●○○ Exercice 159.
Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct, on donne les trois points A, B et C d'affixes respectives :
$z_A = -4 + 2\mathrm{i}$, $z_B = -\mathrm{i}$, $z_C = 3 + 3\mathrm{i}$
et $z_D = -1 + 6\mathrm{i}$.

1. Placer ces quatre points. Quelle conjecture peut-on émettre sur le quadrilatère $ABCD$?
2. Écrire le quotient $\dfrac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$ sous forme algébrique puis sous forme exponentielle.
3. Démontrer la conjecture émise à la question **1.**

●○○ Exercice 160.
Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $(z + \mathrm{i})^4 = 1$
2. $z^4 = 81$

●○○ Exercice 161.
Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $(z - 8)^5 = 1$
2. $z^5 = 4\sqrt{2}$

●○○ Exercice 162.
Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^5 = 32\mathrm{i}$
2. $z^4 = -9\mathrm{i}$

●●○ Exercice 163.

1. Calculer $(1 + \mathrm{i})^3$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = -2(1 - \mathrm{i})$.
3. Donner le module et un argument de chaque solution.

●●○ Exercice 164.

1. Vérifier que le complexe $\sqrt{3} - \mathrm{i}$ est une racine quatrième du complexe $-8(1 + \mathrm{i}\sqrt{3})$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :
$$z^4 = -8(1 + \mathrm{i}\sqrt{3})$$
3. Donner le module et un argument de chaque solution.

●●○ Exercice 165.

1. (a) Calculer le module et u argument du nombre complexe $4\sqrt{2}(-1 + \mathrm{i})$.
   (b) Soit $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. Exprimer le module et un argument de z^3.
   En déduire l'écriture exponentielle des solutions de l'équation :
$$z^3 = 4\sqrt{2}(-1 + \mathrm{i})$$
2. En utilisant les racines cubiques de 1, écrire les solutions de l'équation $z^3 = 4\sqrt{2}(-1+\mathrm{i})$ sous forme algébrique.
3. Déduire des deux questions précédentes les valeurs de $\cos\left(\dfrac{11\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{11\pi}{12}\right)$.

●●● Exercice 166.
On pose $z_0 = 8$ et, pour tout entier naturel n :
$$z_{n+1} = \frac{3 - \mathrm{i}\sqrt{3}}{4} z_n.$$
On note A_n le point du plan d'affixe z_n.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n,
$$z_n = 8 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{n\pi}{6}}.$$
2. Pour tout entier naturel n, on pose :
$$u_n = |z_n|$$
Déterminer la nature et la limite de la suite (u_n).
3. (a) Démontrer que, pour tout entier naturel k,
$$\frac{z_{k+1} - z_k}{z_{k+1}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{i}.$$
   En déduire que, pour tout entier naturel k, on a l'égalité : $A_kA_{k+1} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{O}A_{k+1}$.
   (b) Pour tout entier naturel n, on appelle ℓ_n la longueur de la ligne brisée reliant dans cet ordre les points A_0, A_1, A_2, $\ldots$, A_n.
   On a ainsi : $\ell_n = A_0A_1 + A_1A_2 + \ldots + A_{n-1}A_n$.
   Démontrer que la suite (ℓ_n) est convergente et calculer sa limite.

●●● Exercice 167.
Soit la suite de nombres complexes (z_n) définie par

$$\begin{cases} z_0 & = & 100 \\ z_{n+1} & = & \dfrac{\mathrm{i}}{3} z_n \quad \text{pour tout entier naturel } n. \end{cases}$$

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct. Pour tout entier naturel n, on note M_n le point d'affixe z_n.

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n, les points O, M_n et M_{n+2} sont alignés.
2. On rappelle qu'un disque de centre A et de rayon r, où r est un nombre réel positif, est l'ensemble des points M du plan tels que $AM \leqslant r$.
   Démontrer que, à partir d'un certain rang, tous les points M_n appartiennent au disque de centre O et de rayon 1.