1 Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n - n \end{cases}$$

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a :

$$u_n = 2^n + n + 1.$$

2 Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 6 \\ u_{n+1} = 2u_n - 5 \end{cases}$$

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a :

$$u_n = 2^n + 5.$$

3 Soit (w_n) la suite arithmétique de raison r et de premier terme w_0.
Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = w_0 + nr$.

4 Soit la suite (w_n) définie par $w_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $w_{n+1} = 3w_n - 2n + 3$.
Démontrer que pour tout entier naturel n on a : $w_n \geqslant n$.

5 Soit la suite (v_n) définie par $v_0 = 3$ et pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = \dfrac{1}{3}v_n + 4$.

1. Calculer v_1.
2. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a $v_{n+1} \geqslant v_n$.
3. En déduire la monotonie de la suite (v_n).

6 Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2 - u_n} \end{cases}$$

1. Calculer u_2, u_3 et u_4.
2. Conjecturer l'expression de u_n en fonction de n.
3. Démontrer cette conjecture par récurrence puis en déduire u_{2022}.

7 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - 2x^2 + x - 2$ et on considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n.

1. Calculer $f'(x)$ puis en déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$.
2. (a) Justifier que $u_1 = -1$.
   (b) Montrer par récurrence que la suite (u_n) est décroissante.

8 Soit $\mathscr{P}_n$ la proposition « 2^n est un multiple de 3 ».

1. Démontrer que $\mathscr{P}_n$ est héréditaire.
2. $\mathscr{P}_n$ est-elle vraie pour tout entier naturel n ?

9 Soit $\mathscr{P}_n$ la proposition « $10^n - 1$ est un multiple de 9 ».

1. Démontrer que $\mathscr{P}_n$ est héréditaire.
2. $\mathscr{P}_n$ est-elle vraie pour tout entier naturel n ?

10 Soit la suite u définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = 0,7 \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n}{1 + 2u_n} \end{cases}$$

1. Soit la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{3x}{1+2x}$.
   (a) Étudier les variations de f sur $[0\,;+\infty[$.
   (b) En déduire que si $x \in [0\,;1]$ alors : $$f(x) \in [0\,;1].$$
2. Démontrer que pour tout entier naturel n, $$0 \leqslant u_n \leqslant 1.$$
3. Étudier la monotonie de la suite (u_n).

11 Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 0,3 \\ u_{n+1} = 0,9u_n(1 - u_n) \end{cases}$
On admet que, pour tout entier naturel n, u_n et $1 - u_n$ appartiennent à l'intervalle $[0\,;1]$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel n : $$0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 0,9u_n.$$
2. Montrer que, pour tout entier naturel n, $$0 \leqslant u_n \leqslant 0,3 \times 0,9^n.$$

12 Soit n un entier naturel et a_0, a_1, $a_2 \ldots$, a_{n+1} des nombres réels.
Démontrer que pour tout entier naturel n,

$$\sum_{k=0}^{n}(a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_0$$

13 Soit n un entier naturel et a_0, a_1, $a_2 \ldots$, a_{n+1} des nombres réels non nuls.
Démontrer que pour tout entier naturel n,

$$\prod_{k=0}^{n} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_{n+1}}{a_0}$$

14 Soit n un entier naturel non nul.
Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul,

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$