Exercice 5.

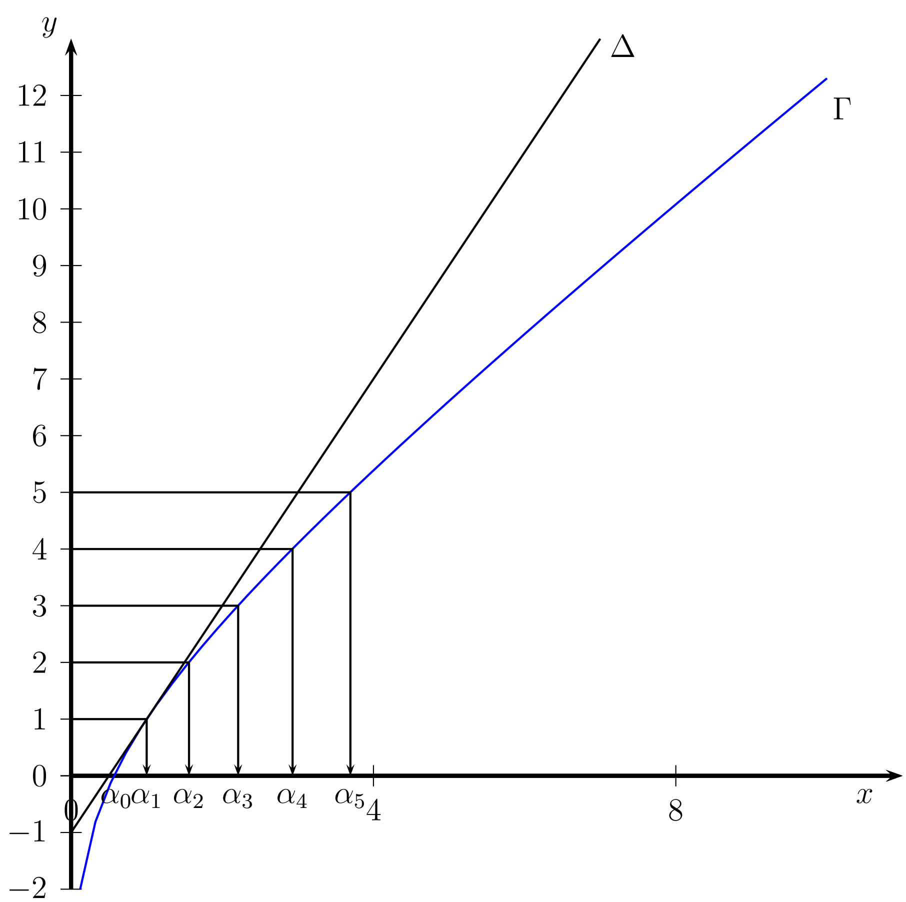
1. (a) $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$
   Par somme des limites $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$.
   De même $\lim\limits_{x\to +\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln x = - + \infty$ donc :
   par somme des limites $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$.

   (b) Pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = 1 + \dfrac{1}{x} > 0$. La fonction f est donc strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$. on peur dresser le tableau de variations de f sur $]0\,;+\infty[$:

x	0	α_n	$+\infty$
Variation de f	$-\infty$	n	$+\infty$

2. (a) La fonction f est continue car dérivable sur $]0\,;+\infty[$.
   f est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$ et $n \in]-\infty\,;+\infty[= f](0\,;+\infty[)$ donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires dans le cas des fonctions strictement croissante, l'équation $f(x) = n$ admet une solution unique solution α_n dans l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

   (b) voici la **Figure** :



   (c) On a $\alpha_1 + \ln \alpha_1 = 1$. Le graphe fait apparaître la solution évidente $\alpha_1 = 1$ car $1 + \ln(1) = 1$.