Chapitre

3

Fonctions affines

1. Rappels sur les fonctions affines

1.1 Expression

Définition 1.3

Les fonctions f, définies sur $\mathbb{R}$, dont l'expression peut se mettre sous la forme ____________________, où m et p sont des réels, sont appelées **fonctions affines**.

Remarques.

1. **Si** $m = 0$ alors $f(x) = p$ est dite _______________ ;
2. **si** $p = 0$ alors $f(x) = mx$ est dite _______________.

1.2 Représentation graphique

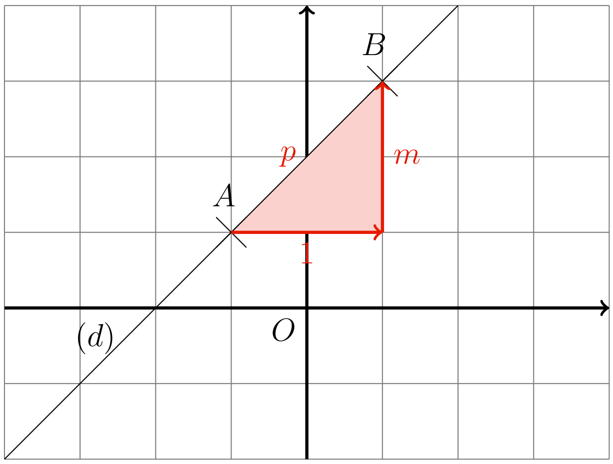
Le plan est muni d'un repère.

Théorème 1.3. Toute fonction affine f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$ est représentée par **une droite** $\mathscr{D}$ non parallèle à l'axe des ordonnées qui aura pour équation $y = mx + p$. Réciproquement, toute expression de la forme $y = mx + p$ est celle d'une fonction affine. Par ailleurs :

1. p s'appelle **ordonnée à l'origine** : la droite $\mathscr{D}$ passe par le point de coordonnées $(0\,;\,p)$.
2. m s'appelle **le coefficient directeur ou pente** de la droite $\mathscr{D}$, et **le taux d'accroissement de f** :
   Si $\mathrm{A}(x_\mathrm{A}\,;\,y_\mathrm{A})$ et $\mathrm{B}(x_\mathrm{B}\,;\,y_\mathrm{B})$ sont deux points de $\mathscr{D}$ tels que $x_\mathrm{A} \neq x_\mathrm{B}$ alors :

$$\boxed{m = \frac{f(x_\mathrm{B}) - f(x_\mathrm{A})}{x_\mathrm{B} - x_\mathrm{A}} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\Delta y}{\Delta x}}.$$

Illustration.



Application 1.3. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3(x-1) + 7(x-3)$.
Démontrer que la fonction f est une fonction affine.

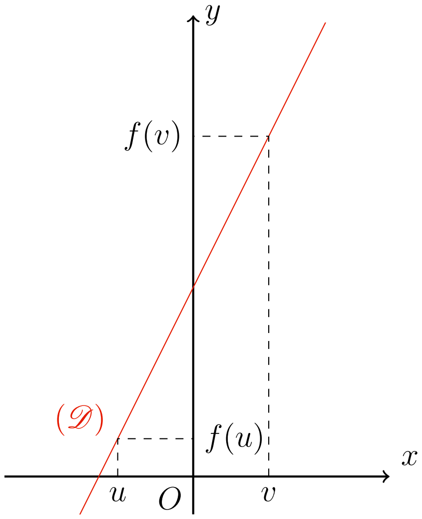
---

2. Variations d'une fonction affine

Théorème 2.3. Soit $f : x \mapsto mx + p$ une fonction affine.

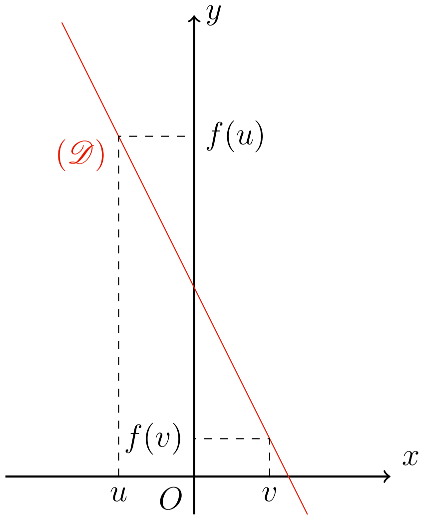
$m > 0$

Pour deux réels u et v :
si $u < v$ alors $f(u) < f(v)$.
On dit que f **conserve l'ordre** dans $\mathbb{R}$ ou encore que f est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$:



$m < 0$

Pour deux réels u et v :
si $u < v$ alors $f(u) > f(v)$.
On dit que f **ne conserve pas l'ordre** dans $\mathbb{R}$ ou encore que f est **strictement décroissante sur** $\mathbb{R}$:



Exemples.

1. Pour $f : x \longmapsto 2,4x$: comme $m = 2,4 > 0$, si $u < v$ alors, ..., c'est-à-dire . . . .

2. Pour $g : x \longmapsto -1,6x$: comme $m = -1,6 < 0$, si $u < v$ alors, ... $>$ . . . . . , c'est-à-dire . . . . . .

Remarque. À partir des variations d'une fonction, on peut élaborer son **tableau de variations** : c'est un tableau synthétique regroupant les informations concernant les variations de cette fonction.

À retenir.

1. Cas $m < 0$

x	$-\infty$ $+\infty$
Variation de f	$\searrow$

2. Cas $m = 0$

x	$-\infty$ $+\infty$
Variation de f	$\rightarrow$

3. Cas $m > 0$

x	$-\infty$ $+\infty$
Variation de f	$\nearrow$

Application 2.3.
Dresser le tableau de variation de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -4x + 2$.

3. Signe d'une fonction affine

Définition 2.3

Soit f une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$ avec $m \neq 0$.

1. On appelle **racine** de f le réel x_0 tel que $f(x_0) = 0$.
2. Le point de coordonnées $(x_0 ; 0)$ est le point d'intersection de la courbe représentative de f avec l'axe des abscisses.

Théorème 3.3. Soit $f : x \mapsto mx + p$ une fonction affine avec $m \neq 0$ admettant pour racine x_0. Le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x est donné par le tableau suivant :

- Si $m > 0$

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
signe de $f(x)$			0		

- Si $m < 0$

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
signe de $f(x)$			0		

Application 3.3. Faire le tableau de signes des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ respectivement par :

$$f(x) = -9x + 13 \text{ et } g(x) = 5x + 23.$$