Devoir surveillé n°6 : bilan trimestriel

Exercice 1. **/11**

Soit f la fonction dérivable, définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^x + \frac{1}{x}.$$

1. **Étude d'une fonction auxiliaire**

   (a) Soit la fonction g dérivable, définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par

   $$g(x) = x^2\mathrm{e}^x - 1.$$

   Étudier le sens de variation de la fonction g sur $[0\,;\,+\infty[$ puis calculer la limite de g en $+\infty$.

   (b) Démontrer qu'il existe un unique réel α appartenant à $[0\,;\,+\infty[$ tel que $g(\alpha) = 0$.

   (c) Vérifier que α appartient à l'intervalle $[0,70\,;\,0,71]$.

   (d) On considère la fonction `seuil` suivante ci-dessous dans le langage Python. On rappelle que la fonction `exp` du module `math` (que l'on suppose importé) désigne la fonction exponentielle.

   ```
   def  seuil(pas) :
        x=0.70
        while x**2*exp(x)-1 < 0:
          x=x+pas
        return x
   ```

   Quelle est la valeur renvoyée à l'appel de la fonction `seuil(0.001)` ?
   Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

   (e) Déterminer le signe de $g(x)$ sur $[0\,;\,+\infty[$.

2. **Étude de la fonction** f

   (a) Calculer la limite de f en 0 puis interpréter graphiquement le résultat.

   (b) Calculer la limite de la fonction f en $+\infty$.

   (c) On note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   Démontrer que pour tout réel strictement positif x, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.

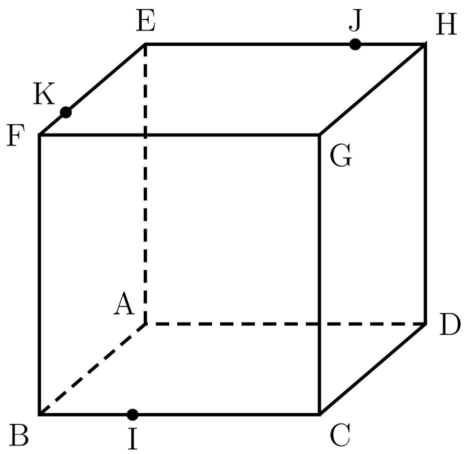
   (d) En déduire le sens de variation de la fonction f et dresser son tableau de variation sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

   (e) Démontrer que la fonction f admet pour minimum le nombre réel $m = \dfrac{1}{\alpha^2} + \dfrac{1}{\alpha}$.

Nom :

Exercice 2. **/5**

On considère un cube ABCDEFGH d'arête de longueur 1.
On se place dans le repère orthonormal $\left(\mathrm{A}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{AB}}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{AD}}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$.
On considère les points $\mathrm{I}\left(1\ ;\ \dfrac{1}{3}\ ;\ 0\right)$, $\mathrm{J}\left(0\ ;\ \dfrac{2}{3}\ ;\ 1\right)$, $\mathrm{K}\left(\dfrac{3}{4}\ ;\ 0\ ;\ 1\right)$ et $\mathrm{L}(a\ ;\ 1\ ;\ 0)$ avec a un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0\,;\,1]$.



Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (IJ).
2. Démontrer qu'une représentation paramétrique de la droite (KL) est :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & \frac{3}{4} + t'\left(a - \frac{3}{4}\right) \\ y & = & t' \\ z & = & 1 - t' \end{array}\right. \quad , \ t' \in \mathbb{R}$$

3. Démontrer que les droites (IJ) et (KL) sont sécantes si, et seulement si, $a = \dfrac{1}{4}$.

Partie B

Dans la suite de l'exercice, on pose $a = \frac{1}{4}$.
Le point L a donc pour coordonnées $\left(\frac{1}{4}\ ;\ 1\ ;\ 0\right)$.

1. Démontrer que le quadrilatère IKJL est un parallélogramme.
2. Construire la section du cube par le plan (IJK).

Exercice 3. /4

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples constitué de quatre questions; chacune comporte quatre réponses, une seule est exacte. On notera sur la copie uniquement la lettre correspondant à la réponse choisie.

Un lecteur d'une bibliothèque est passionné de romans policiers et de biographies. Cette bibliothèque lui propose 150 romans policiers et 50 biographies.

40 % des écrivains de romans policiers sont français et 70 % des écrivains de biographies sont français.

Le lecteur choisit un livre au hasard parmi les 200 ouvrages.

1. La probabilité que le lecteur choisisse un livre d'un écrivain français est :

   a. 0,9 **b.** 0,7 **c.** 0,475 **d.** 0,4

2. La probabilité que le lecteur ait choisi un roman policier sachant que l'écrivain est français est :

   a. $\dfrac{4}{150}$ **b.** $\dfrac{12}{19}$ **c.** 0,3 **d.** 1

3. Le lecteur est venu 20 fois à la bibliothèque; la probabilité qu'il ait choisi au moins un roman policier est :

   a. $1 - 0,25^{20}$ **b.** $20 \times 0,75$ **c.** $0,75 \times 0,25^{20}$ **d.** $1 - 0,75^{20}$

4. Le lecteur est venu n fois à la bibliothèque.
   Soit n_0 la plus grande valeur de n pour laquelle la probabilité que ce lecteur a toujours emprunté un roman policier est supérieure à $0,01$.
   On peut affirmer que :

   a. $n_0 = 15$ **b.** $n_0 = 16$ **c.** $n_0 = 17$ **d.** $n_0 = 11$