CHAPITRE

# 2

# Phénomènes aléatoires

## 2.1 Fréquences conditionnelles et marginales

Un contexte : une association récupère des vélos jetés à la déchetterie d'Urrugne pour éventuellement les remettre en état. Ces vélos sont de deux types : adulte ou enfant. Leur état est classé en trois catégories : bon état (prêts à rouler) ; réparable (peuvent être remis en état en moins de deux heures) ; non réparable (trop de réparation à faire). Voici le nombre de vélos traités en un mois.

| | Bon état | Réparable | Non réparable | Total |
|---|---|---|---|---|
| Adulte | 7 | 26 | 12 | |
| Enfant | | 18 | 5 | 26 |
| Total | | | | |

### 2.1.1 Fréquences conditionnelles

**Définition 1.2.** *Fréquence conditionnelle*

On appelle *fréquence conditionnelle* de $B$ parmi $A$, notée $f_A(B)$ (se lit $f$ de $B$ parmi $A$), la fréquence du caractère $B$ dans *la sous-population* $A$.

$$f_A\left(B\right) = \frac{\operatorname{card}\left(A \cap B\right)}{\operatorname{card}\left(A\right)}$$

*Exemple 1.2.*
Calculer la fréquence conditionnelle des vélos non réparables parmi les vélos adultes.

### 2.1.2 Fréquences marginales

**Définition 2.2.** *Fréquence marginale*

On appelle *fréquence marginale*, le quotient de la somme des effectifs d'une ligne (ou d'une colonne) par l'effectif total.

*Exemple 2.2.*
Calculer la fréquence marginale des vélos en bon état.

## 2.2 Probabilités conditionnelles

Dans ce paragraphe, on considère une seule expérience aléatoire d'univers $\mathbb{U}$.

### 2.2.1 Lien fréquence-probabilité

**Propriété 1.2.** *Loi des grands nombres*
Quand on répète un grand nombre de fois une expérience aléatoire, la fréquence d'apparition d'une issue se stabilise autour d'une valeur. On prend alors cette valeur comme probabilité de l'issue.

### 2.2.2 Probabilités conditionnelles

**Définition 3.2.**
Soient $A$ et $B$ deux événements d'un même univers $\mathbb{U}$, tels que $\text{card}\,(B) \neq 0$.
La *probabilité que $A$ soit réalisé sachant que $B$ est réalisé* est le nombre noté $\mathbf{P}_B\,(A)$ et défini par :

$$\boxed{\mathbf{P}_B\,(A) = \frac{\text{card}\,(A \cap B)}{\text{card}\,(B)}}$$

**Propriété 2.2.** *Conséquence*
Soient $A$ et $B$ deux événements d'un même univers $\mathbb{U}$, tels que $\mathbf{P}\,(B) \neq 0$.

$$\boxed{\mathbf{P}_B\,(A) = \frac{\mathbf{P}\,(A \cap B)}{\mathbf{P}\,(B)}}$$

*Exemple 3.2.*
On a placé dans un panier différents poivrons suivants leur couleur, leur provenance :

| | Jaune | Rouge | Total |
|---|---|---|---|
| Espagne | 1 | 2 | 3 |
| France | 4 | 5 | 9 |
| Total | 5 | 7 | 12 |

On choisit au hasard un poivron de ce panier et on note les événements :

- $F$ : « le poivron provient de France ».
- $J$ : « le poivron est de couleur jaune ».

Calculer la probabilité conditionnelle $\mathbf{P}_J(F)$ et interpréter ce résultat.

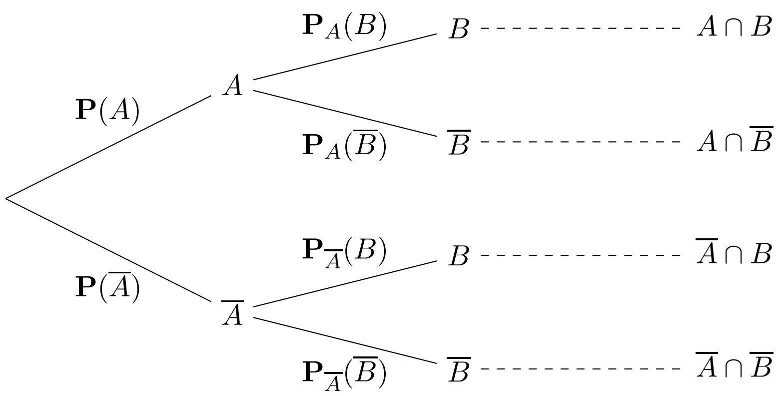
___

___

___

### 2.2.3 Arbres pondérés

On peut modéliser une expérience aléatoire par un arbre pondéré de probabilités.
Un arbre pondéré de probabilités est constitué de *branches*.
Les événements $A$, $\overline{A}$, $B$ et $\overline{B}$ s'appellent des nœuds.
$\overline{A}$ est *l'événement contraire* de $A$.




$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) \times \mathbf{P}_A(B)$

$\mathbf{P}(A \cap \overline{B}) = \mathbf{P}(A) \times \mathbf{P}_A(\overline{B})$

$\mathbf{P}(\overline{A} \cap B) = \mathbf{P}(\overline{A}) \times \mathbf{P}_{\overline{A}}(B)$

$\mathbf{P}(\overline{A} \cap \overline{B}) = \mathbf{P}(\overline{A}) \times \mathbf{P}_{\overline{A}}(\overline{B})$

**Propriété 3.2.** *Règles de calculs*

- La *somme* des probabilités des branches issues d'un même ________ vaut toujours ______.
- La probabilité de l'événement correspondant à un chemin (constitué de plusieurs branches) est égale au ____________________ des probabilités inscrites sur chaque branche du chemin.
- La probabilité d'un événement est la _______________ des probabilités des chemins menant à cet événement.

*Exemple 4.2.*
Le coyote est un animal sauvage proche du loup, qui vit en Amérique du Nord.

Dans l'état d'Oklahoma, aux États-Unis, 70 % des coyotes sont touchés par une maladie appelée ehrlichiose.

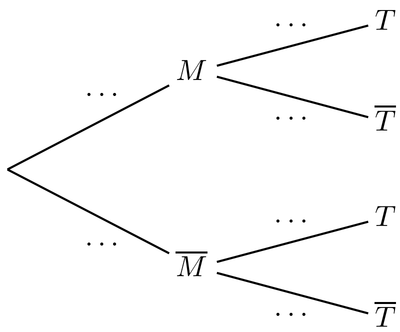
Il existe un test aidant à la détection de cette maladie. Lorsque ce test est appliqué à un coyote, son résultat est soit positif, soit négatif, et on sait que :

- Si le coyote est malade, le test est positif dans 97 % des cas.
- Si le coyote n'est pas malade, le test est négatif dans 95 % des cas.

Des vétérinaires capturent un coyote d'Oklahoma au hasard et lui font subir un test pour l'ehrlichiose et on considère les évènements suivants :

- $M$ : « le coyote est malade » ;
- $T$ : « le test du coyote est positif ».

1. Compléter l'arbre pondéré ci-dessous qui modélise la situation.




2. Déterminer la probabilité que le coyote soit malade et que son test soit positif.

3. Démontrer que la probabilité de $T$ est égale à $0,694$.

4. On appelle « valeur prédictive positive du test » la probabilité que le coyote soit effectivement malade sachant que son test est positif.
   Calculer la valeur prédictive positive du test. On arrondira le résultat au millième.

## 2.3 Indépendance

### 2.3.1 Événements indépendants

Dans ce paragraphe, on considère une seule expérience aléatoire d'univers $\mathbb{U}$.

**Définition 4.2.**

Soient $A$ et $B$ deux événements de probabilité non nulle.
On dit que $B$ est *indépendant* de $A$ si $\mathbf{P}_A(B) = \mathbf{P}(B)$, autrement dit si la réalisation ou non de l'événement $A$ n'a aucune influence sur celle de $B$.
Dans ce cas, on a alors aussi $\mathbf{P}_B(A) = \mathbf{P}(A)$, autrement dit $A$ est indépendant de $B$ aussi.

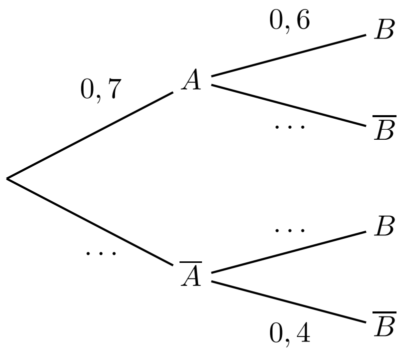
Ne pas confondre **indépendants** et **incompatibles.**
On rappelle que deux événements sont *incompatibles* si et seulement si $\mathbf{P}(A \cap B) = 0$.

**Propriété 4.2.**
Soient $A$ et $B$ deux événements de probabilité non nulle.
$A$ et $B$ sont *indépendants si et seulement si* :

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) \times \mathbf{P}(B)$$

**Propriété 5.2.**
Si $A$ et $B$ sont *indépendants*, alors $\overline{A}$ et $B$, $A$ et $\overline{B}$ ainsi que $\overline{A}$ et $\overline{B}$ le sont également.

*Exemple 5.2.*



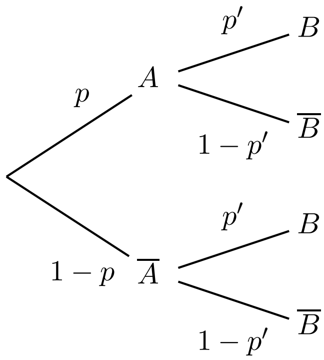

1. Compléter cet arbre.
2. Calculer $\mathbf{P}(B)$.
3. Les événements $A$ et $B$ sont-ils indépendants ?

### 2.3.2 Succession d'expériences indépendantes

Dans ce paragraphe, on considère des expériences aléatoires qui se succèdent.

**Définition 5.2.**
Des expériences aléatoires qui se succèdent sont *indépendantes* si le résultat de chacune n'influe pas sur le résultat des autres (par exemple tirages avec remises).

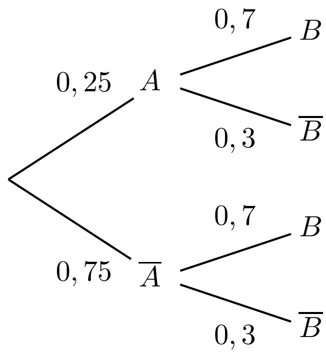
**Définition 6.2.** *Cas de deux expériences*
On considère deux expériences aléatoires indépendantes qui se succèdent.
Si on note $A$ un événement élémentaire de la première expérience aléatoire tel que $\mathbf{P}(A) = p$ et $B$ un événement élémentaire de la deuxième tel que $\mathbf{P}(B) = p'$, on peut représenter la *succession de ces expériences indépendantes* par l'arbre de probabilité ci-dessous :




▶ **Note 1.2.**
Cette méthode de construction d'un arbre de probabilités permet également :
— de représenter la succession de trois, quatre... expériences aléatoires indépendantes ;
— de représenter la répétition de manière indépendante d'une expérience aléatoire.

**Propriété 6.2.**
La probabilité de l'événement correspondant à un chemin est égale au *produit* des probabilités de chaque branche du chemin.

*Exemple 6.2.*
On considère l'arbre ci-dessous modélisant la répétition de deux épreuves indépendantes :




Calculons $\mathbf{P}(\overline{A} \cap B)$.