Exercice 1.

1. $-z^2+4z-29=0$: $\Delta = 4^2-4\times(-1)\times(-29) = -100 = (10\mathrm{i})^2$.
   $\Delta<0$: l'équation a donc deux solutions complexes conjuguées : $z_1 = \dfrac{-4-10\mathrm{i}}{-2} = 2+5\mathrm{i}$ et $z_2=\overline{z_1} = 2-5\mathrm{i}$ donc $\mathscr{S}_{\mathbb{C}} = \{2+5\mathrm{i}\,;\,2-5\mathrm{i}\}$.
2. $\mathrm{i}z^2 = 4z \iff z(\mathrm{i}z-4)=0$.
   Or $z(\mathrm{i}z-4) \iff z=0 \quad \text{ou} z=\dfrac{4}{\mathrm{i}} = -4\mathrm{i}$ donc $\mathscr{S}_{\mathbb{C}} = \{0\,;\,-4\mathrm{i}\}$
3. $z^2-(1+2\mathrm{i})z+\mathrm{i}-1=0$: $\Delta = (1+2\mathrm{i})^2-4(\mathrm{i}-1)=0$ donc l'équation a une solution complexe double : $z_0 = \dfrac{1+2\mathrm{i}}{2} = \dfrac{1}{2}+\mathrm{i}$ donc $\mathscr{S}_{\mathbb{C}} = \left\{\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}\right\}$

Exercice 2.

Soit $z\in\mathbb{C}$. On donne $P(z) = 2z^3-\mathrm{i}z^2+32z-16\mathrm{i}$.

1. Soit $z\in\mathbb{C}$. $(z^2+16)(2z-\mathrm{i}) = 2z^3-\mathrm{i}z^2+32z-16\mathrm{i} = P(z)$.
2. $P(z) = (z^2+16)(2z-\mathrm{i})$ donc $P(z) = (z^2-(-16))(2z-\mathrm{i})$ donc $P(z) = (z-4\mathrm{i})(z+4\mathrm{i})(2z-\mathrm{i})$.
   $P(z)=0 \iff z-4\mathrm{i}=0 \quad \text{ou} \quad z+4\mathrm{i}=0 \quad \text{ou} \quad 2z-\mathrm{i}=0 \iff z=4\mathrm{i} \quad \text{ou} \quad z=-4\mathrm{i} \quad \text{ou} \quad z=\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$.

Exercice 3.

On considère le polynôme $P(z) = z^3+(2+\mathrm{i})z^2+(10+2\mathrm{i})z+10\mathrm{i}$.

1. Facile : $P(-\mathrm{i})=0$ donc $-\mathrm{i}$ est une racine de P.
2. On obtient aisément : $P(z) = (z+\mathrm{i})(z^2+2z+10)$.
3. $\mathscr{S}_{\mathbb{C}} = \{-\mathrm{i}\,;\,-1-3\mathrm{i}\,;\,-1+3\mathrm{i}\}$.

Exercice 4.

1. On développe et on obtient $z_1z_2 = x_1x_2-y_1y_2+\mathrm{i}(x_1y_2+x_2y_1)$.
2. $[(2a-b)-\mathrm{i}(a+b)]\,[-a-\mathrm{i}(a+b)]$ est réel si et seulement si sa partie imaginaire est nulle. On utilise la première question.
   $\mathrm{Im}\left([(2a-b)-\mathrm{i}(a+b)]\,[-a-\mathrm{i}(a+b)]\right) = -(a+b)(2a-b)+a(a+b) = b^2-a^2$.
   Donc pour que $[(2a-b)-\mathrm{i}(a+b)]\,[-a-\mathrm{i}(a+b)]$ soit réel il faut et il suffit que $b^2-a^2=0$ ou encore $a=b$ ou $a=-b$.