CHAPITRE

7

# Logarithme Népérien

## 7.1 Fonction logarithme népérien

### 7.1.1 Fonction réciproque de la fonction exponentielle

**Définition 1.7.**

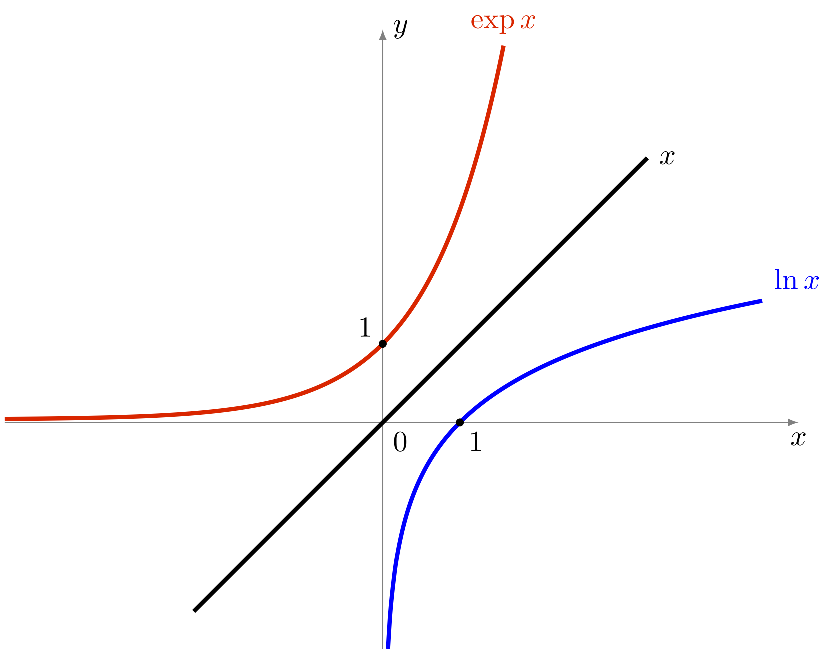
La fonction *exponentielle* est :

- ________________ sur $\mathbb{R}$.
- ______________________________________________ sur $\mathbb{R}$.
- $a > 0 \in$ donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires dans le cas des fonctions strictement croissantes, pour tout réel $a > 0$, il existe un unique réel $x$ tel que $\mathrm{e}^x = a$.

**Définition 2.7.**

La fonction qui, à tout réel $x > 0$, associe le réel $\ln(x)$ s'appelle *fonction logarithme népérien* que l'on note ln : cette fonction est définie sur $]0\,;+\infty[$ et c'est la *fonction réciproque* de la fonction exponentielle.

**Propriété 1.7.**
Dans un repère orthonormé, les courbes représentatives des fonctions *exponentielle* et *logarithme népérien* sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.



**Propriétés 1.7.**

- Pour tout $b>0$ et pour tout réel $a$, $e^a = b \Longleftrightarrow$ .
- $\ln(1) =$ et $\ln(e) =$ .
- Pour tout réel $a>0$, $e^{\ln(a)} =$ .
- Pour tout réel $a$, $\ln(e^a) =$ .

**Application 1.7.** Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \ln(5x-2)$
2. $g(x) = \ln(-x^2-5x+6)$

**Application 2.7.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $e^x = 3$
2. $e^{-5x+1} = 4$
3. $\ln(x) = -3$
4. $\ln(-3x+4) = 0$

### 7.1.2 Relation fonctionnelle et propriétés algébriques

**Propriété 2.7.** *Relation fonctionnelle*
Pour tous $x$ et $y$ réels strictement positifs,

$$\boxed{\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y).}$$

*Démonstration.*

□

**Propriété 3.7.** *Conséquences*
Pour tous réels $x$ et $y$ strictement positifs :

- $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = \qquad .$
- $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \qquad .$
- $\forall n \in \mathbb{Z},\ \ln(x^n) = \qquad .$
- $\ln(\sqrt{x}) = \qquad .$

*Démonstration.* Prouvons la première égalité.

□

**Application 3.7.** Démontrer que $\ln(8) - \ln(2) + \ln(4) - \ln(16) = 0$.

## 7.2 Étude de la fonction ln

### 7.2.1 Dérivée et variations

**Propriétés 2.7.** *Dérivées*

- La *fonction logarithme népérien* est *continue* et *dérivable* sur $]0\,;+\infty[$ et pour tout réel $x>0$,

$$\boxed{\ln'(x)=\frac{1}{x}}$$

- Soit $u$ une fonction *dérivable* sur un intervalle $I$ telle que, pour tout $x \in I$, $u(x)>0$.
  La fonction $\ln \circ u \ : \ x \to \ln(u(x))$ est dérivable sur $I$ et :

$$\boxed{(\ln \circ u)'=\frac{u'}{u}}$$

*Démonstration.*

$\square$

**Application 4.7.** Calculer la dérivée de la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\ln(5x^2+x+3)$.

**Propriété 4.7.** *Sens de variation*
La fonction *logarithme népérien* est *strictement croissante* sur $]0\,;+\infty[$.

*Conséquences :*

**Propriétés 3.7.**
Pour tous réels $a$ et $b$ strictement positifs, on a :

- $\ln(a) = \ln(b) \iff$

- $\ln(a) \leqslant \ln(b) \iff$

  En particulier, on a :

- $\ln(a) \leqslant 0 \iff$

- $\ln(a) \geqslant 0 \iff$

**Application 5.7.** On considère la suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 85 \times 0,2^n + 15$.
Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels : $a_n < 15,004$.

### 7.2.2 Limites

**Propriété 5.7.**

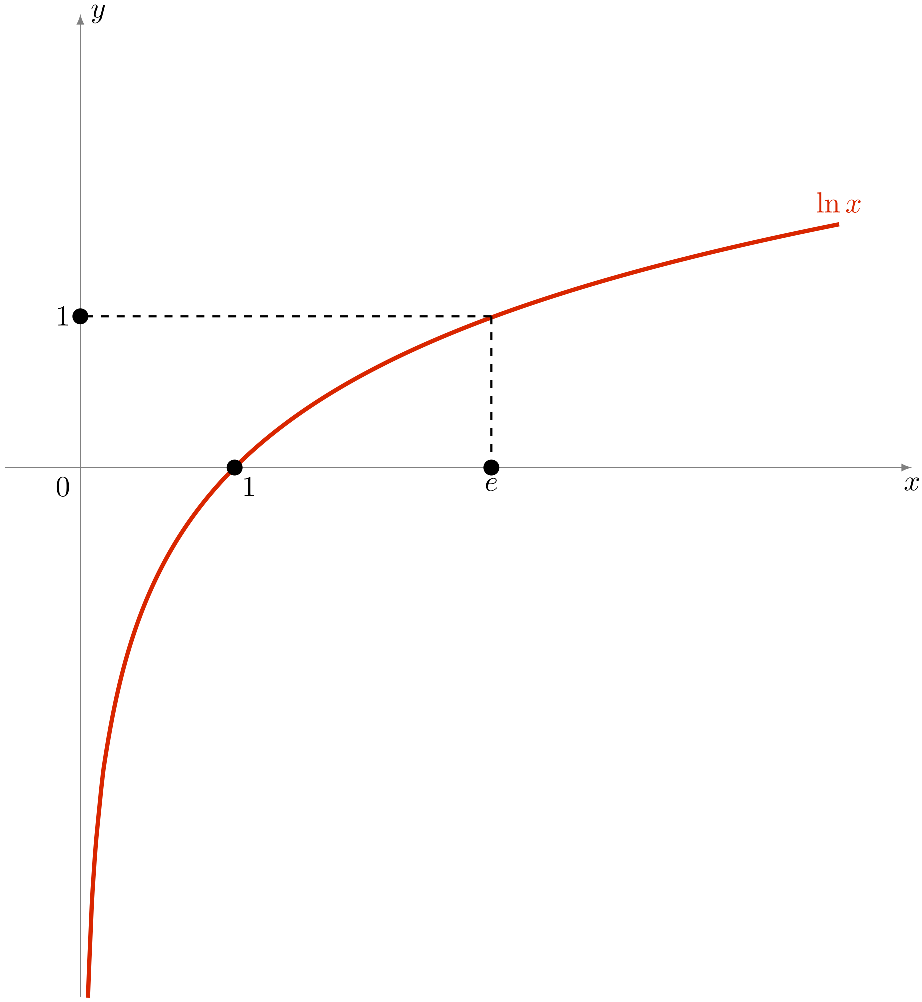
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$

**Conséquences.**

On peut dresser le tableau de variation de la fonction ln :

| $x$ | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| Variation de ln | ‖ $-\infty$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Courbe représentative de la fonction ln :




**Propriété 6.7.** *Croissances comparées*

- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$

- $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\ln(x) = 0.$

  Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$,

- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0} x^n\ln(x) = 0.$

**Propriété 7.7.** *Concavité*

La fonction *logarithme népérien* est *concave* sur $]0\,;\,+\infty[$ : sa courbe représentative est donc toujours située *en dessous* de ses tangentes sur $]0\,;\,+\infty[$.

*Démonstration.*

□