Devoir surveillé n°9B : autour du ln

Exercice 1 — 15 minutes — **/3**

Résoudre les équations suivantes après avoir trouvé l'intervalle de validité des calculs :

1. $\ln(x+2)+\ln(x+3)=\ln(x+6)$
2. $\ln(x^2+5x+6)=\ln(x+6)$

Exercice 2 — 15 minutes — **/3**

1. $-2(\ln x)^2+9\ln x+11=0$
2. $-2\mathrm{e}^{2x}+9\mathrm{e}^{x}+11=0$

Exercice 3 — 5 minutes — **/2**

Déterminer, par le calcul, le plus entier naturel n tel que $5+24\times 1,6^n \geqslant 10\,000$.

Exercice 4 — 10 minutes — **/2**

Faire le tableau de signes de la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{4-5\ln(x)}{x^2}.$$

Exercice 5 — 55 minutes — **/10**

Pour tout entier naturel n, on considère la fonction f_n définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f_n(x)=-nx-x\ln x.$$

On note $(\mathcal{C}_n)$ la courbe représentative de la fonction f_n, dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
Les courbes $(\mathcal{C}_0)$, $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$ représentatives des fonctions f_0, f_1 et f_2 sont données en ci-contre.

Partie A : Étude de la fonction f_0 définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $f_0(x)=-x\ln x$.

1. Déterminer la limite de f_0 en $+\infty$.
2. Étudier les variations de la fonction f_0 sur $]0\ ;\ +\infty[$.

Partie B : Étude de certaines propriétés de la fonction f_n, n entier naturel.

Soit n un entier naturel.

1. Démontrer que pour $x\in]0\ ;\ +\infty[$, $f_n'(x)=-n-1-\ln x$ où f_n' désigne la fonction dérivée de f_n.
2. **a.** Démontrer que la courbe $(\mathcal{C}_n)$ admet en un unique point A_n d'abscisse e^{-n-1} une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

b. Prouver que le point A_n appartient à la droite Δ d'équation $y = x$.

c. Placer sur la figure les points $A_0,\ A_1,\ A_2$.

3. **a.** Démontrer que la courbe $(\mathcal{C}_n)$ coupe l'axe des abscisses en un unique point, noté B_n, dont l'abscisse est e^{-n}.

b. Démontrer que la tangente à $(\mathcal{C}_n)$ au point B_n a un coefficient directeur indépendant de l'entier n.

c. Placer sur la figure les points $B_0,\ B_1,\ B_2$.