○○○ **Exercice 1.**
Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 6 \\ u_{n+1} = 2u_n - 5 \end{cases}$$

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a :

$$u_n = 2^n + 5.$$

●○○ **Exercice 2.**
Soit (v_n) la suite géométrique de raison q et de premier terme v_0.
Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = v_0 q^n$.

●●○ **Exercice 3.**
Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n} \end{cases}$$

Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{2}{2n+1}$.

●○○ **Exercice 4.**
Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n \mathrm{e}^{2u_n} \end{cases}$$

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a : $u_n > 0$.

●○○ **Exercice 5.**
Soit la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} w_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+1} = 3w_n - 2n + 3 \end{cases}$$

Démontrer que pour tout entier naturel n on a :

$$w_n \geqslant n$$

.

●●○ **Exercice 6.**
Soit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} v_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = \dfrac{1}{3}v_n + 4 \end{cases}$$

.

1. Calculer v_1.
2. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a $v_{n+1} \geqslant v_n$.
3. En déduire la monotonie de la suite (v_n).

●●○ **Exercice 7.**
Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2-u_n} \end{cases}$$

1. Calculer u_2, u_3 et u_4.
2. Conjecturer l'expression de u_n en fonction de n.
3. Démontrer cette conjecture par récurrence puis en déduire u_{2023}.

●○○ **Exercice 8.**
Soit $\mathscr{P}_n$ la proposition « 2^n est un multiple de 3 ».

1. Démontrer que $\mathscr{P}_n$ est héréditaire.
2. $\mathscr{P}_n$ est-elle vraie pour tout entier naturel n ?

●●○ **Exercice 9.**
Soit $\mathscr{P}_n$ la proposition « $10^n - 1$ est un multiple de 9 ».

1. Démontrer que $\mathscr{P}_n$ est héréditaire.
2. $\mathscr{P}_n$ est-elle vraie pour tout entier naturel n ?

●●● **Exercice 10.**
a un réel strictement positif.
Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ (1+a)^n \geqslant 1 + na$.
(Inégalité de Bernoulli).

●●● **Exercice 11.**
Soit n un entier naturel et $a_0,\ a_1,\ a_2 \ldots,\ a_{n+1}$ des nombres réels non nuls.
Démontrer que pour tout entier naturel n,

$$\prod_{k=0}^{n} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_{n+1}}{a_0}$$

●●○ **Exercice 12.**
Soit n un entier naturel non nul.
Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul,

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

.