

**6** Quel est le format de chacune des matrices suivantes ?

- $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$  ;
- $B = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -5 \\ 2 & 5 & -4 \\ 7 & -4 & 9 \\ 6 & 7 & 9 \end{pmatrix}$  ;
- $C = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 1 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$  ;
- $D = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ .

**7** On pose  $A = (a_{ij})$  la matrice  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ .

1. Quelles valeurs peuvent prendre  $i$  et  $j$  ?
2. Préciser la valeur de  $a_{23}$ .
3. Écrire chacun des autres coefficients sous la forme  $a_{ij}$ .

**8** La matrice  $B = (b_{ij})$  est telle que  $b_{ij} = i + 3j$  pour  $1 \leq i \leq 4$  et  $1 \leq j \leq 2$ .

1. Quel est le format de cette matrice ?
2. Écrire la matrice  $B$  avec tous ses coefficients.

**9** 1. Calculer  $A + B$  et  $5A - 4B$  avec :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & -9 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}.$$

2. Reprendre la question précédente avec les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -4 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 4 & 7 & -3 \\ 10 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & -5 \end{pmatrix}.$$

**10** On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 5 & -3 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Parmi les opérations suivantes, effectuer celles qu'il est possible d'effectuer :

$$A + B, 3D, A + 3D, B - 2C.$$

**11** Effectuer les multiplications suivantes :

1.  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$
2.  $\begin{pmatrix} -2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$
3.  $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$4. \begin{pmatrix} 7 & 0 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

**12** Effectuer les multiplications suivantes :

1.  $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}$
2.  $\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$
3.  $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$
4.  $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

**13** Trouver les coefficients manquants :

1.  $\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 2 & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ -3 \end{pmatrix}$ .
2.  $\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \end{pmatrix}$ .

**14** Effectuer les multiplications suivantes :

1.  $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 24 \\ 2 & 4 & -5 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$
2.  $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 7 & 0 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

**15** Effectuer les multiplications suivantes :

1.  $\begin{pmatrix} 1 & -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$
2.  $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

**16** Effectuer les multiplications suivantes :

1.  $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & -2 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
2.  $\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

**17** Trouver les coefficients manquants :

1.  $\begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & b & 3 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -9 & 0 \end{pmatrix}$ .
2.  $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & b & c \end{pmatrix}$ .

**18** Effectuer, à la main, les multiplications suivantes puis vérifier les résultats à la calculatrice :

- $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -10 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

**19** Effectuer les multiplications suivantes puis vérifier les résultats à la calculatrice :

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$

**20** Soient  $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$  et  $C = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ . Déterminer, parmi les calculs suivants, ceux qu'il est possible d'effectuer et indiquer la taille de la matrice résultat :

- $A \times B$ ,  $A - C$ ,  $A^2$ ,  $B^2$  et  $C^2$ .
- Effectuer alors les calculs jugés « possibles ».

**21** Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ .

- Calculer  $AB$  et  $BA$ .
- Commenter.

**22** On considère la fonction Python ci-dessous :

```
1 from numpy import *
2 from numpy.linalg import *
3 def produit(x,y,z):
4     A=array([[3,5,-1],[4,2,1],[-3
5         ,-1,7]])
6     B=array([[x],[y],[z]])
7     return dot(A,B)
```

- Que renvoie cette fonction si on entre en arguments 1, -2 et 4 ?
- Quel est le rôle de cette fonction ?
- Modifier le programme de la fonction pour qu'elle renvoie le produit de la matrice  $\begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \\ -3 & -1 & 7 \end{pmatrix}$  par la matrice ligne  $(x \ y \ z)$ .

**23** On considère les matrices  $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$  et

$$B = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Montrer que  $A$  est l'inverse de  $B$ .

**24** On considère la matrice  $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -3 & 4 & 6 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ .

- Déterminer la matrice  $P$  telle que  $M = P + I_3$ .
- Calculer  $P^2$ . En déduire  $M^2$ .

**25** On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .  
On note  $I$  la matrice identité :  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

- Montrer que  $A^2 - 3A + 2I = O$  où  $O$  désigne la matrice nulle  $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .
- En déduire, sans calculatrice, que la matrice  $A$  est inversible et déterminer son inverse.

**26** Soit la matrice  $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ .  
Démontrer que pour tout entier naturel  $n$  non nul,

$$A^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{pmatrix}$$

**27** On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

- Calculer  $A^2$ ,  $A^3$  et  $A^4$  avec la calculatrice.
- Émettre une conjecture sur  $A^n$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$ .
- (a) Montrer que  $A = I_2 + B$  avec  $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .  
(b) Calculer  $B^2$ . En déduire  $A^2$  puis  $A^3$  en fonction de  $I_2$  et  $B$ .
- (a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $A^n = I_2 + nB$ .  
(b) Écrire  $A^n$  avec tous ses coefficients.

**28** On considère les matrices  $P$  et  $Q$  définies par :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Calculer le produit  $P \times Q$ .
- En déduire que  $P$  est inversible et écrire son inverse.

**29** Soit la matrice  $A$  définie par  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ .

- Calculer  $A^2$ ,  $A^3$  et  $A^4$ .
- En déduire  $A^{-1}$ .

**30** Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  et  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

- Vérifier que  $A^2 = 2A + I_2$ .
- En déduire que  $A$  est inversible et donner  $A^{-1}$ .

31

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer qu'il existe une matrice  $N$ , carrée d'ordre 3, telle que  $A = I + N$ .
2. Montrer que  $N^3 = 0$ , en utilisant la calculatrice.
3. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n \geq 1$ ,

$$A^n = I + nN + \frac{n(n-1)}{2}N^2.$$

32

Soit  $(S)$  :  $\begin{cases} 3x + 4y = -6 \\ 2x + 5y = 10 \end{cases}$  le système d'inconnues réelles  $x$  et  $y$  et on pose  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} -6 \\ 10 \end{pmatrix}$ .

1. Écrire  $(S)$  sous forme matricielle  $AX = B$  en précisant la matrice carrée  $A$  d'ordre 2.
2. Montrer que  $A$  est inversible et déterminer  $A^{-1}$ .
3. En déduire  $X$  puis la solution du système  $(S)$ .
4. Vérifier le résultat obtenu à la calculatrice.

33

Résoudre les systèmes  $3 \times 3$  suivants en les écrivant au préalable sous forme matricielle :

1.  $\begin{cases} x + y - z = 2 \\ -x + y + z = 4 \\ 2x - y + z = -5 \end{cases}$
2.  $\begin{cases} 4x + 2y + 9z = 22 \\ 2x + 8y + 7z = 44 \\ 5x + 6y + 3z = 85 \end{cases}$

34

Dans le plan muni d'un repère, on considère les points  $A(5; 2)$ ,  $B(4; 3)$  et  $C(1; 0)$ . On cherche une parabole  $\mathcal{P} : y = ax^2 + bx + c$  passant par les points  $A$ ,  $B$  et  $C$ .

1. Écrire sous forme matricielle un système vérifié par  $a$ ,  $b$  et  $c$  puis répondre à la question posée.
2. Compléter les instructions ci-dessous écrites dans un éditeur Python pour qu'elles permettent de retrouver les valeurs de  $a$ ,  $b$  et  $c$  :

```
1 from numpy import *
2 from numpy.linalg import *
3 A=array([[.], [.], [.]])
4 B=array([. , . , .])
5 X=.
```

35

On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$

1. On appelle  $I$  la matrice identité d'ordre 2. Vérifier que  $A^2 = A + 2I$ .
2. En déduire une expression de  $A^3$  et une expression de  $A^4$  sous la forme  $\alpha A + \beta I$  où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des réels.
3. On considère les suites  $(r_n)$  et  $(s_n)$  définies par  $r_0 = 0$  et  $s_0 = 1$  et, pour tout entier naturel  $n$ ,

$$\begin{cases} r_{n+1} = r_n + s_n \\ s_{n+1} = 2r_n \end{cases}$$

Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,

$$A^n = r_n A + s_n I.$$

4. Démontrer que la suite  $(k_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  par  $k_n = r_n - s_n$  est géométrique de raison  $-1$ .  
En déduire, pour tout entier naturel  $n$ , une expression explicite de  $k_n$  en fonction de  $n$ .
5. On admet que la suite  $(t_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  par  $t_n = r_n + \frac{(-1)^n}{3}$  est géométrique de raison 2.  
En déduire, pour tout entier naturel  $n$ , une expression explicite de  $t_n$  en fonction de  $n$ .
6. Déduire des questions précédentes, pour tout entier naturel  $n$ , une expression explicite de  $r_n$  et  $s_n$  en fonction de  $n$ .
7. En déduire alors, pour tout entier naturel  $n$ , une expression des coefficients de la matrice  $A^n$ .

36

On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , la ma-

trice identité d'ordre 3 :  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  et la ma-

trice nulle d'ordre 3 notée  $0_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

Pour tout réel  $x$ , on définit la matrice :

$$(*) \quad M(x) = I + xA + \frac{x^2}{2}A^2.$$

1. Calculer  $A^2$  et  $A^3$  et en déduire  $A^n$  pour tout entier naturel  $n > 3$ .
2. Soit  $x$  et  $y$  deux nombres réels.  
Montrer en utilisant  $(*)$  que :

$$M(x)M(y) = M(x+y).$$

3. Montrer que pour tout entier naturel  $n$  :

$$(M(x))^n = M(nx).$$

4. Calculer  $M(0)$  et  $M(1)$ .
5. Calculer  $(M(1))^n$  pour tout entier naturel  $n$ .