CHAPITRE 8

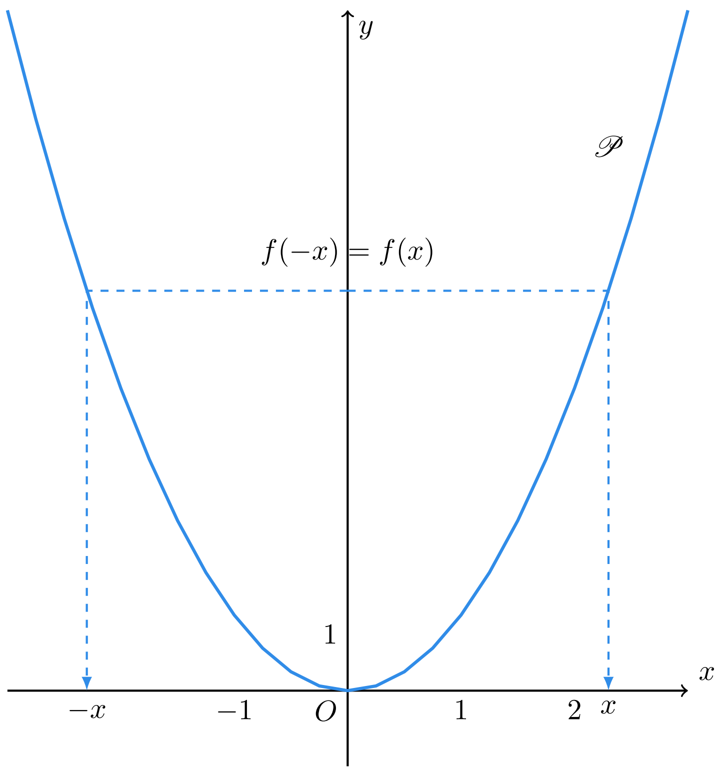
Fonction carré, fonction racine carré

8.1 La fonction carré

8.1.1 Définition et premières propriétés

Définition 1.8.

La *fonction carré* est la fonction f qui à tout réel x associe son carré soit $f(x) =$ ______ et on appelle *parabole* $\mathscr{P}$ la courbe représentative de cette fonction carré.



Propriétés 1.8.

1. *Un carré* est toujours positif ou nul dans $\mathbb{R}$.
   Pour tout réel x, on a $x^2 \geqslant 0$: la parabole $\mathscr{P}$ est toujours située *au dessus de l'axe des abscisses.*

2. *Un nombre et son opposé* ont le *même* carré.
   Pour tout réel x, on a $x^2 = (-x)^2$: la parabole $\mathscr{P}$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées : on dit que la fonction carré est *paire.*

8.1.2 Sens de variation de la fonction carrée

Propriétés 2.8.
La fonction carrée est :

1. *strictement décroissante* sur $]-\infty\,;\,0]$; autrement dit, la fonction carrée *ne conserve pas l'ordre des réels négatifs* : si $u < v \leqslant 0$ alors ________________.
2. *strictement croissante* sur $[0\,;\,+\infty[$; autrement dit, la fonction carrée *conserve l'ordre des réels positifs* : si $0 \leqslant u < v$ alors ________________.

On résume ces variations dans un tableau :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Variation de x^2	$\searrow$	0	$\nearrow$

Application 1.8. Sans calcul, comparer les carrés de :

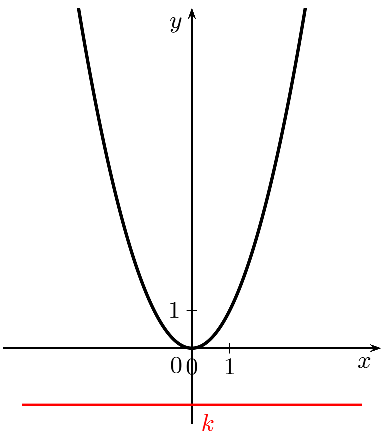
1. π et $3,15$
2. $-0,96$ et $-0,8$
3. $0,2$ et $-0,3$

Propriétés 3.8.

1. Si $k < 0$, comme un carré est positif, l'équation $x^2 = k$ n'a pas de solution.
2. Si $k = 0$, l'équation $x^2 = 0$ a pour unique solution $x = 0$.
3. Si $k > 0$, $x^2 = k \Leftrightarrow x^2 - k = 0 \Leftrightarrow \left(x + \sqrt{k}\right)\left(x - \sqrt{k}\right) = 0$.
   On obtient les deux solutions $x = -\sqrt{k}$ ou $x = \sqrt{k}$.

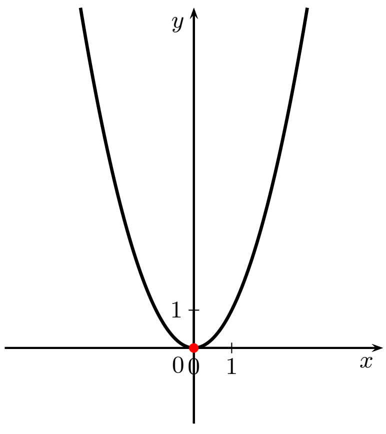
Illustrations.

$k < 0$



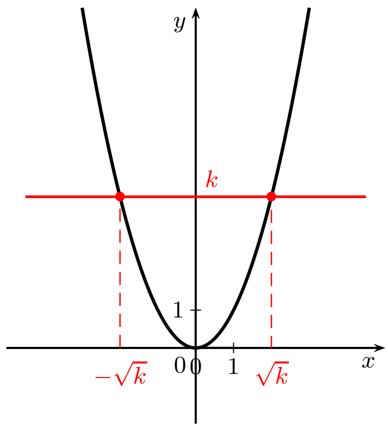
$x^2 = k$ n'a pas de solution

$k = 0$



$x^2 = 0$ a pour unique solution 0

$k > 0$



$x^2 = k$ a deux solutions $-\sqrt{k}$ ou $\sqrt{k}$

Application 2.8. Résoudre *graphiquement* les équations suivantes :

1. $x^2 = 16$
2. $x^2 = -2$
3. $x^2 = 0$

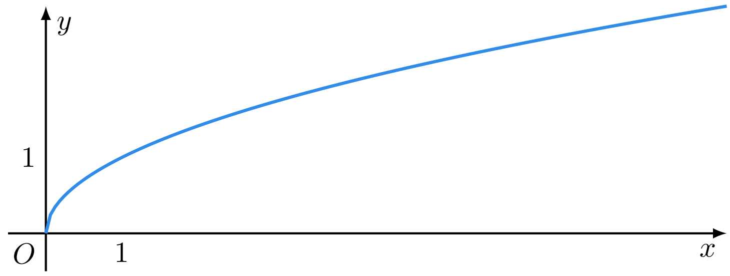
8.2 La fonction racine carré

8.2.1 Définition et courbe représentative

Définition 2.8.

La fonction *racine carré* est la fonction qui à tout réel x positif ou nul associe sa racine carré :

$$x \longmapsto \sqrt{x}$$



8.2.2 Sens de variation

Propriété.
La fonction racine carré *conserve* l'ordre dans les réels positifs.
Autrement dit, si $0 \leqslant u < v$ alors $\sqrt{u} < \sqrt{v}$: la fonction racine carré est donc *strictement croissante* sur $[0\,;\,+\infty[$.

x	0	$+\infty$
Variation de $\sqrt{x}$	0	$\nearrow$

Application 3.8. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $\sqrt{x} < 2$
2. $\sqrt{x} - 3 \geqslant 0$

Propriétés 4.8.
Pour tous nombres réels a et b positifs :

1. $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$
2. Si $b \neq 0$, $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$
3. Si a et b sont non nuls, $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$

ATTENTION ! En général on a $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Application 4.8.

1. Écrire $\sqrt{75}$ sous la forme $a\sqrt{3}$.
2. Simplifier $\sqrt{\dfrac{9}{25}}$.
3. Démontrer que $(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)$ est un entier.

