CHAPITRE

11 Les nombres premiers

11.1 Définition d'un nombre premier

Définitions.

Un entier naturel n est dit *premier* s'il possède *exactement* deux diviseurs dans $\mathbb{N}$:

____

Enfin, si cet entier naturel n, distinct de 1, est non premier, on dira qu'il est ________________.

Exemples, contre-exemples.

- 2 est **premier** car ses seuls diviseurs positifs sont 1 et 2.
- 0 n'est pas premier car il possède une infinité de diviseurs positifs.
- 1 n'est **pas premier** car il de possède qu'un seul diviseur, lui-même !

Application 1.11. Soit n un entier naturel n supérieur ou égal à 2. Le nombre $n^2 - 1$ peut-il être premier ?

Théorème 1.11.
Il existe une infinité de nombres premiers.

Démonstration. Raisonnons par l'absurde : supposons qu'il existe un nombre fini de nombres premiers. Soit p le plus grand d'entre eux.
Soit N le produit de tous ces nombres premiers.
$N = 2 \times 3 \times \ldots \times p$.
Posons $N' = N + 1$.
Alors, pour tout nombre premier d, la division euclidienne de N' par d a pour reste 1 car $N' = d \times q + 1$.
Donc N' n'est divisible par aucun d'entre eux, donc N' est premier.
Mais $N' > p$, ce qui est impossible car p est le plus grand nombre premier.
Donc il n'existe pas un nombre fini de nombres premiers. □

Théorème 2.11.

- Tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 admet *un diviseur premier*.
- Tout entier naturel $n \geqslant 2$, *non premier*, admet un diviseur premier inférieur ou égal à $\sqrt{n}$.

Démonstration. Soit n un entier $n \geqslant 2$.

- Si n est premier, il est un diviseur premier de lui-même.
- Si n n'est pas premier, il admet un diviseur positif autre que 1 et lui-même.
  L'ensemble E des diviseurs positifs, autres que 1 et n, est donc un ensemble d'entiers naturels non vide : il a donc un plus petit élément que l'on note p.
  Si p n'était pas premier, il existerait un diviseur propre d de p qui serait plus petit que p ; comme d diviserait n avec p qui divise n, d diviserait n donc d serait un élément de E plus petit que p ce qui est impossible.
  Ainsi p est premier et divise n ; par suite il existe un entier q tel que $n = pq$ avec $1 < q < n$.
  Donc q est un diviseur propre de n et par conséquent $p \leqslant q$.
  On en déduit que $p^2 \leqslant pq$ soit $p^2 \leqslant n$ et donc $p \leqslant \sqrt{n}$.

□

Propriété 1.11.
Soit n un entier supérieur à 2.
Si n n'est divisible par aucun des nombres premiers inférieurs ou égaux à $\sqrt{n}$ alors n est *un nombre premier.*

Démonstration. Si n n'est pas premier, il admet un diviseur premier inférieur ou égal à $\sqrt{n}$ d'après le premier théorème. Cette propriété est donc la contraposée du second théorème. □

Application 2.11. Démontrer que 139 est un nombre premier.

11.2 Deux théorèmes fondamentaux pour finir l'année

11.2.1 Décomposition en produit de facteurs premiers

Théorème 3.11.
Tout entier naturel $n \geqslant 2$ se décompose en un *produit de nombres premiers.*
Cette décomposition est unique à l'ordre des facteurs près.
On écrira $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ où $n \geqslant 2$, p_1, p_2,..., p_k sont des nombres premiers deux à deux distincts et α_1, α_2, ..., α_k sont des entiers naturels non nuls.

Application 3.11. Décomposer 140 en produit de facteurs premiers et en déduire la liste des diviseurs positifs de 140.

Propriété 2.11.
Si n est un entier naturel supérieur ou égal à 2, admettant pour décomposition en produit de facteurs premiers
$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ admet alors n possède
exactement $(\alpha_1 + 1) \times (\alpha_2 + 1) \times \dots \times (\alpha_k + 1)$ diviseurs positifs.

Application 4.11. Déterminer le nombre de diviseurs positifs de 72.

11.2.2 Petit théorème de Fermat

Théorème 4.11. *Admis*
Soit n un nombre entier.
Si p est un nombre *premier* ne divisant pas n alors $n^{p-1} \equiv 1\ [p]$.

Conséquence : si p est un nombre premier et n un entier, alors $n^p \equiv n\ [p]$.

Application 5.11. Montrer, que pour tout entier naturel n, $n^{13} - n$ est divisible par 26.