

☆☆☆☆ Exercice 1

4 points

Soient m et p deux entiers relatifs. Démontrer que :

$$9m + 5 \equiv p \pmod{26} \iff m \equiv 3p + 11 \pmod{26}.$$

★★★★ Exercice 2

7 points

On se place dans un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

On considère le point M_n d'affixe z_n où (z_n) est la suite définie sur \mathbb{N} par $z_0 = 1$ et pour tout entier naturel n par :

$$z_{n+1} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) z_n$$

1. Déterminer le module et un argument de $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$.
2. (a) Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n , on a $|z_n| = 1$.
(b) En déduire que le point M_n appartient à un cercle dont vous préciserez le centre et le rayon.
3. Démontrer que le point O est situé sur la médiatrice du segment $[M_n M_{n+1}]$.

★★★★ Exercice 3

9 points

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Les points A , B et C ont pour affixes respectives $a = -4$, $b = 2$ et $c = 4$.

On considère les trois points A' , B' et C' d'affixes respectives $a' = ja$, $b' = jb$ et $c' = jc$ où j est le nombre complexe $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

1. Calculer la forme algébrique de a' .
On admettra que $b' = -1 + i\sqrt{3}$ et $c' = -2 + 2\sqrt{3}i$.
2. (a) Calculer le module et un argument de j .
(b) En déduire le module et un argument de a' , b' et c' .
3. Placer les points A' , B' et C' dans le repère donné page 2.
4. Démontrer que les points A' , B' et C' sont alignés.
5. On note M le milieu du segment $[A'C]$, N le milieu du segment $[C'C]$ et P le milieu du segment $[C'A]$.
Démontrer que le triangle MNP est isocèle.

