

1. Vecteurs de l'espace

1.1 Définition d'un vecteur de l'espace

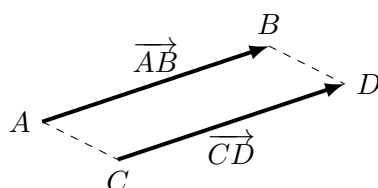
Définition 1.5

Soient A et B deux points de l'espace.

On associe le **vecteur** \overrightarrow{AB} à la translation qui transforme A en B .

Deux vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{CD} sont égaux si et seulement si _____ est un parallélogramme (éventuellement aplati).

On peut alors noter $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ et on dit que \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{CD} sont des _____ du vecteur \vec{u} .



Remarques :

- Deux vecteurs sont égaux s'ils ont même _____
- Lorsque A et B sont **confondus**, on dit que le vecteur \overrightarrow{AB} est _____ et on le note $\vec{0}$.

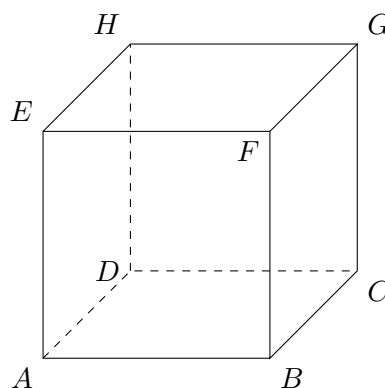
Théorème 1.5

Soit \vec{u} et A un point de l'espace. Il existe un unique point M tel que $\overrightarrow{AM} = \vec{u}$ et on dit que \overrightarrow{AM} est le représentant de \vec{u} d'origine A .

Application 1.5.

On considère le cube $ABCDEFGH$ représenté ci-dessous. Construire les points M et N tels que :

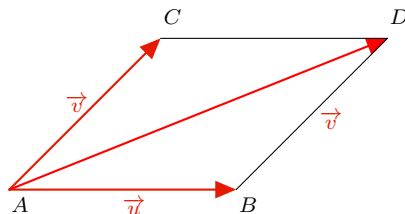
- $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EH}$.
- $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{HE}$.



1.2 Opérations sur les vecteurs de l'espace

Définition 2.5

Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs de l'espace de représentants respectifs $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. La **somme** des vecteurs \vec{u} et \vec{v} est le vecteur noté $\vec{u} + \vec{v}$ de représentant \overrightarrow{AD} tel que $ABDC$ soit un parallélogramme.



Propriété 1.5 (Relation de Chasles). Pour tous points A, B et C de l'espace, $\overrightarrow{AB} + \text{_____} = \overrightarrow{AC}$.

Propriété 2.5.

- Soit \vec{u} un vecteur non nul. Le vecteur $k\vec{u}$ est le vecteur qui a :
 - la **même direction** que le vecteur \vec{u} ;
 - le **même sens** que \vec{u} si $k > 0$, le **sens contraire** de \vec{u} si $k < 0$;
 - pour norme $|k| \times \|\vec{u}\|$.
- Pour tout vecteur \vec{u} et pour tout réel k , $0\vec{u} = k\vec{0} = \vec{0}$.

Propriété 3.5. Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs de l'espace et k et k' deux réels.

- $k\vec{u} = \vec{0} \iff k = 0 \quad \text{ou} \quad \vec{u} = \vec{0}$.
- $k(k'\vec{u}) = kk'\vec{u}$.
- $(k + k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$.
- $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$.

Définition 3.5

Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs de l'espace.

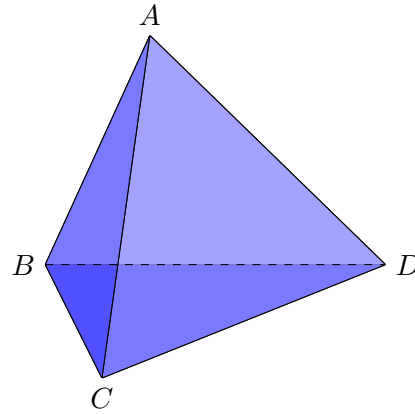
On dit que \vec{u} et \vec{v} sont **colinéaires** s'il existe un réel k tel que $\vec{u} = \text{_____}$ ou $\vec{v} = \text{_____}$.

Remarques.

- Deux vecteurs non nuls sont **colinéaires** si et seulement si
- Le vecteur nul est **colinéaire à tout vecteur**.

Application 2.5.

On considère le tétraèdre ABCD représenté ci-dessous.



1. Construire les points M et N tels que $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{CN} = 2\overrightarrow{BC}$.
2. Démontrer que les vecteurs \overrightarrow{MC} et \overrightarrow{AN} sont colinéaires.

2. Droites et plans de l'espace

2.1 Caractérisation vectorielle d'une droite

Définition 4.5

Soient A et B deux points **distincts** de l'espace. La droite (AB) est l'ensemble des points M tels que les vecteurs \overrightarrow{AM} et \overrightarrow{AB} sont **colinéaires** : on a donc $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$ où $k \in \mathbb{R}$ et le vecteur \overrightarrow{AB} est un vecteur **directeur** de la droite (AB) .

2.2 Caractérisation vectorielle d'un plan

Définition 5.5

Soient \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} trois vecteurs de l'espace tels que \vec{u} et \vec{v} ne sont **pas colinéaires**. \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} sont **coplanaires** lorsqu'il existe deux réels x et y tels que : $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$. On dit alors que le vecteur \vec{w} est une **combinaison linéaire** des vecteurs \vec{u} et \vec{v} .

Définition 6.5

- On dit que des points sont **coplanaires** s'il existe un plan qui contient ces plans.

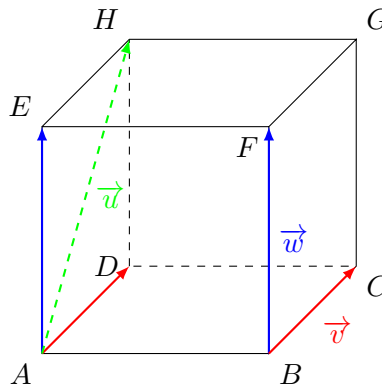
Soit A , B et C trois points **non alignés** de l'espace.

- Le **plan** (ABC) est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$, où $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$.
- Les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} sont des **vecteurs directeurs** du plan (ABC) .
 $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est une **base** de ce plan et $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est un **repère** de ce plan.

Remarque. Trois points sont **toujours** coplanaires.

Propriété 4.5. Soient \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} trois vecteurs de l'espace tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$.
 \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} sont **coplanaires** si et seulement si les points A , B , C et D sont **coplanaires**.

Propriété 5.5. Soient \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} trois vecteurs de l'espace tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$.
 \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} sont **coplanaires** si et seulement si les points A , B , C et D sont **coplanaires**.



3. Positions relatives de droites et de plans

3.1 Positions relatives de deux droites

Définition 7.5

Soit d une droite de vecteur directeur \vec{u} et d' une droite de vecteur directeur \vec{u}' .

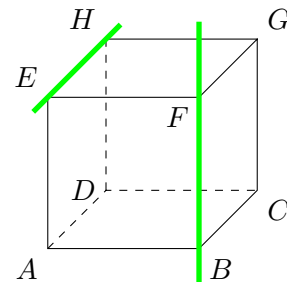
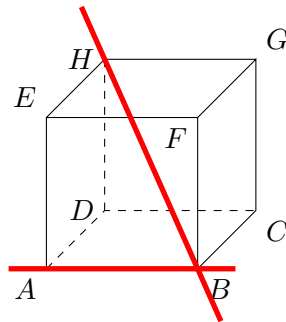
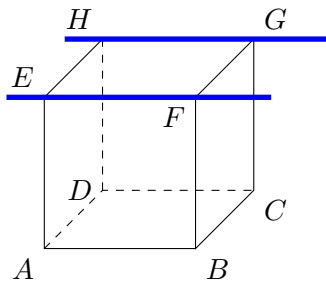
- d et d' sont **parallèles** lorsque \vec{u} et \vec{u}' sont _____
- d et d' sont **coplanaires** lorsqu'il existe un plan qui contient d et d' et non coplanaires sinon.

Propriété 6.5. Soient A , B , C et D quatre points distincts de l'espace.

- Les droites (AB) et (CD) sont **coplanaires** si les points A , B , C et D sont **coplanaires**, c'est-à-dire s'il existe un plan contenant les quatre points A , B , C et D .

- Deux droites sont **coplanaires** si et seulement si elles sont **sécantes** ou **parallèles**.
- Si deux droites sont **non coplanaires**, alors leur intersection est **vide**.

Exemples.



.....

.....

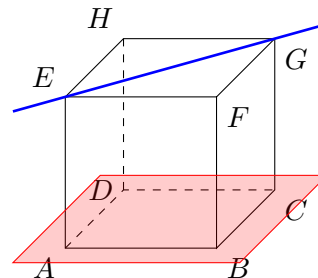
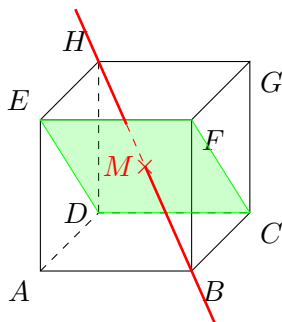
.....

3.2 Positions relatives d'une droite et d'un plan

Définitions et propriétés.

- Une droite est **parallèle à un plan** lorsqu'elle admet un vecteur directeur colinéaire à un vecteur directeur de ce plan.
- Si une droite **n'est pas parallèle à un plan**, alors elle a un

Exemples.



.....

.....

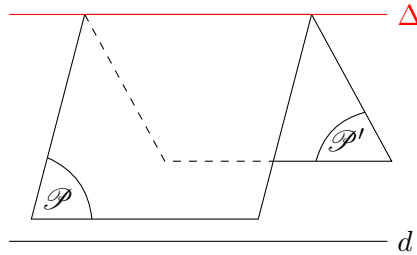
.....

3.3 Positions relatives de deux plans

Définition et propriétés.

- Deux plans sont **parallèles** lorsqu'ils admettent un même couple de vecteurs directeurs non colinéaires.
- Deux plans non parallèles sont sécants suivant une droite.

- Lorsque deux plans sont parallèles, tout plan coupant l'un coupe l'autre et les droites d'intersection sont parallèles.
- **Théorème du toit.** Soit d une droite parallèle à deux plans \mathcal{P} et \mathcal{P}' sécants en une droite Δ . Alors d est parallèle à Δ .



4. Repères de l'espace

4.1 Base de l'espace

Définition 8.5

Une **base de l'espace** est formée d'un triplet de vecteurs $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ non coplanaires.

Propriété et définition. Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base de l'espace.

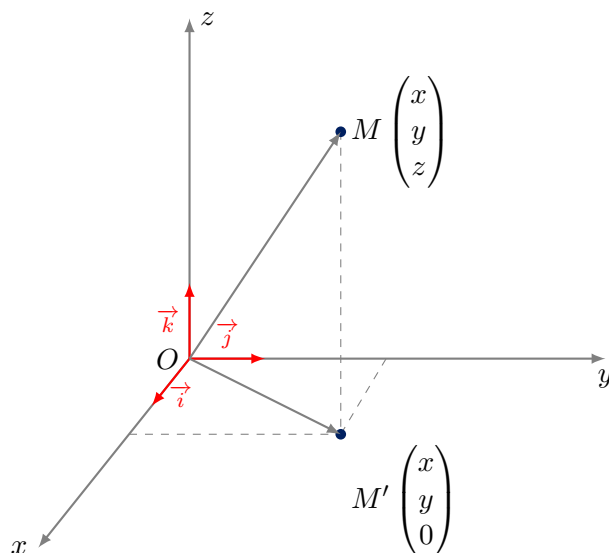
Pour tout vecteur \vec{u} de l'espace, il existe un unique triplet $(x; y; z)$ tel que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

$(x; y; z)$ sont les **coordonnées** de \vec{u} dans cette base et on note $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

4.2 Repère de l'espace

Définition 9.5

Un **repère de l'espace** est formé d'un point donné O et d'une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On note $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un tel repère et O est l'**origine** du repère.



Proposition et définition.

Soit $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ un repère de l'espace. Pour tout point M de l'espace, il existe un unique triplet $(x; y; z)$ tel que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, ce triplet $(x; y; z)$ ou encore $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est le triplet **de coordonnées** du point M dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ et z est appelée la cote de M .

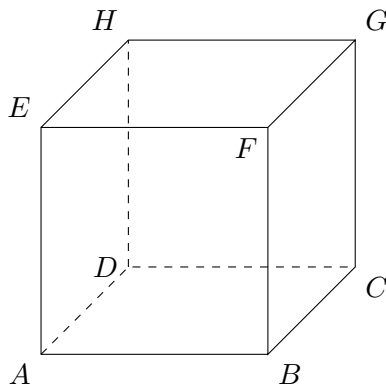
Propriété 7.5. On se place dans un repère $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ de l'espace.

1. Pour deux points $A \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}$ et $B \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{pmatrix}$ on a : $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$

2. Coordonnées de K milieu de $[AB]$: $\begin{pmatrix} \frac{x_B + x_A}{2} \\ \frac{y_B + y_A}{2} \\ \frac{z_B + z_A}{2} \end{pmatrix}$

3. Si $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ alors $\vec{u} + \vec{v} \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \\ z + z' \end{pmatrix}$ et pour tout réel λ on a $\lambda \vec{u} \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix}$

Application 3.5. On considère le cube $ABCDEFGH$ donné ci-contre :



1. Soit $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{AE}$.
Justifier que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de l'espace.

2. Exprimer les vecteurs suivants en fonction de \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} . En déduire leurs coordonnées dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

(a) \overrightarrow{AH}

(b) \overrightarrow{BH}
