Chapitre 6

Nombres complexes : partie géométrique

1. Image d'un nombre complexe et affixe

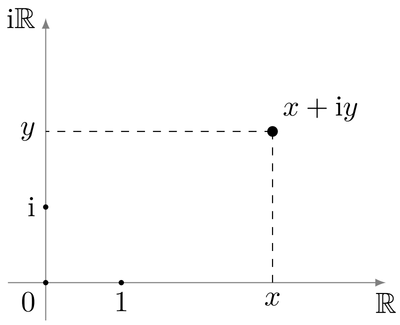
1.1 Affixe d'un point

Définition 1.6

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v})$:

- à tout complexe $z = x + \mathrm{i}y$ avec x et y réels, on associe le point $M(x\,;\,y)$.
- Réciproquement à tout point $M(x\,;\,y)$ on associe le nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$.
- On dit que le point M est le **point image** du nombre complexe z et que z est **l'affixe** du point M.
- Le plan est alors appelé **plan complexe.**

Plan complexe.



Application 1.6.

1. Soit D d'affixe $-2 + 6\mathrm{i}$. Donner les coordonnées du point D.
2. Soit $E(3\,;\,-4)$. Donner l'affixe du point E.

Remarque. L'axe des abscisses est appelé **axe des réels** et l'axe des ordonnées, **axe des imaginaires purs**.

Propriété 1.6. Soit A et B deux points du plan complexe d'affixe respective z_A et z_B.

- Les points A et B sont confondus **si et seulement si** $z_A = z_B$.
- Le milieu du segment $[AB]$ a pour affixe $\dfrac{z_A + z_B}{2}$.

Application 2.6. Dans le plan complexe, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = -3 + \mathrm{i}$, $z_B = 5 - 3\mathrm{i}$, $z_C = 1 + \mathrm{i}$ et $z_D = -7 + 5\mathrm{i}$.

1. Placer ces points dans le plan complexe et conjecturer la nature du quadrilatère $ABCD$.
2. Démontrer ou invalider cette conjecture.

1.2 Affixe d'un vecteur

Définition 2.6

À tout complexe $z = x + \mathrm{i}y$ avec x et y réels, on associe le vecteur $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ du plan complexe.
On dit que le vecteur $\overrightarrow{w}$ est le **vecteur image** du nombre complexe z et que z est **l'affixe** du vecteur $\overrightarrow{w}$.

Propriétés.

Dans le plan complexe, on considère deux vecteurs $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{w'}$ d'affixes respectives z et z' et k un réel.

- Les vecteurs $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{w'}$ sont égaux **si et seulement si** $z = z'$.
- Le vecteur $\overrightarrow{w} + \overrightarrow{w'}$ a pour affixe $z + z'$.
- Le vecteur $k\overrightarrow{w}$ a pour affixe kz.

1.3 Lien entre affixe d'un point et affixe d'un vecteur

Propriétés.

- Soit M un point du plan complexe muni d'un repère $(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v})$ et z un nombre complexe.
  Le point M a pour **affixe** z si et seulement si le vecteur $\overrightarrow{OM}$ a pour affixe z.
- Soit A et B deux points du plan complexe d'affixes respectives z_A et z_B.
  Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$.

Application 3.6. On donne A$(-4 - 2\mathrm{i})$, B$(3 - \mathrm{i})$ et C(-1). Déterminer l'affixe du point D telle que le quadrilatère $ACBD$ soit un parallélogramme.

2. Module d'un nombre complexe

2.1 Définition

Définition 3.6

Soit le nombre complexe de forme algébrique $z = x + \mathrm{i}y$ et M l'image de z dans le plan complexe.
Le module de z, noté $|z|$, est le réel positif noté $|z|$ tel que :

$$\boxed{|z| = \sqrt{z\ \overline{z}} = x^2 + y^2}.$$

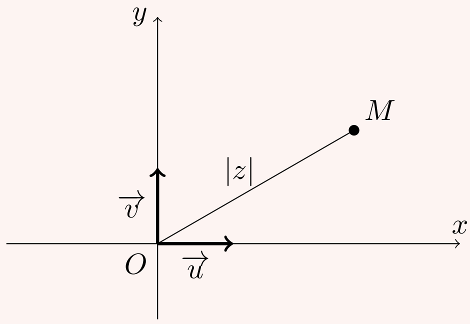
Remarque. Si z est **réel**, $|z| = \sqrt{z\ \overline{z}} = \sqrt{z^2} = |z|$ donc le module de z est bien la valeur absolue de z et la notation utilisée pour le module est cohérente.
La notion de module dans $\mathbb{C}$ généralise donc celle de valeur absolue dans $\mathbb{R}$.

Application 4.6. Calculer les modules des complexes suivants :

1. $z_1 = 5 + \mathrm{i}$.
2. $z_2 = -3 + 2\mathrm{i}$.
3. $z_3 = -6$.
4. $z_4 = 9\mathrm{i}$.

Propriétés.

- Soit z un nombre complexe et M le point image associé dans le repère $(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v})$, $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ qui n'est autre que la norme du vecteur $\overrightarrow{OM}$ c'est-à-dire la distance OM, ainsi $|z| = OM$.



- Soit A et B deux points d'affixes respectives z_A et z_B.
  On a alors :

$$\boxed{AB = |z_B - z_A| = |z_A - z_B|}.$$

Application 5.6. Soit $A(1 + 2\mathrm{i})$, $B(2)$ et $C(-1 + \mathrm{i})$ dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v})$.

1. Placer ces points dans le plan complexe et conjecturer la nature du triangle ABC.
2. Démontrer ou invalider cette conjecture.

2.2 Propriétés du module

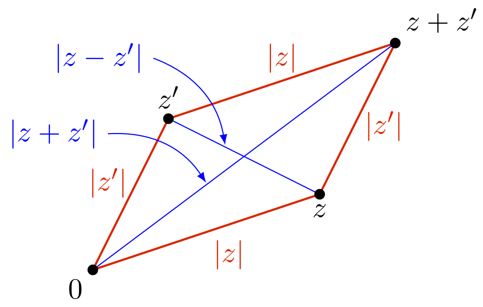
Propriétés.
Soit z un nombre complexe de forme algébrique $z = x + \mathrm{i}y$ avec $(x\,;\,y) \in \mathbb{R}^2$.

1. $z = 0 \iff |z| = 0$.
2. $|z|^2 = z \times \overline{z} = x^2 + y^2$.
3. $|z| = |-z| = |\overline{z}| = |-\overline{z}|$.

Propriétés.

On considère z et z' deux nombres complexes.

1. $|zz'| = |z||z'|$.
2. Si $z \neq 0$, $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$.
3. Si $z \neq 0$, $\left|\dfrac{z'}{z}\right| = \dfrac{|z'|}{|z|}$.
4. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|z^n| = |z|^n$.
5. Si $z \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $|z^n| = |z|^n$.
6. $|z + z'| \leqslant |z| + |z'|$: inégalité triangulaire.
7. $|z + z'| = |z| + |z'| \iff \exists k \in \mathbb{R}^+ / z' = kz \quad \text{ou} \quad z = kz'$ (cas d'égalité).



Application 6.6. Déterminer les modules des complexes suivants :

1. $z_1 = (1+\mathrm{i})(2-4\mathrm{i})$
2. $z_2 = (1+\mathrm{i})^{15}$
3. $z_3 = \dfrac{3-\mathrm{i}}{2+5\mathrm{i}}$
4. $z_4 = \dfrac{(-3+4\mathrm{i})^5}{(5-4\mathrm{i})^4}$

2.3 Nombres complexes de module 1

Définition 4.6

Soit z un nombre complexe. z est de module 1 si et seulement si $|z| = 1$. L'ensemble des nombres complexes de module 1 est noté $\mathbb{U}$.
Ainsi $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\}$.

Remarque. Dans le plan complexe, l'ensemble des points images des éléments de $\mathbb{U}$ est **le cercle trigonométrique**.

Propriétés.

1. Si $(z\,;\,z') \in \mathbb{U}^2$ **alors** $zz' \in \mathbb{U}$.
2. Si $z \in \mathbb{U}$ **alors** $\dfrac{1}{z} \in \mathbb{U}$.
3. Si $(z\,;\,z') \in \mathbb{U}^2$ **alors** $\dfrac{z'}{z} \in \mathbb{U}$.

3. Arguments d'un nombre complexe

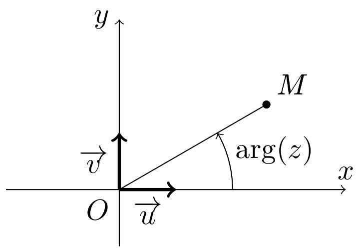
3.1 Notion d'arguments

Définition 5.6

Soit z un nombre complexe **non nul** d'image M.
On appelle **argument** de z **toute mesure en radian** de l'angle orienté :

$$\boxed{\arg(z) = (\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{OM}})}.$$

Si θ est un argument de z, $\theta + 2k\pi$ en est également un pour tout $k \in \mathbb{Z}$.
On note $\theta = \arg(z)\ [2\pi]$ et on lit « θ égal à arg de z modulo 2π ».



Remarques.

- 0 **n'a pas d'argument**.
- Tout nombre **réel positif** a un argument égal à 0.
- Tout nombre **réel négatif** a un argument égal à π.
- Tout nombre **imaginaire pur** $\mathrm{i}y$ avec $y > 0$ a un argument égal à $\frac{\pi}{2}$.
- Tout nombre **imaginaire pur** $\mathrm{i}y$ avec $y < 0$ a un argument égal à $-\frac{\pi}{2}$.

Propriétés.

- Soit z un nombre complexe non nul et $\overrightarrow{w}$ le vecteur image associé.
  On a alors $(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{w}) = \arg(z)\ [2\pi]$.
- Soit A et B deux points **distincts** d'affixes respectives z_A et z_B.
  On a alors $(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{AB}) = \arg(z_B - z_A)\ (2\pi)$.

3.2 Propriétés sur les arguments

Propriétés.

Soit z un nombre complexe **non nul**.

- $\arg(\overline{z}) = -\arg(z)\ [2\pi]$.
- $\arg(-z) = \arg(z) + \pi\ [2\pi]$.
- $\arg(-\overline{z}) = -\arg(z) + \pi\ [2\pi]$.
- $z \in \mathbb{R} \iff \arg(z) = 0\ [\pi]$.
- $z \in \mathrm{i}\mathbb{R} \iff \arg(z) = \frac{\pi}{2}\ [\pi]$.

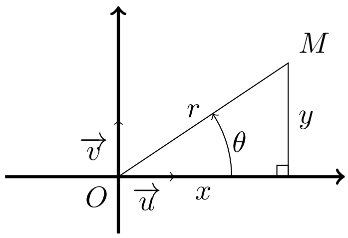
3.3 Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul

Soit z un nombre complexe non nul. Son module $|z| = r$ et un argument θ permettent de caractériser son image M sur le plan, au même titre que les coordonnées $(x\,;\,y)$.
Le couple $[r\,;\theta]$ forme alors ce que l'on appelle les **coordonnées polaires** du point M. On passe des coordonnées polaires aux coordonnées cartésiennes par les relations :

$$x = r\cos\theta \quad \text{et} \quad y = r\sin\theta$$

En effet, d'après la figure ci-contre,

$$\sin(\theta) = \frac{y}{r} \quad \text{et} \quad \cos(\theta) = \frac{x}{r}$$



Définition 6.6

Soit z un nombre complexe non nul de forme algébrique $z = x + \mathrm{i}y$ un nombre complexe de module r et d'argument θ. D'après la remarque précédente, on a :

$$z = x + iy = r\cos\theta + \mathrm{i}r\sin\theta = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$$

Cette dernière expression est appelée **forme trigonométrique** de z.

Application 7.6.

1. Calculer un argument des nombres complexes suivants :
   (a) $z_1 = -2$
   (b) $z_2 = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$
2. Déterminer la forme algébrique du complexe z_3 tel que $|z_3| = 2$ et $\arg(z_3) = -\dfrac{\pi}{2}\ (2\pi)$.
3. Déterminer la forme trigonométrique de $z_4 = 2\sqrt{3} - 2\mathrm{i}$.

Propriété 2.6. Soit z et z' deux nombres complexes **non nuls**.

$$\boxed{z = z' \iff |z| = |z'| \quad \text{et} \quad \arg(z) = \arg(z')\ [2\pi]}.$$

Propriétés.
Soit z et z' deux nombres complexes **non nuls**.

- $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi]$.
- $\arg\left(\dfrac{1}{z}\right) = -\arg(z)\ [2\pi]$.
- $\arg\left(\dfrac{z'}{z}\right) = \arg(z') - \arg(z)\ [2\pi]$.
- $\forall n \in \mathbb{Z},\ \arg(z^n) = n\arg(z)\ [2\pi]$.