

- 26** Soit la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par $u_0 = 2$ et tout entier naturel n par $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 2$.

1. Démontrer que pour tout entier naturel n ,

$$u_n \leq u_{n+1}.$$
2. En déduire le sens de variation de la suite (u_n) .

- 27** On considère (u_n) une suite réelle telle que pour tout entier naturel n , on a : $n < u_n < n + 1$.
Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

- 28** On considère la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par :

$$u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{14}{3} \text{ et } u_0 = 1.$$

1. Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est majorée par 7.
2. Étudier la monotonie de la suite (u_n) .

- 29** Soit la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $v_n = 5 + \cos(n^2)$.
Démontrer que la suite (v_n) est bornée.

- 30** Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n = \frac{n}{n+1}$.
Démontrer que la suite (u_n) est bornée.

- 31** On considère la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 2n + 1.$$

1. Conjecturer la limite de la suite (u_n) à la calculatrice.
2. On considère le programme Python :

```
1 def seuil():
2     u=2; n=0
3     while u... :
4         u=...
5         n=n+1
6     return ...
```

Compléter la fonction Python ci-dessus pour qu'elle retourne le premier terme de la suite strictement supérieur à 100.

- 32** Calculer les limites des suites (u_n) suivantes :

1. $u_n = \sqrt{n} \left(4 + \frac{1}{n} \right)$
2. $u_n = -n^3(3n^2 + 5)$
3. $u_n = \left(-7 + \frac{2}{\sqrt{n}} \right) (1 - n)$

- 33** Déterminer la limite (si elle existe) de la suite (u_n) dans les cas suivants :

1. $u_n = n + (-1)^n$ où $n \in \mathbb{N}$.
2. $u_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

$$3. u_n = \frac{1}{n} \cos(n) \text{ où } n \in \mathbb{N}^*.$$

- 34** Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ dans les cas suivants :

1. $u_n = \frac{1}{n} (n^2 + n + 2)$;
2. $u_n = \frac{n^2 - 2n + 3}{4n^3 + 1}$;
3. $u_n = \frac{\sqrt{n} + n}{4n + 5}$.

35

1. Soit (u_n) telle que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 5n$.
Déterminer la limite de la suite (u_n) .
2. Soit (v_n) telle que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \leq -n^2$.
Déterminer la limite de la suite (v_n) .
3. On considère une suite (u_n) qui vérifie

$$-\frac{1}{n} + 3 \leq u_n \leq \frac{1}{n} + 3$$
 pour tout entier naturel n non nul.
Calculer la limite de la suite (u_n) .

36

En utilisant les théorèmes de comparaison des limites, calculer les limites des suites suivantes dont on donne le terme général ci-dessous :

1. $u_n = n - \cos n$
2. $v_n = -n^2 + (-1)^n$
3. $w_n = \frac{4n + (-1)^n}{2n + 3}$
4. $z_n = \frac{n - \sin n}{\cos n + 2}$

37

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant pour tout entier naturel n : $1 \leq u_n \leq 1 + \frac{1}{n}$.
Démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

38

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant pour tout entier naturel n : $1 - \frac{1}{n} \leq u_n \leq 2 + \frac{4}{n}$.
La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle convergente ? Justifier.

39

Soit q un réel et (u_n) la suite définie par $u_n = q^n$ pour tout entier naturel n non nul.
Compléter la fonction Python ci-dessous pour qu'elle retourne un message indiquant si (u_n) est convergente ou divergente :

```
1 def conv(q):
2     if -1 < q < 1 :
3         return "... .. ."
4     else :
5         return "... .. ."
```

40

Déterminer la limite éventuelle des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suivantes en utilisant la limite d'une suite géométrique :

$$1. u_n = \frac{4}{7^n}$$

2. $u_n = \frac{1}{1 + 0,25^n}$
3. $u_n = 9^n - 3^n$
4. $u_n = \frac{(-4)^{n+1}}{5^n}$

41 Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} v_0 = -\frac{2}{3} \\ v_{n+1} = -2v_n + 1 \end{cases}$$

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n ,

$$v_n = \frac{1}{3} - (-2)^n$$

2. Étudier la convergence de la suite (v_n) .

42 On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_{n+1} = \frac{3u_n + 1}{2u_n + 4} \text{ et } u_0 = 1.$$

1. Démontrer que pour tout entier naturel n , $u_n \geq 0$.
2. On considère alors la suite (t_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$t_n = \frac{2u_n - 1}{u_n + 1}.$$

- (a) Démontrer que la suite (t_n) est géométrique de raison $\frac{2}{5}$.
- (b) Exprimer, pour tout entier naturel n , t_n en fonction de n .
- (c) En déduire l'expression de u_n en fonction de n .
- (d) Démontrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.

43 On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = 1,8 \\ u_{n+1} = \frac{2}{3 - u_n} \end{cases}$$

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n ,
- $$1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 2.$$
2. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
 3. Soit ℓ la limite de la suite (u_n) . Démontrer que ℓ vérifie l'égalité $\ell = \frac{2}{3 - \ell}$ puis en déduire la valeur de ℓ .

44 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant pour tout entier naturel n , $u_n \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$.
Démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

45 On définit la suite (u_n) définie pour $n \geq 2$ par :

$$\begin{cases} u_2 = 1 \\ u_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) u_n \end{cases}$$

1. (a) Démontrer que pour entier naturel n supérieur ou égal à 2,

$$0 \leq u_n \leq 1.$$

- (b) Étudier le sens de variation de la suite (u_n) .

2. Justifier que la suite (u_n) est convergente.

3. Montrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2,

$$u_n = \frac{n}{2(n-1)}.$$

4. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

46 On considère la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \geq 0$,

$$u_{n+1} = \frac{1}{10} u_n (20 - u_n).$$

1. Soit f la fonction définie sur $[0 ; 20]$ par

$$f(x) = \frac{1}{10} x(20 - x).$$

- (a) Étudier les variations de f sur $[0 ; 20]$.

- (b) En déduire que pour tout $x \in [0 ; 20]$,

$$f(x) \in [0 ; 10].$$

- (c) On donne ci-après la courbe représentative \mathcal{C} de la fonction f dans un repère orthonormal.

Représenter, sur l'axe des abscisses, à l'aide de ce graphique, les cinq premiers termes de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ puis émettre une conjecture quant à son sens de variation et à sa convergence.

2. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 10.$$

3. Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est convergente et déterminer sa limite.

