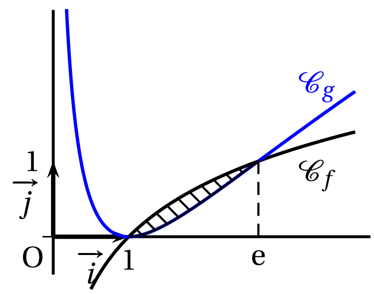
Exercice 1. **/15**

Les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ données ci-dessous représentent respectivement, dans un repère orthonormal, les fonctions f et g définies sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \ln x \quad \text{et} \quad g(x) = (\ln x)^2.$$



1. Pour tout entier naturel n, on pose :

$$I_n = \int_1^{\mathrm{e}} (\ln x)^n \, dx.$$

   (a) Calculer I_0.

   (b) À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que pour tout entier naturel n,

$$I_{n+1} = \mathrm{e} - (n+1) I_n.$$

   (c) En déduire la valeur de I_1 et I_2.

2. On cherche à déterminer l'aire $\mathscr{A}$ (en unités d'aire) de la partie du plan hachurée.

   On note $I = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \ln x \,\mathrm{d}x$ et $J = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} (\ln x)^2 \,\mathrm{d}x$.

   (a) Démontrer que sur l'intervalle $[1\,;\,\mathrm{e}]$, $\mathscr{C}_g$ est située au dessus de $\mathscr{C}_f$

   (b) Donner la valeur de $\mathscr{A}$.

3. *Dans cette question le candidat est invité à porter sur sa copie les étapes de sa démarche même si elle n'aboutit pas.*

   Pour x appartenant à l'intervalle $[1\,;\,\mathrm{e}]$, on note M le point de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisse x et N le point de la courbe $\mathscr{C}_g$ de même abscisse. Pour quelle valeur de x la distance MN est maximale ? Calculer la valeur maximale de MN.

Exercice 2. **/5**

Étant donnés deux entiers $p,q \in \mathbb{N}$, on note : $I(p,q) = \int_0^1 x^p (1-x)^q \, dx$.

1. Pour $q \in \mathbb{N}$, calculer $I(0,q)$.
2. Si $p \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \mathbb{N}$, montrer à l'aide d'une intégration par parties que :

$$I(p,q) = \frac{p}{1+q} I(p-1,q+1)$$

3. Démontrer à l'aide d'une récurrence sur p, démontrer que pour tout entier naturel p et tout entier naturel q,

$$I(p,q) = \frac{p!q!}{(p+q)!} I(0,p+q).$$

4. En déduire que $I(p,q) = \dfrac{p!q!}{(p+q+1)!}$.

$$\int_0^2 B \, dx \text{ or not } \int_0^2 B \, dx \text{ telle est la question...}$$