Chapitre

4

Étude qualitative de fonctions

1. Modéliser par une fonction

1.1 Rappels de l'an dernier

Définition 1.4

Une **fonction** est un procédé qui à un nombre x appartenant à un ensemble $\mathscr{D}$ associe un nombre y.
On note : $x \overset{f}{\mapsto} y$ ou encore $f : x \longmapsto y$ ou encore $y = f(x)$.
On dit que y est l'________________ de x par la fonction f et que x est ________________________________ de y par la fonction f

Exemple. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3x - 2$.

1. Calculer l'image de -3 par la fonction f.

2. Déterminer les antécédents éventuels de -4 par la fonction f.

1.2 Ensemble de définition

Définition 2.4

Pour une fonction f donnée, l'ensemble de tous les nombres réels qui ont une image calculable par cette fonction est appelé **ensemble de définition** de la fonction f, que l'on notera $\mathscr{D}_f$.

Exemple. La fonction affine f définie par $f : x \mapsto 9x + 4$ a pour ensemble de définition $\mathbb{R}$.
Graphiquement, l'ensemble de définition est l'intervalle sur lequel la courbe existe.

1.3 Tableau de valeurs

Pour une fonction f, donnée on peut établir un tableau de valeurs. Dans ce tableau, la première ligne contient des nombres réels x, et la seconde ligne contient leurs images respectives y.

x	-1	0	1	3
$f(x)$	4	3	5	2

Dans cet exemple, on a $f(1) = 5$ ce qui montre que 5 est l'image de 1 par la fonction f. De même $f(0) = 3$ ce qui montre que 0 est **UN** antécédent de 3 par la fonction f.

1.4 Fonction donnée par une formule

Un exemple. Un cycliste roule en moyenne à 43 km.h^{-1}. À chaque durée de trajet t, en heures, on associe la distance parcourue d, en km, par la formule $d = 43t$. La **variable** est la durée t avec $t \geqslant 0$. On définit alors la fonction g sur $[0\,;\,+\infty[$ par $g(t) = 43t$.

2. Variation d'une fonction

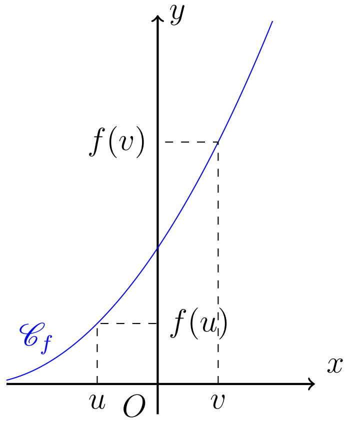
2.1 Sens de variation d'une fonction

Définition 3.4

1. On dit que la fonction f est **croissante** sur un intervalle I si quels que soient les réels u et v dans I tels que $u \leqslant v$, on a $f(u) \leqslant f(v)$.
   Autrement dit, les nombres $f(u)$ et $f(v)$ sont rangés dans **le même ordre** que u et v.

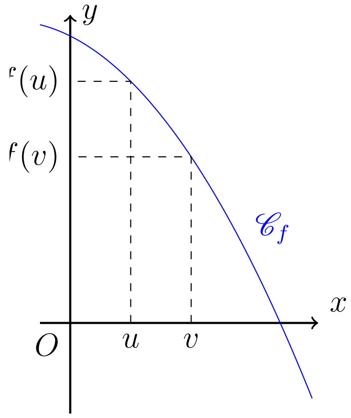
2. On dit que la fonction f est **décroissante** sur un intervalle I si quels que soient les réels u et v dans I tels que $u \leqslant v$, on a $f(u) \geqslant f(v)$.
   Autrement dit, les nombres $f(u)$ et $f(v)$ sont rangés dans **l'ordre contraire** de u et v.

Exemples.



Fonction croissante

$u < v$ et $f(u) \leqslant f(v)$



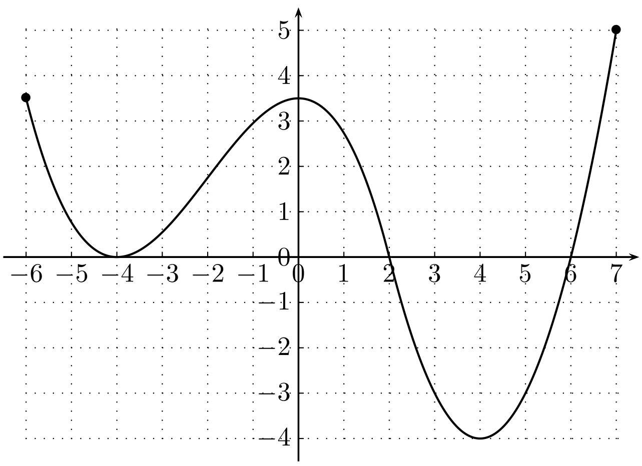
Fonction décroissante

$u < v$ et $f(u) \geqslant f(v)$

Définition 4.4

Donner ou décrire les variations d'une fonction signifie préciser sur quels intervalles la fonction est croissante, puis sur quels intervalles la fonction est croissante.

Exemple. Décrire les variations de la fonction f dont la courbe est donnée ci-contre :



2.2 Tableau de variations

Le **tableau de variations** d'une fonction est un tableau synthétique regroupant les informations concernant les variations de la fonction.

Exemple. Dresser le tableau de variation de la fonction f dont la courbe représentative est donnée ci-dessus.

3. Extremum

Définition 5.4

1. On dit que la fonction f admet un **maximum** sur un intervalle I atteint en x_0 si, quel que soit le réel x dans I, on a :

$$\boxed{f(x) \leqslant f(x_0)}$$

2. On dit que la fonction f admet un **minimum** sur un intervalle I atteint en x_0 si, quel que soit le réel x dans I, on a :

$$\boxed{f(x) \geqslant f(x_0).}$$

Exemple. Soit la fonction f dont le tableau de variation est donné ci-contre :

x	-5	-3	2	5	7
Variation de f	4 ↘	-1 ↗	4 ↘	-2 ↗	0

1. Quel est le maximum de f sur $[-5\,;\,7]$?

2. Quel est le minimum de f sur $[-5\,;\,2]$?

4. Tableau de signes

On réunit au sein d'un tableau appelé **tableau de signes** les informations concernant le signe de la fonction f, c'est-à-dire la position de sa courbe représentative par rapport à l'axe des abscisses.

Exemple. Dresser le tableau de signes de la fonction dont la courbe est donnée à page 3 :