Cours et exercices de Mathématiques

1re STMG

Yann Mobian

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Lycée Ravel

Version 2023-2024

Table des matières

Préambule

Ceci est le livre complet comportant le cours et les exercices que nous allons traiter tout au long de cette année.
Je n'ai pas mis volontairement les exercices des travaux dirigés.
Tous mes documents publics sont sous licence CC-BY-NC :

« Je suis contre la culture du cancre ».
Lino

CHAPITRE

1

Analyse de l'information chiffrée

1.1 Étude de deux caractères

On considère une population d'individus E.
Dans cette population E, on étudie *deux caractères* « A » et « B ».

Définitions 1.1. *Cardinal et fréquence*

- Dans une population E, l'ensemble des individus qui possèdent le caractère « A » est noté A et l'ensemble des individus qui possèdent le caractère « B » est noté B.
- Les ensembles A et B sont des ______________________________ de E.

▶ **Note 1.1.**

- $\text{card}(E)$, que l'on lit cardinal de E, est le nombre total d'individus de la population E.
- $\text{card}(A)$, est le nombre total d'individus de la population A et $\text{card}(B)$ le nombre total d'individus de la population B.

Définitions 2.1.

- Si le caractère A prend des *valeurs numériques*, on dit qu'il est ____________________.
  Sinon, il est ____________________.
- $\overline{A}$ est l'ensemble des individus de E qui *ne* possèdent *pas* le caractère « A ».

Propriété 1.1.
La *fréquence* du caractère « A » dans la population E est le nombre $f(A) = \dfrac{\text{card}(A)}{\text{card}(E)}$.

▶ **Note 2.1.**
Une *fréquence* peut s'exprimer sous forme d'une fraction, d'un nombre décimal ou d'un pourcentage.

Exemple 1.1.
Au sein de votre classe, on considère les élèves provenant de la seconde 6.

1. Quelle est la population E étudiée ? ______________________________
2. Citer une sous-population de E. ______________________________
3. Calculer la proportion des élèves inscrits en seconde 6 au sein de votre classe, l'an dernier.

   ____

1.2 Tableau croisé d'effectifs

Soient A une sous-population de E dont les individus possèdent le caractère « A » et B une sous-population de E dont les individus possèdent le caractère « B ».

Définition 1.1. *Inter*

$A \cap B$ est l'ensemble des individus de E qui possèdent à la fois le caractère « A » ______ le caractère « B ».

Définition 2.1. *Union*

$A \cup B$ est l'ensemble des individus de E qui possèdent à la fois le caractère « A » ______ le caractère « B ».

Propriété 2.1.
On peut dresser un *tableau croisé d'effectifs* des caractères « A » et « B » dans un tableau à double entrée.

Illustration.

Caractères	B	$\overline{B}$	Total
A			
$\overline{A}$			
Total			Card(E)

Exemple 2.1.
On considère le tableau croisé d'effectifs ci-dessous réalisé à partir d'une population E de cardinal 200.
On sait que card$(A) = 120$, card$(B) = 110$ et card$(\overline{A} \cap B) = 60$.
Compléter ce tableau.

Caractères	B	$\overline{B}$	Total
A			
$\overline{A}$			
Total			

1.3 Les exercices du chapitre

○○○ **Exercice 1.**
Une salle de sport a référencé ses clients dans le tableau suivant :

	Yoga	CrossFit	Total
Femmes	86	64	150
Hommes	44	106	150
Total	130	170	300

1. Combien de femmes font du CrossFit ?
2. Calculer la fréquence des hommes qui fréquentent la salle de sport.

●○○ **Exercice 2.**
On a répertorié les animaux d'un chenil selon leur espèce et leur tranche d'âge.
Les résultats sont consignés dans le tableau suivant :

	Chien	Chat	Total
Moins d'un an	4	10	14
Un an et plus	32	44	76
Total	36	54	90

1. (a) Quelle est la population étudiée ?
   (b) Quel est son cardinal ?
2. Citer les caractères étudiés sur cette population ainsi que leur type.
3. Calculer la fréquence de chats dans la population.

●○○ **Exercice 3.**
Dans une population E, on étudie deux caractères « A » et « B ».
On suppose que :
$\text{card}(E) = 3\,000$, $\text{card}(A) = 1\,500$,

$\text{card}(\overline{B}) = 1\,200$ et $\text{card}(\overline{A} \cap B) = 800$.

1. Compléter le tableau croisé des effectifs :

	A	$\overline{A}$	Total
B			
$\overline{B}$			
Total			

2. Calculer la fréquence de B notée $f(B)$ et la fréquence de $A \cap \overline{B}$, notée $f(A \cap \overline{B})$.

●●○ **Exercice 4.**
On considère une population E de cardinal 400 dans laquelle on étudie deux caractères « A » et « B ».
On sait que $f(A) = 10\%$ et $f(\overline{B}) = 40\%$.
Calculer $\text{card}(A)$ et $\text{card}(B)$.

●○○ **Exercice 5.**
Un primeur reçoit une livraison de 800 kg de tomates et 1 200 kg de melons.
5% des tomates proviennent d'Espagne, 15% proviennent du Maroc, toutes les autres tomates proviennent de France.
8% des melons proviennent d'Espagne, 20% proviennent du Maroc, tous les autres melons proviennent de France.

1. Compléter le tableau croisé d'effectifs :

	kg de tomates	kg de melons	Total
Espagne			
Maroc			
France			
Total			

2. Calculer la fréquence de tomates qui proviennent de l'étranger.
3. Parmi les melons, quelle est la proportion de melons français ?

●●○ **Exercice 6.**
Les jardiniers de la ville doivent répartir 300 fleurs, jaunes, blanches ou roses dans les parterres de la ville.
Pour cela, ils disposent uniquement de tulipes et de 120 jacinthes. Chaque fleur est soit blanche, soit jaune soit rose.
50 % des jacinthes ainsi que 40 tulipes sont blanches, 80 tulipes sont roses et 90 fleurs sont jaunes.

1. Construire un tableau croisé d'effectifs montrant la répartition des fleurs selon leur nom et couleur.
2. Calculer la fréquence de jacinthes sur le total des fleurs.

CHAPITRE

2 Phénomènes aléatoires

2.1 Fréquences conditionnelles et marginales

D'après sujet évaluation 2023 : une association récupère des vélos jetés à la déchetterie d'Urrugne pour éventuellement les remettre en état. Ces vélos sont de deux types : adulte ou enfant. Leur état est classé en trois catégories : bon état (prêts à rouler) ; réparable (peuvent être remis en état en moins de deux heures) ; non réparable (trop de réparation à faire). Voici le nombre de vélos traités en un mois.

	Bon état	Réparable	Non réparable	Total
Adulte	7	26	12	
Enfant		18	5	26
Total				

2.1.1 Fréquences conditionnelles

Définition 1.2. *Fréquence conditionnelle*

On appelle *fréquence conditionnelle* de B parmi A, notée $f_A(B)$ (se lit f de B parmi A), la fréquence du caractère B dans *la sous-population* A.

$$f_A(B) = \frac{\text{card}\,(A \cap B)}{\text{card}\,(A)}$$

Exemple 1.2.

Calculer la fréquence conditionnelle des vélos non réparables parmi les vélos adultes.

2.1.2 Fréquences marginales

Définition 2.2. *Fréquence marginale*

On appelle *fréquence marginale*, le quotient de la somme des effectifs d'une ligne (ou d'une colonne) par l'effectif total.

Exemple 2.2.
Calculer la fréquence marginale des vélos en bon état.

2.2 Probabilités conditionnelles

Dans ce paragraphe, on considère une seule expérience aléatoire d'univers $\mathbb{U}$.

2.2.1 Lien fréquence-probabilité

Propriété 1.2. *Loi des grands nombres*
Quand on répète un grand nombre de fois une expérience aléatoire, la fréquence d'apparition d'une issue se stabilise autour d'une valeur. On prend alors cette valeur comme probabilité de l'issue.

2.2.2 Probabilités conditionnelles

Définition 3.2.
Soient A et B deux événements d'un même univers $\mathbb{U}$, tels que $\text{card}\,(B) \neq 0$.
La *probabilité que A soit réalisé sachant que B est réalisé* est le nombre noté $\mathbf{P}_B\,(A)$ et défini par :

$$\boxed{\mathbf{P}_B\,(A) = \frac{\text{card}\,(A \cap B)}{\text{card}\,(B)}}$$

Propriété 2.2. *Conséquence*
Soient A et B deux événements d'un même univers $\mathbb{U}$, tels que $\mathbf{P}\,(B) \neq 0$.

$$\boxed{\mathbf{P}_B\,(A) = \frac{\mathbf{P}\,(A \cap B)}{\mathbf{P}\,(B)}}$$

2.3 Un exercice classique

Une usine produit et vend de l'eau minérale en bouteilles d'un litre. L'eau provient de deux sources A et B.

Un laboratoire indépendant effectue des tests sur un stock journalier de 400 bouteilles produites par l'usine et détermine si l'eau est calcaire ou non :

— 250 bouteilles provenant de la source A ont été testées, parmi lesquelles 12 contenaient de l'eau calcaire.

— 85 % des bouteilles testées ne contenaient pas d'eau calcaire.

1. Compléter le tableau suivant :

	Source A	Source B	Total
Eau calcaire			
Eau non calcaire			
Total			400

2. On choisit au hasard une bouteille parmi le stock des 400 bouteilles testées. Toutes les bouteilles du stock ont la même probabilité d'être choisies.
   On considère les évènements :
   - A : « la bouteille provient de la source A » ;
   - B : « la bouteille provient de la source B » ;
   - C : « l'eau contenue dans la bouteille est calcaire ».

   (a) Calculer $\mathbf{P}(A)$: ______

   (b) Justifier que $\mathbf{P}(C) = 0,15$.

   (c) Traduire par une phrase l'évènement $B \cap C$ puis calculer sa probabilité.

   (d) Calculer la probabilité que l'eau contenue dans la bouteille provienne de la source B sachant qu'elle est calcaire.

2.4 Les exercices du chapitre

○○○ **Exercice 7.**
On donne ci-dessous le tableau croisé d'effectifs d'un ensemble de jetons classés suivant leurs formes et leurs couleurs :

	Carré	triangle	total
Rouge	30	20	50
Vert	10	40	50
Total	40	60	100

1. (a) Quel est l'effectif total du nombre de jetons ?
   (b) Quel est l'effectif marginal des jetons carrés ?
   (c) En déduire la fréquence marginale des jetons carrés.
2. (a) Combien y a t-il de jetons triangulaires ?
   (b) Combien y a t-il de jetons verts triangulaires ?
   (c) En déduire la fréquence conditionnelle des jetons carrés verts parmi les jetons triangulaires.

●○○ **Exercice 8.**
On donne ci-dessous la répartition des 200 élèves de première technologique d'un lycée suivant leur sexe et leur régime :

	Filles	Garçons	Total
Externes	40	20	60
Demi-pensionnaires	60	40	100
Internes	20	20	40
Total	120	80	200

1. (a) Donner l'effectif total de cette population.
   (b) Quel est l'effectif marginal des filles ?
   (c) En déduire la fréquence marginale des filles.
2. (a) Quel est l'effectif des internes ?
   (b) Parmi les internes, combien y a t-il de filles ?
   (c) En déduire la fréquence conditionnelle des filles parmi les internes est égale à $\frac{1}{2}$.
3. (a) Déterminer le nombre de demi-pensionnaires, puis le nombre de garons demi-pensionnaires.
   (b) En déduire la fréquence conditionnelle des garçons parmi les demi-pensionnaires.

●●○ Exercice 9.

Une banque compte 2 500 clients.

1. On sait que 42 % des clients possèdent un plan épargne logement (PEL).
   Calculer le nombre de clients de cette banque possédant un PEL.
2. On sait que le quart des clients possède un compté épargne logement (CEL).
   Calculer le nombre de clients de cette banque possédant un CEL.
3. On sait enfin que 325 clients possèdent à la fois un PEL et un CEL.
4. Compléter alors le tableau suivant :

	Titu. PEL	Non titu.PEL	Total
Titu. CEL			
Non titu. CEL			
Total			2500

●●● Exercice 10.

Un restaurant propose dans son menu trois formules :

- Formule A : entrée plus plat
- Formule B : plat plus dessert
- formule C : entrée plus plat plus dessert

On note le choix des clients venus pour déjeuner à midi (ensemble noté M) ou pour dîner le soir (ensemble noté S).

Les effectifs sont répertoriés dans le tableau ci-dessous.

	Formule A	Formule B	Formule C	Total
Déjeuner M	27	31		75
Dîner S	12	20	53	85
Total	39	51	70	160

1. Quel effectif doit-on écrire dans la case vide du tableau ?
2. (a) Calculer la fréquence en pourcentage des clients ayant choisi la formule A parmi ceux qui sont venus déjeuner à midi.
   (b) Montrer que la fréquence en pourcentage de clients venus dîner le soir parmi ceux qui ont choisi la formule B est au dixième prêt égal à 39,2 %.
3. Calculer la fréquence en pourcentage de clients ayant déjeuné le midi dans ce restaurant.
4. Le patron du restaurant déclare : « J'ai une carte des desserts très attractive car plus des trois quarts des clients choisissent une formule avec dessert. »
   A-t-il raison ? Justifier.

●○○ Exercice 11.
On a placé dans un panier différents poivrons suivants leur couleur, leur provenance :

	Jaune	Rouge	Total
Espagne	1	2	3
France	4	5	9
Total	5	7	12

On choisit au hasard un poivron de ce panier et on note les événements :

- F : « le poivron provient de France ».
- J : « le poivron est de couleur jaune ».

1. (a) Combien y a t-il de poivrons jaunes ?
   (b) Combien y a t-il de poivrons jaunes provenant de France ?
   (c) En déduire la probabilité conditionnelle $\mathbf{P}_J(F)$.
2. (a) Combien y a t-il de poivrons provenant de France ?
   (b) En déduire la probabilité conditionnelle $\mathbf{P}_F(J)$.

●●● Exercice 12.
Le gérant d'un restaurant développe une nouvelle formule de restauration rapide le midi. Il propose un menu comprenant un plat et un dessert. Les clients ont le choix entre deux plats (viande ou poisson) et trois desserts (pâtisserie, laitage ou fruit).

Il teste sa formule pendant un mois et étudie toutes les commandes pour mieux connaître les souhaits de sa clientèle.

- Parmi les 600 commandes faites au cours de ce mois, 72 % comprenaient un plat de viande.
- 45 % des clients ont pris une pâtisserie et, parmi eux, 44 avaient choisi le plat de poisson.
- Parmi les 138 commandes comprenant un fruit comme dessert, 73 comprenaient le plat de poisson.

1. Compléter le tableau suivant qui récapitule les résultats de l'enquête.

	Pâtisserie	Laitage	Fruit	Total
Viande				
Poisson	44		73	
Total				600

   On choisit une commande au hasard parmi celles faites pendant le mois de l'enquête.
   On note :

   - A : l'évènement « La commande comprend du poisson »
   - B : l'évènement « La commande comprend une pâtisserie »

2. Calculer la probabilité de l'évènement A.
3. Calculer la probabilité de l'évènement B.
4. Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-2}, que la commande comprenne à la fois du poisson et une pâtisserie.
5. Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-2}, que la commande comprenne de la viande sachant qu'il comprend une pâtisserie.

●●● **Exercice 13.**
Dans un club multisport de 400 adhérents, le tennis, le squash et le badminton sont pratiqués. Les adhérents sont classés suivant leurs catégories : enfant, senior, vétéran.

On sait que :

- $15\,\%$ pratiquent le badmington et parmi ceux-là, le tiers sont des enfants.
- $75\,\%$ pratiquent le tennis et parmi eux, $32\,\%$ sont des seniors.
- Parmi les adhérents pratiquant le squash, aucun n'est enfant et 20 sont des vétérans.

1. Compléter le tableau suivant :

	Badminton	Tennis	Squash	Total
Enfant		130		
Senior	30			
Vétéran				
Total				400

Dans les questions suivantes, les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

2. On choisit au hasard un adhérent parmi les 400 adhérents du club.
   On considère les évènements suivants :

   E : « l'adhérent est un enfant ».
   S : « l'adhérent est un senior ».
   V : « l'adhérent est un vétéran ».
   T : « l'adhérent joue au tennis ».
   D : « l'adhérent joue au squash ».
   B : « l'adhérent joue au badminton ».

   (a) Déterminer la probabilité des évènements S et T.
   (b) Décrire à l'aide d'une phrase l'évènement $S \cap T$ puis calculer sa probabilité.
3. On choisit au hasard un adhérent parmi les joueurs de badminton.
   Calculer la probabilité que ce soit un vétéran.
4. Calculer la probabilité conditionnelle de E sachant T, notée $\mathbf{P}_T(E)$.

CHAPITRE

3

Polynômes

3.1 Taux de variation

Définition 1.3.

Soient f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et a et b deux nombres de l'intervalle I, *distincts.*

Le *taux de variation* de f entre a et b est le nombre noté τ se lisant « tau » défini par :

$$\boxed{\tau = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}}$$

Exemple 1.3.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.
Calculer le taux de variation de f entre 2 et 4.

3.2 Polynôme du second degré

Définition 2.3.

Les fonctions de la forme $x \mapsto ax^2 + b$ (avec a et b des nombres réels, et $a \neq 0$) et $x \mapsto a(x - x_1)(x - x_2)$ (avec a, x_1, x_2 des nombres réels, et $a \neq 0$) sont des *polynômes du second degré.*

Exemples.

Propriété 1.3. *Représentation graphique*

La représentation graphique d'une fonction polynôme du second degré est une *parabole* :

1. si $a < 0$, la fonction est d'abord *croissante* puis *décroissante*, et admet un *maximum* ;
2. si $a > 0$, la fonction est d'abord *décroissante* puis *croissante*, et admet un *minimum*.

Propriété 2.3. *Sommet*

1. La parabole représentative d'un polynôme de la forme $f(x) = ax^2 + b$ a pour sommet $S(0\,;\,b)$.
2. La parabole représentative d'un polynôme de la forme $f(x) = a\,(x - x_1)\,(x - x_2)$ a pour sommet $S(\alpha\,;\,\beta)$, avec :

$$\boxed{\alpha = \frac{x_1 + x_2}{2} \text{ et } \beta = f(\alpha)}$$

► **Note.**
La parabole est *symétrique* par rapport à la droite d'équation $x = \alpha$ (où α est l'abscisse de son sommet).

Exemple 2.3.
Soient les deux polynômes du second degré définis sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 3x^2 + 1 \text{ et } g(x) = -2(x - 1)(x + 2).$$

1. Identifier les nombres a, b, x_1 ou x_2 sur ces deux expressions.

2. Dans un repère, placer le sommet de chacune des courbes, puis tracer son allure.

Propriété 3.3. *Tableaux de variations*

	$a < 0$	$a > 0$
$f(x) = ax^2 + b$	x : $-\infty$; 0 ; $+\infty$ f : $\nearrow$ b $\searrow$	x : $-\infty$; 0 ; $+\infty$ f : $\searrow$ b $\nearrow$
$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$	x : $-\infty$; α ; $+\infty$ f : $\nearrow$ $f(\alpha)$ $\searrow$	x : $-\infty$; α ; $+\infty$ f : $\searrow$ $f(\alpha)$ $\nearrow$

Exemple 3.3.
On considère les deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -4x^2 - 1 \text{ et } g(x) = 2(x - 4)(x + 1).$$

Pour chacune des deux fonctions :

1. Dresser son tableau de variations.

2. Déterminer la valeur de ses extremums.

Propriété 4.3. *Racines*
Soit un polynôme du second degré de la forme $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

L'équation $f(x) = 0$ a deux solutions, qui sont appelées *racines du polynôme*, et sont égales à x_1 et x_2.
Dans le cas où $x_1 = x_2$, il n'y a qu'une racine appelée *racine double.*

Exemples.

Application.

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3(x-4)(x+2)$.
   (a) Résoudre $f(x) = 0$.

   (b) Déterminer les coordonnées du sommet de la parabole associée à f.

   (c) Placer le sommet et les racines dans un repère, et tracer l'allure de la courbe.

   (d) Par lecture graphique, dresser le tableau de signes de f.

2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 4x^2 + 1$.
   (a) Résoudre $g(x) = 0$.

(b) Dresser le tableau de signes de g.

3.3 Polynôme de degré 3

Définition 3.3.

Les fonctions de la forme $x \mapsto ax^3 + b$ (avec a et b des nombres réels, et $a \neq 0$) et $x \mapsto a\,(x - x_1)\,(x - x_2)\,(x - x_3)$ (avec x_1, x_2, x_3 des nombres réels distincts, et $a \neq 0$) sont des *polynômes du troisième degré*.

Propriété 5.3. *Variations*

- Fonction de la forme $x \longmapsto ax^3 + b$:
  - si $a < 0$, la fonction est *décroissante* ;
  - si $a > 0$, la fonction est *croissante*.
- Fonction de la forme $x \longmapsto a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$:
  - si $a < 0$, la fonction est *décroissante*, puis *croissante*, puis *décroissante* ;
  - si $a > 0$, la fonction est *croissante*, puis *décroissante*, puis *croissante*.

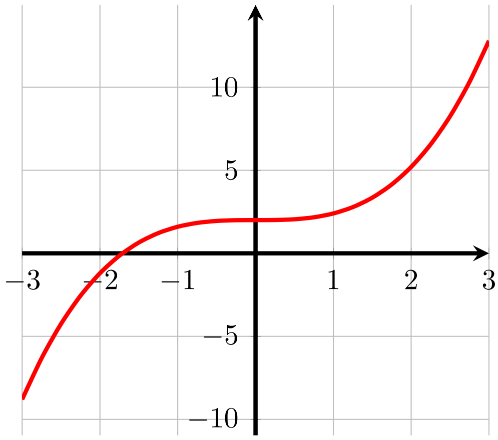
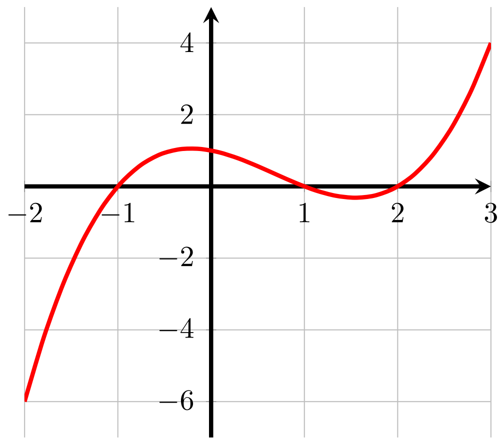
	$a < 0$	$a > 0$
$f(x) = ax^3 + b$	x : $-\infty$ … $+\infty$ f : $\searrow$	x : $-\infty$ … $+\infty$ f : $\nearrow$
$f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$	x : $-\infty$ … $+\infty$ f : $\searrow$ $\nearrow$ $\searrow$	x : $-\infty$ … $+\infty$ f : $\nearrow$ $\searrow$ $\nearrow$

Application. Dresser le tableau de variations des deux fonctions suivantes :

1. $f(x) = -2x^3 + 4$

2. $g(x) = 4(x-2)(x+1)(x+3)$

Propriété 6.3. *Allure des courbes*

$x \mapsto ax^3 + b$	$x \mapsto a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$
	

Application.

1. On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^3 + 3$.
   (a) Identifier a et b.

   (b) Dresser le tableau de variations de f.

2. On définit la fonction g sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2(x-2)(x+3)(x-1)$.
   (a) Identifier a, x_1, x_2, x_3.

   (b) Dresser le tableau de variations de g.

   (c) Quelles sont les solutions de $g(x) = 0$?

   (d) Dresser le tableau de signes de g.

Propriété 7.3.
L'équation $a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) = 0$ a trois solutions : $x = x_1$, $x = x_2$ ou $x = x_3$.

3.4 Les exercices du chapitre

●○○ **Exercice 14.**
Soit f telle que $f(7) = 8$ et $f(10) = 17$.
Calculer le taux de variation de f entre 7 et 10.

●○○ **Exercice 15.**
Soit f une fonction telle que $f : x \longmapsto x^2 + 3$.
Calculer le taux de variation de f entre 2 et 6.

●○○ **Exercice 16.**
Soit le polynôme de degré 2 défini sur $\mathbb{R}$:

$$f(x) = -5x^2 + 1.$$

On note $\mathscr{P}$ sa courbe représentative.

1. Déterminer les valeurs de a et b.
2. Préciser les coordonnées du points S sommet de cette parabole.

●○○ **Exercice 17.**
Mêmes questions qu'à l'exercice précédent avec $f(x) = 4x^2 + 3$.

●●○ **Exercice 18.**
Soit le polynôme de degré 2 défini sur $\mathbb{R}$:

$$f(x) = 3(x - 1)(x - 3).$$

On note $\mathscr{P}$ sa courbe représentative.

1. Déterminer les valeurs de a, x_1 et x_2.
2. Préciser les coordonnées du points S sommet de cette parabole.

●●○ **Exercice 19.**
Mêmes questions qu'à l'exercice précédent avec $f(x) = -4(x + 5)(x - 1)$.

●○○ **Exercice 20.**
Soit le polynôme de degré 2 défini sur $\mathbb{R}$:

$$f(x) = 4x^2 + 5.$$

On note $\mathscr{P}$ sa courbe représentative.

1. Déterminer les valeurs de a et b.
2. Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

●○○ **Exercice 21.**
Mêmes questions qu'à l'exercice précédent avec $f(x) = -2x^2 + 6$.

●●○ **Exercice 22.**
Soit le polynôme de degré 2 défini sur $\mathbb{R}$:

$$f(x) = 2(x+1)(x-5).$$

On note $\mathscr{P}$ sa courbe représentative.

1. Déterminer les valeurs de a, x_1 et x_2.
2. Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

●●○ **Exercice 23.**
Mêmes questions qu'à l'exercice précédent avec $f(x) = -3x(x-2)$.

●●○ **Exercice 24.**
On considère la fonction $f : x \longmapsto 2(x+4)(x-2)$ définie sur $\mathbb{R}$. On note $\mathscr{P}$ sa courbe représentative.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$.
2. Justifier que la droite d'équation $x = -1$ est un axe de symétrie de la courbe représentative de la fonction f.
3. Calculer $f(6)$. En déduire sans aucun calcul $f(-8)$.

●●● **Exercice 25.**
Soit la fonction $f : x \longmapsto -3(x+1)(x-5)$ définie sur $\mathbb{R}$ et on note $\mathscr{P}$ sa courbe représentative.

1. Déterminer les racines de ce polynôme.
2. Déterminer une équation de l'axe de symétrie de la courbe représentative de la fonction f.
3. La fonction f admet-elle un minimum ou un maximum sur $\mathbb{R}$? Pour quelle valeur est-il atteint ?
4. Que vaut cet extremum ?

●●○ **Exercice 26.**
On considère la fonction $f : t \longmapsto 2t^2 - 4t - 6$ définie sur $\mathbb{R}$. On note $\mathscr{P}$ sa courbe représentative.

1. Vérifier que $2t^2 - 4t - 6 = 2(t+1)(t-3)$.
2. Déterminer les racines de ce polynôme.
3. La fonction f admet-elle un minimum ou un maximum sur $\mathbb{R}$? Pour quelle valeur est-il atteint ?
4. Que vaut cet extremum ?

●○○ **Exercice 27.**
Pour tout réel x on pose $g(x) = 2(x+1)(x-4)$.
Construire le tableau de signes de $g(x)$

●○○ **Exercice 28.**
Pour tout réel x on pose $h(x) = -2(x+1)(x-3)$.

1. Construire le tableau de signes de h sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire l'ensemble des solutions de l'inéquation $h(x) < 0$.

●●○ Exercice 29.
Pour tout réel x, on pose $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$.

1. Vérifier que $f(x) = (x+1)(x-2)(x+3)$.
2. Construire le tableau de signes de la fonction f.

●●○ Exercice 30.
Pour tout réel x, on pose $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$.

1. Montrer que -1 est une racine de f.
2. Calculer $f(2)$.
3. Factoriser alors $f(x)$ puis faire le tableau de signes de f.
4. Résoudre l'inéquation $f(x) \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}$.

●●○ Exercice 31.
Pour tout réel x, on pose $f(x) = 2x^3 - 16$.

1. Préciser les valeurs a et b du cours.
2. Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.
3. Déterminer l'unique racine de f.
4. En déduire alors le tableau de signes de f sur $\mathbb{R}$.

●●○ Exercice 32.
Pour tout réel x, on pose $f(x) = -x^3 + 1$.

1. Préciser les valeurs a et b du cours.
2. Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.
3. Déterminer l'unique racine de f.
4. En déduire alors le tableau de signes de f sur $\mathbb{R}$.

●●○ Exercice 33.
Pour tout réel x, on pose :

$$f(x) = -4(x-1)(x-2)(x+5).$$

1. Déterminer les racines de f.
2. Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.
3. Faire le tableau de signes de f sur $\mathbb{R}$.
4. En déduire l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) > 0$.

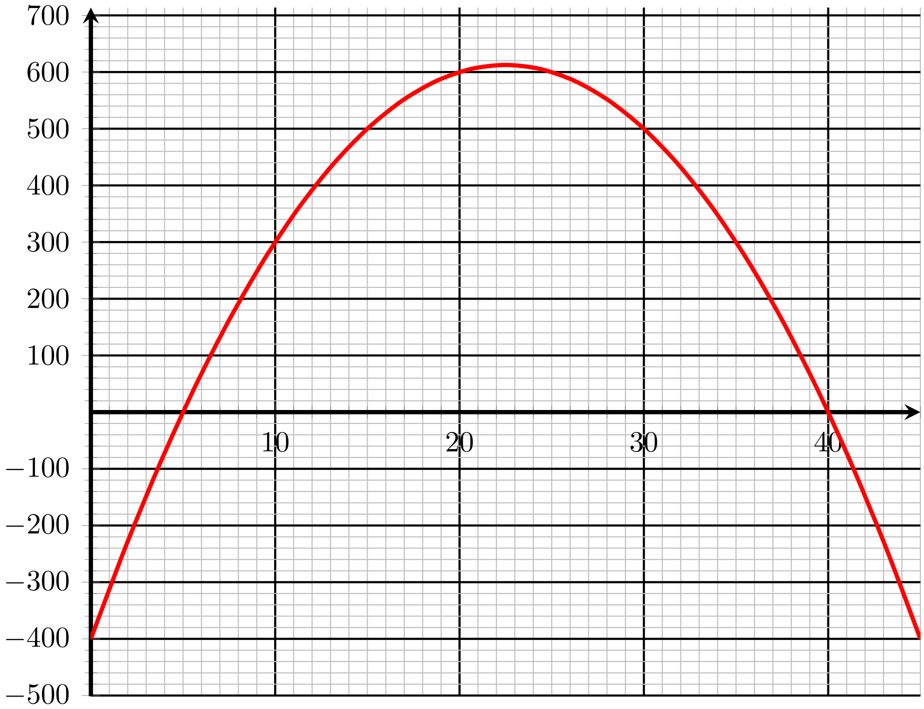
●●○ Exercice 34.
Pour tout réel x, on pose $f(x) = 3(x-1)^2(x+1)$.

1. Déterminer les racines de f.
2. Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

●●○ Exercice 35.
Pour tout réel x, on pose $f(x) = -3(x+4)^2(x-1)$.

1. Déterminer les racines de f.
2. Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

●●● Exercice 36.
Une micro-entreprise fabrique des ventilateurs.
On note $B(x)$ le résultat financier mensuel (bénéfice ou perte), exprimé en centaines d'euros, réalisé par l'entreprise pour la production de x centaines de ventilateurs, lorsque $x \in [0\,;\,+\infty[$. La courbe représentative de la fonction B est représentée ci-dessous :



1. Répondre aux questions suivantes, avec la précision permise par le graphique.
   (a) Déterminer $B(30)$ et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
   (b) Donner une valeur approchée, en centaines d'euros, du bénéfice mensuel maximal de l'entreprise.
2. On admet que la fonction B est définie pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par :
$$B(x) = -2x^2 + 90x - 400$$
   (a) Démontrer que $B(x)$ peut s'écrire sous la forme :
$$B(x) = -2(x-5)(x-40)$$
   (b) En déduire la valeur exacte du volume de production pour lequel le bénéfice mensuel de l'entreprise est maximal.
   (c) Calculer la valeur exacte du bénéfice mensuel maximal de l'entreprise.

CHAPITRE

4

Les suites numériques

4.1 Définition et modes de génération

Définition 1.4.
On appelle *suite numérique* une suite finie ou infinie de nombres, appelés *termes de la suite*.

▶ **Note 1.4.**
Cette suite est habituellement notée u, v ou w.
Le premier terme est le plus souvent u_0 ou u_1, et pour un nombre entier n, u_n est *le terme de rang* n.
$u(n+1)$ noté aussi u_{n+1} est le terme qui suit $u(n)$ noté également u_n, et u_{n-1} est le terme qui précède u_n.

Exemple 1.4.
On considère u la suite de premier terme $u_0 = 8$, et dont chaque terme (sauf le premier) est égal à la moitié du précédent.

1. Calculer u_1.

2. Calculer le 3ᵉ terme de la suite u.

Exemple 2.4.
On considère v la suite définie pour tout nombre entier $n \geq 1$ par $v_n = 2n^2 - 3$.

1. Calculer v_3.

2. Calculer le terme de rang 2.

Exemple 3.4.
On considère w la suite définie par :

$$\begin{cases} w_0 = 5 \\ w_{n+1} = 2w_n - 4 \text{ pour tout } n \text{ entier positif.} \end{cases}$$

1. Calculer w_1.

2. Calculer le 3e terme.

3. Calculer le terme de rang 3.

Exemple 4.4.
On considère u la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = 0,5u_n + 1 \text{ pour tout } n \text{ entier positif.} \end{cases}$$

1. Donner les trois premiers termes de la suite.

2. Compléter la fonction Python ci-contre pour qu'elle calcule et renvoie le terme de rang n :

```python
def u(n):
    u=4
    for i in range (n):
        u=.....
    return u
```

4.2 Représentation graphique

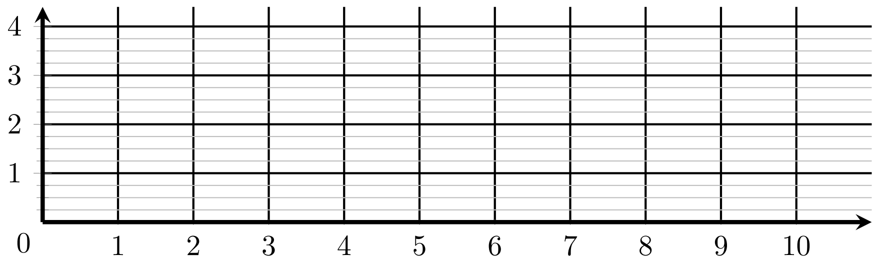
Définition 2.4.
La représentation graphique d'une suite u est le nuage de points de coordonnées $(n; u_n)$.

Exemple 5.4.
On définit la suite u sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 0,5 \\ u_{n+1} = 0,75u_n + 1 \text{ pour tout } n \text{ entier positif.} \end{cases}$$

1. À l'aide de la calculatrice, déterminer les onze premiers termes de la suite (arrondir au dixième).

2. Tracer la suite sur le graphique ci-dessous :



4.3 Variations

Définition 3.4.
Une suite u est dite :

- ______________ si chaque terme est plus grand que le précédent : $u_{n+1} \geq u_n$;
- ______________ si chaque terme est égal aux précédent : $u_{n+1} = u_n$;
- ______________ si chaque terme est plus petit que le précédent : $u_{n+1} \leq u_n$;

Exemple 6.4.
Par lecture graphique, conjecturer le sens de variation de la suite u de l'exemple précédent.

4.4 Suite arithmétique

Exemple 7.4.
L'activité d'une entreprise étant florissante, en moyenne 7 nouveaux employés ont été embauchés chaque année. En 2021, elle comptait 38 employés, et on suppose que cette progression va se poursuivre dans les années à venir.

On appelle u_n le nombre d'employés l'année $2021 + n$.

1. Donner les cinq premiers termes de la suite.

2. Combien y aura-t-il d'employés en 2035 ?

▶ **Note 2.4.**
Une suite est *arithmétique* si on passe au terme suivant en ajoutant (ou soustrayant) toujours le même nombre.

Définition 4.4.
Une suite u est dite *arithmétique* s'il existe un réel r, appelé *raison*, tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait :

$$\boxed{u_{n+1} = u_n + r}$$

▶ **Note 3.4.**
Habituellement, une suite arithmétique est définie par la donnée de *son premier terme et sa raison*.

Exemple 8.4.

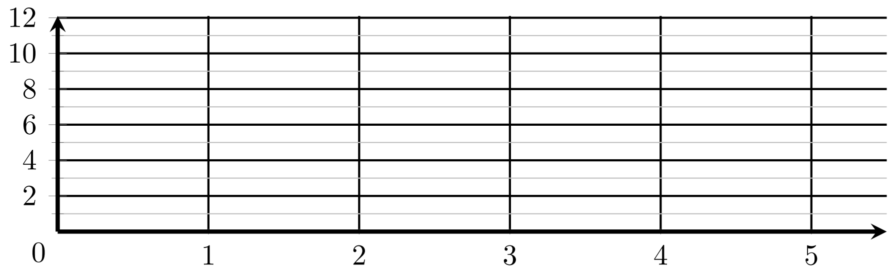
1. Donner les quatre premiers termes de la suite arithmétique u de premier terme $u_1 = 9$ et de raison -2.

2. La suite v est arithmétique, et on sait que $v_0 = 1$ et $v_1 = 3$.
   Déterminer la raison, puis calculer v_5.

Propriété 1.4.
La suite u *arithmétique* est :

- *croissante* si et seulement si sa raison est ____________ ;
- ____________ si et seulement si sa raison est ____________ ;
- ____________ si sa raison est ____________.

Exemple 9.4.
Représenter graphiquement (de couleur différente) les deux suites de l'exemple précédent :



Définition 5.4.
Une suite est *arithmétique* si et seulement si les points de sa représentation graphique sont alignés.
On dit que les termes de la suite suivent un modèle de *croissante linéaire*.

Propriété 2.4.
Soit une suite u *arithmétique* de raison r et de premier terme u_0.
Pour tout entier naturel n, on a :

$$\boxed{u_n = u_0 + nr}$$

Exemple 10.4.
En 2019, une entreprise souhaite réaliser une campagne de publicité pour promouvoir ses produits. Elle prend alors contact avec une agence de publicité, nommée A, qui lui indique qu'en 2019, selon ses tarifs, le coût d'une campagne de publicité s'élève à 10 000 euros pour 2019 mais que celui-ci augmentera ensuite de 750 euros par an.
On note u_n le coût d'une campagne publicitaire pour l'entreprise suivant les tarifs de l'agence A pour l'année $(2019+n)$. Ainsi $u_0 = 10\,000$.

1. Quel sera le coût d'une campagne de publicité pour l'entreprise en 2025 si elle choisit l'agence A ?

2. Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Argumenter la réponse.

3. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n). Justifier la réponse.

4. L'entreprise contacte une agence de publicité B qui lui dit que le coût d'une campagne de publicité pour l'année $(2019+n)$ est donné par :

$$v_n = n^2 + 200n + 10\,000$$

   (a) Déterminer la valeur de v_2.

   (b) Quel sera le coût d'une campagne de publicité pour l'entreprise en 2025 si elle choisit l'agence B ?

4.5 Suite géométrique

Exemple 11.4.
Il y a 124 loups en 2022 dans un parc animalier, et on considère que la population devrait augmenter de 3% chaque année.
On appelle v_n le nombre de loups l'année $2022 + n$.

1. Donner les trois premiers termes de la suite (arrondis à l'unité).

2. Estimer le nombre de loups en 2030.

▶ **Note 4.4.**
Une suite est géométrique si on passe au terme suivant en multipliant (ou divisant) toujours le même nombre non nul.

Définition 6.4.
Une suite v est dite *géométrique* s'il existe un réel $q \neq 0$, appelé *raison*, tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait :

$$\heartsuit \quad \boxed{v_{n+1} = q \times v_n}$$

▶ **Note 5.4.**
Habituellement, une suite géométrique est définie par la donnée de *son premier terme et sa raison*.

Exemple 12.4.

1. Donner les onze premiers termes de la suite géométrique u de premier terme $u_0 = 10$ et de raison $0,7$ (arrondir chaque terme au dixième).

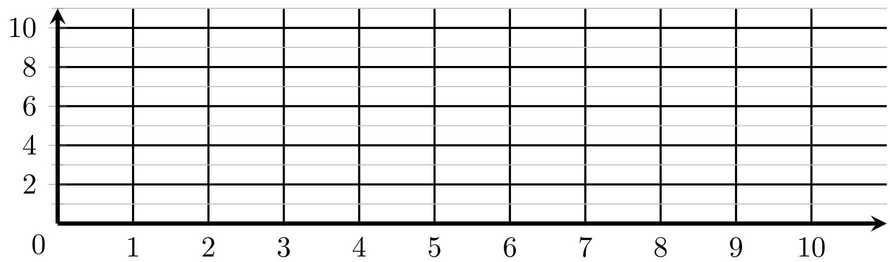
2. Donner les onze premiers termes de la suite géométrique v de premier terme $v_0 = 0,2$ et de raison $1,5$ (arrondir chaque terme au dixième).

3. La suite w est géométrique, et on sait que $w_7 = 23$ et $w_8 = 69$.
   Déterminer la raison, puis calculer w_6 et w_9 (arrondir à l'unité).

Propriété 3.4.
La suite v (géométrique de premier terme et de raison strictement positifs) est :

- ____________________ si et seulement si sa raison est ____________________ ;
- ____________________ si et seulement si sa raison est ____________________ ;
- ____________________ si sa raison est ____________________.

Exemple 13.4.
Représenter graphiquement les deux suites u et v de l'exemple précédent :



Définition 7.4.
On dit que les termes d'une suite géométrique ont un *modèle d'évolution relative constante*, ou suivent *un modèle discret de croissance exponentielle.*

Propriété 4.4.
Soit une suite v *géométrique* de raison $q > 0$ et de premier terme v_0.
Pour tout entier naturel n, on a :

$$\boxed{v_n = v_0 \times q^n}$$

Exemple 14.4.

Un complexe cinématographique a ouvert ses portes en 2018 en périphérie d'une ville.
En 2018, le complexe a accueilli 180 mille spectateurs. La gestionnaire du complexe prévoit une augmentation de 4 % par an de la fréquentation du complexe.
Soit n un entier naturel. On note u_n le nombre de spectateurs, en milliers, du complexe cinématographique pour l'année $(2018 + n)$. On a donc $u_0 = 180$.

1. Calculer le nombre de spectateurs en 2019.

2. Justifier que $u_{n+1} = 1,04u_n$. En déduire que la suite (u_n) est géométrique en précisant sa raison et son premier terme.

3. Exprimer u_n en fonction de n, pour tout entier naturel n.

4. En déduire une estimation du nombre de spectateurs en 2023.

4.6 Les exercices du chapitre

●○○ Exercice 37.
Pour tout n entier naturel, on note u_n le nombre $-0,6n + 2$.

1. Calculer u_0, u_1, u_2 et u_{100}.
2. Marquer sur un graphique les points représentatifs de u_0, u_1 et u_2.

●○○ Exercice 38.
On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = n(n + 1)$.

1. Calculer v_0, v_1, v_2 et le 11^{e} terme de cette suite.
2. Marquer sur un graphique les trois premiers points de la suite (v_n).

●○○ Exercice 39.
On définit la suite (u_n) par :

$$\begin{cases} v_0 = -1 \\ v_{n+1} = -2v_n + 1 \end{cases}$$

1. Calculer v_1, v_2 et v_3.
2. Marquer sur un graphique les points représentatifs de v_0, v_1, v_2 et v_3.

●○○ Exercice 40.
On définit la suite (u_n) par :

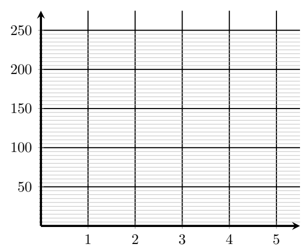
$$\begin{cases} u_0 = -4 \\ u_{n+1} = 0,5u_n + 2 \end{cases}$$

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. Marquer sur un graphique les points représentatifs de u_0, u_1, u_2 et u_3.

●●○ Exercice 41.
Un magasin d'informatique liquide l'ensemble de ses stocks au moyen d'une série de promotions. On se propose d'étudier l'évolution de son stock de souris sur une période de six semaines après le démarrage de la liquidation.
Initialement, le magasin a en stock 240 souris. On peut modéliser la valeur du stock de souris au bout de n semaines de promotions par la suite (u_n), définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = 240 - 40n \quad 0 < n < 6$$

1. Calculer u_0 , u_1 , u_2 et u_3.
   Donner une interprétation de u_2.
2. Dans le repère ci-dessous, représenter les termes u_0, u_1, u_2 et u_3.
   Au vu du graphique qui vient d'être complété, quelle conjecture peut-on émettre au sujet de la nature de la suite (u_n) ? Justifier.



3. Démontrer cette conjecture.
4. Donner une relation de récurrence vérifiée par la suite (u_n).
5. Comment pourrait-on résumer l'évolution du stock de souris du magasin ?

●●○ Exercice 42.
En janvier 2019, un entrepreneur décide de créer une entreprise de location de trottinettes électriques dans une ville de taille moyenne.
Les trottinettes ont une autonomie initiale de 50 km. Une étude montre que l'autonomie de ces trottinettes baisse de 13% chaque année.
On modélise l'autonomie de ces trottinettes, en kilomètre, à l'aide d'une suite (a_n). Pour tout entier naturel n, a_n représente l'autonomie, en kilomètre, de ces trottinettes pour l'année $2019 + n$. Ainsi $a_0 = 50$.
On arrondira les résultats au centième de kilomètre.

1. Calculer a_1 et a_2. Interpréter les résultats dans le contexte de l'exercice.
2. Exprimer a_{n+1} en fonction de a_n.
3. En déduire la nature de la suite (a_n) et préciser sa raison et son premier terme.
4. Déterminer l'autonomie des trottinettes en 2024.
5. L'entrepreneur décide de changer son parc de trottinettes lorsque leur autonomie sera inférieure à 15 km.
   Utiliser la calculatrice pour répondre à la question posée après avoir complété le script en Python ci-dessous :

```python
def seuil():
    n=0
    u=50
    while u>=..... :
        n=n+1
        u=u*.....
    return(n)
```

●●○ Exercice 43.
Une société propose pour un poste un contrat à durée indéterminée (CDI). Le salaire net associé à ce poste à sa création est de 1 500 euros et augmente de 0,5% chaque mois.

On note u_n le montant du salaire net du poste, au n-ième mois après sa création (n est un entier positif).

1. Quel sera le salaire associé à ce poste trois mois après sa création ? Donner une valeur approchée du résultat à l'entier près.
2. Exprimer pour tout entier positif n, u_{n+1} en fonction de u_n.
3. Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Préciser la valeur de la raison de cette suite.
4. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n). Justifier la réponse.
5. Le revenu médian en France en net est environ égal à 1 800 euros.

On souhaite déterminer au bout de combien de mois le salaire associé à ce poste va dépasser 1 800 euros pour la première fois. Pour cela, on rédige le script écrit en langage Python ci-dessous :

```
def salaire(s):
    n=0
    u=1500
    while u<s:
        n=n+1
        u=u*1.005
    return(n)
```

Quelle commande faut-il exécuter pour que le script renvoie la valeur qui réponde au problème ?

●●● Exercice 44.

Durant l'été, une piscine extérieure perd chaque semaine 4 % de son volume d'eau par évaporation. On étudie ici un bassin qui contient 80 m^3 après son remplissage.

1. Montrer par un calcul que ce bassin contient $76,8$ m^3 d'eau une semaine après son remplissage.
2. On ne rajoute pas d'eau dans le bassinet l'eau continue à s'évaporer. On modélise le volume d'eau contenue dans la piscine par une suite (V_n) : pour tout entier naturel n, on note V_n la quantité d'eau en m^3 contenue dans la piscine n semaines après son remplissage. Ainsi $V_0 = 80$.
   (a) Justifier que pour tout entier naturel n, $V_{n+1} = 0,96V_n$ et préciser la nature de la suite (V_n) ainsi définie.
   (b) Donner une expression de V_n en fonction de n.
   (c) Quelle quantité d'eau contient le bassin au bout de 7 semaines ?
3. Pour compenser en partie les pertes d'eau provoquées par l'évaporation, on décide de rajouter 2 m^3 d'eau chaque semaine dans le bassin.

   On souhaite déterminer au bout de combien de semaines, le volume d'eau contenu dans la piscine devient inférieur à 70 m^3.

   Compléter la fonction Python suivante afin que l'appel nombreJour(70) renvoie le nombre de semaines à partir duquel le volume d'eau de la piscine sera inférieur à 70 m^3.

```
def nombreJour(U):
    N=0
    V=80
    while V>=...:
        N=N+1
        V=.....
    return ....
```

●●● Exercice 45.
En 2015, la consommation d'électricité liée aux usages du numérique en France était de 56 térawatt-heures (TWh).
On admet que cette consommation augmente de 4 % par an depuis 2015.

Pour tout entier naturel n, on note u_n la consommation d'électricité liée aux usages du numérique en France,exprimée en térawattheure, pour l'année $2015 + n$.

Ainsi, $u_0 = 56$.

1. Calculer la consommation d'électricité, exprimée en TWh, liée aux usages du numérique en 2016.
2. Déterminer la nature de la suite (u_n) et donner ses éléments caractéristiques.
3. Pour tout entier naturel n, exprimer u_n en fonction de n.
4. On admet que chaque année, la consommation d'électricité en France, tous usages confondus, est égale à 480 TWh.

   Est-il exact d'affirmer qu'en 2030, plus de 20 % de la consommation d'électricité sera liée aux usages du numérique ? Justifier la réponse.

CHAPITRE

5

Variables aléatoires

5.1 Répétition d'expériences indépendantes

Définition 1.5.

On parle d'expériences aléatoires *identiques et indépendantes* lorsque :

— la *même* expérience est répétée plusieurs fois ;

— l'issue d'une expérience *ne dépend pas* des précédentes.

Exemple 1.5.

Les cas suivants correspondent-ils à des répétitions d'expériences identiques et indépendantes ?

1. On lance trois fois le même dé truqué, et on regarde la face obtenue.

2. On lance trois pièces équilibrées, et on regarde la face obtenue.

3. On pioche trois boules dans une urne, avec remise.

4. On pioche trois boules dans une urne, sans remise.

5. On lance trois dés à 4, 6 et 8 faces, et on regarde la face obtenue.

Définition 2.5.

Dans le cas d'une répétition d'expériences aléatoires identiques et indépendantes, une issue est une liste de résultats et la probabilité de cette issue est le produit des probabilités de chacun des résultats de la liste.

Exemple 2.5.

On pioche avec remise trois boules dans une urne contenant une boule blanche (B), deux boules rouges (R) et trois boules vertes (V) et on regarde leur couleur.

- L'évènement RVR signifie :
- $\mathbf{P}(\text{RVB}) =$

Propriété 1.5.
On peut modéliser la répétition d'expériences identiques et indépendantes par un arbre de probabilités (ou arbre pondéré) respectant les règles suivantes :

- la *somme* des probabilités des branches issues d'un nœud est égale à 1.
- Le probabilité d'une issue d'un chemin est égale au *produit* des probabilités rencontrées sur le chemin.
- La probabilité d'un évènement est égale à *la somme* des probabilités des issues qui le composent.

Exemple 3.5.

Une pièce truquée a une probabilité $\frac{1}{3}$ de tomber sur pile. On la lance deux fois de suite. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement deux fois pile ?

Définition 3.5.

Une *épreuve de Bernoulli* de paramètre p est une expérience aléatoire qui ne comporte que deux issues contraires. L'une est appelée le *succès* (noté S), de probabilité p, et l'autre *échec* (noté $\overline{S}$), de probabilité $1 - p$.

Exemple 4.5.

Quel est le paramètre des épreuves de Bernoulli suivantes ?

1. On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes, et on observe si c'est un as.

2. On lance un dé équilibré à 6 faces, et on observe si la face obtenue est 6.

5.2 Variables aléatoires

Exemple 5.5.
On lance trois pièces de monnaies équilibrées.

1. Lister toutes les issues possibles.

2. On gagne 2€ pour chaque résultat *pile*, et on perd 1€ pour chaque résultat *face*.
   On note X le gain correspondant. Quelles sont les valeurs possibles de X ?

Définition 4.5.
Soit une expérience aléatoire d'univers $\mathbb{U}$.
Définir une *variable aléatoire* discrète X sur Ω, c'est associer à chaque issue de $\mathbb{U}$ un nombre réel. L'ensemble de ces réels est l'ensemble des valeurs prises par X.

Définition 5.5.
La *loi de probabilité* d'une variable aléatoire X, souvent donnée sous la forme d'un tableau, est la donnée de l'ensemble des valeurs x prises par X, associées à la probabilité de l'évènement $X = x$.

Exemple 6.5.
On reprend l'expérience de l'exemple , et on admet que les huit issues sont équiprobables, de probabilité $\frac{1}{8}$.

1. Dresser la loi de probabilité de X.

2. Calculer $\mathbf{P}(X = 6)$.

3. Quelle est la probabilité de gagner de l'argent ?

Définition 6.5.

Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilités est représentées dans le tableau ci-contre.

x	x_1	x_2	$\dots$	x_n
$P(X=x)$	p_1	p_2	$\dots$	p_n

L'espérance de X, notée $E(X)$, est le nombre : $E(X) = x_1 \times p_1 + x_2 \times p_2 + \dots x_n \times p_n$.

▶ **Note 1.5.**
L'espérance d'une variable aléatoire X est la valeur moyenne obtenue en répétant un grand nombre de fois l'expérience aléatoire.

Exemple 7.5.
On reprend la variable aléatoire X de l'exemple précédent.

1. Calculer $E(X)$.

2. On joue un grand nombre de fois à ce jeu. Quel est le gain moyen que l'on peut espérer obtenir ?

Définition 7.5.

Dans une épreuve de Bernoulli de paramètre p, on appelle *variable aléatoire de Bernoulli* la variable aléatoire qui prend la valeur 1 en cas de succès, et 0 en cas d'échec.

x_i	0	1
$\mathbf{P}(X=x_i)$		

Propriété 2.5.
L'espérance d'une variable aléatoire de Bernoulli X de paramètre p est : ____________.

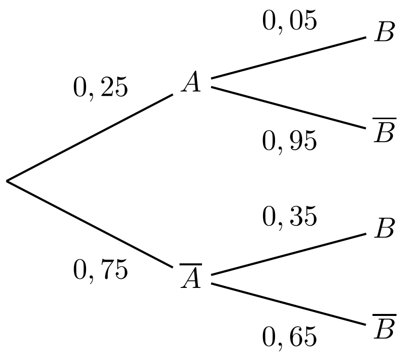
Exemple 8.5.
On lance un dé équilibré à 6 faces, et on considère *Obtenir 6* comme un succès.

1. Cette épreuve est une épreuve de Bernoulli. Quel est son paramètre p ? ____________
2. Dresser la loi de probabilité de la variable de Bernoulli associée à cette épreuve.

5.3 Les exercices du chapitre

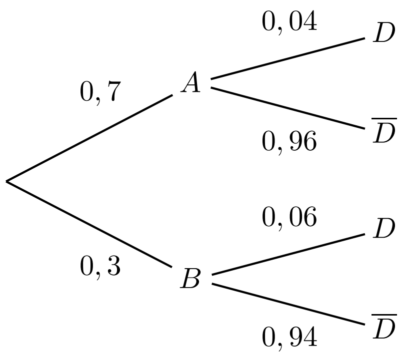
1. Probabilités et arbres

○○○ **Exercice 46.**
On donne l'arbre de probabilité suivant :



Préciser les valeurs de $\mathbf{P}(A)$, $\mathbf{P}_{\overline{A}}(B)$ et $\mathbf{P}_A(\overline{B})$.

●○○ **Exercice 47.**
Une coopérative commercialise des biscuits produits par deux entreprises A et B.
Parmi les biscuits, certains présentent un défaut (casse, taille,...).
On note D l'événement « le biscuit présente un défaut ».
On obtient l'arbre pondéré suivant :



1. Donner la probabilité que le biscuit présente un défaut sachant qu'il est produit par l'entreprise A.
2. Donner $\mathbf{P}_B(\overline{D})$ et interpréter le résultat obtenu.
3. Calculer $\mathbf{P}(A \cap \overline{D})$ et interpréter le résultat obtenu.

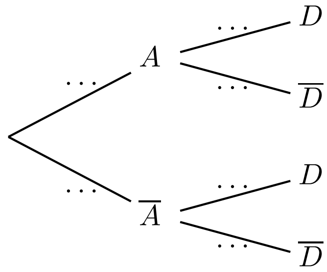
●●● **Exercice 48.**
Un audioprothésiste compte parmi ses clients 75 % de personnes âgées de plus de 50 ans. Parmi celles-ci, 80 % souffrent de problèmes d'audition aux deux oreilles. Ce taux chute à 40 % parmi les clients de moins de 50 ans.

On choisit au hasard le dossier médical d'un client ; chaque dossier a la même probabilité d'être choisi.

On considère les événements suivants :

— A : « le client est âgé de plus de 50 ans » ;
— D : « le client souffre de problèmes auditifs aux deux oreilles ».

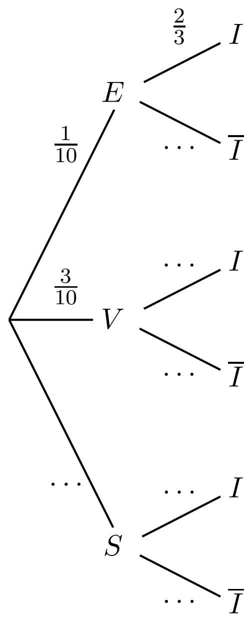
1. (a) En utilisant les données fournies par l'énoncé, donner les probabilités $\mathbf{P}(A)$ et $\mathbf{P}_{\overline{A}}(D)$.
   (b) Compléter l"arbre pondéré de probabilités qui traduit la situation.



2. (a) Calculer la probabilité que le client choisi ait plus de 50 ans et souffre de problèmes auditifs aux deux oreilles.
   (b) Calculer $\mathbf{P}(T)$ et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
3. Le client choisi ne souffre pas de problème auditif aux deux oreilles. Calculer la probabilité qu'il soit âgé de plus de 50 ans.

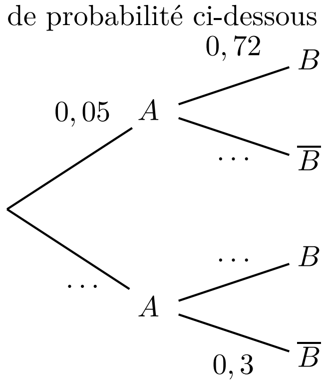
2. Répétitions d'expériences aléatoires

○○○ **Exercice 49.**
Compléter l'arbre de probabilité ci-dessous, les deux expériences étant indépendantes :



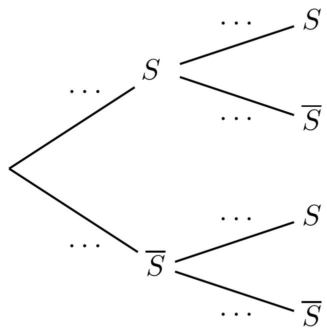
●○○ **Exercice 50.**

Soit l'arbre de probabilité ci-dessous :



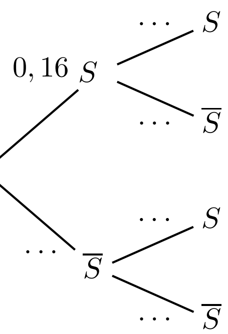
1. Compléter cet arbre.
2. Les expériences sont-elles indépendantes ? Justifier.
3. Calculer $\mathbf{P}(B)$.

●○○ Exercice 51.
Compléter l'arbre ci-dessous afin qu'il représente un schéma de Bernoulli de paramètre $0,34$:



●○○ Exercice 52.
On tire successivement et avec remise deux pièces mécaniques sur la chaîne de production d'une usine. On estime que 16% des pièces fabriquées dans cette usine possèdent un défaut de fabrication.
On note S : « la pièce a un défaut ».

1. Compléter l'arbre de probabilité ci-dessous :



2. Calculer la probabilité de tirer deux pièces ayant un défaut.
3. Calculer la probabilité de tirer au moins une pièce avec un défaut.

●●○ Exercice 53.
Une agence de voyage estime que 85 % de ses clients reviennent satisfaits de leur voyage.
On interroge au hasard et de façon indépendante trois clients de l'agence.
On modélise l'expérience aléatoire ainsi réalisée par la répétition de 3 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

1. Représenter cette expérience par un arbre de probabilités.
2. Calculer la probabilité qu'exactement deux des clients interrogés soient satisfaits de leur voyage. Arrondir au centième.

●●○ Exercice 54.
Une urne contient 2 jetons jaunes et 5 jetons rouges.
Vincent tire au hasard trois jetons à la suite et regarde sa couleur. Entre chaque tirage, Vincent remet le jeton tiré dans l'urne de telle sorte que les répétitions soient identiques et indépendantes.

1. Représenter l'arbre de probabilité associé à cette répétition d'épreuves aléatoires.
2. Déterminer la probabilité que Vincent tire 3 fois un jeton jaune.
3. Déterminer la probabilité que Vincent obtienne lors de ce tirage de trois jetons, 1 jeton jaune et 2 jetons rouges

CHAPITRE

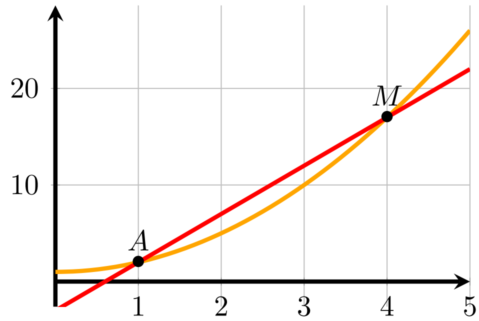
6

Dérivation

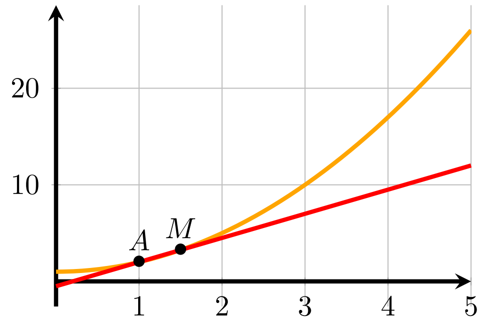
6.1 Tangente à une courbe

Définitions.

- Une *sécante* à une courbe $\mathscr{C}$ passant par le point A est une droite passant par A, et coupant la courbe en un autre point M. (*Graphe 1*).
- Lorsque le point M se rapproche de A, il arrive que la sécante (AM) se rapproche d'une *position limite*.
  Cette droite *limite* est alors appelée *tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A*. (*Graphe 2*).



Graphe 1

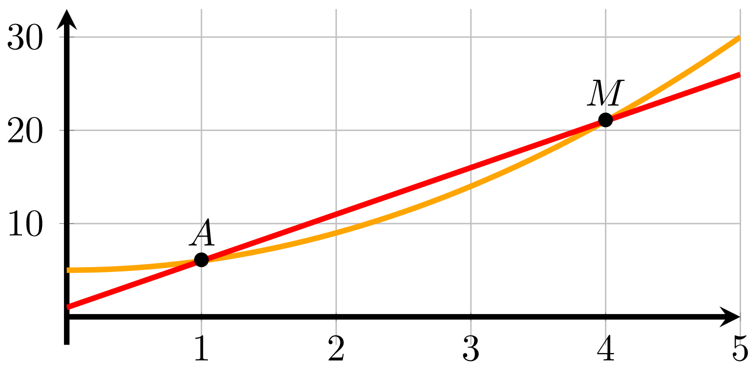


Graphe 2

6.2 Nombre dérivé

Définition 1.6.

Soient une fonction f de courbe représentative $\mathscr{C}$, un point A (d'abscisse a), et un nombre strictement positif h. Le point M de coordonnées $M(a+h\,;\, f(a+h))$ est un point de $\mathscr{C}$, et (AM) est une sécante à $\mathscr{C}$.
Alors le nombre réel $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ est le coefficient directeur de (AM) et le *taux de variations* de la fonction f entre a et $a+h$.



Définition 2.6.

Si le taux de variation d'une fonction f entre a et $a+h$ tend vers un nombre ℓ lorsque h tend vers 0, alors on dit que f est dérivable en a. Ce nombre est appelé le *nombre dérivé de f en a*, et se note $f'(a)$. On écrit :

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

6.3 Équation de la tangente

Définition 3.6.

Soit f une fonction dérivable en un nombre a. On appelle *tangente à f au point d'abscisse a* la droite T, passant par le point de coordonnée $(a; f(a))$, et de coefficient directeur $f'(a)$.

Propriété 1.6.
Si f est dérivable en a, l'équation réduite de la tangente à la courbe de f en a est :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

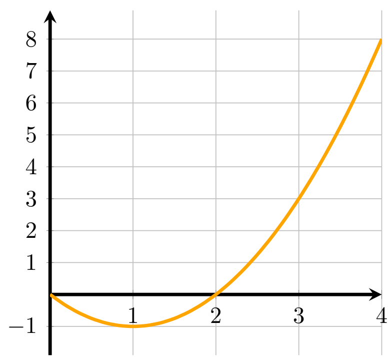
Exemple 1.6.
On considère la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 2x$, tracée ci-dessous.

On admet que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $f'(x) = 2x - 2$.

1. Calculer $f(3)$ et $f'(3)$.

2. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 3.

3. Tracer cette tangente sur le graphe suivant :



6.4 Fonction dérivée

Définition 4.6.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que f est *dérivable* sur I si elle est dérivable en tout nombre réel a de I.
On définit alors la *fonction dérivée de f*, notée f', qui à tout nombre x de I, associe $f'(x)$, le nombre dérivé de f en x.

Propriété 2.6. *Dérivée des fonctions usuelles*
Toutes les fonctions décrites ici sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$.

Fonction		Fonction dérivée
Fonction constante	$f(x) = k$	$f'(x) = 0$
Fonction identité	$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
Fonction carrée	$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$
Fonction cube	$f(x) = x^3$	$f'(x) = 3x^2$

Exemple 2.6.
On définit f et g par : $f(x) = x$ et $g(x) = x^3$. Calculer les nombres suivants :

1. $f(2) =$
2. $f'(2) =$
3. $g(4) =$
4. $g'(4) =$
5. $g(-1) =$
6. $g'(-1) =$

Propriété 3.6. *Opération sur les fonctions*
Soient u et v deux fonctions définie sur un intervalle I, et k un nombre réel.

— La fonction définie par $f(x) = k \times u(x)$ est dérivable sur I, et pour tout nombre $x \in I$, on a : $f'(x) = k \times u'(x)$.

— La fonction définie par $f(x) = u(x) + v(x)$ est dérivable sur I, et pour tout nombre $x \in I$, on a : $f'(x) = u'(x) + v'(x)$.

Exemple 3.6.
Déterminer l'expression des dérivées des fonctions suivantes.

1. $f(x) = 5$

____

2. $g(x) = 4x$

____

3. $h(x) = -2x^3$

____

4. $k(x) = 5x - 1$

____

5. $l(x) = 4x^2 - 2x + 1$

____

6. $m(x) = 2x^3 + 6x^2 - 4x + 7$

____

6.5 Dérivée et Variations

Propriété 4.6.
Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. Alors :
— si la fonction dérivée f' est *strictement positive*, alors la fonction f est *croissante* ;
— si la fonction dérivée f' est *strictement négative*, alors la fonction f est *décroissante*.

Exemple 4.5.

Soit f une fonction. On connait le tableau de signes de la dérivée, donné dans le tableau suivant. Compléter le tableau de variations de f.

x	0		5		20		50		100
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
Variation de f									

Exemple 5.5.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x^2 - 6x + 1$.

1. Déterminer l'expression de f'.

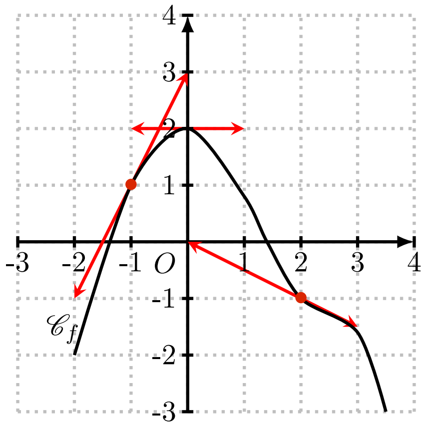
2. Dresser le tableau de signes de f'.

3. En déduire le tableau de variations de f.

4. Quels sont les extremums de f ?

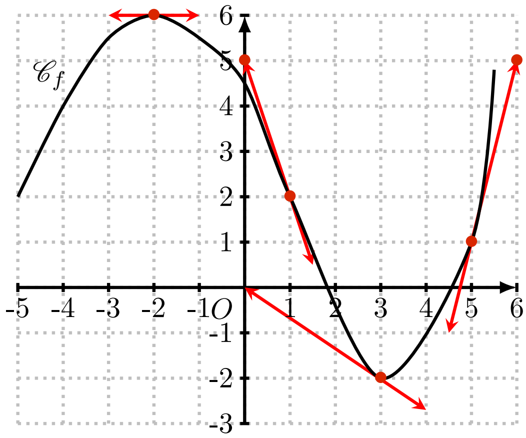
6.6 Les exercices du chapitre

○○○ **Exercice 55.**
On donne la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f dont on a représenté certaines tangentes :



1. À l'aide de la représentation graphique ci-dessus de la fonction f, donner les valeurs de :
   - $f(0)$, $f(-1)$ et $f(2)$.
   - $f'(0)$, $f'(-1)$ et $f'(2)$.
2. Déterminer l'équation réduite des tangentes à la courbe représentative de la fonction f :
   — au point d'abscisse -1 ;
   — au point d'abscisse 0 ;
   — au point d'abscisse 2.

●○○ **Exercice 56.**
On donne la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f dont on a représenté certaines tangentes :



1. À l'aide de la représentation graphique ci-dessus de la fonction f, donner les valeurs de :
   - $f(-2)$, $f(1)$, $f(3)$ et $f(5)$.
   - $f'(-2)$, $f'(1)$, $f'(3)$ et $f'(5)$.

2. Déterminer l'équation réduite des tangentes à la courbe représentative de la fonction f :
   - au point d'abscisse 3 ;
   - au point d'abscisse -2 ;
   - au point d'abscisse 1.

●○○ **Exercice 57.**

1. Soient f, g et h trois fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :
   - $f(x) = 6 + x$
   - $g(x) = x^2 + 4$
   - $h(x) = x^3 + x$

   Calculer $f'(x)$, $g'(x)$ et $h'(x)$.
2. Soient u, v et w trois fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :
   - $u(x) = 3x$
   - $v(x) = -6x^2$
   - $w(x) = -5x^3$

   Calculer $u'(x)$, $v'(x)$ et $w'(x)$.

●○○ **Exercice 58.**

Soient f, g et h trois fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :
- $f(x) = x^2 - 3x + 6$
- $g(x) = x^3 - 5x^2 + 2x$
- $h(x) = 3x^3 + 3x^2 - 5x + 11$

Calculer $f'(x)$, $g'(x)$ et $h'(x)$.

●○○ **Exercice 59.**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x^3 + 1,5x^2 - x + 9.$$

Calculer $f'(x)$ puis en déduire $f'(1)$, $f'(0)$ et $f'(5)$.

●○○ **Exercice 60.**

Déterminer l'expression de la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes :

1. $f(x) = 1 - 4x$
2. $g(x) = 3x^2 - x$
3. $h(x) = -5x^3 + 7x^2 - 1$

●○○ **Exercice 61.**

Soit f une fonction définie sur $[-5\,;\,5]$ telle que $f(-5) = 5$, $f(5) = 7$ et $f(1) = 3$.

1. Compléter le tableau de variations ci-dessous :

x	-5		1		5
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variation de f					

2. Proposer une valeur possible de $f(-1)$.

●●○ Exercice 62.
Soit f une fonction définie sur $[1\,;\,3]$ telle que $f(1) = 3$ et $f(3) = 2$.

1. Compléter le tableau de variations ci-dessous :

x	1		2		3
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variation de f					

2. Proposer une valeur possible de $f(2)$.

●○○ Exercice 63.
La fonction p est définie sur $\mathbb{R}$ par :
$p(x) = x^3 + \dfrac{3}{2}x^2 - 6x + 1$ dont la dérivée s'écrit $p'(x) = (3x - 3)(x + 2)$.

1. Dresser le tableau de signes de $p'(x)$ sur $\mathbb{R}$.
2. Donner un intervalle sur lequel p est croissante.

●○○ Exercice 64.
La fonction p est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$m(x) = x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 2x + 7$$

1. Calculer la dérivée $m'(x)$.
2. Vérifier que cette dérivée s'écrit :

$$m'(x) = (3x - 1)(x + 2)$$

3. Dresser le tableau de signes de $m'(x)$.
4. Donner un intervalle sur lequel m est croissante.

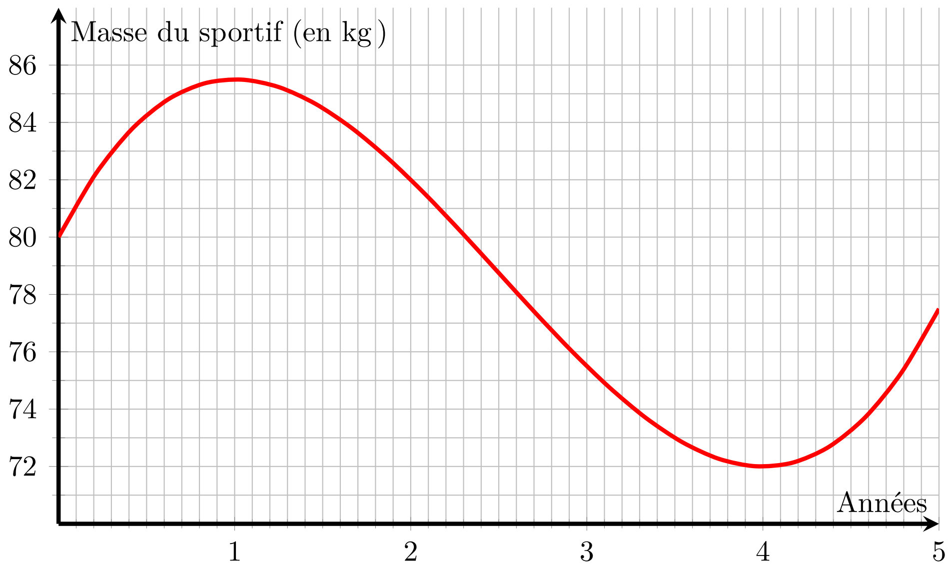
●●○ Exercice 65.
Soit la fonction f définie sur $[0\,;\,3]$ par :

$$f(x) = 2x^2 - 4x.$$

1. Calculer, pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,3]$, $f'(x)$.
2. Résoudre dans $[0\,;\,3]$ l'équation $f'(x) = 0$.
3. Compléter alors le tableau de variations de f ci-dessous :

x	0		$\cdots$		3
Signe de $f'(x)$			0		
Variation de f					

●●○ **Exercice 66.**
La courbe C tracée ci-dessous représente la masse, en kilogramme, d'un sportif en fonction du temps, exprimé en nombre d'années, sur une période de 5 ans.



1. Déterminer, sur la période étudiée, le nombre de mois pendant lesquels le sportif pèse plus de 85 kilogrammes. On répondra avec la précision permise par le graphique.

On admet que la courbe C est la représentation graphique de la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 5]$ par :

$$f(x) = x^3 - 7,5x^2 + 12x + 80$$

On note f' la fonction dérivée de la fonction f.

2. Déterminer $f'(x)$.
3. Montrer que $f'(x) = (x - 1)(3x - 12)$.
4. (a) Établir le tableau de signes de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0; 5]$.
   (b) En déduire le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0; 5]$.
   (c) Déterminer la masse minimale et la masse maximale du sportif sur la période étudiée.