Exercice 1 -Sujet 1 Métropole-

Dans le cadre d'un essai clinique on envisage un protocole de traitement d'une maladie. Le protocole consiste à injecter initialement au patient, par piqûre intraveineuse, une dose de 2 mg de médicament puis à réinjecter toutes les heures une dose de $1,8$ mg.

On suppose que le médicament se diffuse instantanément dans le sang et qu'il est ensuite progressivement éliminé.

On estime que lorsqu'une heure s'est écoulée après une injection, la quantité de médicament dans le sang a diminué de 30 % par rapport à la quantité présente immédiatement après cette injection.

On modélise cette situation à l'aide de la suite (u_n) où, pour tout entier naturel n, u_n désigne la quantité de médicament, exprimée en mg, présente dans le sang du patient immédiatement après l'injection de la n-ième heure. On a donc $u_0 = 2$.

1. Calculer, selon cette modélisation, la quantité u_1, de médicament (en mg) présente dans le sang du patient immédiatement après l'injection de la première heure.
2. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = 0,7u_n + 1,8$.
3. (a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \leqslant u_{n+1} < 6$.

   (b) En déduire que la suite (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.

   (c) Déterminer la valeur de ℓ. Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.
4. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = 6 - u_n$.

   (a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $0,7$ dont on précisera le premier terme.

   (b) Déterminer l'expression de v_n en fonction de n, puis de u_n en fonction de n.

   (c) Avec ce protocole, on arrête les injections lorsque la quantité de médicament présente dans le sang du patient est supérieure ou égale à $5,5$ mg.

   Déterminer, en détaillant les calculs, le nombre d'injections réalisées en appliquant ce protocole.

Exercice 2 -Sujet 1 Amérique du Nord-

Dans cet exercice, on considère la suite (T_n) définie par :

$$T_0 = 180 \text{ et, pour tout entier naturel } n,\ T_{n+1} = 0,955\, T_n + 0,9$$

1. (a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $T_n \geqslant 20$.

   (b) Vérifier que pour tout entier naturel n, $T_{n+1} - T_n = -0,045\,(T_n - 20)$. En déduire le sens de variation de la suite (T_n).

   (c) Conclure de ce qui précède que la suite (T_n) est convergente. Justifier.

2. Pour tout entier naturel n, on pose : $u_n = T_n - 20$.

   (a) Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

   (b) En déduire que pour tout entier naturel n, $T_n = 20 + 160 \times 0,955^n$.

   (c) Calculer la limite de la suite (T_n).

   (d) Résoudre l'inéquation $T_n \leqslant 120$ d'inconnue n entier naturel.

3. Dans cette partie, on s'intéresse à l'évolution de la température au centre d'un gâteau après sa sortie du four.

   On considère qu'à la sortie du four, la température au centre du gâteau est de 180° C et celle de l'air ambiant de 20° C.

   La loi de refroidissement de Newton permet de modéliser la température au centre du gâteau par la suite précédente (T_n). Plus précisément, T_n représente la température au centre du gâteau, exprimée en degré Celsius, n minutes après sa sortie du four.

   (a) Expliquer pourquoi la limite de la suite (T_n) déterminée à la question 2. c. était prévisible dans le contexte de l'exercice.

   (b) On considère la fonction Python ci-dessous :

```
def temp(x) :
    T = 180
    n = 0
    while T > x :
        T=0.955*T+0.9
        n=n+1
    return n
```

   Donner le résultat obtenu en. exécutant la commande temp(120).

   Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Exercice 3 -Sujet 2 Asie-

On s'intéresse au développement d'une bactérie.

Dans cet exercice, on modélise son développement avec les hypothèses suivantes : cette bactérie a une probabilité $0,3$ de mourir sans descendance et une probabilité $0,7$ de se diviser en deux bactéries filles.

Dans le cadre de cette expérience, on admet que les lois de reproduction des bactéries sont les mêmes pour toutes les générations de bactéries qu'elles soient mère ou fille.

Pour tout entier naturel n, on appelle p_n la probabilité d'obtenir au plus n descendances pour une bactérie.

On admet que, d'après ce modèle, la suite (p_n) est définie de la façon suivante :

$p_0 = 0,3$ et, pour tout entier naturel n,

$$p_{n+1} = 0,3 + 0,7p_n^2.$$

1. La feuille de calcul ci-dessous donne des valeurs approchées de la suite (p_n)
   (a) Déterminer les valeurs exactes de p_1 et p_2 (masquées dans la feuille de calcul) et interpréter ces valeurs dans le contexte de l'énoncé.
   (b) Quelle est la probabilité, arrondie à 10^{-3} près, d'obtenir au moins 11 générations de bactéries à partir d'une bactérie de ce type ?
   (c) Formuler des conjectures sur les variations et la convergence de la suite (p_n).

	A	B
1	n	p_n
2	0	0,3
3	1	
4	2	
5	3	0,40769562
6	4	0,416351
7	5	0,42134371
8	6	0,42427137
9	7	0,42600433
10	8	0,42703578
11	9	0,42765169
12	10	0,42802018
13	11	0,42824089
14	12	0,42837318
15	13	0,42845251
16	14	0,42850009
17	15	0,42852863
18	16	0,42854575
19	17	0,42855602

2. (a) Démontrer par récurrence sur n que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant p_n \leqslant p_{n+1} \leqslant 0,5$.
   (b) Justifier que la suite (p_n) est convergente.
3. On appelle L la limite de la suite (p_n).
   (a) Justifier que L est solution de l'équation

$$0,7x^2 - x + 0,3 = 0$$

   (b) Déterminer alors la limite de la suite (p_n).
4. La fonction suivante, écrite en langage Python, a pour objectif de renvoyer les n premiers termes de la suite (p_n).

```
1 def suite(n) :
2   p= ...
3   s=[p]
4   for i in range (...) :
5       p=...
6       s.append(p)
7   return (s)
```

Recopier, sur votre copie, cette fonction en complétant les lignes 2, 4 et 5 de façon à ce que la fonction `suite (n)` retourne, sous forme de liste, les n premiers termes de la suite.