Mathématiques en enseignement scientifique

Cours et exercices

Yann Mobian

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Classe de 1re

Version 2023-2024

Table des matières

Préambule

Ceci est le livre complet comportant le cours et les exercices que nous allons traiter tout au long de cette année.
Tous mes documents publics sont sous licence CC-BY-NC :

Le BY de la licence signifie que si vous utilisez mon travail comme source (même modifié), vous devez signaler l'origine de votre source (une simple citation de mon nom est largement suffisant).

CHAPITRE

1

Analyse de l'information chiffrée

1.1 Étude de deux caractères

1.1.1 Cardinal et fréquence

On considère une population d'individus E.
Dans cette population E, on étudie *deux caractères* « A » et « B ».

Définitions 1.1.

- Dans une population E, l'ensemble des individus qui possèdent le caractère « A » est noté A et l'ensemble des individus qui possèdent le caractère « B » est noté B.
- Les ensembles A et B sont des ______________________________ de E.

► **Note 1.1.**

- $\text{card}(E)$, que l'on lit cardinal de E, est le nombre total d'individus de la population E.
- $\text{card}(A)$, est le nombre total d'individus de la population A et $\text{card}(B)$ le nombre total d'individus de la population B.

Définitions 2.1.

- Si le caractère A prend des *valeurs numériques*, on dit qu'il est ____________________.
  Sinon, il est ____________________.
- $\overline{A}$ est l'ensemble des individus de E qui *ne* possèdent *pas* le caractère « A ».

Propriété 1.1.
La *fréquence* du caractère « A » dans la population E est le nombre $f(A) = \dfrac{\text{card}(A)}{\text{card}(E)}$.

► **Note 2.1.**
Une *fréquence* peut s'exprimer sous forme d'une fraction, d'un nombre décimal ou d'un pourcentage.

Exemple 1.1.
Au sein de votre groupe, on considère les élèves inscrits en spécialité HGGSP.

1. Quelle est la population E étudiée ? ______________________________
2. Citer une sous-population de E. ______________________________
3. Calculer la proportion des élèves inscrits en spécialité HGGSP au sein de votre groupe.

____

1.1.2 Tableau croisé d'effectifs

Soient A une sous-population de E dont les individus possèdent le caractère « A » et B une sous-population de E dont les individus possèdent le caractère « B ».

Définition 1.1. *Inter*

> $A \cap B$ est l'ensemble des individus de E qui possèdent à la fois le caractère « A » _____ le caractère « B ».

Définition 2.1. *Union*

> $A \cup B$ est l'ensemble des individus de E qui possèdent à la fois le caractère « A » _____ le caractère « B ».

Propriété 2.1.
On peut dresser un *tableau croisé d'effectifs* des caractères « A » et « B » dans un tableau à double entrée.

Illustration.

Caractères	B	$\overline{B}$	Total
A			
$\overline{A}$			
Total			Card(E)

Exemple 2.1.
Un fleuriste se fournit en roses auprès de trois producteurs. Il dénombre pour cela, les roses selon leur producteur et leur poids.
Les résultats sont consignés dans le tableau ci-dessous :

Caractères	Producteur A	Producteur B	Producteur C	Total
50 g	15	40	15	70
60 g	20	25	55	100
70 g	30	20	30	80
Total	65	85	100	250

1. (a) Quelle est la population étudiée ? ____________________

   (b) Quel est son cardinal ? ____________________
2. Citer les caractères étudiés sur cette population ainsi que leur type.
3. Calculer la fréquence de roses provenant du producteur A dans cette population ?

Exemple 3.1.
On considère le tableau croisé d'effectifs ci-dessous réalisé à partir d'une population E de cardinal 200.
On sait que $\text{card}(A) = 120$, $\text{card}(B) = 110$ et $\text{card}(\overline{A} \cap B) = 60$.
Compléter ce tableau.

Caractères	B	$\overline{B}$	Total
A			
$\overline{A}$			
Total			

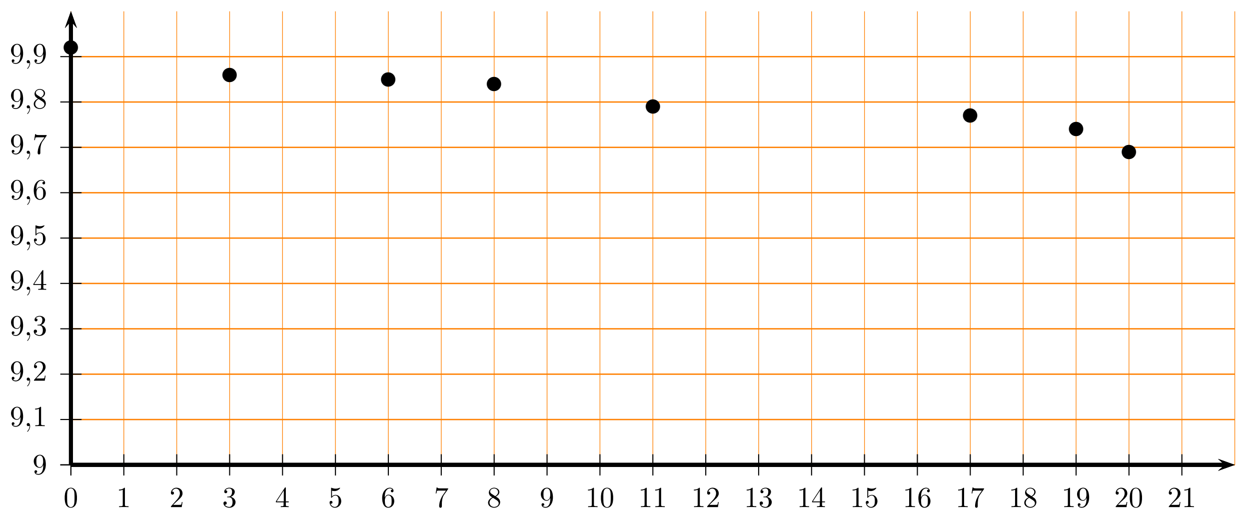
1.2 Représentations graphiques

1.2.1 Nuage de points

▶ **Note 3.1.**
Lorsqu'une population possède deux caractères *quantitatifs*, il est parfois utile de représenter ces caractères par un *nuage de points*.

Exemple 4.1.
Le tableau ci-dessous retrace l'évolution sur vingt ans du record du monde du 100m en athlétisme chez les hommes. L'année initiale est 1998 qui correspond donc au rang 0.

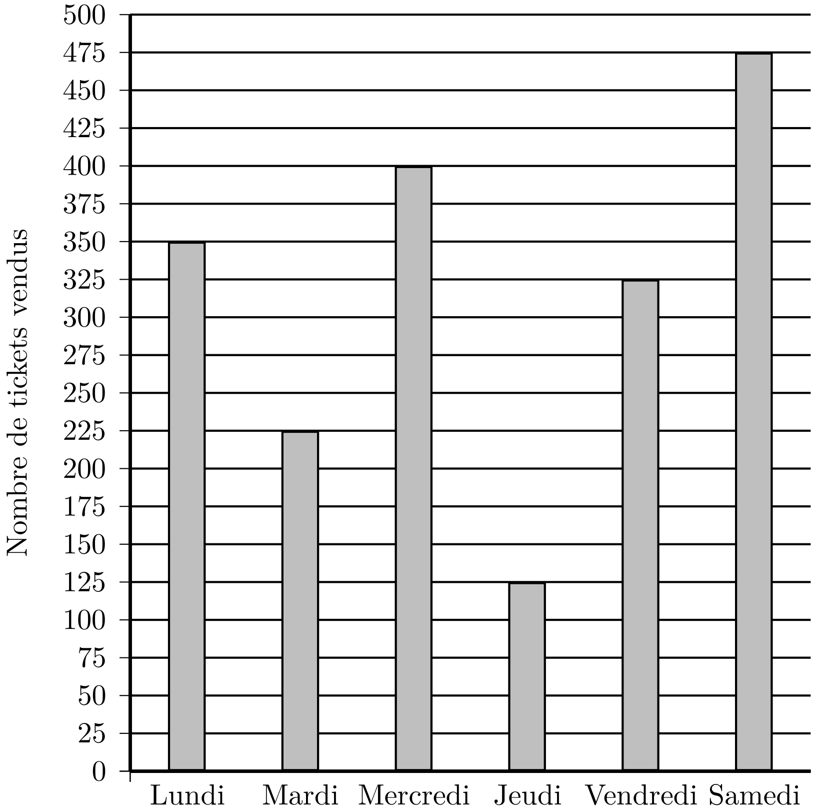
	Année	Rang de l'année	Temps en seconde
Carl Lewis	1988	0	9,92
Carl Lewis	1991	3	9,86
Leroy Burrell	1994	6	9,85
Donovan Bailey	1996	8	9,84
Maurice Greene	1999	11	9,79
Asafa Powell	2005	17	9,77
Asafa Powell	2007	19	9,74
Usain Bolt	2008	20	9,69



1.2.2 Diagramme en barres

▶ Note 4.1.
Pour représenter deux caractères, l'un qualitatif, l'autre quantitatif *discret*, on utilise un *diagramme en barres.*

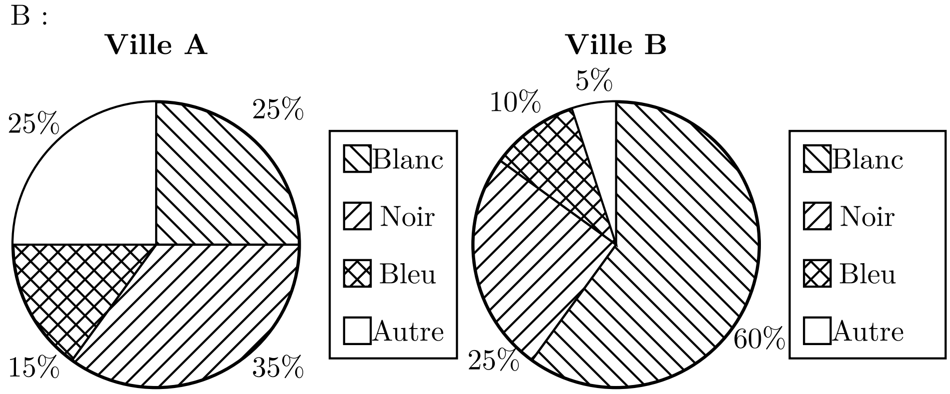
Exemple ci-dessous du diagramme des ventes des tickets durant 6 jours pour assister au concert d'un artiste pas encore très connu :



1.2.3 Diagramme circulaire

▶ Note 5.1.
Pour visualiser la répartition d'un caractère dans une population, on peut utiliser un *diagramme circulaire.*

Les diagrammes circulaires ci-dessous représentent la répartition des voitures selon leur couleur, dans deux villes A et B :



1.3 Les exercices du chapitre

○○○ **Exercice 1.**
Une salle de sport a référencé ses clients dans le tableau suivant :

	Yoga	CrossFit	Total
Femmes	86	64	150
Hommes	44	106	150
Total	130	170	300

1. Combien de femmes font du CrossFit ?
2. Calculer la fréquence des hommes qui fréquentent la salle de sport.

●○○ **Exercice 2.**
On a répertorié les animaux d'un chenil selon leur espèce et leur tranche d'âge.
Les résultats sont consignés dans le tableau suivant :

	Chien	Chat	Total
Moins d'un an	4	10	14
Un an et plus	32	44	76
Total	36	54	90

1. (a) Quelle est la population étudiée ?
   (b) Quel est son cardinal ?
2. Citer les caractères étudiés sur cette population ainsi que leur type.
3. Calculer la fréquence de chats dans la population.

●●○ **Exercice 3.**
On considère une population E de cardinal 400 dans laquelle on étudie deux caractères « A » et « B ».
On sait que $f(A) = 10\%$ et $f(\overline{B}) = 40\%$.
Calculer $\text{card}(A)$ et $\text{card}(B)$.

●●○ **Exercice 4.**
Dans une population E, on étudie deux caractères « A » et « B ».
On suppose que :
$\text{card}(E) = 3\,000$, $\text{card}(A) = 1\,500$,
$\text{card}(\overline{B}) = 1\,200$ et $\text{card}(\overline{A} \cap B) = 800$.

1. Compléter le tableau croisé des effectifs :

	A	$\overline{A}$	Total
B			
$\overline{B}$			
Total			

2. Calculer la fréquence de B notée $f(B)$ et la fréquence de $A \cap \overline{B}$, notée $f(A \cap \overline{B})$.

●○○ **Exercice 5.**
Un primeur reçoit une livraison de 800 kg de tomates et 1 200 kg de melons.
5% des tomates proviennent d'Espagne, 15% proviennent du Maroc, toutes les autres tomates proviennent de France.
8% des melons proviennent d'Espagne, 20% proviennent du Maroc, tous les autres melons proviennent de France.

1. Compléter le tableau croisé d'effectifs :

	kg de tomates	kg de melons	Total
Espagne			
Maroc			
France			
Total			

2. Calculer la fréquence de tomates qui proviennent de l'étranger.
3. Parmi les melons, quelle est la proportion de melons français ?

●●○ **Exercice 6.**
Les jardiniers de la ville doivent répartir 300 fleurs, jaunes, blanches ou roses dans les parterres de la ville.
Pour cela, ils disposent uniquement de tulipes et de 120 jacinthes. Chaque fleur est soit blanche, soit jaune soit rose.
50 % des jacinthes ainsi que 40 tulipes sont blanches, 80 tulipes sont roses et 90 fleurs sont jaunes.

1. Construire un tableau croisé d'effectifs montrant la répartition des fleurs selon leur nom et couleur.
2. Calculer la fréquence de jacinthes sur le total des fleurs.

CHAPITRE

2

Phénomènes aléatoires

2.1 Fréquences conditionnelles et marginales

Un contexte : une association récupère des vélos jetés à la déchetterie d'Urrugne pour éventuellement les remettre en état. Ces vélos sont de deux types : adulte ou enfant. Leur état est classé en trois catégories : bon état (prêts à rouler) ; réparable (peuvent être remis en état en moins de deux heures) ; non réparable (trop de réparation à faire). Voici le nombre de vélos traités en un mois.

	Bon état	Réparable	Non réparable	Total
Adulte	7	26	12	
Enfant		18	5	26
Total				

2.1.1 Fréquences conditionnelles

Définition 1.2. *Fréquence conditionnelle*

On appelle *fréquence conditionnelle* de B parmi A, notée $f_A(B)$ (se lit f de B parmi A), la fréquence du caractère B dans *la sous-population* A.

$$f_A\left(B\right) = \frac{\text{card}\left(A \cap B\right)}{\text{card}\left(A\right)}$$

Exemple 1.2.

Calculer la fréquence conditionnelle des vélos non réparables parmi les vélos adultes.

2.1.2 Fréquences marginales

Définition 2.2. *Fréquence marginale*

On appelle *fréquence marginale*, le quotient de la somme des effectifs d'une ligne (ou d'une colonne) par l'effectif total.

Exemple 2.2.
Calculer la fréquence marginale des vélos en bon état.

2.2 Probabilités conditionnelles

Dans ce paragraphe, on considère une seule expérience aléatoire d'univers $\mathbb{U}$.

2.2.1 Lien fréquence-probabilité

Propriété 1.2. *Loi des grands nombres*
Quand on répète un grand nombre de fois une expérience aléatoire, la fréquence d'apparition d'une issue se stabilise autour d'une valeur. On prend alors cette valeur comme probabilité de l'issue.

2.2.2 Probabilités conditionnelles

Définition 3.2.
Soient A et B deux événements d'un même univers $\mathbb{U}$, tels que $\text{card}\,(B) \neq 0$.
La *probabilité que A soit réalisé sachant que B est réalisé* est le nombre noté $\mathbf{P}_B\,(A)$ et défini par :

$$\boxed{\mathbf{P}_B\,(A) = \frac{\text{card}\,(A \cap B)}{\text{card}\,(B)}}$$

Propriété 2.2. *Conséquence*
Soient A et B deux événements d'un même univers $\mathbb{U}$, tels que $\mathbf{P}\,(B) \neq 0$.

$$\boxed{\mathbf{P}_B\,(A) = \frac{\mathbf{P}\,(A \cap B)}{\mathbf{P}\,(B)}}$$

Exemple 3.2.
On a placé dans un panier différents poivrons suivants leur couleur, leur provenance :

	Jaune	Rouge	Total
Espagne	1	2	3
France	4	5	9
Total	5	7	12

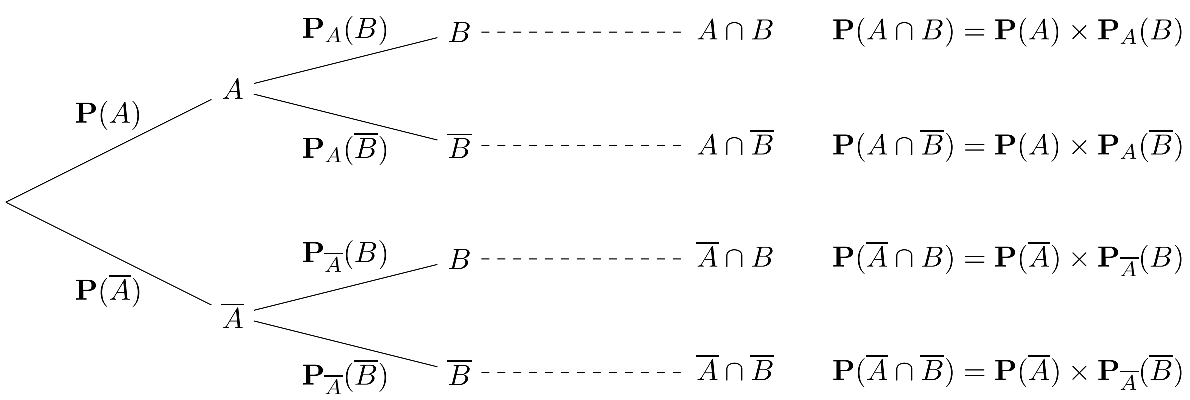
On choisit au hasard un poivron de ce panier et on note les événements :

- F : « le poivron provient de France ».
- J : « le poivron est de couleur jaune ».

Calculer la probabilité conditionnelle $\mathbf{P}_J(F)$ et interpréter ce résultat.

2.2.3 Arbres pondérés

On peut modéliser une expérience aléatoire par un arbre pondéré de probabilités.
Un arbre pondéré de probabilités est constitué de *branches*.
Les événements A, $\overline{A}$, B et $\overline{B}$ s'appellent des nœuds.
$\overline{A}$ est *l'événement contraire* de A.



Propriété 3.2. *Règles de calculs*

- La *somme* des probabilités des branches issues d'un même ____________ vaut toujours ______.
- La probabilité de l'événement correspondant à un chemin (constitué de plusieurs branches) est égale au ________________________ des probabilités inscrites sur chaque branche du chemin.
- La probabilité d'un événement est la __________________ des probabilités des chemins menant à cet événement.

Exemple 4.2.
Le coyote est un animal sauvage proche du loup, qui vit en Amérique du Nord.

Dans l'état d'Oklahoma, aux États-Unis, 70 % des coyotes sont touchés par une maladie appelée ehrlichiose.

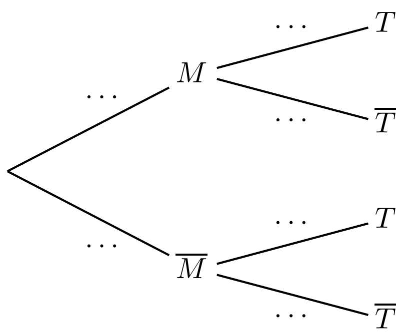
Il existe un test aidant à la détection de cette maladie. Lorsque ce test est appliqué à un coyote, son résultat est soit positif, soit négatif, et on sait que :

- Si le coyote est malade, le test est positif dans 97 % des cas.
- Si le coyote n'est pas malade, le test est négatif dans 95 % des cas.

Des vétérinaires capturent un coyote d'Oklahoma au hasard et lui font subir un test pour l'ehrlichiose et on considère les évènements suivants :

- M : « le coyote est malade » ;
- T : « le test du coyote est positif ».

1. Compléter l'arbre pondéré ci-dessous qui modélise la situation.



2. Déterminer la probabilité que le coyote soit malade et que son test soit positif.

3. Démontrer que la probabilité de T est égale à $0,694$.

4. On appelle « valeur prédictive positive du test » la probabilité que le coyote soit effectivement malade sachant que son test est positif.
   Calculer la valeur prédictive positive du test. On arrondira le résultat au millième.

2.3 Indépendance

2.3.1 Événements indépendants

Dans ce paragraphe, on considère une seule expérience aléatoire d'univers $\mathbb{U}$.

Définition 4.2.

Soient A et B deux événements de probabilité non nulle.
On dit que B est *indépendant* de A si $\mathbf{P}_A(B) = \mathbf{P}(B)$, autrement dit si la réalisation ou non de l'événement A n'a aucune influence sur celle de B.
Dans ce cas, on a alors aussi $\mathbf{P}_B(A) = \mathbf{P}(A)$, autrement dit A est indépendant de B aussi.

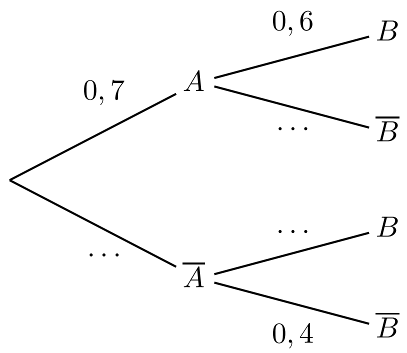
Ne pas confondre **indépendants** et **incompatibles.**
On rappelle que deux événements sont *incompatibles* si et seulement si $\mathbf{P}(A \cap B) = 0$.

Propriété 4.2.
Soient A et B deux événements de probabilité non nulle.
A et B sont *indépendants si et seulement si* :

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) \times \mathbf{P}(B)$$

Propriété 5.2.
Si A et B sont *indépendants*, alors $\overline{A}$ et B, A et $\overline{B}$ ainsi que $\overline{A}$ et $\overline{B}$ le sont également.

Exemple 5.2.



1. Compléter cet arbre.
2. Calculer $\mathbf{P}(B)$.

3. Les événements A et B sont-ils indépendants ?

2.3.2 Succession d'expériences indépendantes

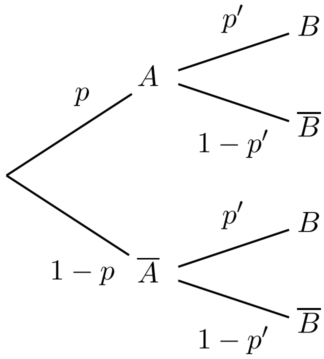
Dans ce paragraphe, on considère des expériences aléatoires qui se succèdent.

Définition 5.2.

Des expériences aléatoires qui se succèdent sont *indépendantes* si le résultat de chacune n'influe pas sur le résultat des autres (par exemple tirages avec remises).

Définition 6.2. *Cas de deux expériences*

On considère deux expériences aléatoires indépendantes qui se succèdent.
Si on note A un événement élémentaire de la première expérience aléatoire tel que $\mathbf{P}(A) = p$ et B un événement élémentaire de la deuxième tel que $\mathbf{P}(B) = p'$, on peut représenter la *succession de ces expériences indépendantes* par l'arbre de probabilité ci-dessous :

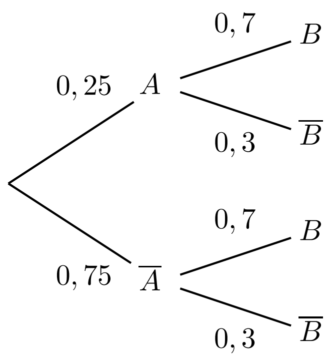


► Note 1.2.
Cette méthode de construction d'un arbre de probabilités permet également :

- de représenter la succession de trois, quatre... expériences aléatoires indépendantes ;
- de représenter la répétition de manière indépendante d'une expérience aléatoire.

Propriété 6.2.
La probabilité de l'événement correspondant à un chemin est égale au *produit* des probabilités de chaque branche du chemin.

Exemple 6.2.
On considère l'arbre ci-dessous modélisant la répétition de deux épreuves indépendantes :



Calculons $\mathbf{P}(\overline{A} \cap B)$.

2.4 Les exercices du chapitre

1. Fréquences marginales

○○○ **Exercice 7.**
Dans une classe de PME, l'effectif des employés se répartit de la façon suivante :

	Cadres	Employés
Parle anglais	25	52
Ne parle pas anglais	8	15

1. Calculer la fréquence marginale des employés parlant anglais.
2. Calculer la fréquence marginale des cadres ne parlant pas anglais.

●●● **Exercice 8.**
200 personnes travaillent dans une PME.
Cette entreprise compte 20% de cadres et 80% d'employés.
30% des cadres et 15 % des employés parlent anglais.
Calculer la fréquence marginale des personnels parlant anglais.

●○○ **Exercice 9.**
L'établissement français du sang a fait un bilan sur 2 000 donneurs :

	A	B	AB	O
Rhésus +	656	162	83	720
Rhésus −	144	38	17	180

1. Calculer la fréquence marginale des personnes du groupe O.
2. Calculer la fréquence marginale des personnes de rhésus +.

2. Fréquences conditionnelles

●○○ **Exercice 10.**
Dans une classe de Première, la répartition des 35 élèves se fait de la façon suivante :

	Filles	Garçons	Total
Spé Maths	7	15	
Non spé Maths	8	5	
Total			

1. Compléter le tableau.
2. Calculer la fréquence conditionnelle des garçons parmi les élèves ayant choisi la spécialité mathématique.
3. Calculer la fréquence conditionnelle des élèves ayant choisi la spécialité mathématique parmi les filles.

●●○ **Exercice 11.**
Un laboratoire teste un vaccin sur un panel de volontaires. Pour cela, il recrute 175 volontaires, 90 d'entre eux ont été vaccinés.
120 volontaires ont développé la maladie parmi lesquels 80 n'étaient pas vaccinés.

1. Compléter le tableau ci-dessous.

	Malade	Non malade	Total
Vacciné			
Non vacciné			
Total			

2. Calculer la fréquence conditionnelle des volontaires ayant développé la maladie parmi ceux qui sont vaccinés.
3. Calculer la fréquence conditionnelle des volontaires vaccinés parmi ceux qui n'ont pas développé la maladie.

3. Probabilités et tableau

●○○ **Exercice 12.**
Un sachet contient 100 trombones.
Dans le sachet, il y a 10 grands trombones jaunes, 75 petits trombones et 65 trombones rouges.

1. Compléter le tableau :

	Petits ($\overline{G}$)	Grands (G)	Total
Jaune (J)			
Rouge ($\overline{J}$)			
Total			

On prend un trombone au hasard.

2. Calculer la probabilité que le trombone soit rouge.
3. Calculer $\mathbf{P}(\overline{J} \cap G)$ et interpréter ce résultat.
4. Calculer la probabilité que le trombone soit petit et jaune.

●○○ **Exercice 13.**
Dans un centre commercial, on interroge 150 clients.
115 ont reçu le catalogue du magasin, parmi eux, 60 ont acheté des articles de promotion, 15 clients n'ont pas acheté des articles en promotion et n'ont pas reçu le catalogue.

1. Compléter le tableau ci-dessous :

	Promo (R)	Pas promo ($\overline{R}$)	Total
Catalogue (C)			
Pas catalogue ($\overline{C}$)			
Total			150

On choisit au hasard un client.

2. Calculer la probabilité qu'il ait acheté un article en promotion, sachant qu'il a lu le catalogue.

3. Calculer la probabilité qu'il ait reçu le catalogue sachant qu'il n'a acheté aucun article en promotion.

●●○ Exercice 14.
Dans une pizzeria, il est possible de commander des pizzas avec une base tomate ou de crème fraîche. La répartition en fonction de la taille de ces pizzas est concentrée dans le tableau ci-dessous :

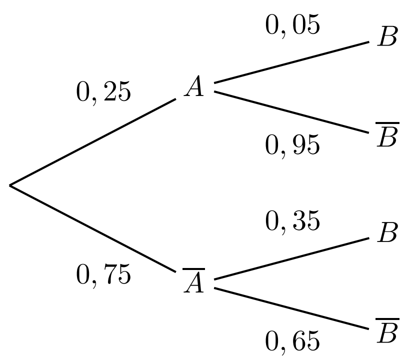
	Moyen (M)	Grande (G)	Total
Tomate(T)	22	53	75
Crème fraîche	16	19	35
Total	38	72	110

On prend une pizza au hasard.

1. Calculer $\mathbf{P}(M \cap T)$ et interpréter le résultat.
2. Calculer $\mathbf{P}_M(T)$ et interpréter le résultat.
3. Calculer la probabilité de prendre une grande pizza sachant qu'elle a une base tomate.

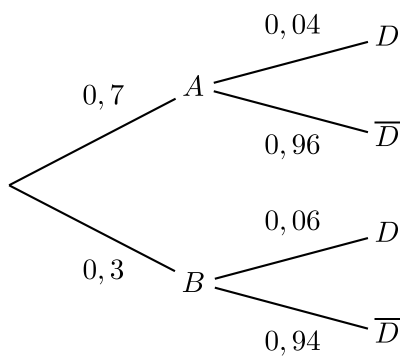
4. Probabilités et arbre

○○○ Exercice 15.
On donne l'arbre de probabilité suivant :



Préciser les valeurs de $\mathbf{P}(A)$, $\mathbf{P}_{\overline{A}}(B)$ et $\mathbf{P}_A(\overline{B})$.

●○○ Exercice 16.
Une coopérative commercialise des biscuits produits par deux entreprises A et B.
Parmi les biscuits, certains présentent un défaut (casse, taille,...).
On note D l'événement « le biscuit présente un défaut ».
On obtient l'arbre pondéré suivant :



1. Donner la probabilité que le biscuit présente un défaut sachant qu'il est produit par l'entreprise A.

2. Donner $\mathbf{P}_B(\overline{D})$ et interpréter le résultat obtenu.
3. Calculer $\mathbf{P}(A \cap \overline{D})$ et interpréter le résultat obtenu.

●●● Exercice 17.
Un audioprothésiste compte parmi ses clients 75 % de personnes âgées de plus de 50 ans. Parmi celles-ci, 80 % souffrent de problèmes d'audition aux deux oreilles. Ce taux chute à 40 % parmi les clients de moins de 50 ans.

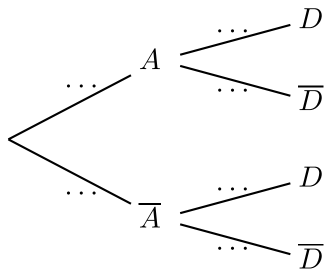
On choisit au hasard le dossier médical d'un client ; chaque dossier a la même probabilité d'être choisi.

On considère les événements suivants :

— A : « le client est âgé de plus de 50 ans » ;

— D : « le client souffre de problèmes auditifs aux deux oreilles ».

1. (a) En utilisant les données fournies par l'énoncé, donner les probabilités $\mathbf{P}(A)$ et $\mathbf{P}_{\overline{A}}(D)$.
   (b) Compléter l"arbre pondéré de probabilités qui traduit la situation.



2. (a) Calculer la probabilité que le client choisi ait plus de 50 ans et souffre de problèmes auditifs aux deux oreilles.
   (b) Calculer $\mathbf{P}(T)$ et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
3. Le client choisi ne souffre pas de problème auditif aux deux oreilles. Calculer la probabilité qu'il soit âgé de plus de 50 ans.

●●○ Exercice 18.
La leucose féline est une maladie touchant les chats ; elle est provoquée par un virus.

Dans un grand centre vétérinaire, on estime à 40 % la proportion de chats porteurs de la maladie.

On réalise un test de dépistage de la maladie parmi les chats présents dans ce centre vétérinaire.

Ce test possède les caractéristiques suivantes.

- Lorsque le chat est porteur de la maladie, son test est positif dans 90 % des cas.
- Lorsque le chat n'est pas porteur de la maladie, son test est négatif dans 85 % des cas.

On choisit un chat au hasard dans le centre vétérinaire et on considère les évènements suivants :

- M : « Le chat est porteur de la maladie » ;
- T : « Le test du chat est positif » ;
- $\overline{M}$ et $\overline{T}$ désignent les évènements contraires des évènements M et T respectivement.

1. Traduire la situation par un arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité que le chat soit porteur de la maladie et que son test soit positif.
3. Montrer que la probabilité que le test du chat soit positif est égale à $0,45$.
4. On choisit un chat parmi ceux dont le test est positif. Calculer la probabilité qu'il soit porteur de la maladie.

5. Indépendance

○○○ **Exercice 19.**
Soient A et B deux événements indépendants d'un même univers $\mathbb{U}$.
On sait que $\mathbf{P}(B) = 0,3$ et $\mathbf{P}(A) = 0,5$.

1. Déterminer $\mathbf{P}_A(B)$ et $\mathbf{P}_B(A)$.
2. Calculer $\mathbf{P}(A \cap B)$

●○○ **Exercice 20.**
Soient A et B deux événements indépendants d'un même univers $\mathbb{U}$ tels que $\mathbf{P}(A) = 0,2$, $\mathbf{P}(B) = 0,8$ et $\mathbf{P}(A \cap B) = 0,16$.

1. A et B sont-ils indépendants ?
2. En déduire $\mathbf{P}_B(A)$ et $\mathbf{P}_A(B)$.

●●● **Exercice 21.**
Selon les autorités sanitaires d'un pays, 7 % des habitants sont affectés par une certaine maladie.

Dans ce pays, un test est mis au point pour détecter cette maladie. Ce test a les caractéristiques suivantes :

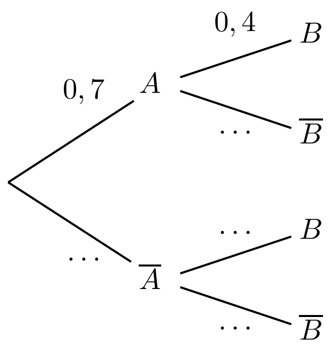
- Pour les individus malades, le test donne un résultat négatif dans 20 % des cas ;
- Pour les individus sains, le test donne un résultat positif dans 1 % des cas.

Une personne est choisie au hasard dans la population et testée.
On considère les évènements suivants :

- M « la personne est malade » ;
- T « le test est positif ».

1. En utilisant un arbre pondéré, calculer la probabilité de l'évènement $M \cap T$.
2. Démontrer que la probabilité que le test de la personne choisie au hasard soit positif, et de 0,065 3.
3. On considère dans cette question que la personne choisie au hasard a eu un test positif.
   Quelle est la probabilité qu'elle soit malade ? On arrondira le résultat à 10^{-2} près.
4. Les événements M et T sont-ils indépendants ? Justifier.

●○○ **Exercice 22.**
Soient A et B deux événements indépendants associés à un même univers $\mathbb{U}$.
Compléter l'arbre ci-dessous :

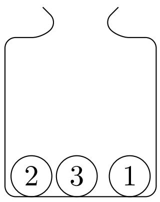


●○○ **Exercice 23.**
Deux urnes contiennent des boules numérotées indiscernables au toucher. Le schéma ci-contre représente le contenu de chacune des urnes.

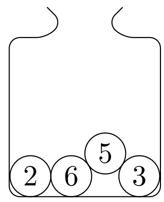
On forme un nombre entier à deux chiffres en tirant au hasard une boule dans chaque urne, de façon indépendante.

— le chiffre des dizaines est le numéro de la boule issue de l'urne D ;

— le chiffre des unités est le numéro de la boule issue de l'urne U.



Urne D



Urne U

1. Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité de former un nombre premier.

CHAPITRE

3

Modèles linéaires

3.1 Phénomènes continus

3.1.1 Retour sur les fonctions affines

Définition 1.3.

Les fonctions f, définies sur $\mathbb{R}$, dont l'expression peut se mettre sous la forme ________________, où m et p sont des réels, sont appelées *fonctions affines*.

Exemple 1.3.

▶ Note 1.3.

1. *Si* $m = 0$ alors $f(x) = p$ est dite ________________.
2. *Si* $p = 0$ alors $f(x) = mx$ est dite ________________.

3.1.2 Représentation graphique

Le plan est muni d'un repère.

Propriété 1.3.
La représentation graphique d'une *fonction affine* est *une droite*.

▶ Note 2.3.

— Lorsque la fonction est *linéaire*, elle est représentée par une droite passant par *l'origine du repère*.

— Lorsque la fonction est *constante*, elle est représentée par une droite *parallèle à l'axe des abscisses*.

3.1.3 Coefficient directeur

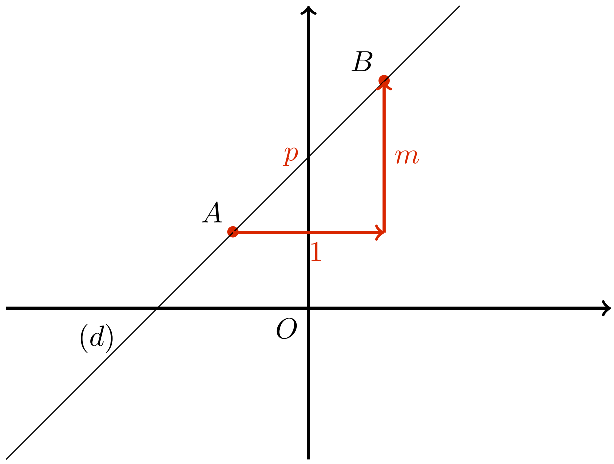
Définition 2.3.

Si $f(x) = mx + p$ alors m est le ____________________________________ (appelé aussi pente) de la droite représentant f et p est *l'ordonnée à l'origine* (image de 0 par f).

Propriété 2.3.
Soient f une fonction affine définie par $f(x) = mx + p$ et (d) la droite qui la représente dans un repère.
Soient $\mathrm{A}(x_\mathrm{A}\,;\,y_\mathrm{A})$ et $\mathrm{B}(x_\mathrm{B}\,;\,y_\mathrm{B})$ de (d) tels que $x_\mathrm{A} \neq x_\mathrm{B}$ alors :

$$\boxed{m = \frac{f(x_\mathrm{B}) - f(x_\mathrm{A})}{x_\mathrm{B} - x_\mathrm{A}} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

Illustration.



Exemple 2.3.
f est une fonction affine telle que $f(1) = 4$ et $f(-3) = -8$.
Déterminer l'expression de $f(x)$.

3.2 Phénomènes discrets

3.2.1 Notion de suite numérique

Définitions.

- On appelle *suite numérique* toute fonction $u \ : \ n \longmapsto u(n)$ définie pour n entier naturel.
- Les images $u(n)$ sont les *termes de la suite* et se nomment également u_n (« u indice n »).
- Les entiers naturels n sont appelés les *rangs* (ou les *indices*) des termes.
  Comme ils sont **entiers**, on dit qu'une suite modélise des **phénomènes discrets**.

▶ **Note 3.3.**
Une suite u se note également $(u(n))$ ou encore (u_n), notation que l'on privilégiera.

3.2.2 Suite arithmétique

Définition 3.3.
Soit (u_n) une suite numérique.
On dit que la suite (u_n) est *arithmétique* s'il existe un nombre réel r tel que pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = u_n + r$$

Cette relation est appelée *relation de récurrence de la suite arithmétique* et le nombre r est appelé la *raison* de la suite arithmétique.

Exemple 3.3.
Soit (u_n) une suite arithmétique.

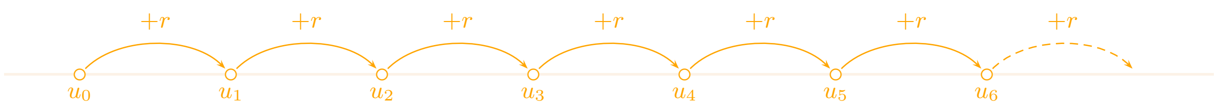
1. $u_0 = 5$
2. $u_1 = 9$
3. $u_2 = \dots$
4. $u_3 = \dots$
5. $u_4 = \dots$

Propriété 3.3.
(u_n) est une *suite arithmétique* de raison r et de premier terme u_0 **si et seulement si** pour tout entier naturel n on a :

$$u_n = u_0 + nr$$

Cette expression est appelée **forme explicite de la suite arithmétique**.
On dit alors que l'on a exprimé *le terme général* u_n en fonction de n.

Illustration.



Exemple 4.3.
L'activité d'une entreprise étant florissante, en moyenne 7 nouveaux employés ont été embauchés chaque année. En 2021, elle comptait 38 employés, et on suppose que cette progression va se poursuivre dans les années à venir.

On appelle u_n le nombre d'employés l'année $2021 + n$.

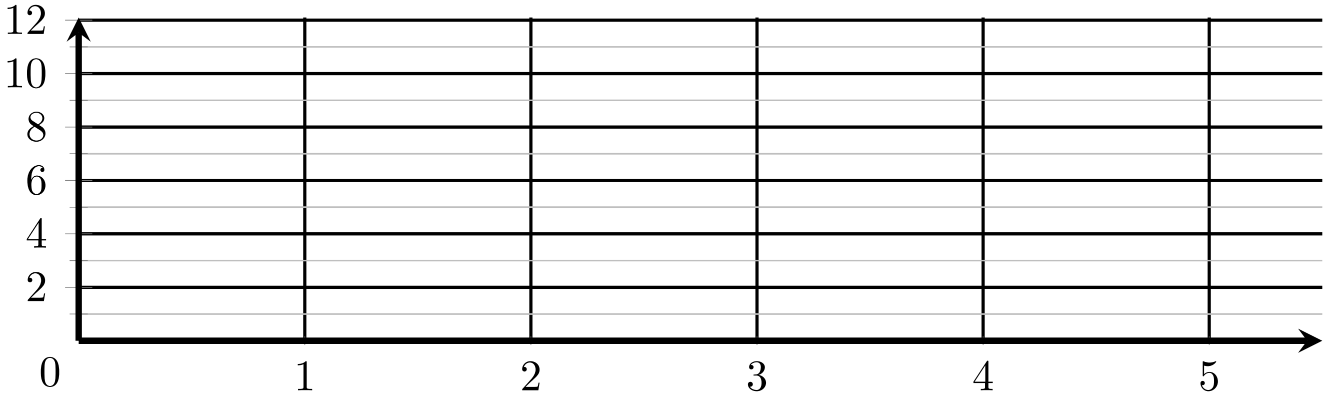
1. Donner les cinq premiers termes de la suite.

2. Combien y aura-t-il d'employés en 2035 ?

3.2.3 Représentation graphique

Définition 4.3.
La représentation graphique d'une suite u est le nuage de points de coordonnées $(n\,;\,u_n)$.
Dans le cas d'une *suite arithmétique*, les points de coordonnées $(n\,;\,u(n))$ sont *alignés* et sont situés sur la droite d'équation $y = u(0) + rx$.

Exemple 5.3.
Représenter graphiquement les quatre premiers termes de la suite (u_n) arithmétique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $r = 2$:



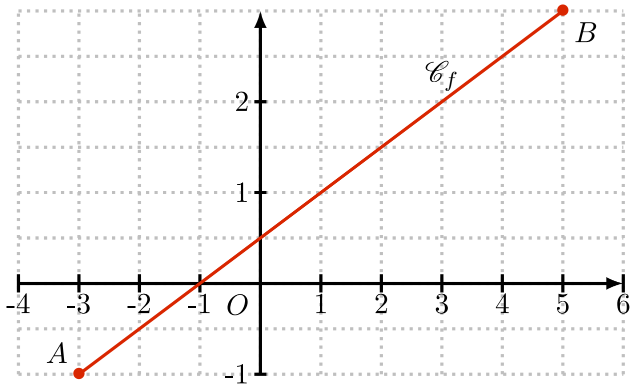
3.3 Les exercices du chapitre

1. Fonctions affines

○○○ **Exercice 24.**
Justifier que les fonctions suivantes sont des fonctions affines :

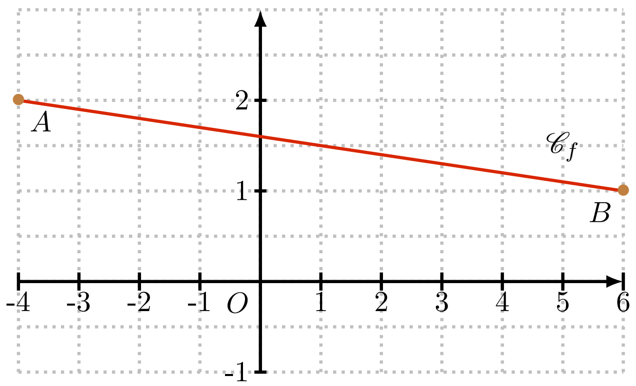
1. $f_1 : x \longmapsto 5x + 4$
2. $f_2 : x \longmapsto 5 - 3x$
3. $f_3 : x \longmapsto -\dfrac{x}{4}$

●○○ **Exercice 25.**
On donne ci-après la droite représentative d'une fonction affine :



1. Lire x_A, x_B, y_A et y_B.
2. De A à B quel est l'accroissement des x ? Celui des y ?
3. Calculer le coefficient directeur de la droite (AB).
4. En déduire l'équation de la fonction affine représentée par (AB).

●○○ **Exercice 26.**
Mêmes questions que précédemment avec la droite donnée ci-après :



●○○ **Exercice 27.**
Représenter graphiquement les fonctions f, g et h définies sur $\mathbb{R}$ par :

1. $f(x) = 2x - 1$
2. $g(x) = -\dfrac{3}{4}x + 3$

3. $h(x) = \dfrac{3}{7}x$

●●● Exercice 28.
Déterminer la fonction affine f vérifiant :

$$f(2) = 12 \text{ et } f(-4) = -18$$

●○○ Exercice 29.
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x + 4$.

1. Justifier que f est affine.
2. Calculer l'image de 3 par la fonction f.
3. Prouver que l'antécédent de 1 est négatif.

●●● Exercice 30.
Déterminer la fonction affine f vérifiant :

$$f(5) = -10 \text{ et } f(6) = -12$$

●○○ Exercice 31.
On donne la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = 2x - 3$.
Compléter le tableau de valeurs suivant :

x	-3	-2	0	1
$f(x)$				

●○○ Exercice 32.
On donne la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = -3x + 1$.
Compléter le tableau de valeurs suivant :

x	-5	-3	0	5
$f(x)$				

2. Suites arithmétiques

○○○ Exercice 33.
Soit la suite (u_n) arithmétique telle que $u_2 = 4$ et $u_3 = 9$.

1. Calculer la raison r de cette suite arithmétique.
2. Calculer u_4 et u_0.

●○○ Exercice 34.
Soit la suite (u_n) arithmétique telle que $u_1 = 2,5$ et $u_3 = 8,5$.

1. Calculer u_2.
2. Calculer la raison r de cette suite arithmétique.
3. Calculer le premier terme et le cinquième terme de cette suite.

●●○ Exercice 35.

On considère la suite (u_n) définie par $u_1 = 4$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = -0,1 + u_n$$

1. Démontrer que cette suite (u_n) est arithmétique.
   Préciser sa raison.
2. Calculer le premier terme de cette suite.
3. Calculer le terme de rang 3 de cette suite.

●○○ Exercice 36.

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = 5 + 3n$.

1. Calculer le premier terme de cette suite.
2. Préciser la raison de cette suite.
3. Calculer le terme de rang 3.

●○○ Exercice 37.

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = -4n + 13$.

1. Calculer le premier terme de cette suite.
2. Préciser la raison de cette suite.
3. Pour quelle valeur de n a-t-on $u_n = -11$?

●●○ Exercice 38.

Depuis l'an 2000 en France, l'espérance de vie à la naissance progresse de $0,25$ an par an pour les hommes et de $0,15$ an pour les femmes.
En 2017, cette espérance de vie était de $79,4$ ans pour les hommes et de $85,3$ ans pour les femmes.
On note u_n l'espérance de vie d'une femme pour l'année $2017 + n$.

1. Justifier que l'espérance de vie pour les femmes peut être modélisé par la suite (u_n) définie par $u_n = 85,3 + 0,15n$.
2. Calculer l'espérance de vie pour les femmes en 2023.
3. On note (v_n) l'espérance de vie d'un homme pour l'année $2017 + n$.
   (a) Déterminer la forme explicite de la suite (v_n).
   (b) Calculer l'espérance de vie pour les hommes en 2023.

●●● Exercice 39.

Diane court chaque semaine à compter de 1er jour de l'année.
Elle s'impose un programme qui fixe la distance d_n parcourue, en km, en fonction du nombre n de semaines après le début de l'année.
On sait que $d_1 = 6$ et pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $d_{n+1} = d_n + 0,5$.

1. Quelle distance parcourt-elle la première semaine ?
2. Quelle distance parcourt-elle en plus d'une semaine à l'autre ?
3. Calculer la distance parcourue la 10e semaine.
4. À partir de quelle semaine Diane aura-t-elle parcouru pour la première fois une distance supérieure ou égale à 15 km ?

CHAPITRE

4

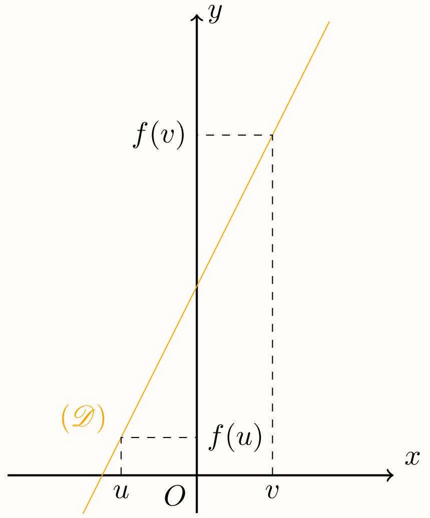
Évolution des modèles linéaires

4.1 Sens de variation des fonctions affines

Théorème.
Soit $f : x \longmapsto mx + p$ une fonction affine.

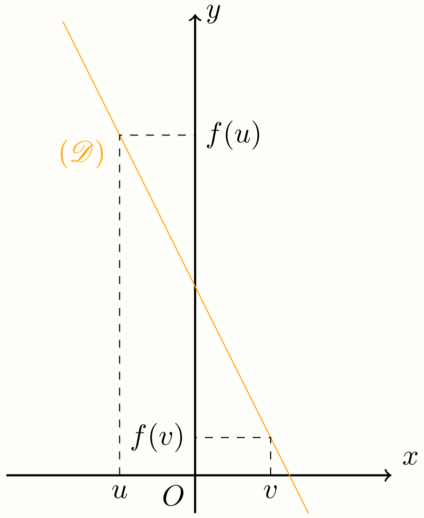
$m > 0$

Pour deux réels u et v :
si $u < v$ alors $f(u) < f(v)$.
On dit que f **conserve l'ordre** dans $\mathbb{R}$ ou encore que f est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$:



$m < 0$

Pour deux réels u et v :
si $u < v$ alors $f(u) > f(v)$.
On dit que f **ne conserve pas l'ordre** dans $\mathbb{R}$ ou encore que f est **strictement décroissante sur** $\mathbb{R}$:



▶ **Note.**
Si $m = 0$ la fonction est alors *constante* sur $\mathbb{R}$.

Exemple 1.4.
Dresser le tableau de variation des fonctions affines suivantes :

$$f(x) = 5x - 14 \text{ et } g(x) = -8x + 1$$

4.2 Sens de variation des suites arithmétiques

4.2.1 Sens de variation d'une suite

Définitions.

Soit $u\ :\ n \longmapsto u_n$ une suite définie pour tout entier naturel n.

— Quand les valeurs de n *augmentent*, si les valeurs de u_n *augmentent* aussi, on dit que la suite (u_n) est *croissante* : $u_{n+1} \geqslant u_n$.

— Quand les valeurs de n *augmentent*, si les valeurs de u_n *diminuent*, on dit que la suite (u_n) est *décroissante* : $u_{n+1} \leqslant u_n$.

4.2.2 Variation des suites arithmétiques

Propriété.
Soit (u_n) la *suite arithmétique* de premier terme u_0 et de raison r.
On a alors $u_{n+1} = u_n + r$.

— Si $r > 0$ alors (u_n) est *croissante*.

— Si $r < 0$ alors (u_n) est *décroissante*.

— Si $r = 0$ alors (u_n) est *constante*.

Exemple 2.4.
Soient les suites arithmétiques (u_n) et (v_n) telles que $u_n = 3n - 2$ et $v_n = -6n + 1$.

1. Quel est le sens de variation des suites (u_n) et (v_n) ?

2. Soit la suite (w_n) définie par $w_n = u_n + v_n$.
   (a) Déterminer la forme explicite de la suite (w_n).

   (b) En déduire le sens de variation de la suite (w_n).

4.3 Les exercices du chapitre

1. Variations des fonctions affines

○○○ **Exercice 40.**
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x - 5$.

1. Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.
2. On admet que $f(4) = 3$.
   Est-il possible que $f(5) = 2$? Justifier.

○○○ **Exercice 41.**
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3x + 12$.

1. Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer $f(4)$.
3. Sans calcul, justifier que $f(2023) < 0$..

●○○ **Exercice 42.**
Soit g la fonction affine telle que $g(2) = 2$ et $g(4) = -2$.

1. Placer dans un repère deux points de la droite (d) représentant ma fonction g.
2. Conjecturer le sens de variation de g.
3. Vérifier que $g(x) = -2x + 6$. Justifier la conjecture de la question 2.
4. Donner les coordonnées du point d'intersection de la droite (d) avec l'axe des ordonnées.

●●○ **Exercice 43.**
Soit h la fonction affine telle que $h(1) = 2$ et $h(-4) = -2$.

1. Déterminer l'expression de $h(x)$ en fonction de x.
2. Dresser le tableau de variation de h sur $\mathbb{R}$.
3. Faire le tableau de signes de h sur $\mathbb{R}$.
4. Sans calcul, donner le signe de $h(-2023)$.

2. Variations des suites arithmétiques

●●○ Exercice 44.
On considère une suite arithmétique (u_n) définie pour tout entier naturel n et telle que :

$$u_3 = -5 \text{ et } u_7 = 15.$$

1. Justifier que la suite (u_n) est croissante.
2. Calculer la raison de la suite (u_n) et vérifier donc le résultat obtenu à la question 1.
3. Calculer le premier terme de cette suite (u_n).

●●○ Exercice 45.
On considère une suite arithmétique (u_n) définie pour tout entier naturel n et telle que :

$$u_4 = 8 \text{ et } u_6 = 6.$$

1. Justifier que la suite (u_n) est décroissante.
2. Calculer la raison de la suite (u_n) et vérifier donc le résultat obtenu à la question 1.
3. Calculer le terme de rang 2 de cette suite (u_n).

●○○ Exercice 46.
On considère la suite arithmétique (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = 4n + 5$.

1. Justifier que la suite (u_n) est croissante.
2. Calculer le deuxième terme de la suite (u_n).
3. Calculer le terme de rang 2 de la suite (u_n).
4. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $u_n \geqslant 86$.

●●● Exercice 47.
On considère la suite arithmétique (v_n) telle que $v_3 = 10$ et $v_4 = 12$ et la suite arithmétique (u_n) de premier terme $u_0 = 100$ et de raison $r = -2$.
Déterminer le rang à partir duquel $v_n \geqslant u_n$.

CHAPITRE

5

Modèles exponentiels

5.1 Phénomènes discrets

5.1.1 Suites géométriques

Définition 1.5.

Soit q un nombre réel *strictement positif*.
Une suite (u_n) est une *suite géométrique* si et seulement si, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = qu_n$$

Note 1.5.

— q est appelée la *raison* de la suite géométrique (u_n).

— $u_{n+1} = qu_n$ s'appelle la *relation de récurrence* de la suite géométrique.

Exemple 1.5.

La suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 7,1u_n$.
Cette suite (u_n) est géométrique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison $q = 7,1$.

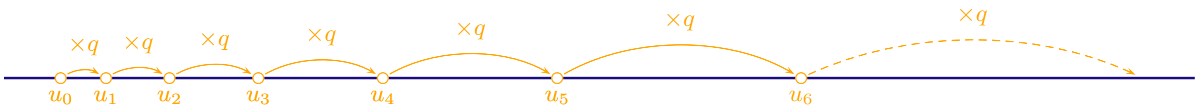
Propriété 1.5.
La suite (u_n) est géométrique de premier terme u_0 et de raison q *si et seulement si* on a $u_n = u_0 \times q^n$.

Note 2.5.
L'égalité $u_n = u_0 \times q^n$ s'appelle l'*expression explicite* de la suite géométrique (u_n).

Exemple 2.5.

Soit la suite (u_n) la suite géométrique de raison $q = 0,4$ et de premier terme $u_0 = 300$.
Déterminer l'expression récurrente de la suite (u_n) puis son expression explicite.

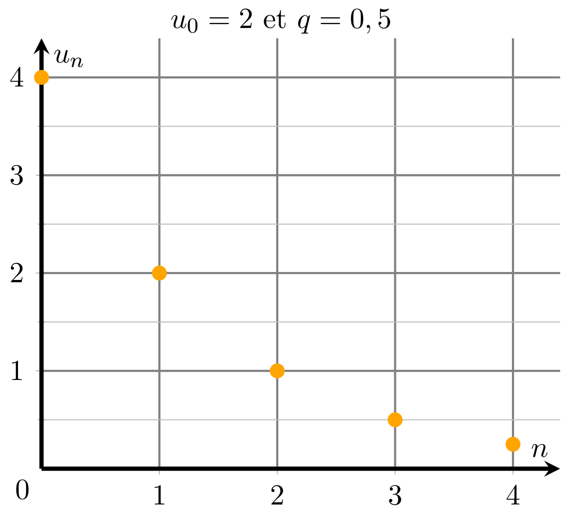
Illustration.

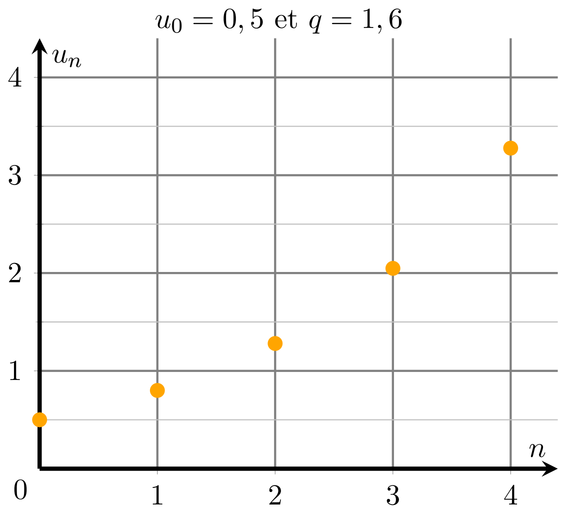


5.1.2 Représentation graphique

Définition 2.5.

Une *suite géométrique* se représente par un nuage de points de coordonnées $(n\,;\,u_n)$.
Une *suite géométrique* a une *croissance* ou *décroissance* exponentielle.





5.2 Phénomènes continus

5.2.1 Fonctions $x \ : \longmapsto a^x$

Définition 3.5.

Soit a un réel *strictement* positif.
La fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = a^x$ est appelée *fonction exponentielle* de base a.
Cette fonction est le prolongement à tout nombre x positif de la suite géométrique (u_n), de premier terme u_0 et de raison a définie pour tout entier naturel n par $u_n = a^n$.

► **Note 3.5.**
Pour tout réel $a > 0$ et tout réel $x > 0$ on a $a^x > 0$.

Exemple 3.5.
La fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = 3,14^x$ est la fonction exponentielle de base __________.

5.2.2 Propriétés algébriques

Propriétés.

- Pour tout réel a strictement positif, $a^0 = 1$.
- Pour tous réels x et y :

$$a^x \times a^y = a^{\cdots} \tag{5.1}$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{\cdots} \tag{5.2}$$

$$(a^x)^y = = a^{\cdots} \tag{5.3}$$

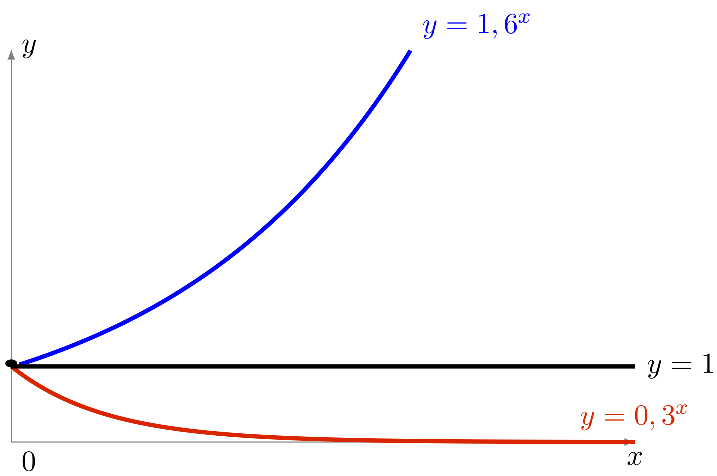
Exemple 4.5.
Dans chaque cas, écrire le résultat sous la forme $4,2^x$ où x est un nombre réel.

1. $4,2^{2,1} \times 4,2^{5,9}$
2. $\dfrac{4,2^{5,2}}{4,2^{3,3}}$
3. $\left(4,2^{3,1}\right)^{10}$

5.2.3 Représentation graphique

Propriété 2.5.
Soit a un réel strictement positif.
On peut représenter la courbe représentative de la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = a^x$ à l'aide d'une calculatrice voire d'un logiciel de géométrie dynamique.

Exemple 5.5.



5.2.4 Racine $n-$ième d'un nombre réel positif

Propriété 3.5.
Soit a un réel strictement positif et n un entier naturel non nul.
L'équation $b^n = a$ *d'inconnue* b, admet une solution unique positive : $b = a^{\frac{1}{n}}$.
$a^{\frac{1}{n}}$ s'appelle la *racine* $n-$ième de a et on la note aussi :

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

Exemple 6.5.
Résoudre dans $[0\,;+\infty[$ les équations suivantes :

1. $x^3 = 50$
2. $x^6 = 64$
3. $x^{10} = 11$

5.3 Les exercices du chapitre

1. Relation de récurrence

○○○ **Exercice 48.**
On considère la suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $q = 3$.

1. Écrire la relation de récurrence de la suite (u_n).
2. Calculer u_1 et u_2.

○○○ **Exercice 49.**
On considère la suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = 10$ et de raison $q = 1,3$.

1. Écrire la relation de récurrence de la suite (u_n).
2. Calculer u_1 et u_2.

●○○ **Exercice 50.**
On considère la suite géométrique (u_n) telle que $u_0 = 3$ et $u_1 = 12$.

1. Calculer la raison q de cette suite géométrique.
2. Écrire la relation de récurrence de la suite (u_n).

●○○ **Exercice 51.**
On considère la suite géométrique (u_n) telle que $u_0 = 4$ et $u_3 = 32$.

1. Calculer la raison q de cette suite géométrique.
2. Écrire la relation de récurrence de la suite (u_n).

2. Utiliser la forme explicite

●○○ **Exercice 52.**
On considère la suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $q = 4$.

1. Écrire la formule explicite de cette suite géométrique.
2. Calculer u_1 et u_2.

●○○ **Exercice 53.**
On considère la suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = 50$ et de raison $q = 0,8$.

1. Écrire la formule explicite de cette suite géométrique.
2. Calculer u_1 et u_2.

●○○ **Exercice 54.**
Les suites ci-dessous sont définies pour tout entier naturel n et sont des suites géométriques.
Déterminer leur premier terme et leur raison.

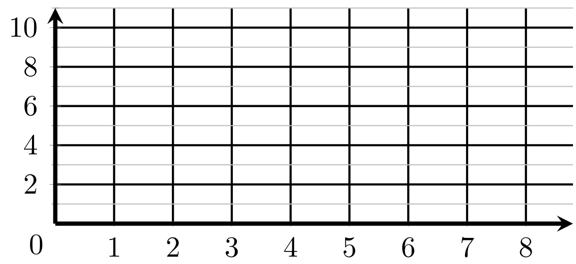
1. $u_n = 3 \times 0,8^n$
2. $v_n = 5,2 \times 7^n$
3. $w_n = 4 \times 1,2^n$

●○○ **Exercice 55.**
On considère la suite géométrique vérifiant
$u_2 = 6$ et de raison $q = 2$

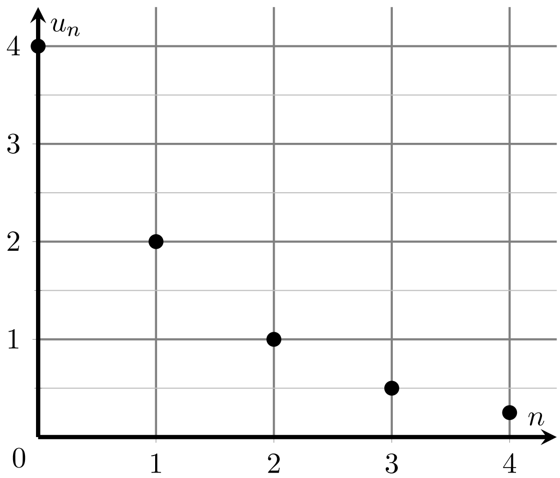
1. Écrire la formule explicite de la suite (u_n).
2. Calculer u_3 et u_6.

3. Représentation graphique

●○○ **Exercice 56.**
Représenter graphiquement les quatre premiers termes de la suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $q = 2$:



●●○ **Exercice 57.**
On a tracé ci-dessous les premiers termes d'une suite géométrique :



1. Lire graphiquement la valeur de u_0 et de u_1.
2. Déterminer la raison de la suite géométrique.
3. Déterminer l'expression explicite de cette suite géométrique.

5. Problèmes

●●○ **Exercice 58.**

En 2022, le taux d'inflation en France était de $5,6\%$.
On suppose que le taux d'inflation reste constant chaque années suivante.
En 2022, un produit coûtait 150 €.
On note P_n le prix du produit de l'année $2022+n$, on a donc $P_0 = 150$.

1. Justifier que pour tout entier naturel n on a $P_n = 150 \times 1,056^n$.
2. Quel sera le prix de ce produit en 2028 si le taux d'inflation reste inchangé ? *Arrondir au centime d'euro.*

●●○ **Exercice 59.**

Un biologiste étudie une population de bactéries dans un milieu fermé. À l'instant initial, il y a 10 000 bactéries et la population augmente de 15 % par heure.

On modélise la situation par une suite (u_n) pour laquelle, pour tout entier naturel n, u_n représente une estimation du nombre de bactéries au bout de n heures. On a donc $u_0 = 10000$.

1. Justifier que pour tout entier naturel n on a $u_n = 10\,000 \times 1,15^n$.
2. Quel sera le nombre de bactéries au bout de 10 heures ?
3. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, la première heure à partir de laquelle la population de bactéries aura décuplé.

●●● **Exercice 60.**

Durant l'été, une piscine extérieure perd chaque semaine 4 % de son volume d'eau par évaporation.
On étudie ici un bassin qui contient 80 m^3 après son remplissage.

1. Montrer par un calcul que ce bassin contient $76,8$ m^3 d'eau une semaine après son remplissage.
2. On ne rajoute pas d'eau dans le bassinet l'eau continue à s'évaporer. On modélise le volume d'eau contenue dans la piscine par une suite (V_n) : pour tout entier naturel n, on note V_n la quantité d'eau en m^3 contenue dans la piscine n semaines après son remplissage. Ainsi $V_0 = 80$.
   (a) Justifier que pour tout entier naturel n, $V_{n+1} = 0,96V_n$ et préciser la nature de la suite (V_n) ainsi définie.
   (b) Donner une expression de V_n en fonction de n.
   (c) Quelle quantité d'eau contient le bassin au bout de 7 semaines ?

6. Calculer avec une fonction exponentielle

○○○ Exercice 61.
Soit la fonction f définie pour tout réel x positif par $f(x) = 4^x$.

1. Calculer $f(0)$ et $f(1)$.
2. Donner une valeur approchée au centième de :
   $f(0,2)$ et $f(1,7)$.
3. Comparer $f(0,5)$ et $\sqrt{4}$.

●○○ Exercice 62.
Dans chaque cas, écrire le résultat sous la forme $1,3^x$ où x est un nombre réel :

1. $1,3^3 \times 1,3^{2,4}$
2. $\dfrac{1,3^{1,7}}{1,3^{-2,4}}$
3. $\left(1,3^{5,1}\right)^6$

●○○ Exercice 63.
Dans chaque cas, écrire le résultat sous la forme $0,69^x$ où x est un nombre réel :

1. $0,69^{2,4} \times 0,69^{2,5}$
2. $\dfrac{0,69^{1,5}}{0,69^{2,8}}$
3. $\left(0,69^{1,1}\right)^{1,1}$

●○○ Exercice 64.
On considère la fonction exponentielle de base $a = 2,6$.

1. Donner l'expression de $f(x)$ en fonction de x.
2. Donner l'expression de $f(1,3)f(2,4)$ sous la forme $2,6^x$.

●○○ Exercice 65.
On considère la fonction exponentielle de base $a = 0,35$.

1. Donner l'expression de $f(x)$ en fonction de x.
2. Donner l'expression de $\dfrac{f(3,5)}{f(1,5)}$ sous la forme $0,35^x$.

●●○ Exercice 66.
Résoudre dans $[0\,;+\infty[$ les équations suivantes.
Donner la valeur exacte des solutions puis en donner une valeur approchée au dixième près si besoin :

1. $x^6 = 21$
2. $x^3 = 8$
3. $x^4 = 32$
4. $x^7 = 160$

●●● Exercice 67.
Le taux d'insuline d'une personne pendant les deux premières heures suivant le repas, taux exprimé en μU.mL^{-1}) est donné en fonction du temps t (en heures) par la fonction f définie sur $[0\,;\,2]$ par :

$$f(t) = 0,4 \times 10^t + 90$$

1. Quel est le taux d'insuline au départ, soit à l'instant $t = 0$.
2. Calculer le taux d'insuline au bout d'une heure et quart.
3. Calculer ce taux deux heures après la fin du repas.

●●● Exercice 68.
Un médicament est administré en intraveineuse. Un laboratoire étudie le processus d'absorption de ce médicament par l'organisme pendant les 12 heures qui suivent l'injection.

La quantité de produit présent dans le sang est exprimée en cm^3. Le temps t est exprimé en heures. La quantité de produit présent dans le sang, en fonction du temps t, est donnée par $f(t) = 4 \times 0,85^t$ où t désigne un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0\,;\,12]$. On a représenté ci-dessous la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f.

1. Calculer la quantité de produit à l'instant initial $t = 0$.
2. Déterminer graphiquement la quantité de produit présent dans le sang au bout de 7 heures.
3. Déterminer graphiquement au bout de combien de temps la quantité de produit présent dans le sang aura diminué de 25 %.
4. Le laboratoire indique que le médicament n'est plus efficace lorsque la quantité de produit présent dans le sang est inférieure à 1 cm^3. Déterminer graphiquement la durée d'efficacité de ce médicament.

CHAPITRE

6 Évolution des modèles exponentiels

6.1 Sens de variation des modèles exponentiels

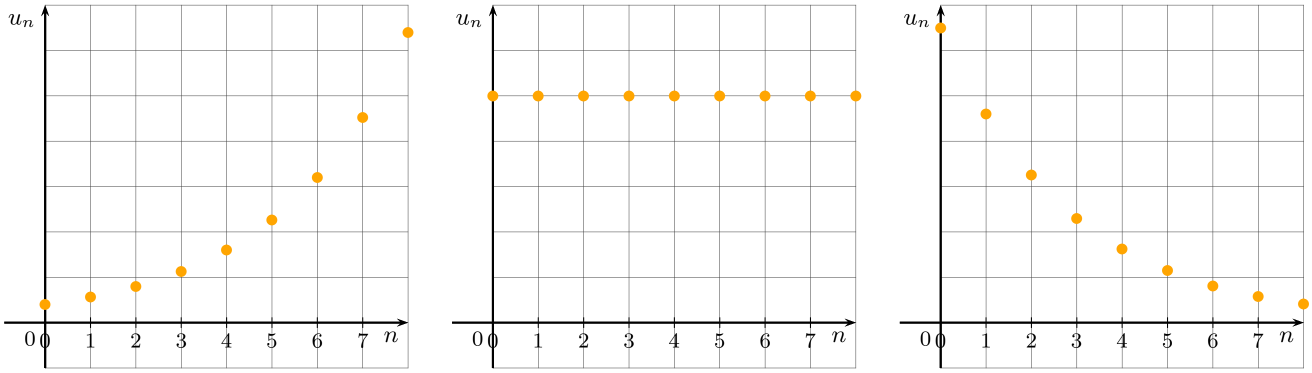
6.1.1 Sens de variation des suites géométriques

Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 > 0$ et de raison $q > 0$.

Si $q > 1$ alors la suite (u_n) est *strictement croissante*.

Si $q = 1$ alors la suite (u_n) est *constante*.

Si $0 < q < 1$ alors la suite (u_n) est *strictement décroissante*.



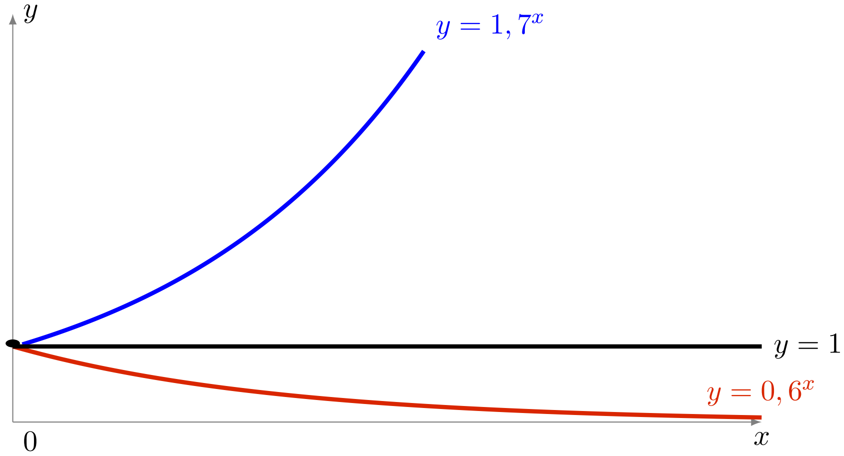
Exemple 1.6.
Déterminer le sens de variation de la suite géométrique définie pour tout entier naturel n par $u_n = 50 \times 1,12^n$.

6.1.2 Sens de variation des fonctions exponentielles

Propriétés 1.6.
Soit a un réel *strictement positif*.

- Si $a > 1$ alors la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = a^x$ est *strictement croissante* sur $[0\,;\,+\infty[$.
- Si $0 < a < 1$ alors la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = a^x$ est *strictement décroissante* sur $[0\,;\,+\infty[$.
- Si $a = 1$ alors la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = 1^x = 1$ est *constante* sur $[0\,;\,+\infty[$.

Exemple 2.6.



Propriétés 2.6.
Soit k un réel *non nul.*

- Si $k > 0$ alors les fonctions f et g définies sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = a^x$ et $g(x) = ka^x$ ont *le même sens de variation* sur $[0\,;\,+\infty[$.
- Si $k < 0$ alors les fonctions f et g définies sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = a^x$ et $g(x) = ka^x$ ont *des sens de variation contraires* sur $[0\,;\,+\infty[$.

Exemple 3.6.
Déterminer le sens de variation de la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = -4 \times 2,6^x$.

6.2 Taux d'évolution moyen

6.2.1 Évolutions successives

Définition.
On appelle *taux d'évolution* tout *nombre décimal positif.*
Généralement, un taux s'écrit sous la forme d'une fraction de dénominateur 100 ou sous forme *d'un pourcentage.*

Exemple 4.6.
$\dfrac{7}{100} = 0,07 = 7\%$.

Propriétés 3.6.
On considère une quantité Q et un *taux d'évolution* de $t\%$.

- Lorsque Q subit n *augmentations* de $t\%$ alors la nouvelle valeur de Q est égale à :

$$Q \times \left(1 + \frac{t}{100}\right)^n$$

- Lorsque Q subit n *diminutions* de $t\%$ alors la nouvelle valeur de Q est égale à :

$$Q \times \left(1 - \frac{t}{100}\right)^n$$

Exemple 5.6.
Soit une quantité Q coûtant 150 €.
Cette quantité subit quatre diminutions de 8%.
Calculer le prix de cette nouveau quantité.

6.2.2 Taux d'évolution moyen

Propriétés 4.6.
Soit Q une quantité et $t\%$ un taux d'évolution.

- Q subit une *augmentation* de $t\%$ équivaut à Q subit n *augmentations successives* de *taux constant* égal à :

$$\left(1 + \frac{t}{100}\right)^{\frac{1}{n}} - 1.$$

- Q subit une *diminution* de $t\%$ équivaut à Q subit n *diminutions successives* de *taux constant* égal à :

$$1 - \left(1 - \frac{t}{100}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Exemple 6.6.
Un article a augmenté de 7% en quatre ans.
Calculer l'augmentation moyenne de cet article.

6.3 Les exercices du chapitre

1. Sens de variation dune suite géométrique

●○○ **Exercice 69.**
Déterminer le sens de variation des suites géométriques suivantes :

1. (u_n) est définie par $u_0 = 4,2$ et, pour tout entier naturel n, par $u_{n+1} = 0,9u_n$.
2. (u_n) est définie pour tout entier naturel n, par $u_n = 3 \times 0,2^n$
3. (u_n) est définie, pour tout entier naturel $n \geqslant 4$, par $u_n = u_4 \times 7,6^{n-4}$ avec $u_4 > 0$.

●●○ **Exercice 70.**
Déterminer le sens de variation des suites géométriques suivantes :

1. (u_n) est définie par $u_0 = 1,1$ et, pour tout entier naturel n, par $u_{n+1} = \dfrac{3u_n}{4}$.
2. (u_n) est définie pour tout entier naturel n, par $u_n = 5 \times \left(\dfrac{1}{0,3}\right)^n$

●○○ **Exercice 71.**
On considère la suite géométrique (v_n) telle que $v_0 = 5$ et $v_1 = 12$.

1. Déterminer la valeur de la raison q de la suite (v_n).
2. Justifier, sans calcul, que $v_7 \geqslant v_5$.

●●○ **Exercice 72.**
On considère la suite géométrique (v_n) telle que $v_0 = \dfrac{1}{2}$ et $v_1 = \dfrac{1}{6}$.

1. Déterminer la valeur de la raison q de la suite (v_n).
2. Justifier, sans calcul, que $v_7 \leqslant v_5$.

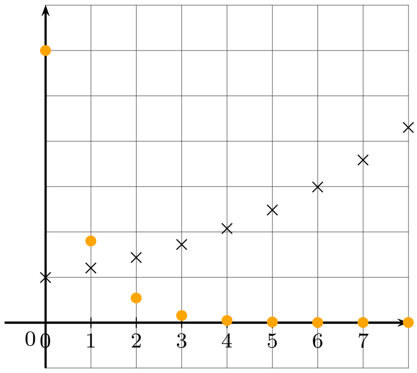
●○○ **Exercice 73.**
On considère la suite géométrique (u_n) de raison $q > 0$ telle que $u_0 = 6$ et $u_1 = 24$.

1. Déterminer la valeur de la raison q de la suite (u_n).
2. Justifier, sans calcul, que $u_7 > u_3$.

●●○ **Exercice 74.**
On considère la suite géométrique (u_n) de raison q telle que $u_1 = 2$ et $u_4 = 54$.

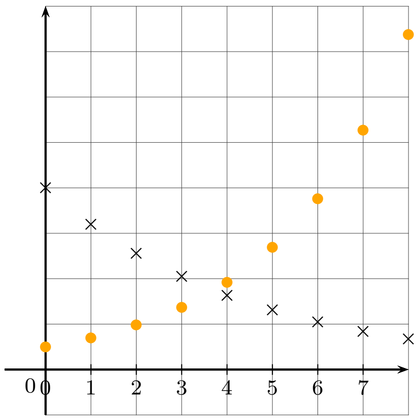
1. Déterminer la valeur de la raison q de la suite (u_n).
2. Quel est le sens de variation de la suite (u_n) ?
3. Calculer u_0 puis en déduire l'expression explicite de la suite (u_n).

●○○ Exercice 75.
On donne ci-dessous les représentations graphiques deux suites géométriques : l'une (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = 1,2^n$ et l'autre (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = 6 \times 0,3^n$:



Associer chaque nuage de points à la suite qu'il représente.

●○○ Exercice 76.
On donne ci-dessous les représentations graphiques deux suites géométriques : l'une (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = 4 \times 0,8^n$ et l'autre (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = 0.5 \times 1,4^n$:



Associer chaque nuage de points à la suite qu'il représente.

●●○ Exercice 77.
On considère la suite géométrique (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $u_n = 5\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$.

1. Quel est le sens de variation de la suite (u_n) ?
2. Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant 5$.

2. Sens d'une fonction exponentielle

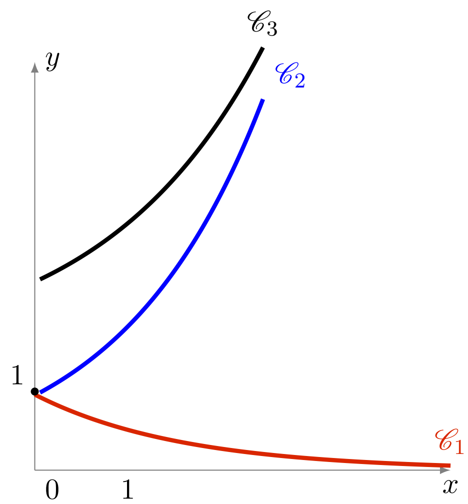
●○○ Exercice 78.
Déterminer le sens de variation des fonctions exponentielles définies pour tout réel x positif ci-dessous :

1. $f(x) = 2,27^x$
2. $g(x) = -2 \times 1,5^x$
3. $h(x) = 2 \times 0,4^x$
4. $i(x) = -0,4 \times 0,99^x$

●●○ Exercice 79.
Déterminer le sens de variation des fonctions exponentielles définies pour tout réel x positif ci-dessous :

1. $f(x) = -1,3^x$
2. $g(x) = -2 \times 0,1^x$
3. $h(x) = \dfrac{1,5^x}{3^x}$

●○○ Exercice 80.
On considère la fonction f définie pour tout réel x positif par $f(x) = 1,7^x$.
Parmi les courbes ci-dessous, déterminer la courbe représentative de la fonction f :



●●● Exercice 81.
Soit f la fonction exponentielle de base $2,9$.

1. Donner l'expression de $f(x)$ pour tout réel x positif.
2. Déterminer le sens de variation de la fonction f.
3. Soit n un entier naturel.
   Sans calcul, comparer $f(n+1)$ et $f(n)$.
4. Démontrer que le nombre $\dfrac{f(n+1)}{f(n)}$ est constant quelque soit la valeur de l'entier naturel n.

3. Évolutions successives

●○○ **Exercice 82.**
Le salaire de Mathieu augmente cette année de 2%. L'an prochain, il augmentera de 3%.
Mathieu gagne actuellement 1 800 € par mois.
Quel sera son salaire après les deux augmentations ?

●○○ **Exercice 83.**
Le prix du repas de cantine d'un lycée coûte $4,50e$ en 2023.
Il augmente chaque année de $1,3\%$. Quel sera le prix du repas de la cantine, arrondi au centime d'euro, en 2027 ?

●●○ **Exercice 84.**
Le nombre de chômeurs d'un pays est de $3,4$ millions. Pendant trois mois, il augmente chaque mois de $2,5\%$ puis de $1,2\%$ chaque mois durant les quatre mois qui suivent.
Combien y aura-t-il de chômeurs au bout de sept mois ?

4. Taux moyen

●○○ **Exercice 85.**
Le chiffre d'affaires annuel de l'entreprise de Lilian était de 60 000 € au 31 décembre 2022.
Au 31 décembre 2023, il sera estimé à 62 400 €.

1. Calculer le pourcentage d'augmentation entre mes deux chiffres d'affaires.
2. Calculer le taux mensuel moyen d'augmentation du chiffre d'affaires de Lilian.
   Donner le résultat sous forme d'un pourcentage arrondi au centième.

●○○ **Exercice 86.**
Le nombre d'habitants d'une ville est passé de 20 000 habitants en 2018 à 14 000 en 2023.
Calculer le taux moyen annuel de diminution du nombre d'habitants de la ville.
Donner le résultat sous forme d'un pourcentage arrondi au centième.

5. Problèmes

●●● **Exercice 87.**
La scintigraphie cardiaque est une technique d'imagerie qui permet d'examiner la qualité de l'irrigation du cœur par les artères coronaires.

Lors de cet examen, on injecte au patient un échantillon d'un isotope de Thallium d'activité radioactive 60 MBq (Méga Becquerel).

On appelle demi-vie le temps mis par une substance radioactive pour perdre la moitié de son activité.

Ainsi, après une demi-vie, l'activité radioactive de cet échantillon de Thallium est de 30 MBq et après deux demi-vies, l'activité radioactive de cet échantillon est de 15 MBq.

On note u_0 l'activité radioactive de cet échantillon (en MBq) à l'injection et u_n l'activité radioactive de cet échantillon (en MBq) après n demi-vies avec n entier naturel.

1. Donner les valeurs de u_0, u_1, u_2 et u_3.
2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n. En déduire la nature de la suite (u_n).
3. (a) Exprimer u_n en fonction de n.
   (b) Déterminer l'activité radioactive de cet échantillon après 5 demi-vies.

4. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, le plus petit entier n à partir duquel $u_n < 0,25$.
5. Sachant que la demi-vie de cet isotope de Thallium est d'environ 3 jours, déterminer le nombre de jours au bout desquels on est certain que l'activité radioactive de cet échantillon est strictement inférieure à $0,25$ MBq.

●●● Exercice 88.

Lors d'une culture *in vitro* de bactéries *Escherichia coli* on s'intéresse à la phase de croissance exponentielle lors de laquelle, dans les conditions optimales de température à 37°C, le nombre de bactéries double toutes les 20 minutes.

Lors de la phase exponentielle, le temps nécessaire pour que le nombre de bactéries double, ici 20 minutes, est appelé temps de génération.

On estime qu'au début de la phase exponentielle, le nombre de bactéries *Eschericha coli* par mL s'élève à 50 millions. Soit u_0 le nombre de bactéries exprimé en millions au début de la phase exponentielle et u_n le nombre de bactéries après n temps de génération, c'est-à-dire après n fois 20 minutes.

On a ainsi $u_0 = 50$.

1. (a) Calculer u_1 et u_2.
   (b) Montrer que $u_3 = 400$ et interpréter la valeur de u_3.
2. (a) Quelle est la nature de la suite (u_n) ?
   (b) Exprimer u_n en fonction de n.
   (c) Calculer le nombre de bactéries par mL au bout de 2 heures de phase exponentielle.
3. (a) Déterminer la plus petite valeur entière n telle que $50 \times 2^n \geqslant 200\,000$.
   (b) Est-il vrai qu'après 4 heures de phase exponentielle le nombre de bactéries par mL sera supérieur à 200 milliards ?

●●● Exercice 89.

La température $f(t)$ degrés Celsius (°C) du lubrifiant d'un moteur varie en fonction du temps t de fonctionnement exprimé en heures. La fonction f est définie pour tout nombre réel t de l'intervalle $[0\,;\,30[$ par $f(t) = 20 \times 1,01^t$.

1. Déterminer la température du lubrifiant à l'arrêt.
2. Déterminer la température du lubrifiant au bout de 5 heures et demie de fonctionnement.
3. Quel est le sens de variation de la fonction f sur $[0\,;\,30[$?
   Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
4. Déterminer avec une calculatrice, le temps de fonctionnement nécessaire pour que le lubrifiant atteigne une température supérieure ou égale à 25°C.
   Donner un résultat approché à la minute près

CHAPITRE

7

Variation instantanée

7.1 Tangente à une courbe en un point

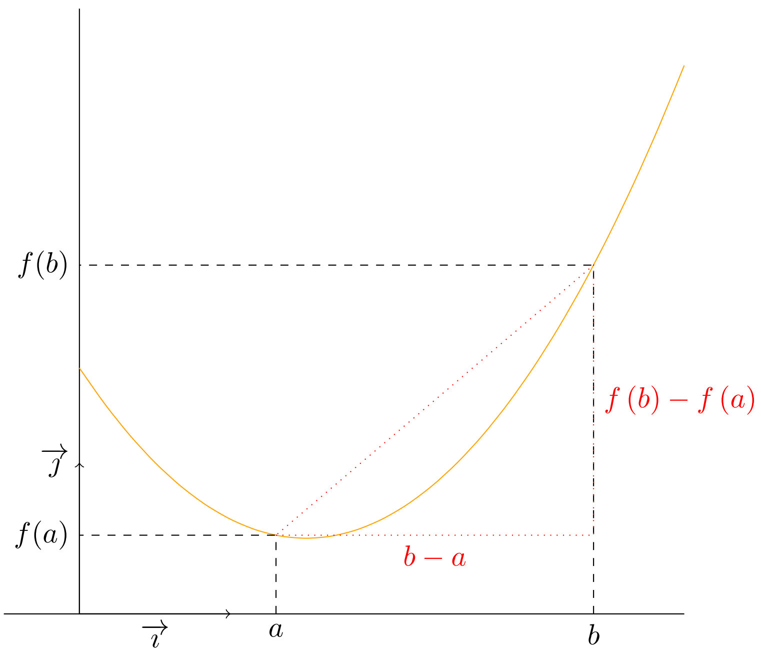
Définition 1.7.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et de courbe représentative $\mathscr{C}$.
La droite passant par deux points A et B de la courbe $\mathscr{C}$ est appelée *sécante* à la courbe représentative de la fonction f en $A\,(a\,;\,f(a))$ et $B(b\,;\,f(b))$.
Le *coefficient directeur* de cette sécante est le quotient :

$$\boxed{m = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}}$$

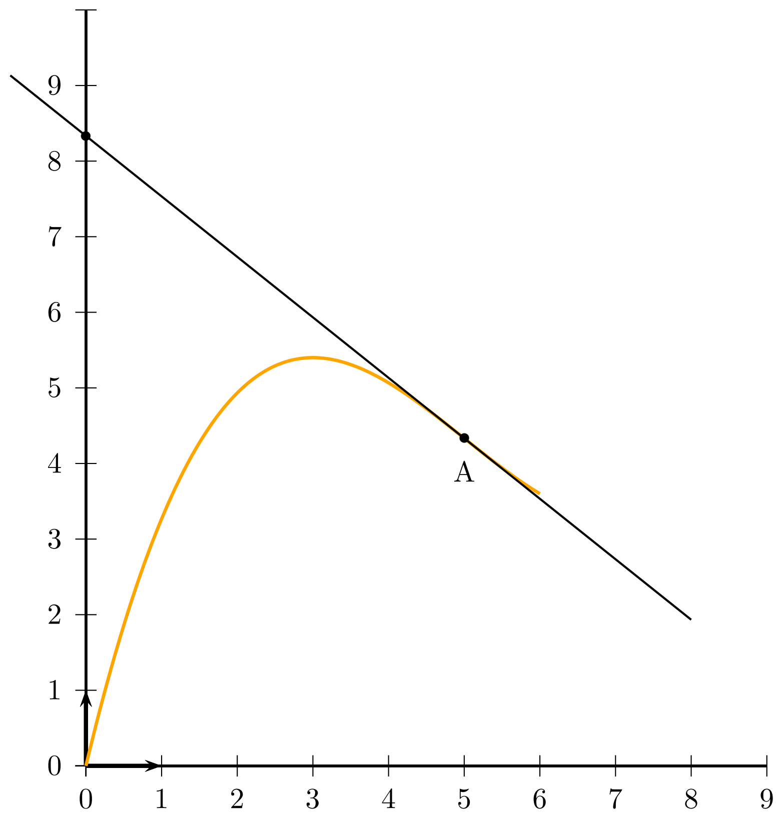
► **Note 1.7.**

On peut également utiliser la notation $\dfrac{\Delta_y}{\Delta_x} = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.



Définition 2.7.

- Une *sécante* à une courbe $\mathscr{C}$ passant par le point A est une droite passant par A, et coupant la courbe en un autre point M.
- Lorsque le point M se rapproche de A, il arrive que la sécante (AM) se rapproche d'une *position limite*. Cette droite *limite* est alors appelée *tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A.*



7.2 Nombre dérivé d'une fonction

Définition 3.7.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.
Soient $A(a\,;\,f(a))$ un point de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{T}$ la *tangente* à $\mathscr{C}$ au point A.
Le *coefficient directeur* de la tangente $\mathscr{T}$ au point a d'abscisse a est appelé *nombre dérivé* de f en a et on le note $f'(a)$.

Propriété 1.7.
Soit $\mathscr{T}$ la *tangente* au point $A(a\,;\,f(a))$ d'une courbe $\mathscr{C}$ représentative d'une fonction f.

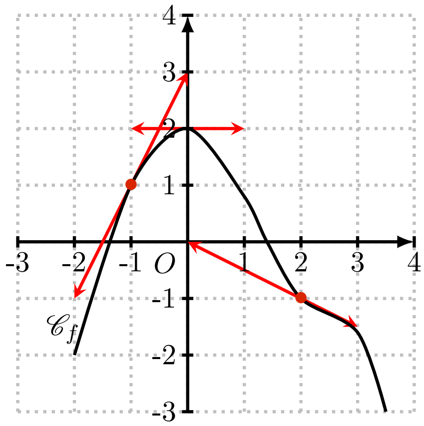
— $\mathscr{T}$ « *monte* » équivaut à $f'(a) \geqslant 0$.

— $\mathscr{T}$ « *descend* » équivaut à $f'(a) \leqslant 0$.

Propriété 2.7.
Dans le cadre d'une évolution au cours du temps t, modélisée par une fonction f, le *nombre dérivé* de f en a noté $f'(a)$ représente la *vitesse instantanée* à l'instant $t = a$.

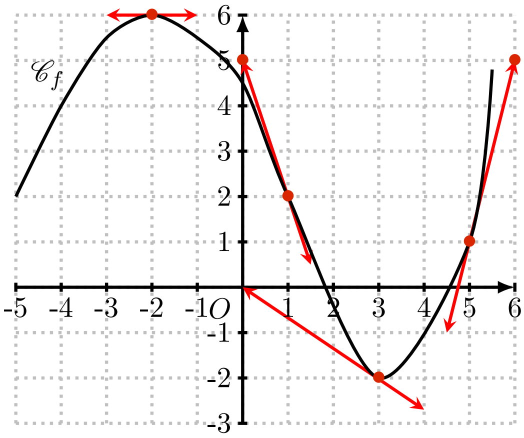
7.3 Les exercices du chapitre

○○○ **Exercice 90.**
On donne la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f dont on a représenté certaines tangentes :



1. À l'aide de la représentation graphique ci-dessus de la fonction f, donner les valeurs de :
   - $f(0)$, $f(-1)$ et $f(2)$.
   - $f'(0)$, $f'(-1)$ et $f'(2)$.
2. Déterminer l'équation réduite des tangentes à la courbe représentative de la fonction f :
   — au point d'abscisse -1 ;
   — au point d'abscisse 0 ;
   — au point d'abscisse 2.

●○○ **Exercice 91.**
On donne la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f dont on a représenté certaines tangentes :



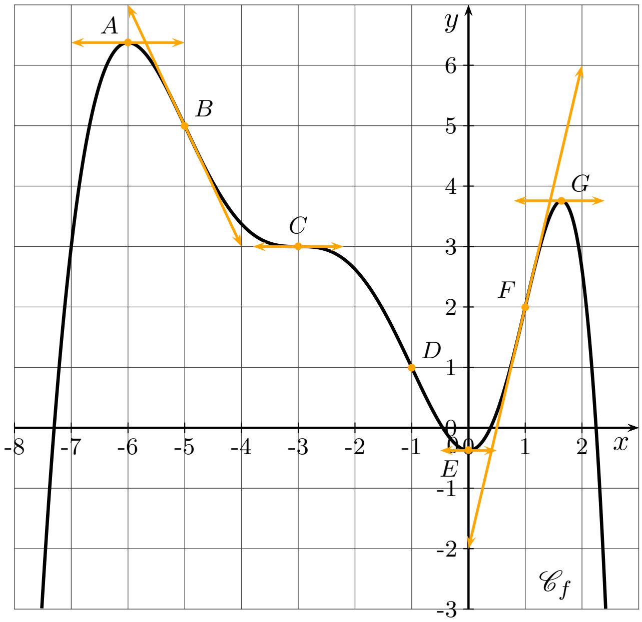
1. À l'aide de la représentation graphique ci-dessus de la fonction f, donner les valeurs de :
   - $f(-2)$, $f(1)$, $f(3)$ et $f(5)$.
   - $f'(-2)$, $f'(1)$, $f'(3)$ et $f'(5)$.
2. Déterminer l'équation réduite des tangentes à la courbe représentative de la fonction f :
   — au point d'abscisse 3 ;

— au point d'abscisse -2 ;

— au point d'abscisse 1.

●●○ **Exercice 92.**

On donne la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f :



1. La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point $F(1\,;\,2)$ passe par le point de coordonnées $(0\,;\,-2)$. Déterminer $f'(1)$.
2. La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point D a pour équation $y = -2x - 1$.
   (a) Tracer la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point D.
   (b) Déterminer $f'(-1)$.
3. Déterminer $f(-3)$, $f'(-3)$, $f(-5)$ et $f'(-5)$.

CHAPITRE

8

Variation globale

8.1 Fonction dérivée

8.1.1 Dérivée des fonctions de référence

Définition 1.8.
Soit f une fonction définie sur un intervalle I qui admet un *nombre dérivé* en tout réel x de I.
On appelle *fonction dérivée* de f sur I, notée f', la fonction définie sur I par $f' \ : \ x \mapsto f'(x)$.

Propriété 1.8. *Dérivée des fonctions usuelles*
Toutes les fonctions décrites ici sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$.

Fonction		Fonction dérivée
Fonction constante	$f(x) = k$	$f'(x) = 0$
Fonction identité	$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
Fonction carrée	$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$
Fonction cube	$f(x) = x^3$	$f'(x) = 3x^2$

8.1.2 Dérivée d'une somme et d'un produit par un réel

Propriété 2.8.
Soient u et v deux fonctions qui admettent une fonction dérivée sur un même intervalle I.

— La fonction $u + v$ admet une fonction dérivée sur I et :

$$(u + v)' = u' + v'$$

— Soit k un réel.
La fonction $k \times u$ admet une fonction dérivée sur I et :

$$(k \times u)' = k \times u'$$

Exemple 1.8.
Calculer la fonction dérivée des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

1. $f(x) = 5x + 7$
2. $g(x) = x^3 + 8x^2 + 6x$

8.1.3 Dérivées de quelques polynômes

▶ **Note 1.8.**
Un *polynôme* est constitué d'une *somme* de termes, chaque terme étant l'expression d'une fonction de référence ou du produit d'une fonction de référence par un réel.
Pour calculer la fonction dérivée d'un polynôme, il suffit de dériver « chaque terme » et d'en faire *la somme.*

Propriété 3.8. *Dérivée des fonctions usuelles*

Fonction		Fonction dérivée
Fonction affine	$f(x) = ax + b$	$f'(x) = a$
Fonction du second degré	$f(x) = ax^2 + bx + c$	$f'(x) = 2ax + b$
Fonction de degré 3	$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + f$	$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

Exemple 2.8.
Calculer la fonction dérivée sur $\mathbb{R}$ de chacune des fonctions suivantes :

1. $f(x) = 7x^3 - 5x$
2. $g(x) = 8x^3 - x^2$
3. $h(x) = 2x^3 - 5x^2 + 5$

8.2 Application de la dérivation

8.2.1 Signe de la dérivée et sens de variation

▶ **Note 2.8.**
Le *signe* de la fonction dérivée f' sur I nous permet de connaître les *variations* de la fonction f sur I.

Propriété 4.8.
Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. Alors :
— si la fonction dérivée f' est strictement positive, alors la fonction f est croissante ;
— si la fonction dérivée f' est strictement négative, alors la fonction f est décroissante.
— si la fonction dérivée f' est nulle, alors la fonction f est constante.

Exemple 3.8.
Soit f une fonction. On connait le tableau de signes de la dérivée, donné dans le tableau suivant. Compléter le tableau de variations de f.

x	0		2		10
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f					

8.2.2 Extremum d'une fonction (maximum ou minimum

Théorème.
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et α un réel appartenant à I.

- Si f admet un *extremum local* en α, alors $f'(\alpha) = 0$.
- Si la dérivée f' s'annule en α *en changeant de signe*, alors f admet un extremum local en α.

Exemple 4.8.

1. *Cas d'un minimum* :

x	a		α		b
signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variation de f	$f(a)$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$f(b)$

2. *Cas d'un maximum* :

x	a		α		b
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variation de f	$f(a)$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$f(b)$

8.3 Les exercices du chapitre

1. Dérivée d'une fonction

●○○ Exercice 93.

1. Soient f, g et h trois fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :
   — $f(x) = 6 + x$
   — $g(x) = x^2 + 4$
   — $h(x) = x^3 + x$
   Calculer $f'(x)$, $g'(x)$ et $h'(x)$.
2. Soient u, v et w trois fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :
   — $u(x) = 3x$
   — $v(x) = -6x^2$
   — $w(x) = -5x^3$
   Calculer $u'(x)$, $v'(x)$ et $w'(x)$.

●●○ Exercice 94.

1. Soient f, g et h trois fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :
   — $f(x) = x - 7$
   — $g(x) = x^2 + x$
   — $h(x) = x^3 + x^2 - 8$
   Calculer $f'(x)$, $g'(x)$ et $h'(x)$.
2. Soient u, v et w trois fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :
   — $u(x) = -4x$
   — $v(x) = -\dfrac{3}{7}x^2$
   — $w(x) = \dfrac{8}{3}x^3$
   Calculer $u'(x)$, $v'(x)$ et $w'(x)$.

●○○ Exercice 95.

Soient f, g et h trois fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :
— $f(x) = x^2 - 3x + 6$
— $g(x) = x^3 - 5x^2 + 2x$
— $h(x) = 3x^3 + 3x^2 - 5x + 11$
Calculer $f'(x)$, $g'(x)$ et $h'(x)$.

●●○ Exercice 96.

Soient f, g et h trois fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :
— $f(x) = \dfrac{4}{21}x^3 - \dfrac{1}{4}x^2 + x - 18$
— $g(x) = \dfrac{1}{7}x^3 - \dfrac{3}{4}x^2 - x + 5$
— $h(x) = f(x) + g(x)$
Calculer $f'(x)$, $g'(x)$ et $h'(x)$.

2. Signe de la dérivée et sens de variation

○○○ **Exercice 97.**
Soit f une fonction définie sur $[2\,;\,8]$ donc on donne ci-dessous le tableau de signes de la dérivée.
Compléter le tableau de variations de f.

x	2		3		8
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f					

●○○ **Exercice 98.**
Soit la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = 5x^2 - 1$$

1. Calculer $f'(x)$.
2. Justifier que $f'(x) \geqslant 0$ pour tout x de $[0\,;\,+\infty[$.
3. En déduire le sens de variation de f sur $[0\,;\,+\infty[$.

●○○ **Exercice 99.**
La fonction p est définie sur $\mathbb{R}$ par :
$p(x) = x^3 + \dfrac{3}{2}x^2 - 6x + 1$ dont la dérivée s'écrit $p'(x) = (3x-3)(x+2)$.

1. Dresser le tableau de signes de $p'(x)$ sur $\mathbb{R}$.
2. Donner un intervalle sur lequel p est croissante.

●●○ **Exercice 100.**
La fonction p est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$m(x) = x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 2x + 7$$

1. Calculer la dérivée $m'(x)$.
2. Vérifier que cette dérivée s'écrit :

$$m'(x) = (3x-1)(x+2)$$

3. Dresser le tableau de signes de $m'(x)$.
4. Donner un intervalle sur lequel m est croissante.

3. Problèmes

●●○ **Exercice 101.**
Un projectile est éjecté d'un canon. La hauteur (en mètre) atteinte par le projectile en fonction du nombre t de secondes à partir de l'éjection du projectile est modélisée par la fonction h définie sur $[0\,;\,80]$ par :

$$h(t) = -0,03t^2 + 2,4t + 0,5$$

1. À quelle hauteur se situe le projectile au moment où il est éjecté ?
2. Justifier que $h'(t) = -0,06t + 2,4$.
3. Résoudre sur $[0\,;\,80]$, l'inéquation $h'(t) \geqslant 0$.
4. Compléter le tableau de variation donné ci-dessous :

t	0	40	80
Signe de $h'(t)$		0	
Variations de h			

5. Quelle est la hauteur maximale atteinte par le projectile ?

●●○ **Exercice 102.**
On s'intéresse à une modélisation de la propagation de l'épidémie de la grippe en France durant l'hiver 2022 - 2023.

Les relevés statistiques, fournis par le réseau Sentinelle, du nombre de cas pour 100 000 habitants sur la période du 29 décembre 2014 au 1er mars 2015 ont permis de mettre en évidence une courbe de tendance, à l'aide d'un tableur.

Soit f la fonction définie, pour tout $x \in [2\,;\,10]$, par

$$f(x) = -30x^2 + 360x - 360.$$

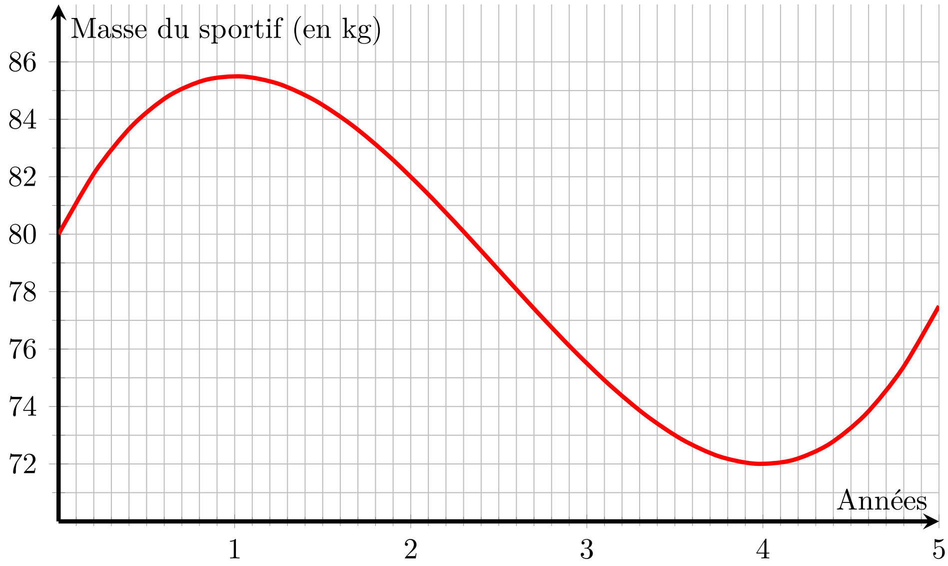
On admet que $f(x)$ modélise le nombre de malades déclarés pour 100 000 habitants au bout de x semaines écoulées depuis le début de l'épidémie.

1. Vérifier que $f'(x) = -60x + 360$.
2. Résoudre sur $[2\,;\,10]$ l'inéquation $f'(x) \leqslant 0$.
3. Compléter le tableau de variation donné ci-dessous :

x	0	6	10
Signe de $f'(x)$		0	
Variations de f			

4. Quel est le nombre maximal de malades ?
   Au bout de combien de semaines ce nombre est maximal ?

●●○ Exercice 103.
La courbe C tracée ci-dessous représente la masse, en kilogramme, d'un sportif en fonction du temps, exprimé en nombre d'années, sur une période de 5 ans.



1. Déterminer, sur la période étudiée, le nombre de mois pendant lesquels le sportif pèse plus de 85 kilogrammes. On répondra avec la précision permise par le graphique.

On admet que la courbe C est la représentation graphique de la fonction f définie sur l'intervalle $[0;5]$ par :

$$f(x) = x^3 - 7,5x^2 + 12x + 80$$

On note f' la fonction dérivée de la fonction f.

2. Déterminer $f'(x)$.
3. Montrer que $f'(x) = (x-1)(3x-12)$.
4. (a) Établir le tableau de signes de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0;5]$.
   (b) En déduire le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0;5]$.
   (c) Déterminer la masse minimale et la masse maximale du sportif sur la période étudiée.