Devoir surveillé nº9 : autour du ln

Exercice 1 — 15 minutes — **/3**

Résoudre les équations suivantes après avoir trouvé l'intervalle de validité des calculs :

1. $\ln(2x-1)+\ln(x+1)=\ln(4x+1)$
2. $\ln(2x^2+x-1)=\ln(4x+1)$

Exercice 2 — 15 minutes — **/3**

1. $8(\ln x)^2-13\ln x+5=0$
2. $8\mathrm{e}^{2x}-13\mathrm{e}^{x}+5=0$

Exercice 3 — 5 minutes — **/2**

Déterminer, par le calcul, le plus entier naturel n tel que $1-0,6^n \geqslant 0,99$.

Exercice 4 — 10 minutes — **/2**

Faire le tableau de signes de la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{3-\ln(x)}{x^3}.$$

Exercice 5 — 55 minutes — **/10**

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x)=x+\ln x.$$

On nomme Γ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ du plan.

1. **a.** Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.
   b. Montrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
2. **a.** Montrer que, pour tout entier naturel n, l'équation $f(x)=n$ admet une unique solution dans $]0\,;\,+\infty[$.
   On note α_n cette solution, on a donc : pour tout entier naturel n, $\alpha_n+\ln\alpha_n=n$.
   b. Dans le repère page 2, on a tracé Γ dans le repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
   Placer les nombres α_0, α_1, α_2, α_3, α_4 et α_5 sur l'axe des abscisses en laissant apparents les traits de construction.

c. Démontrer que $\alpha_1 = 1$.

d. Démontrer que la suite (α_n) est strictement croissante.

3. **a.** Déterminer une équation de la tangente Δ à la courbe Γ au point A d'abscisse 1.

b. i. Démontrer que f est concave sur $]0\,;+\infty[$.

ii. En déduire la position de la courbe Γ par rapport à Δ.

c. Tracer Δ sur le graphique.

d. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $\dfrac{n+1}{2} \leqslant \alpha_n$.

4. Calculer la limite de la suite (α_n).