○○○ **Exercice 66.**
Compléter les ______ par **multiple** ou **diviseur :**

1. 25 est un ____________ de 5.
2. 2 020 est un ____________ de 0.
3. 21 est un ____________ de $-2\,100$.
4. 0 est un ____________ de 4.
5. -1 est un ____________ de 4.
6. 64 est un ____________ de 64.

○○○ **Exercice 67.**
Déterminer l'ensemble des diviseurs positifs des nombres -42, -13 et 20.

●○○ **Exercice 68.**
Déterminer les entiers relatifs n tels que $3n-5$ divise 4.

●○○ **Exercice 69.**
Déterminer les entiers naturels n tels que $n+7$ soit un multiple de 5.

●○○ **Exercice 70.**
Montrer que la somme de quatre entiers consécutifs est paire.
Cette somme est-elle multiple de 4 ? Justifier.

●○○ **Exercice 71.**
Démontrer qu'un multiple de 36 est aussi multiple de 9.
La réciproque est-elle vraie ?

●●○ **Exercice 72.**
Soient a et n deux entiers relatifs.
Démontrer que si a divise $2n+5$ et a divise $3n-1$ alors a divise 17.

●●○ **Exercice 73.**
Soit n un entier naturel. Montrer que $n(n^2+5)$ est pair en raisonnant par disjonction des cas.

●●○ **Exercice 74.**

1. Soit $n \in \mathbb{Z}$.
   Démontrer que $A = \dfrac{n(n+1)}{2}$ est un entier.
2. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Déterminer, en utilisant la disjonction des cas, les valeurs de n pour lesquelles $A = n^2+5$ est divisible par 3.
3. (a) Déterminer les restes possibles dans la division euclidienne d'un nombre impair par 4.
   (b) Montrer que, si n est un nombre impair, alors n^2-1 est divisible par 8.

●●● **Exercice 75.**
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_n = (3n-1)^2 - 2 + (-2)^n.$$

1. Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} + 2u_n$ est un multiple de 27.
2. Démontrer par récurrence que :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \text{ est un multiple de } 27.$$

●●○ **Exercice 76.**
Un nombre s'écrit en base 10 sous la forme $\Delta5\Delta5\Delta5\Delta5\Delta5\Delta$.
Quelle valeur donner à Δ pour que la somme des chiffres de ce nombre soit un multiple de 7 ?

○○○ **Exercice 77.**
Écrire la division euclidienne de a par b dans les cas suivants :

1. $a = 327$ et $b = 8$.
2. $a = -89$ et $b = 6$.
3. $a = -17$ et $b = 25$.

●●○ **Exercice 78.**
Si on divise un entier naturel n par 105, le reste est 21, mais si on divise ce même entier naturel n par 103, le quotient augmente de 2 et le reste diminue de 6.
Déterminer cet entier naturel n.

●●○ **Exercice 79.**
Dans une division, le quotient et le reste ne changent pas quand on augmente le dividende de 168 et le diviseur de 4. Quel est le quotient ?

●○○ **Exercice 80.**
Dire pour chaque proposition si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse :

1. $18 \equiv 0\ [9]$
2. $127 \equiv 5\ [2]$
3. $-47 \equiv -3\ [5]$
4. $-117 \equiv 0\ [3]$

●○○ **Exercice 81.**
Compléter :

1. $12 \equiv$ ______ $[5]$
2. $10 \equiv$ ______ $[11]$
3. $77 \equiv$ ______ $[4]$
4. $66 \equiv$ ______ $[9]$
5. $-2 \equiv$ ______ $[8]$
6. $-18 \equiv$ ______ $[7]$

●●○ **Exercice 82.**
Résoudre dans $\mathbb{Z}$ les équations suivantes :à l'aide d'un tableau de congruences :

1. $x+5 \equiv 2\ [3]$
2. $3x \equiv 7\ [4]$
3. $(x-3)(x+7) \equiv 0\ [5]$

●○○ Exercice 83.
Déterminer le reste de la division euclidienne de $2\,020 \times 2\,022 \times 2\,023$ par 11.

●●○ Exercice 84.
1. Étudier les congruences des puissances de 2 modulo 5.
2. En déduire le reste de la division euclidienne
de $2\,022^{2\,023}$ par 5.

●●○ Exercice 85.
1. Vérifier que $5^3 \equiv 1$ [31].
2. Quel est le reste de la division euclidienne de $7 \times 5^{15} - 6$ par 31 ?

●●○ Exercice 86.
Démontrer que $1^{2\,023} + 2^{2\,023} + 3^{2\,023} + 4^{2\,023}$ est un multiple de 5.

●○○ Exercice 87.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $A = n(n^2 + 5)$.
Montrer, en utilisant la congruence modulo 3, que $3 \mid A$.

●●○ Exercice 88.
Démontrer que $n \equiv 5\ [7] \Longleftrightarrow n^2 - 3n + 4 \equiv 0\ [7]$.
Pour la condition suffisante, on complétera le tableau de congruence ci-dessous :

$n \equiv \dots\ [7]$	0	1	2	3	4	5	6
$n^2 \equiv \dots\ [7]$							
$3n \equiv \dots\ [7]$							
$n^2 - 3n + 4 \equiv \dots\ [7]$							

●○○ Exercice 89.
Montrer, en utilisant la congruence modulo 6, que pour tout entier naturel n, $n(n+1)(2n+1)$ est multiple de 6.

●●○ Exercice 90.
Soit n un entier naturel non nul.
On note $n! = n(n-1) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1$.
1. L'entier naturel $(n-1)! + 1$ est-il pair ?
2. Prouver que $(15-1)! + 1$ n'est pas divisible par 15.
3. L'entier $(11-1)! + 1$ est-il divisible par 11 ?

●●○ Exercice 91.
On considère la suite (u_n) d'entiers naturels définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 8u_n + 1 \end{cases}$$

1. Calculer les 5 premiers termes.
2. Quelle conjecture peut-on émettre concernant le dernier chiffre de u_n pour $n \geqslant 1$?
3. Valider cette conjecture à l'aide d'une démonstration par récurrence.

●●○ Exercice 92.
On considère l'équation (F) : $11x^2 - 7y^2 = 5$, où x et y sont des entiers relatifs.
1. Démontrer que si le couple $(x\ ;\ y)$ est solution de (F), alors $x^2 \equiv 2y^2$ [5].
2. Soient x et y des entiers relatifs. Compléter les deux tableaux suivants :

Modulo 5, x est congru à	0	1	2	3	4
Modulo 5, x^2 est congru à					

Modulo 5, y est congru à	0	1	2	3	4
Modulo 5, $2y^2$ est congru à					

Quelles sont les valeurs possibles du reste de la division euclidienne de x^2 et de $2y^2$ par 5 ?
3. En déduire que si le couple $(x\ ;\ y)$ est solution de (F), alors x et y sont des multiples de 5.
4. Démontrer que si x et y sont des multiples de 5, alors le couple $(x\ ;\ y)$ n'est pas solution de (F). Que peut-on en déduire pour l'équation (F) ?