Exercice 1. Soient les complexes $z_1 = 5+2\text{i}$ et $z_2 = -1-\text{i}$.

1. $z_1^2 = 21+20\text{i}$
2. $\overline{z_1 - z_2} = \overline{5+2\text{i}+1+\text{i}} = 6-3\text{i}$.

Exercice 2. On donne le nombre complexe $z = \dfrac{1+2\text{i}}{1-\text{i}}$.

1. $z = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}\text{i}$.
2. $\dfrac{1+2\text{i}}{1-\text{i}} + \dfrac{1-2\text{i}}{1+\text{i}} = z + \overline{z} = 2\text{Re}(z) = -1$.

Exercice 3.

1. $(1+2\text{i})z = 1 - \text{i}z \iff (1+3\text{i}z) = 1 \iff z = \dfrac{1}{1+3\text{i}} = \dfrac{1}{10} - \dfrac{3}{10}\text{i}$.
2. $z + 3\overline{z} = \text{i}+2$. On pose $z = x + \text{i}y$ avec x, y réels.
   $z + 3\overline{z} = \text{i}+2 \iff x + \text{i}y + 3(x - \text{i}y) = 2 + \text{i}$. Par identification, il vient $4x = 2$ et $-2y = 1$ soit $x = \dfrac{1}{2}$ et $y = -\dfrac{1}{2}$ et ainsi $z = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\text{i}$.

Exercice 4. $\mathscr{S}_{\mathbb{R}^3} = \{(1\,;2\,;3)\}$.

Exercice 5.

1. (a) $AX = \begin{pmatrix} 13 \\ 13 \\ 13 \end{pmatrix}$.

   (b) $AX = 13X$ donc $\lambda = 13$ est valeur propre associé au vecteur propre $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. (a) On démontre ce résultat par récurrence : soit P_n : « $A^n X = \lambda^n X$ ».
   Initialisation : si $n = 0$ on a d'une part $A^0 X = I_3 = X$ et $\lambda^0 X = X$ donc P_0 est donc vraie.

   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons P_n vraie ($A^n X = \lambda^n X$).
   Montrons que P_{n+1} est vraie ($A^{n+1} X = \lambda^{n+1} X$).
   On a $A^{n+1} X = A \times A^n X$ et par hypothèse de récurrence $A^n X = \lambda^n X$.
   Ainsi $A^{n+1} X = A \times \lambda^n X = \lambda^n AX$. Or $AX = \lambda X$ donc $A^{n+1} X = \lambda^{n+1} X$ ce qui prouve que P_{n+1} est vraie.

   Conclusion : P_0 est vraie et P_n est héréditaire à partir du rang $n = 0$, P_n est donc vraie pour tout entier naturel n c'est-à-dire $A^n X = \lambda^n X$.

   (b) λ est une valeur propre de A si et seulement s'il existe un vecteur propre X non nul tel que $AX = \lambda X$. Or $AX = \lambda X \iff (A - \lambda I_3)X = O_{3,1}$. On rappelle qu'un système dont l'écriture matricielle est $MX = B$ admet une unique solution si et seulement si M est inversible. On en déduit qu'une équation du type $MX = B$ n'admet pas de solution unique si et seulement si M n'est pas inversible.
   Posons $M = A - \lambda I_3$: l'équation $MX = O_{3,1}$ admet toujours au moins une solution qui est la matrice nulle $O_{3,1}$. Ainsi λ est valeur propre de A si et seulement s'il existe au moins une autre matrice (non nulle donc) qui soit également solution de cette équation. D'après ce qui précède, cela équivaut à dire que M n'est pas inversible.