★☆☆☆☆ Exercice 1 /7

On donne les complexes $z_1 = -\dfrac{\sqrt{3}+\mathrm{i}}{4}$ et $z_2 = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.

1. Écrire sous forme exponentielle z_1 et z_2 sous forme algébrique. /1.5
2. Déduire de la question précédente l'écriture de $\dfrac{z_1}{z_2}$ sous forme exponentielle.
3. Écrire $\dfrac{z_1}{z_2}$ sous forme algébrique. /1.5
4. En déduire que $\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ et $\sin\left(\dfrac{7\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$. /1

★★☆☆☆ Exercice 2 /4

1. Soient p et q deux réels.
   À l'aide d'une formule d'Euler, démontrer que $\dfrac{\sin p + \sin q}{2} = \sin\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$. /2
2. En déduire $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin(3x)\cos(x)\,dx$. /2

★★☆☆☆ Exercice 3 /6

1. Déterminer, sous forme exponentielle, les racines quatrièmes de l'unité. /1.5
2. Développer l'expression $(1+\mathrm{i})^4$. /1.5
3. En déduire, sous forme algébrique, l'ensemble des solution de l'équation $z^4 = -4$. /3

★★★★☆ Exercice 4 /3

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{C}$.
On considère la somme $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} z^k$.

1. Quelle est la valeur de S_n si $z = 1$? /1
2. On suppose désormais que $z \neq 1$.
   (a) Démontrer que $S_n = \dfrac{z^n - 1}{z - 1}$. /1
   (b) En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $S_n = 0$. /1