Exercice 1 — 40 minutes — /15

Une entreprise a crée une Foire Aux Questions (« FAQ ») sur son site internet.

On étudie le nombre de questions qui y sont posées chaque mois.

On admet que, chaque mois :

- 90 % des questions déjà posées le mois précédent sont conservées sur la FAQ ;
- 130 nouvelles questions sont ajoutées à la FAQ.

Au cours du premier mois, 300 questions ont été posées.

Pour tout entier naturel n non nul, u_n désigne le nombre de questions, en centaines, présentes sur la FAQ le n-ième mois. On a ainsi $u_1 = 3$.

1. Justifier que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $u_{n+1} = 0{,}9u_n + 1{,}3$.
2. Justifier qu'il y aura 490 questions posées le troisième mois à la FAQ.
3. La suite (u_n) peut-elle être arithmétique ? Géométrique ? Justifier la réponse.
4. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n non nul par : $v_n = u_n - 13$.
   (a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique. Préciser sa raison et son premier terme v_1.
   (b) Exprimer, pour tout entier naturel n non nul, v_n en fonction de n.
   (c) En déduire que pour tout entier naturel non nul n, $u_n = 13 - \dfrac{100}{9} \times 0{,}9^n$.
5. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
6. On considère le programme ci-dessous, écrit en langage Python.
   Déterminer la valeur renvoyée par la saisie de seuil(8.5) et l'interpréter dans le contexte de l'exercice.

```
def seuil(p) :
    n=1
    u=3
    while u<=p :
        n=n+1
        u=0.9*u+1.3
    return n
```

7. À long terme, le nombre de questions posées à la FAQ n'excèdera pas les 1 300.
   Que pensez-vous de cette affirmation ? Justifiez votre raisonnement.

Exercice 2 — 10 minutes — /5

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -4x^3 + 5x^2 + 22x - 1$.

1. Calculer la dérivée de f et étudier son signe sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.
3. Établir l'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 0.