

$\mathscr{P}_{n+1}$ est donc vraie.

Conclusion : $\mathscr{P}_0$ est vraie et $\mathscr{P}_n$ est héréditaire à partir du rang $n=0$, on en déduit que $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout n de $\mathbb{N}$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{2}{2n+1}}$$

Exercice 4.

On choisit un individu au hasard dans la population. On définit les événements :

V **:** « l'individu a été vacciné » ;

M **:** « l'individu est malade ».

L'énoncé se traduit alors ainsi :

$$\mathbb{P}(V) = \frac{1}{4} \quad \mathbb{P}_M(V) = \frac{1}{5} \quad \mathbb{P}_M(\overline{V}) = \frac{4}{5} \quad \mathbb{P}_V(M) = \frac{1}{12}$$

On en déduit rapidement que $\mathbb{P}(\overline{V}) = 1 - \mathbb{P}(V) = \dfrac{3}{4}$.

On cherche $\mathbb{P}_{\overline{V}}(M)$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{\overline{V}}(M) &= \frac{\mathbb{P}(\overline{V} \cap M)}{\mathbb{P}(\overline{V})} && \text{par définition} \\
&= \frac{\mathbb{P}(M) \times \mathbb{P}_M(\overline{V})}{\mathbb{P}(\overline{V})} && \text{par formule du cours} \\
&= \frac{(\mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}_V(M) + \mathbb{P}(\overline{V}) \times \mathbb{P}_{\overline{V}}(M)) \times \mathbb{P}_M(\overline{V})}{\mathbb{P}(\overline{V})} && \text{par la formule des probabilités totales}
\end{aligned}$$

Notons $x = \mathbb{P}_{\overline{V}}(M)$. Alors en remplaçant on obtient l'équation suivante que l'ont résout :

$$\begin{aligned}
x = \frac{\left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{12} + \frac{3}{4} \times x\right) \times \frac{4}{5}}{\frac{3}{4}} &\Leftrightarrow \frac{3}{4}x = \frac{1}{60} + \frac{3}{5}x \\
&\Leftrightarrow \frac{3}{4}x - \frac{3}{5}x = \frac{1}{60} \\
&\Leftrightarrow \frac{15-12}{20}x = \frac{1}{60} \\
&\Leftrightarrow \frac{3}{20}x = \frac{1}{60} \\
&\Leftrightarrow x = \frac{1}{60} \times \frac{20}{3} = \frac{1}{9}
\end{aligned}$$

Ainsi, la probabilité de tomber malade pour un individu non-vacciné est $\dfrac{1}{9}$.