Corrigé du devoir surveillé nº7 : mini bac blanc

Exercice 1.

1. Les points I et J appartiennent au plan (ABC) mais le point G n'est pas situé dans le plan (ABC).
   Les points I, J et G ne sont pas alignés et forment donc un plan de l'espace.
2. On a : I(1 ; 0 ; 0), J(0 ; 1 ; 0) et G(6 ; 4 ; 2). On en déduit $\overrightarrow{\text{IJ}}(-1\ ;\ 1\ ;\ 0)$ et $\overrightarrow{\text{JG}}(6\ ;\ 3\ ;\ 2)$.
   Or $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{\text{IJ}} = -2+2+0=0$ et $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{\text{JG}} = 12+6-18=0$.
   Le vecteur $\overrightarrow{n}(2\,;\,2\,;\,-9)$ est donc normal à deux vecteurs directeurs du plan (IJG) : c'est donc un vecteur normal à ce plan.
3. $\overrightarrow{n}(2\,;\,2\,;\,-9)$ est un vecteur normal du plan (IJG) donc (IJG) : $2x+2y-9z+d=0$

   $\text{I}(1\ ;\ 0\ ;\ 0) \in (\text{IJG}) \iff 2+0-0+d=0 \iff d=-2$.
   Une équation cartésienne du plan (IJG) est : $2x+2y-9z-2=0$.
4. Soit Δ :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 6 \\ y &=& 0, \\ z &=& 2t \end{array}\right. \qquad t\in\mathbb{R}$$

   $B \in \Delta \iff \left\{\begin{array}{lcl} 6 &=& 6 \\ 0 &=& 0, \\ 0 &=& 2t \end{array}\right. \quad t\in\mathbb{R} \iff \left\{\begin{array}{lcl} 6 &=& 6 \\ 0 &=& 0, \\ t &=& 0 \end{array}\right. \quad t\in\mathbb{R}$ ce qui est cohérent donc $B\in\Delta$.
   De même $F\in\Delta$. Donc la droite Δ est la droite (BF).
5. L est le point d'intersection du plan (IJG) et de la droite (BF) donc ses coordonnées sont solutions du système : $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 6 \\ y &=& 0 \\ z &=& 2t \\ 2x+2y-9z-2 &=& 0 \end{array}\right.$
   Il vient alors dans la dernière équation $12-18t-2=0$ soit $t=\dfrac{5}{9}$ et donc le point L a pour coordonnées $\left(6\,;\,0\,;\,\dfrac{10}{9}\right)$.
6. Le point L a la même abscisse, la même ordonnée que les points B et F.
   Enfin, $z_B < z_L < z_F$ donc le point L est bien situé sur le segment [BF].

Exercice 2.

1. $(T_0)\ :\ y = f'(0)(x-0)+f(0)$.
   f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) = \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$ donc $f'(0)=1$. De plus $f(0)=1$ donc $(T_0)\ :\ y = x+1$. Soit (Δ) cette droite.

2. (a) Calcul de la limite en $-\infty$:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{2} = -\infty \\ \lim\limits_{T\to-\infty} \mathrm{e}^T = 0\end{array}\right\} \overset{\text{par composition des limites}}{\Longrightarrow} \quad \lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} = 0.$$

   De plus $\lim\limits_{x\to-\infty} -x-2 = +\infty$ donc par somme des limites $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = +\infty$.

   (b) Pour tout réel x

$$x\left(\frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}} - 1 - \frac{2}{x}\right) = \cancel{x} \times \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} \times \frac{2}{\cancel{x}} - x - \cancel{x} \times \frac{2}{\cancel{x}} = 2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - x - 2 = h(x)$$

   Calcul de la limite en $+\infty$:
   $\lim\limits_{X=\frac{x}{2}\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^X}{X} = +\infty$ d'après le cours donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}} - 1 - \dfrac{2}{x} = +\infty$.
   Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$.

   (c) h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x :

$$h'(x) = 2 \times \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1 = \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1$$

   $h'(x) > 0 \iff \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} > 1 \iff \dfrac{x}{2} > 0 \iff x > 0$ et $h'(x) < 0 \iff \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} < 1 \iff \dfrac{x}{2} < 0 \iff x < 0$

   (d) Tableau de variations de la fonction h sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
signe de $h'(x)$		$-$	0	$+$	
variation de h	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

   (e) La fonction h possède un minimum en 0 qui est 0. Donc :

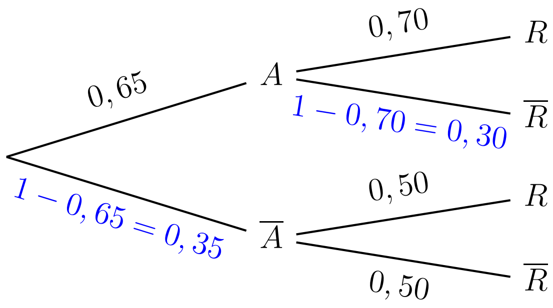
$$\forall x, \in \mathbb{R},\ h(x) \geqslant 0 \iff 2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - x - 2 = 2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1 - x - 1 \geqslant 0 \iff 2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1 \geqslant x + 1$$

   (f) La courbe $\mathcal{C}_f$ se trouve au dessus de la droite d'équation $y = x+1$ qui est la droite (Δ).

Exercice 3.

Partie A

1. On réalise un arbre de probabilités représentant la situation :



2. A et $\overline{A}$ forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(R) &= P\left(A \cap R\right) + P\left(\overline{A} \cap R\right) \\ &= P(A) \times P_A(R) + P\left(\overline{A}\right) \times P_{\overline{A}}(R) \\ &= 0,65 \times 0,7 + 0,35 \times 0,50 \\ &= 0,63 \end{aligned}$$

   Le directeur a 63 % de roses qui est bien supérieur à 60%.
   Donc sa commande peut convenir.

3. Sachant que la fleur est une rose, la probabilité qu'elle provienne du producteur A est :
   $P_R(A) = \dfrac{P(A \cap R)}{P(R)}$ soit $P_R(A) = \dfrac{0,455}{0,63} \approx 0,722$.

Partie B

1. L'expérience est la répétition de 100 épreuves identiques et indépendantes où seuls deux cas sont possibles :
   — Soit le flacon contient du jasmin avec la probabilité $p = 0,37$ (succès).
   — Soit il contient de la rose avec la probabilité $q = 1 - p = 0,63$.

   X désignant le nombre de flacons de parfum contenant du jasmin parmi les 100, X suit la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,37$.
2. La probabilité d'obtenir dans le lot exactement 40 flacons contenant du jasmin est :
   $P(X = 40) = \dbinom{100}{40} 0,37^{40} \times 0,63^{60} \approx 0,067$.
3. La probabilité d'obtenir au moins 30 flacons contenant du jasmin est : $P(X \geqslant 30)$.
   Or $P(X \geqslant 30) = 1 - P(X \leqslant 29) \approx 0,942$ à la calculatrice.

Exercice 4.

1. Il semble que la limite de la suite (u_n) soit 24.

2. (a) Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel n : $24 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1500$.
soit P_n : « $24 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1500$ ».
<u>**Initialisation**</u> : $u_0 = 1500$ et $u_1 = 0,9 \times 1500 + 2,4 = 1352,4$. :
Donc $24 \leqslant u_1 \leqslant u_0 \leqslant 1500$ et ainsi P_0 est vraie.

<u>**Hérédité**</u> : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons P_n vraie soit $24 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1500$.
D'après l'hypothèse de récurrence : $24 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1500$ et en multipliant cette inégalité par $0,9 > 0$ il vient $21,6 \leqslant 0,9u_{n+1} \leqslant 0,9u_n \leqslant 1350$ puis en additionnant $2,4$ on aboutit à $24 \leqslant 0,9u_{n+1} + 2,4 \leqslant 0,9u_n + 2,4 \leqslant 1352,4$ et donc on a bien $24 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 1500$ ce qui prouve que P_{n+1} est vraie.

<u>**Conclusion**</u> : P_0 est vraie et P_n est héréditaire à partir du rang $n = 0$, P_n est donc vraie pour tout entier naturel n soit $24 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1500$.

(b) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leqslant u_n$: la suite (u_n) est décroissante et $24 \leqslant u_n$ donc la suite (u_n) est minorée par 24 donc la suite (u_n) converge vers une limite ℓ telle que $\ell \geqslant 24$.
La suite (u_n) est convergente, soit ℓ sa limite.
On a donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$. De même $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = \ell$. Or $u_{n+1} = 0,9u_n + 2,4$.
Par passage à la limite il vient : $\ell = 0,9\ell + 2,4$.
$\ell = 0,9\ell + 2,4 \iff 0,1\ell = 2,4 \iff \ell = 24$: à long terme, la température du verre se limite à 24 degrés qui est donc la température ambiante.

3. (a) La suite (u_n) est décroissante, le terme initial est 1500 et la limite de la suite (u_n) est 24 donc le programme s'arrête bien.

(b) $u_{69} > 25$ et $u_{70} < 25$ donc on retient $n = 70$: au bout de 70 minutes, la température du verre descend en dessous des 25 degrés.