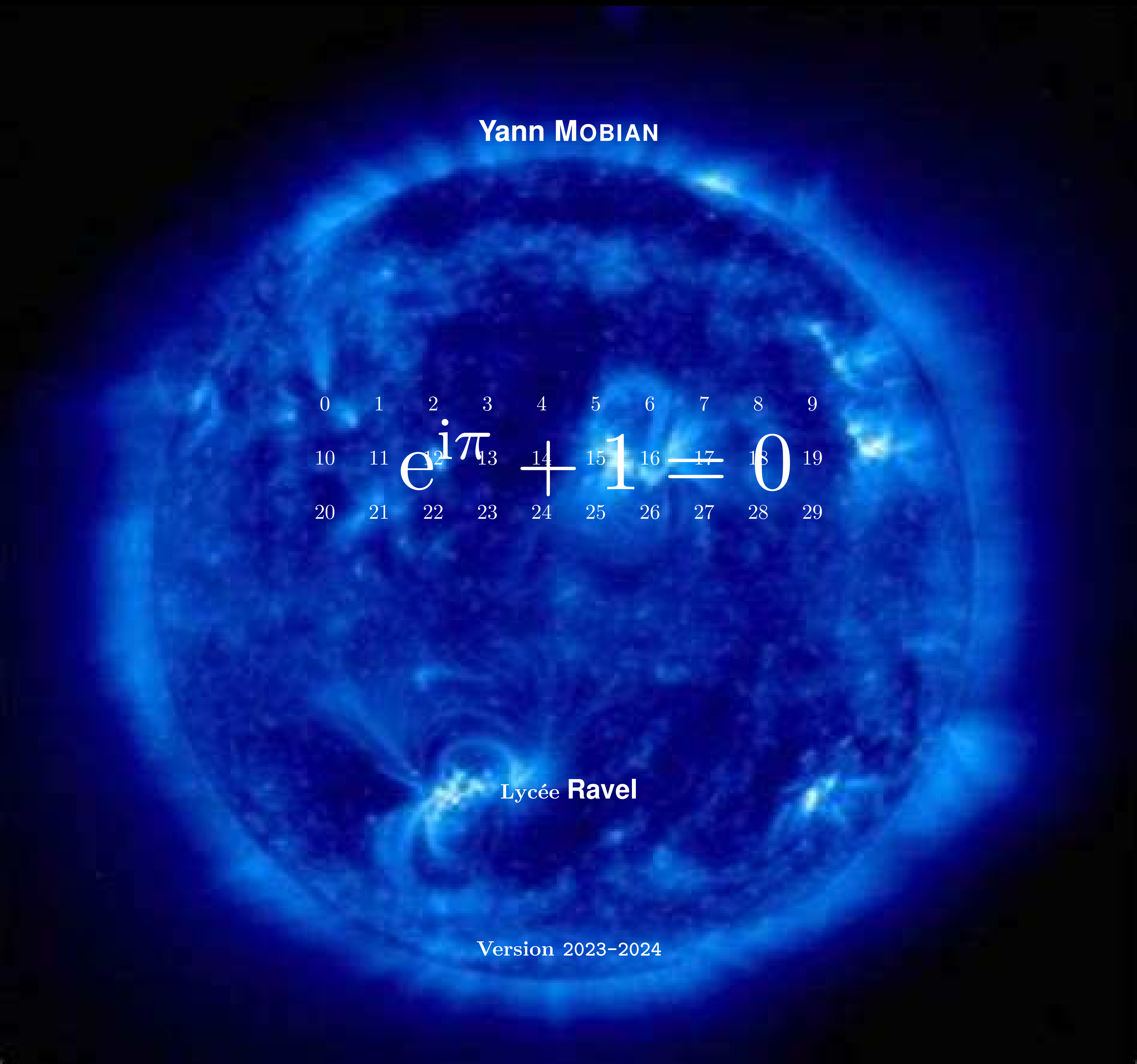
Une année en Mathématiques expertes

Cours et exercices



Yann Mobian

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Lycée **Ravel**

Version 2023-2024

Table des matières

Préambule

Ceci est le livre complet comportant le cours et les exercices que nous allons traiter tout au long de cette année. Il vous sera utile lorsque vous serez absent et vous permettra également d'avoir sous format numérique les notions qui vous serviront de pré-requis pour le Supérieur. Tous mes documents publics sont sous licence CC-BY-NC :

« Être hautain c'est ne pas être à la hauteur ».
Ali

CHAPITRE 1

Calcul matriciel

1.1 Notion de matrice et vocabulaire

1.1.1 Matrice

Définition 1.1.

Soient n et p deux entiers naturels *non nuls.*
On appelle *matrice* de *dimension* $n \times p$, ou d'ordre $n \times p$ voire de format $n \times p$, un tableau de n lignes et p colonnes de nombres réels.
On note $a_{i,j}$ l'élément de la matrice situé à l'intersection de la i-ième ligne et de la j-ième colonne.

Une matrice A est représentée entre deux parenthèses ou deux crochets :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} \text{ ou } A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,p} \end{bmatrix}$$

Exemple. La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & -4 \\ 6 & 1 & 0 & \pi \\ \sqrt{2} & 1 & \frac{1}{2} & 8 \end{pmatrix}$ est une matrice d'ordre ____________

Le coefficient $a_{2,4}$, coefficient situé à la ________________________ de la ________________________, de la matrice A est :

$$\boxed{a_{2,4} = \_\_\_\_\_\_}.$$

▶ Note 1.1.
L'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients réels est noté $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

1.1.2 Matrice carrée

Définition 2.1. *Matrice carrée*

Une matrice ayant le *même nombre* n de lignes et de colonnes est une matrice ____________ d'ordre ______.

Exemple. La matrice $M = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ est une matrice carrée ______________

▶ **Note 2.1.**
L'ensemble des matrices à n lignes et n colonnes à coefficients réels est noté $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

1.1.3 Matrice ligne

Définition 3.1. *Matrice ligne*
Une matrice formée *d'une seule ligne* et de n (avec $n \in \mathbb{N}^*$) colonnes est *une matrice ligne ou vecteur ligne.*

Exemple. La matrice $A = \begin{pmatrix} -7 & 9 & 8 & 5 \end{pmatrix}$ est une *matrice ligne* de dimension ______________

1.1.4 Matrice colonne

Définition 4.1. *Matrice colonne*
Une matrice formée de p (avec $p \in \mathbb{N}^*$) *lignes et d'une seule colonne* est une *matrice colonne ou vecteur colonne.*

Exemple. La matrice $C = \begin{pmatrix} 25 \\ 28 \\ 16 \end{pmatrix}$ est une *matrice colonne* de dimension ____.

1.1.5 Égalité de deux matrices

Propriété 1.1.
Deux matrices A et B sont *égales* si, et seulement si :

- elles ont *même dimension* ;
- tous leurs éléments situés à la *même place sont égaux.*

Application 1.1. On considère $A = \begin{pmatrix} 5 & 2-a & -3 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & b+2 \end{pmatrix}$

Déterminer les valeurs de a et b pour que les matrices A et B soient égales.

1.2 Opérations sur les matrices

1.2.1 Addition de matrices

Définition 5.1.
La *somme* de deux matrices A et B de *même dimension* est la matrice notée $A + B$ obtenue en ajoutant les éléments de A et ceux de B situés à la même place.

Si $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ sont deux matrices d'ordre $n \times p$ alors :

$$\boxed{A + B = (a_{i,j} + b_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}}$$

Exemple. Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 10 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$:

$$A + B = \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}$$

Propriété 2.1.
Soient A, B et C sont des matrices de ____________________. :

1. $A + B = B + A$.
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$

1.2.2 Multiplication par un réel

Définition 6.1.
Le *produit* d'une matrice A par un réel k est la matrice kA obtenue en multipliant chaque élément de A par le réel k.

Si $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ est une matrice d'ordre $n \times p$ alors pour tout réel k :

$$\boxed{kA = (ka_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}}.$$

Exemple. Soit $A = \begin{pmatrix} 2,3 & 4 & 2 \\ -2 & 0 & -0,5 \end{pmatrix}$ alors : $10A = \begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \end{pmatrix}$.

1.2.3 Produit de matrices

Définition 7.1.
Soient p un entier naturel non nul, A une matrice ligne de dimension $1 \times p$ et B une matrice colonne de dimension $p \times 1$.

Le *produit* $A \times B$ de ces deux matrices est :

$$\boxed{\begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_i & \cdots & a_p \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix} = (a_1 \times b_1 + \cdots + a_i \times b_i + \cdots + a_p \times b_p)}$$

Le produit $A \times B$ de ces deux matrices est la matrice de dimension 1×1 qui n'a qu'un seul élément.

Exemple.

$$\begin{pmatrix} 60 & 50 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 25 \\ 28 \\ 30 \end{pmatrix} =$$

⚠ Le produit AB de deux matrices A et B est défini si et seulement si le nombre de ____________________ de A est égal au nombre de ____________________ de B.

Définition 8.1. *Produit de deux matrices*

Soient $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ une matrice $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant m}}$ une matrice $\mathfrak{M}_{p,m}(\mathbb{R})$.

Le produit $C = AB$ est une matrice de format $n \times m$ dont les coefficients $c_{i,j}$ sont définis par :

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}$$

On peut écrire le coefficient de façon plus développée, à savoir :

$$\boxed{c_{i,j} = a_{i,1}b_{1,j} + a_{i,2}b_{2,j} + \cdots + a_{i,k}b_{k,j} + \cdots + a_{i,p}b_{p,j}}.$$

Remarque. Il peut être *utile* de disposer les calculs de la façon suivante :

$$\begin{array}{ccc} & \begin{pmatrix} & & & \times & \\ & & & \times & \\ & & & \times & \\ & & & \times & \end{pmatrix} & \leftarrow B \\ A \rightarrow \begin{pmatrix} & & & \\ \times & \times & \times & \times \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} & & & | & \\ & & & | & \\ - & - & - & c_{ij} & \end{pmatrix} & \leftarrow AB \end{array}$$

Avec cette disposition, on considère d'abord la ligne de la matrice A située à gauche du coefficient que l'on veut calculer (ligne représentée par des $\times$ dans A) et aussi la colonne de la matrice B située au-dessus du coefficient que l'on veut calculer (colonne représentée par des $\times$ dans B). On calcule le produit du premier coefficient de la ligne par le premier coefficient de la colonne ($a_{i1} \times b_{1j}$), que l'on ajoute au produit du deuxième coefficient de la ligne par le deuxième coefficient de la colonne ($a_{i2} \times b_{2j}$), que l'on ajoute au produit du troisième...

Application 2.1. On donne les matrices $A = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Peut-on calculer le produit $A \times B$? Si oui, calculer ce produit.
2. Peut-on calculer le produit $B \times A$? Si oui, calculer ce produit.

1.2.4 Quelques règles opératoires

Propriété 3.1.
Soient A, B et C trois matrices telles que les sommes et les produits ci-dessous sont définis.

- $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$.
- $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$.
- $(A + B) \times C = A \times C + B \times C$.

⚠ En général $A \times B \neq B \times A$, on dit que la multiplication n'est pas *commutative* et il faut faire attention à l'ordre dans lequel on effectue les calculs.

Exemple.

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Et

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$$

⚠ $A \times C = B \times C$ ne signifie pas que $A = B$.
De même $A \times B = 0$ ne signifie pas que $A = 0$ ou $B = 0$.

Exemple.

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 3 & -6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -6 & 3 & -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & -3 \\ 5 & -6 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

1.3 Matrices carrées

1.3.1 Matrice identité

Définition 9.1. *Matrice diagonale*

Une matrice carrée dont tous les coefficients sont nuls, sauf éventuellement les coefficients de la diagonale, est appelée *matrice diagonale.*

Exemple. La matrice $A = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$ est une matrice diagonale mais en revanche, la matrice $B = \begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$ n'est pas une matrice diagonale.

Définition 10.1. *Matrice identité*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La matrice diagonale d'ordre n dont tous les coefficients sur la diagonale sont égaux à 1 est appelée *matrice identité* d'ordre n, on la note I_n.

Exemples.

$$I_2 = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{pmatrix} \qquad I_3 = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \qquad I_4 = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}.$$

Propriété 4.1.
Soit A une matrice carrée d'ordre n alors $A \times I_n = I_n \times A = A$, où I_n est la matrice identité d'ordre n.

Exemple.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

1.3.2 Puissances d'une matrice carrée

Définition 11.1. *Matrice puissance*

Soient A une matrice carré d'ordre n et p un entier supérieur ou égal à 1.
La *puissance* p-ième de la matrice A est la matrice carrée d'ordre n obtenue en effectuant le produit de p matrices égales à A.

$$\boxed{A^p = \underbrace{A \times A \times \cdot \times A}_{p \text{ fois}}}.$$

Par convention $A^0 = I_n$.

Exemple. Soit $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -5 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$:

$$A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -5 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -5 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -5 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

1.3.3 Inverse d'une matrice carrée

Définition 12.1.

Une matrice *carrée* A d'ordre n est *inversible*, s'il existe une matrice carrée B d'ordre n telle que $A \times B = B \times A = I_n$, où I_n est la matrice identité d'ordre n.

La matrice inverse de A si elle existe, est unique et est notée : $\boxed{A^{-1}}$

Méthode

Pour montrer qu'une matrice A est inversible, on peut chercher une matrice B telle que $AB = I_n$. On pourra conclure que A est inversible et que $A^{-1} = B$.

Application 3.1. On donne les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A(I_2 + B)$.
2. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

Propriété 5.1. *Cas de la dimension 2*

Soit A une matrice carrée d'ordre 2, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
La matrice A est *inversible* si et seulement si $ad - bc \neq 0$.
Le réel $ad - bc$ est appelé *déterminant* de la matrice A et est noté Δ.

Si $ad - bc \neq 0$ alors, $A^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Application 4.1. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$. Justifier que A est inversible et préciser A^{-1}.

1.3.4 Application aux systèmes linéaires

Définition 13.1.

Un *système linéaire* à n équations et n inconnues : $\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,n}x_n = b_n \end{cases}$

peut s'écrire sous la forme matricielle $AX = B$ où $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$ est une matrice carrée d'ordre n, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ sont des matrices colonnes de dimension $n \times 1$.

Si la matrice A est *inversible*, alors le système admet une unique solution donnée par :

$$\boxed{X = A^{-1}B}$$

Application 5.1. Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système $\begin{cases} x - 3y + z = 6 \\ 2x - y + 3z = -2 \\ -4x + 3y - 6z = 1 \end{cases}$ en utilisant la méthode du pivot.

1.4 Les exercices du chapitre

○○○ **Exercice 1.**
Quel est le format de chacune des matrices suivantes ?

- $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$;
- $B = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -5 \\ 2 & 5 & -4 \\ 7 & -4 & 9 \\ 6 & 7 & 9 \end{pmatrix}$;
- $C = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 1 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$;
- $D = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

●○○ **Exercice 2.**
On pose $A = (a_{i,j})$ la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

1. Quelles valeurs peuvent prendre i et j ?
2. Préciser la valeur de $a_{2,3}$.
3. Écrire chacun des autres coefficients sous la forme $a_{i,j}$.

●○○ **Exercice 3.**
La matrice $B = (b_{i,j})$ est telle que $b_{i,j} = i + 3j$ pour $1 \leqslant i \leqslant 4$ et $1 \leqslant j \leqslant 2$.

1. Quel est le format de cette matrice ?
2. Écrire la matrice B avec tous ses coefficients.

○○○ **Exercice 4.**

1. Calculer $A + B$ et $5A - 4B$ avec :
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & -9 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}.$$
2. Reprendre la question précédente avec les matrices :
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -4 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 4 & 7 & -3 \\ 10 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & -5 \end{pmatrix}.$$

○○○ **Exercice 5.**
On considère les matrices :
$$A = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 5 & -3 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$
Parmi les opérations suivantes, effectuer celles qu'il est possible d'effectuer :
$$A + B,\ 3D,\ A + 3D,\ B - 2C.$$

●○○ **Exercice 6.**
Effectuer les multiplications suivantes :

1. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} -2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} 7 & 0 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

●○○ **Exercice 7.**
Effectuer les multiplications suivantes :

1. $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

●○○ **Exercice 8.**
Effectuer les multiplications suivantes :

1. $\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 2 & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$.
2. $\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

●○○ **Exercice 9.**
Effectuer les multiplications suivantes :

1. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 24 \\ 2 & 4 & -5 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 7 & 0 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

●○○ Exercice 10.
Effectuer les multiplications suivantes :

1. $\begin{pmatrix} 1 & -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

●○○ Exercice 11.
Effectuer les multiplications suivantes :

1. $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & -2 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

●○○ Exercice 12.
Effectuer les multiplications suivantes :

1. $\begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & b & 3 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$.
2. $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

●○○ Exercice 13.
Effectuer, à la main, les multiplications suivantes puis vérifier les résultats à la calculatrice :

1. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -10 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

●○○ Exercice 14.
Effectuer les multiplications suivantes :

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$

●○○ Exercice 15.

Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Déterminer, parmi les calculs suivants, ceux qu'il est possible d'effectuer et indiquer la taille de la matrice résultat :

1. $A \times B$, $A - C$, A^2, B^2 et C^2.
2. Effectuer alors les calculs jugés « possibles ».

○○○ Exercice 16.

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer AB et BA.
2. Commenter.

○○○ Exercice 17.

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Montrer que A est l'inverse de B.

●○○ Exercice 18.

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -3 & 4 & 6 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer la matrice P telle que $M = P + I_3$.
2. Calculer P^2. En déduire M^2.

●●○ Exercice 19.

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On note I la matrice identité : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $A^2 - 3A + 2I = O$ où O désigne la matrice nulle..
2. En déduire que la matrice A est inversible et déterminer son inverse.

●○○ Exercice 20.

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$.

Démontrer que pour tout entier naturel n non nul,

$$A^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{pmatrix}$$

●●○ Exercice 21.

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2, A^3 et A^4.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   Émettre une conjecture sur A^n.
3. (a) Montrer que $A = I_2 + B$ où
   $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   (b) Calculer B^2. En déduire A^2 puis A^3 en fonction de I_2 et B.
4. (a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul, $A^n = I_2 + nB$.
   (b) Écrire A^n avec tous ses coefficients.

●●○ Exercice 22.

On considère les matrices P et Q définies par :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le produit $P \times Q$.
2. En déduire que P est inversible et écrire son inverse.

●●○ Exercice 23.

Soit la matrice A définie par $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Calculer A^2, A^3 et A^4.
2. En déduire A^{-1}.

●●○ Exercice 24.

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que $A^2 = 2A + I_2$.
2. En déduire que A est inversible et donner A^{-1}.

●●● Exercice 25.

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer qu'il existe une matrice N, carrée d'ordre 3, telle que $A = I + N$.
2. Vérifier que $N^3 = 0$.
3. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$A^n = I + nN + \frac{n(n-1)}{2}N^2.$$

●○○ Exercice 26.
Soit (S) : $\begin{cases} 3x+4y &= -6 \\ 2x+5y &= 10 \end{cases}$ le système d'inconnues réelles x et y et on pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -6 \\ 10 \end{pmatrix}$. Résoudre le système en utilisant la méthode du pivot.

●●○ Exercice 27.
Résoudre les systèmes 3×3 suivants en utilisant la méthode du pivot :

1. $\begin{cases} x+y-z &= 2 \\ -x+y+z &= 4 \\ 2x-y+z &= -5 \end{cases}$
2. $\begin{cases} 4x+2y+9z &= 22 \\ 2x+8y+7z &= 44 \\ 5x+6y+3z &= 85 \end{cases}$

●●○ Exercice 28.
Dans le plan muni d'un repère, on considère les points A$(5\,;\,2)$, B$(4\,;\,3)$ et C$(1\,;\,0)$.
On cherche une parabole $\mathscr{P}$: $y = ax^2+bx+c$ passant par les points A, B et C.
Écrire sous forme matricielle un système vérifié par a, b et c puis répondre à la question posée.

●●● Exercice 29.
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$

1. On appelle I la matrice identité d'ordre 2.
   Vérifier que $A^2 = A + 2I$.
2. En déduire une expression de A^3 et une expression de A^4 sous la forme
   $\alpha A + \beta I$ où α et β sont des réels.
3. On considère les suites (r_n) et (s_n) définies par $r_0 = 0$ et $s_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,
   $$\begin{cases} r_{n+1} &= r_n + s_n \\ s_{n+1} &= 2r_n \end{cases}$$
   Démontrer que, pour tout entier naturel n,
   $$A^n = r_n A + s_n I.$$
4. Démontrer que la suite (k_n) définie pour tout entier naturel n par $k_n = r_n - s_n$ est géométrique de raison -1.
   En déduire, pour tout entier naturel n, une expression explicite de k_n en fonction de n.
5. On admet que la suite (t_n) définie pour tout entier naturel n par
   $t_n = r_n + \dfrac{(-1)^n}{3}$ est géométrique de raison 2.
   En déduire, pour tout entier naturel n, une expression explicite de t_n en fonction de n.
6. Déduire des questions précédentes, pour tout entier naturel n, une expression explicite de r_n et s_n en fonction de n.
7. En déduire alors, pour tout entier naturel n, une expression des coefficients de la matrice A^n.

●●● **Exercice 30.**

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, la matrice identité d'ordre 3 : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et la matrice nulle d'ordre 3 notée $O_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Pour tout réel x, on définit la matrice :

$$(*) \quad M(x) = I + xA + \frac{x^2}{2}A^2.$$

1. Calculer A^2 et A^3 et en déduire A^n pour tout entier naturel $n > 3$.
2. Soit x et y deux nombres réels.
   Montrer en utilisant $(*)$ que :
   $$M(x)M(y) = M(x+y).$$
3. Montrer que pour tout entier naturel n :
   $$(M(x))^n = M(nx).$$
4. Calculer $M(0)$ et $M(1)$.
5. Calculer $(M(1))^n$ pour tout entier naturel n.

CHAPITRE

2 Nombres complexes (1) : partie algébrique

2.1 Ensemble des nombres complexes

2.1.1 Préambule

L'équation $x+5=2$ a ses coefficients dans $\mathbb{N}$ mais pourtant sa solution $x =$ ______ n'est pas un entier naturel. Il faut ici considérer l'ensemble plus grand $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs.

$$\mathbb{N} \xhookrightarrow{x+5=2} \mathbb{Z} \xhookrightarrow{2x=-3} \mathbb{Q} \xhookrightarrow{x^2=2} \mathbb{R} \xhookrightarrow{x^2=-1} \mathbb{C}$$

De même l'équation $2x = -3$ a ses coefficients dans $\mathbb{Z}$ mais sa solution $x =$ ______ est dans l'ensemble plus grand des rationnels $\mathbb{Q}$. Continuons ainsi, l'équation $x^2 = \frac{1}{2}$ à coefficients dans $\mathbb{Q}$, a ses solutions $x_1 =$ ______ et $x_2 =$ ______ dans l'ensemble des réels $\mathbb{R}$. Ensuite l'équation $x^2 = -1$ a ses coefficients dans $\mathbb{R}$ et ses solutions $x_1 =$ ______ et $x_2 =$ ______ dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$.
Ce processus est-il sans fin ? Non ! Les nombres complexes sont en quelque sorte le bout de la chaîne...

Outre la résolution d'équations, les nombres complexes s'appliquent à la trigonométrie, à la géométrie (comme nous le verrons cette année) mais aussi à l'électronique, à la mécanique quantique, etc.

2.1.2 Forme algébrique d'un nombre complexe

Étant donné que certaines équations polynomiales à coefficients réels n'ont pas toujours de solution (comme l'équation $x^2 = -1$), on cherche à construire un nouvel ensemble de nombres :

Théorème 1.2.

1. contenant tous les *nombres réels*,
2. muni de *deux opérations prolongeant l'addition et la multiplication des nombres réels et ayant les mêmes règles de calculs*,
3. contenant un élément noté i tel que __________,
4. Tout nombre z s'écrive de manière unique $z = x + \mathrm{i}y$ où a et b sont *des réels*,
5. Le nombre 0 s'écrit __________.

On *admettra* qu'un tel ensemble existe : il s'agit de l'ensemble des nombres complexes noté $\mathbb{C}$.

Définition 1.2.

L'écriture $z = x + \mathrm{i}y$ unique est appelée *forme algébrique* du complexe z.

- Le *nombre réel* x est appelé *partie* ________________ de z et notée $\mathrm{Re}(z)$.
- Le *nombre réel* y est appelé *partie* ______________________ de z et notée $\mathrm{Im}(z)$.

Application 1.2. Soient $z = 5 + 4\mathrm{i}$ et $z' = 6 - 7\mathrm{i}$.

1. Écrire sous forme algébrique $z + z'$ et zz'.
2. En déduire $\mathrm{Re}(z + z')$ et $\mathrm{Im}(zz')$.

2.1.3 Identités remarquables

Propriété 1.2.
Soient a et b deux réels.

$$
\begin{aligned}
(a + \mathrm{i}b)^2 &= a^2 - b^2 + 2ab\text{ß} && (2.1)\\
(a - \mathrm{i}b)^2 &= a^2 - b^2 - 2ab\mathrm{i} && (2.2)\\
(a + \mathrm{i}b)(a - \mathrm{i}b) &= a^2 + b^2 && (2.3)
\end{aligned}
$$

Démonstration.

____

____

____

□

2.1.4 La division dans $\mathbb{C}$

Théorème 2.2.
Tout nombre complexe non nul z admet un *unique inverse*, noté $\dfrac{1}{z}$.

Méthode

Pour obtenir la forme algébrique d'un quotient dans $\mathbb{C}$, on *multiplie* le numérateur et le dénominateur du quotient par *l'expression conjuguée* du dénominateur pour faire apparaître la troisième identité remarquable.

Application 2.2. Déterminer l'inverse de $3 + 2\mathrm{i}$.

2.1.5 Conjugué

Définition 2.2.
On appelle *conjugué* du nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$ le nombre complexe noté $\overline{z}$ défini par :

$$\boxed{\overline{z} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}.$$

Exemples. $\overline{3-2\mathrm{i}} = \_\_\_\_\_\_\_\_$ $\overline{5+\mathrm{i}} = \_\_\_\_\_\_\_\_$ $\overline{3} = \_\_\_\_\_\_\_\_$ $\overline{\mathrm{i}} = \_\_\_\_\_\_\_\_$

Propriété 2.2.
Soient z et z' deux nombres complexes.

1. $\overline{\overline{z}} = z$
2. $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
3. $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$
4. $\overline{z^n} = \overline{z}^n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$
5. $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z}}$
6. $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$ pour $z' \neq 0$

Application 3.2. Donner la forme algébrique de $z = \dfrac{2+\mathrm{i}}{3-2\mathrm{i}}$.

2.2 Techniques opératoires

2.2.1 Nombres réels, nombres imaginaires purs

Propriété 3.2.
1. z *réel* $\Longleftrightarrow \mathrm{Im}(z) = 0 \Longleftrightarrow z = \overline{z}$.
2. z *imaginaire pur* $\Longleftrightarrow \mathrm{Re}(z) = 0 \Longleftrightarrow z = -\overline{z}$.

Application 4.2. Démontrer que le nombre complexe $z = \dfrac{2-7\mathrm{i}}{-3+5\mathrm{i}} - \dfrac{2+7\mathrm{i}}{3+5\mathrm{i}}$ est un nombre réel après avoir calculé $\overline{z}$.

2.2.2 Formule du binôme de Newton

Propriété 4.2. *admise*
Soit a et b deux nombres complexes. On a alors :

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} a^s b^{n-s}}.$$

Remarque. On peut calculer les coefficients binomiaux $\dbinom{n}{k}$ à l'aide du triangle de Pascal.

Application 5.2. Calculer $(1+4\mathrm{i})^3$ puis vérifier le résultat à la calculatrice.

2.2.3 Équations dans $\mathbb{C}$

Propriété 5.2.
Deux nombres complexes sont *égaux* si et seulement si ils ont *même partie réelle* et *même partie imaginaire*.

Démonstration.

□

Application 6.2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $2z+3+\mathrm{i}=-\overline{z}+1+4\mathrm{i}$ en posant $z=x+\mathrm{i}y$ où x et y sont réels.

○○○ **Exercice 31.**
Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants :

1. $a = 5\mathrm{i}(1 + \mathrm{i})$
2. $b = 3\mathrm{i}\left((1 + 2\mathrm{i}) - (4 + \mathrm{i})\right)$
3. $c = 2\mathrm{i}^4 + \mathrm{i} + 2(1 - 2\mathrm{i})$
4. $d = \mathrm{i}^3 - 1$

○○○ **Exercice 32.**
Donner la forme algébrique des nombres complexes z_1, z_2, z_3 et z_4 définis dans la console python par les commandes suivantes :

- Pour z_1 :

```
z1=complex(3,2)
```

- Pour z_2 :

```
z2=complex(-5,2)
```

- Pour z_3 :

```
z3=z1+z2
```

- Pour z_4 :

```
z4=z1*z2
```

●○○ **Exercice 33.**
Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants puis vérifier les résultats à la calculatrice :

1. $a = 1 - (1 - 2\mathrm{i})(1 + 2\mathrm{i})$
2. $b = (2 + \mathrm{i})(3 - 5\mathrm{i})(1 + 2\mathrm{i})$
3. $c = (4 + 2\mathrm{i})^2 - 5\mathrm{i}(1 - 3\mathrm{i})$
4. $d = (5 + 3\mathrm{i})^2$

●○○ **Exercice 34.**
On considère deux nombres complexes $z = a + \mathrm{i}b$ et $z' = a' + \mathrm{i}b'$.

1. Démontrer que $\mathrm{Re}(zz') = aa' - bb'$.
2. Déterminer $\mathrm{Im}(zz')$.

●●○ **Exercice 35.**
On considère la suite (u_n) à valeurs complexes définies par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = (1 + \mathrm{i})u_n$ pour tout entier naturel n.

1. Calculer les trois premiers termes de cette suite.
2. Démontrer que pour tout entier naturel n on a $u_n = (1 + \mathrm{i})^n$.
3. Soit $k \in \mathbb{N}$. Démontrer que u_{2k} est réel.

●○○ **Exercice 36.**
Pour tout nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$, on donne :

$$P(z) = z^2 + 3\mathrm{i}.$$

1. Exprimer la partie réelle et la partie imaginaire de $P(z)$ en fonction de x et y.

2. En déduire la forme algébrique de $P\,(1+5\mathrm{i})$.

●●○ Exercice 37.
Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \mathrm{i}^n$.

1. On dit qu'une suite est périodique de période T si pour tout entier naturel n, $u_{n+T} = u_n$. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est périodique de période 4.
2. Calculer i^{2023}.
3. Calculer $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{i}^k$.
4. Pour quelles valeurs de n a-t-on $S_n = 0$?

●○○ Exercice 38.
Écrire le conjugué de chacun des nombres suivants :

1. 5
2. $\dfrac{2-4\mathrm{i}}{3+2\mathrm{i}}$
3. $(4+5\mathrm{i})^2$
4. $\dfrac{(3-4\mathrm{i})(4+\mathrm{i})}{2+3\mathrm{i}}$

●○○ Exercice 39.
Exprimer le conjugué des nombres complexes suivants :

1. $z^2 - \mathrm{i}z + 3\mathrm{i} - 4$
2. $3\mathrm{i} + (2+\mathrm{i})z$
3. $\dfrac{3z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}$

●○○ Exercice 40.
On considère un polynôme $P(z)$ de degré 2 à coefficients réels.
Montrer que si z_0 est une racine de P alors $\overline{z_0}$ l'est aussi.

●○○ Exercice 41.
Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants :

1. $a = \dfrac{1}{2-\mathrm{i}}$
2. $b = \dfrac{3}{2+\mathrm{i}}$
3. $c = \dfrac{2\mathrm{i}}{5-3\mathrm{i}}$
4. $d = \dfrac{-1+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$

●○○ Exercice 42.
Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $6z - 1 = -1 + 5\mathrm{i}$
2. $5z + 5 = 2z + 3 + 2\mathrm{i}$
3. $(4+z)(5+2z) = 4\mathrm{i} + 2z^2$

●○○ **Exercice 43.**
Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $\mathrm{i}\overline{z} - 1 = 7\mathrm{i} + \overline{z}$
2. $4\mathrm{i}\overline{z} - 4\mathrm{i} = 1 - \overline{z} + \mathrm{i}$

●●○ **Exercice 44.**
Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z + 3 + \mathrm{i} = 2\overline{z} + 7 + 3\mathrm{i}$
2. $2z - 4 = 5\mathrm{i} + 4\overline{z}$
3. $z\overline{z} = z + 2$
4. $\overline{z} - 1 = z\overline{z} - \mathrm{i}$

●●○ **Exercice 45.**
Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2\overline{z} = -1$.

●●○ **Exercice 46.**
Soient a et b deux réels non nuls en même temps.
Démontrer que $Z = \dfrac{a + \mathrm{i}b}{a - \mathrm{i}b} + \dfrac{a - \mathrm{i}b}{a + \mathrm{i}b}$ est réel.

●○○ **Exercice 47.**
On considère le nombre complexe $z = a + 2\mathrm{i}$ avec $a \in \mathbb{R}$.
Déterminer a pour que z^2 soit imaginaire pur.

●○○ **Exercice 48.**
Soit z un nombre complexe non nul.

1. Écrire le conjugué des nombres suivants en fonction de z et $\overline{z}$:
   (a) $Z_1 = z + \overline{z}$
   (b) $Z_2 = z^2 + \overline{z}^2$
   (c) $Z_3 = \dfrac{z - \overline{z}}{z + \overline{z}}$
   (d) $Z_4 = \dfrac{z^2 - \overline{z}^2}{z\overline{z} + 3}$
2. Déterminer si chacun des nombres précédents est un nombre réel, un nombre imaginaire pur ou ni l'un ni l'autre.

●●○ **Exercice 49.**
Soit $Z = \dfrac{z + \mathrm{i}}{z - \mathrm{i}}$ pour tout $z \neq \mathrm{i}$.

1. Exprimer $\overline{Z}$ en fonction de $\overline{z}$.
2. En déduire tous les nombres complexes z tels que Z soit réel.

●○○ **Exercice 50.**
Soit k un nombre réel et on pose :

$$z = 5k^2 + 3k - 8 - (k^2 + k - 2)\mathrm{i}.$$

1. Déterminer la ou les valeur(s) du réel k pour que z soit un nombre réel.
2. Déterminer la ou les valeur(s) du réel k pour que z soit un nombre imaginaire pur.
3. Existe-t-il une valeur ou plusieurs valeurs du réel k pour que z soit nul ?

●●○ Exercice 51.
À l'aide du binôme de Newton voire du triangle de Pascal, donner la forme algébrique des nombres suivants :

1. $(1+\mathrm{i})^3$
2. $(1+2\mathrm{i})^4$
3. $(2-\mathrm{i})^4$

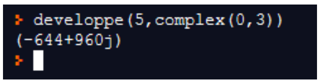
●○○ Exercice 52.

1. Dans la formule du binôme de Newton avec $(x+y)^8$, trouve-t-on un terme en x^5y^3 ? Si oui, préciser son coefficient.
2. Même question avec x^2y^6.

●●○ Exercice 53.
On considère la fonction Python suivante :

```python
def developpe(a,b):
    S=0
    L=[1,4,6,4,1]
    for k in range(5):
        S=S+L[k]*a**(4-k)*b**k
    return(S)
```

1. (a) Que représente les termes de la liste L ?
   (b) Déterminer l'expression de S en fonction de a et b.
   (c) Quelle valeur renvoie la fonction pour :
   $a=1$ et $b=\mathrm{i}$?
2. Louise a testé la fonction et a obtenu le résultat suivant :



Quelle égalité mathématique peut-elle en déduire ?

●●○ Exercice 54.

1. Écrire une formule inspirée par le binôme de Newton pour $(a-b)^n$ en remarquant que $a-b=a+(-b)$.
2. En déduire que $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n}(-1)^k\binom{n}{k}=0$.
3. Quel est le coefficient du terme en a^3b^7 dans le développement de $(a-b)^{10}$?

2.3 Les exercices du chapitre

○○○ **Exercice 55.**
Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants :

1. $a = 5\mathrm{i}(1+\mathrm{i})$
2. $b = 3\mathrm{i}\left((1+2\mathrm{i})-(4+\mathrm{i})\right)$
3. $c = 2\mathrm{i}^4 + \mathrm{i} + 2(1-2\mathrm{i})$
4. $d = \mathrm{i}^3 - 1$

○○○ **Exercice 56.**
Donner la forme algébrique des nombres complexes z_1, z_2, z_3 et z_4 définis dans la console python par les commandes suivantes :

- Pour z_1 :

```
z1=complex(3,2)
```

- Pour z_2 :

```
z2=complex(-5,2)
```

- Pour z_3 :

```
z3=z1+z2
```

- Pour z_4 :

```
z4=z1*z2
```

●○○ **Exercice 57.**
Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants puis vérifier les résultats à la calculatrice :

1. $a = 1-(1-2\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})$
2. $b = (2+\mathrm{i})(3-5\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})$
3. $c = (4+2\mathrm{i})^2 - 5\mathrm{i}(1-3\mathrm{i})$
4. $d = (5+3\mathrm{i})^2$

●○○ **Exercice 58.**
On considère deux nombres complexes $z = a + \mathrm{i}b$ et $z' = a' + \mathrm{i}b'$.

1. Démontrer que $\mathrm{Re}(zz') = aa' - bb'$.
2. Déterminer $\mathrm{Im}(zz')$.

●●○ **Exercice 59.**
On considère la suite (u_n) à valeurs complexes définies par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = (1+\mathrm{i})u_n$ pour tout entier naturel n.

1. Calculer les trois premiers termes de cette suite.
2. Démontrer que pour tout entier naturel n on a $u_n = (1+\mathrm{i})^n$.
3. Soit $k \in \mathbb{N}$. Démontrer que u_{2k} est réel.

●○○ Exercice 60.
Pour tout nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$, on donne :

$$P(z) = z^2 + 3\mathrm{i}.$$

1. Exprimer la partie réelle et la partie imaginaire de $P(z)$ en fonction de x et y.
2. En déduire la forme algébrique de $P(1 + 5\mathrm{i})$.

●●○ Exercice 61.
Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \mathrm{i}^n$.

1. On dit qu'une suite est périodique de période T si pour tout entier naturel n, $u_{n+T} = u_n$. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est périodique de période 4.
2. Calculer i^{2023}.
3. Calculer $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{i}^k$.
4. Pour quelles valeurs de n a-t-on $S_n = 0$?

●○○ Exercice 62.
Écrire le conjugué de chacun des nombres suivants :

1. 5
2. $\dfrac{2 - 4\mathrm{i}}{3 + 2\mathrm{i}}$
3. $(4 + 5\mathrm{i})^2$
4. $\dfrac{(3 - 4\mathrm{i})(4 + \mathrm{i})}{2 + 3\mathrm{i}}$

●○○ Exercice 63.
Exprimer le conjugué des nombres complexes suivants :

1. $z^2 - \mathrm{i}z + 3\mathrm{i} - 4$
2. $3\mathrm{i} + (2 + \mathrm{i})z$
3. $\dfrac{3z + \mathrm{i}}{z - \mathrm{i}}$

●○○ Exercice 64.
On considère un polynôme $P(z)$ de degré 2 à coefficients réels.
Montrer que si z_0 est une racine de P alors $\overline{z_0}$ l'est aussi.

●○○ Exercice 65.
Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants :

1. $a = \dfrac{1}{2 - \mathrm{i}}$
2. $b = \dfrac{3}{2 + \mathrm{i}}$
3. $c = \dfrac{2\mathrm{i}}{5 - 3\mathrm{i}}$
4. $d = \dfrac{-1 + \mathrm{i}}{1 + \mathrm{i}}$

●○○ **Exercice 66.**
Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $6z - 1 = -1 + 5\mathrm{i}$
2. $5z + 5 = 2z + 3 + 2\mathrm{i}$
3. $(4 + z)(5 + 2z) = 4\mathrm{i} + 2z^2$

●○○ **Exercice 67.**
Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $\mathrm{i}\overline{z} - 1 = 7\mathrm{i} + \overline{z}$
2. $4\mathrm{i}\overline{z} - 4\mathrm{i} = 1 - \overline{z} + \mathrm{i}$

●●○ **Exercice 68.**
Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z + 3 + \mathrm{i} = 2\overline{z} + 7 + 3\mathrm{i}$
2. $2z - 4 = 5\mathrm{i} + 4\overline{z}$
3. $z\overline{z} = z + 2$
4. $\overline{z} - 1 = z\overline{z} - \mathrm{i}$

●●○ **Exercice 69.**
Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2\overline{z} = -1$.

●●○ **Exercice 70.**
Soient a et b deux réels non nuls en même temps.
Démontrer que $Z = \dfrac{a + \mathrm{i}b}{a - \mathrm{i}b} + \dfrac{a - \mathrm{i}b}{a + \mathrm{i}b}$ est réel.

●○○ **Exercice 71.**
On considère le nombre complexe $z = a + 2\mathrm{i}$ avec $a \in \mathbb{R}$.
Déterminer a pour que z^2 soit imaginaire pur.

●○○ **Exercice 72.**
Soit z un nombre complexe non nul.

1. Écrire le conjugué des nombres suivants en fonction de z et $\overline{z}$:
   (a) $Z_1 = z + \overline{z}$
   (b) $Z_2 = z^2 + \overline{z}^2$
   (c) $Z_3 = \dfrac{z - \overline{z}}{z + \overline{z}}$
   (d) $Z_4 = \dfrac{z^2 - \overline{z}^2}{z\overline{z} + 3}$
2. Déterminer si chacun des nombres précédents est un nombre réel, un nombre imaginaire pur ou ni l'un ni l'autre.

●●○ **Exercice 73.**
Soit $Z = \dfrac{z + \mathrm{i}}{z - \mathrm{i}}$ pour tout $z \neq \mathrm{i}$.

1. Exprimer $\overline{Z}$ en fonction de $\overline{z}$.
2. En déduire tous les nombres complexes z tels que Z soit réel.

●○○ Exercice 74.
Soit k un nombre réel et on pose :

$$z = 5k^2 + 3k - 8 - (k^2 + k - 2)\mathrm{i}.$$

1. Déterminer la ou les valeur(s) du réel k pour que z soit un nombre réel.
2. Déterminer la ou les valeur(s) du réel k pour que z soit un nombre imaginaire pur.
3. Existe-t-il une valeur ou plusieurs valeurs du réel k pour que z soit nul ?

●●○ Exercice 75.
À l'aide du binôme de Newton voire du triangle de Pascal, donner la forme algébrique des nombres suivants :

1. $(1 + \mathrm{i})^3$
2. $(1 + 2\mathrm{i})^4$
3. $(2 - \mathrm{i})^4$

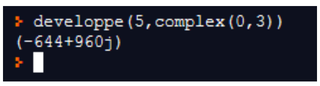
●○○ Exercice 76.

1. Dans la formule du binôme de Newton avec $(x + y)^8$, trouve-t-on un terme en x^5y^3 ? Si oui, préciser son coefficient.
2. Même question avec x^2y^6.

●●○ Exercice 77.
On considère la fonction Python suivante :

```python
def developpe(a,b):
    S=0
    L=[1,4,6,4,1]
    for k in range(5):
        S=S+L[k]*a**(4-k)*b**k
    return(S)
```

1. (a) Que représente les termes de la liste L ?
   (b) Déterminer l'expression de S en fonction de a et b.
   (c) Quelle valeur renvoie la fonction pour :
   $a = 1$ et $b = \mathrm{i}$?
2. Louise a testé la fonction et a obtenu le résultat suivant :



   Quelle égalité mathématique peut-elle en déduire ?

●●○ Exercice 78.

1. Écrire une formule inspirée par le binôme de Newton pour $(a - b)^n$ en remarquant que $a - b = a + (-b)$.
2. En déduire que $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$.
3. Quel est le coefficient du terme en a^3b^7 dans le développement de $(a - b)^{10}$?

CHAPITRE

3

Équations polynômiales dans $\mathbb{C}$

3.1 Équations du second degré à coefficients réels

3.1.1 Équations du type $az^2 + bz + c = 0$, $a \neq 0$

Propriété 1.3.
Soit l'équation du second degré $az^2 + bz + c = 0$ avec $a \neq 0$, b et c des réels.
Cette équation admet toujours des solutions dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$.
À l'aide de son discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$, on distingue *trois cas* :

1. Si $\Delta = 0$, il existe une *unique* solution : $z = -\dfrac{b}{2a}$.
2. Si $\Delta > 0$, il existe *deux solutions réelles* : $z = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.
3. Si $\Delta < 0$, il existe *deux solutions complexes conjuguées* : $z = \dfrac{-b \pm \mathrm{i}\sqrt{|\Delta|}}{2a}$.

Application 1.3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2z + 5 = 0$.

3.1.2 Cas particulier : équations du type $z^2 = a$, $a \neq 0$

Propriété 2.3.
L'équation $z^2 = a$ admet *toujours deux solutions* dans $\mathbb{C}$:

1. Si $a > 0$, les solutions sont les *réels* :
2. Si $a < 0$, les solutions sont les *imaginaires purs* :

Application 2.3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + 16 = 0$.

3.1.3 Factorisation d'un polynôme du second degré

Propriété 3.3.
Soient a, b et c trois réels avec $a \neq 0$.
On considère le polynôme P tel que, pour tout z de $\mathbb{C}$, on ait : $P(z) = az^2 + bz + c$.
On note z_1 et z_2 les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$, avec éventuellement $z_1 = z_2$ si $\Delta = 0$.
Alors pour tout z de $\mathbb{C}$, on a :

$$\boxed{P(z) = a(z - z_1)(z - z_2)}$$

Application 3.3. Factoriser dans $\mathbb{C}$, $P(z) = z^2 - 4z + 8$.

3.2 Factorisation des polynômes

3.2.1 Fonction polynôme

Définitions.

1. Soient n un entier naturel et a_0, a_1, $a_2, \cdots a_n$ des réels (éventuellement complexes) avec $a_n \neq 0$.
   Une *fonction polynôme* ou *polynôme* P est une fonction définie sur $\mathbb{C}$ pouvant s'écrire, pour tout complexe z, sous la forme :
   $$\boxed{P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0}$$
2. On appelle *polynôme nul* le polynôme P tel que pour tout complexe z,
   $$\boxed{P(z) = 0}$$
3. Si P n'est pas le polynôme nul, n est le *degré* de P.
4. On appelle *racine* de P tout nombre complexe z_0 tel que :
   $$\boxed{P(z_0) = 0}$$

Application 4.3. Soit P le polynôme défini sur $\mathbb{C}$ par $P(z) = z^3 - (1+\mathrm{i})z^2 + z - 1 - \mathrm{i}$.

1. Quel est le degré de P ?
2. Montrer que i est racine de P.

Propriété 4.3. *Admise*
Un polynôme est le *polynôme nul* si et seulement si *tous ses coefficients sont nuls.*

3.2.2 Factorisation par $z - \alpha$

Définition 1.3.
On dit qu'un polynôme P est *factorisable* (ou divisible) par $z - \alpha$ s'il existe un polynôme Q tel que pour tout complexe z :

$$\boxed{P(z) = (z - \alpha)Q(z)}$$

Application 5.3. Soit le polynôme P défini dans $\mathbb{C}$ par : $P(z) = z^3 - 12z^2 + 48z - 128$.

1. Montrer que 8 est une racine de P.
2. En déduire les réels a et b tels que $P(z) = (z-8)(z^2 + az + b)$.
3. En déduire l'ensemble des racines de P.

Propriété 5.3.
Soit a un nombre complexe.
Pour tout complexe z et tout entier naturel non nul, $z^n - a^n$ est *factorisable* par $z - a$ et :

$$\boxed{z^n - a^n = (z-a)(z^{n-1} + az^{n-2} + a^2z^{n-2} + \cdots + a^{n-2}z + a^{n-1} = (z-a)\left(\sum_{k=0}^{n-1} a^k z^{n-1-k}\right)}$$

Application 6.3. Soit $P(z) = z^3 - 27$. Factoriser P dans $\mathbb{C}$.

Propriété 6.3.
Le polynôme P est *factorisable* par $z - a$ si et seulement si a est une *racine* de P.

Application 7.3. Soit $P(z) = z^3 - 3z^2 + 4z - 12$ avec $z \in \mathbb{C}$.
Démontrer que $P(z)$ est factorisable par $z + 2\mathrm{i}$ puis factoriser au maximum $P(z)$.

3.2.3 Polynôme et racines

Propriété 7.3.
Un polynôme non nul de degré n admet *au plus* n racines distinctes.

3.3 Les exercices du chapitre

○○○ **Exercice 79.**
Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $(z-\mathrm{i})(2z-6)=0$.
2. $(\mathrm{i}z+1)(3z+\mathrm{i})=0$.
3. $(z+2\mathrm{i})(2+3\mathrm{i}-2\mathrm{i}z)=0$.

●○○ **Exercice 80.**
Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $-z^2+2z-3=0$.
2. $z^2+4=0$.
3. $4z^2-12z+9=0$.
4. $-3z^2+3z-1=0$.
5. $2z^2+2z+5=0$.

●○○ **Exercice 81.**
Résoudre dans $\mathbb{C}^*$ l'équation $z+\dfrac{1}{z}=1$.

●○○ **Exercice 82.**
Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^2+2\mathrm{i}z=0$.
2. $(-2z+1)(z-1)=1$.
3. $\mathrm{i}\sqrt{3}z^2-6z=0$.
4. $(\overline{z}-3\mathrm{i}-5)(\mathrm{i}z-3)=0$.

●●○ **Exercice 83.**
Dans le plan complexe, à tout point M d'affixe z, on associe le point M' d'affixe z' tel que :

$$z'=z^2-z+5$$

1. Si le point M' a pour affixe 4, quelle est l'affixe du point M ?
2. Démontrer qu'il existe des points M tels que le point M' associé à M soit M lui-même.

●●○ **Exercice 84.**
Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $\dfrac{1}{z}+2z=0$.
2. $\dfrac{z}{3}=\dfrac{-5}{1+z}$.
3. $\dfrac{z+1}{z-2}=\mathrm{i}$.
4. $\dfrac{z}{z-1}=\dfrac{1}{z}$.

●●○ **Exercice 85.**

Soit le polynôme P défini par $P(z) = z^3 + z^2 + 4$.

1. Démontrer que -2 est racine de P.
2. Déterminer les trois réels a, b et c tels que :

$$P(z) = (z+2)(az^2 + bz + c).$$

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

●●○ **Exercice 86.**

1. Déterminer un entier naturel n solution de l'équation (E) :

$$z^3 + z^2 - 2 = 0$$

2. Déterminer les réels a, b et c tels que

$$z^3 + z^2 - 2 = (z-n)(az^2 + bz + c).$$

3. En déduire les solutions de l'équation (E).

●●○ **Exercice 87.**

Soit $P(z) = z^3 - 3z^2 + 4z - 12$ avec $z \in \mathbb{C}$.

1. Montrer que pour tout complexe z,

$$\overline{P(z)} = P(\overline{z}).$$

2. (a) Vérifier que $-2\mathrm{i}$ est une racine de P.
   (b) En déduire sans aucun calcul que $2\mathrm{i}$ est aussi solution de cette équation.
   (c) Déduire des questions précédentes une factorisation de P.

●●○ **Exercice 88.**

On considère le polynôme P défini sur $\mathbb{C}$ par $P(z) = z^4 - \mathrm{i}z^3 + z - \mathrm{i}$ où z est un complexe.

1. Démontrer que pour tout complexe z,

$$P(z) = (z - \mathrm{i})(z^3 + 1).$$

2. Factoriser au maximum $P(z)$.

●●● **Exercice 89.**

On considère l'équation d'inconnue z complexe :

$$(E) \ : z^2 - 5z + 4 + 10\mathrm{i} = 0$$

1. Développer $(5 - 4\mathrm{i})^2$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

CHAPITRE

4

DIVISIBILITÉ ET CONGRUENCES DANS $\mathbb{Z}$

4.1 Divisibilité dans $\mathbb{Z}$

4.1.1 Quelques notations

- ⋆ $\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers naturels : $\mathbb{N} = \{0\,;\ 1;\ 2\,;\ 3\ldots\}$.
- ⋆ $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers relatifs : $\mathbb{Z} = \{\ldots\,;-3\,;\ -2;\ -1\,;\ 0\,;1\,;\ \ldots\}$.
- ⋆ $\Longrightarrow$ est la notation mathématique de l'implication.
- ⋆ $\Longleftrightarrow$ est la notation mathématique de l'équivalence.
- ⋆ $\forall$ est le symbole mathématique de « pour tout ».
- ⋆ $[\![1\,;\,n]\!] = \{1\,;\ 2;\ 3\,;\ 4\ldots\,;\ n\}$.

4.1.2 Diviseurs, multiples

Définition 1.4.
Soient a et b deux entiers relatifs avec $b \neq 0$.
Dire que b *divise* a (ou que a est un *multiple* de b) signifie qu'il existe un entier relatif k tel que :

$$\boxed{a = \qquad\qquad\qquad}$$

Remarque.
0 est un multiple de **tout** entier car $0 = n \times 0$ pour tout entier n. En revanche, 0 n'est un diviseur d'aucun nombre !

Exemple 1.4.
21 est un multiple de -7 : en effet, $21 = -7 \times (-3)$.

Application 2.4.

1. Soit p et q deux entiers relatifs. Montrer que $18p^2 - 9q$ est divisible par 9.
2. Déterminer les entiers naturels n tels que 5 divise $n + 11$.
3. Montrer que, quelque soit l'entier relatif n, $6n + 7$ n'est jamais divisible par 3.

Propriété 1.4.
Soient a et b deux entiers relatifs avec $b \neq 0$. On a les implications suivantes :

- Si b divise a alors les *multiples* de a sont des *multiples* de b.
- Si b divise a alors les *diviseurs* de b sont des *diviseurs* de a.

▶ **Note 1.4.**
L'ensemble des multiples d'un entier relatif b dans $\mathbb{Z}$ est noté $b\mathbb{Z}$ et l'ensemble des diviseurs de b est noté $\mathscr{D}(b)$

Exemple 2.4.
Les multiples de 6 sont aussi des multiples de 3 donc $6\mathbb{Z} \subset 3\mathbb{Z}$.

Application 3.4. Déterminer, dans $\mathbb{Z}$, la liste des diviseurs de 7 et en déduire les entiers relatifs n tels que $4n+1$ divise 7.

Propriété 2.4.
Soient a et b deux entiers relatifs avec $b \neq 0$.

$$b|a \iff -b|a \iff b|-a \iff -b|-a.$$

Conséquence : a et $-a$ ont les mêmes diviseurs dans $\mathbb{Z}$. Les diviseurs de $-a$ étant les opposés des diviseurs positifs de a, on restreindra souvent l'étude à la divisibilité dans $\mathbb{N}$.

Démonstration.

□

Propriété 3.4.
Tout entier n non nul a pour **diviseurs** 1, -1, n et $-n$ et a un nombre fini de diviseurs tous compris entre n et $-n$.

Remarque.
Un entier *non nul* a une infinité de multiples.

4.1.3 Divisibilité et transitivité

Propriété 4.4.
Soient a, b et c des entiers relatifs tels que $b \neq 0$ et $c \neq 0$.
Si c divise b et b divise a, alors c divise a.

Démonstration. Par hypothèse, c divise b donc il existe un entier relatif k tel que $b =$.
De même, b divise a, il existe donc un entier relatif k' tel que $a =$.
Ainsi $a =$ où kk' est un entier relatif.
Donc a est un multiple de c, avec c non nul, autrement dit c divise a. □

4.1.4 Divisibilité et combinaison linéaire

Propriété 5.4.
Soient a, b et c des entiers relatifs tels que $c \neq 0$.
Si c est un **diviseur commun** à a et b, alors c divise $ua + vb$ pour tous entiers relatifs u et v.

Démonstration. Si c est un diviseur commun de a et b alors il existe deux entiers relatifs a' et b' tels que $a = a'c$ et $b = b'c$.
Par conséquent, pour u et v entiers relatifs quelconques,

$$\begin{aligned} ua + vb &= \\ &= \\ &= \end{aligned}$$

où est un entier.

Donc $ua + vb$ est multiple de c avec c non nul, par conséquent c divise $ua + vb$. □

Application 5.4. Déterminer les entiers relatifs n tels que $n + 3$ divise $2n + 8$.

4.2 Division euclidienne

Théorème.
Soient a et b deux **entiers naturels** avec $b \neq 0$.
Il existe un unique couple (q, r) d'entiers naturels tels que :

$$a = bq + r \qquad \text{avec } 0 \leqslant r < b.$$

On dit que a est le **dividende**, b **le diviseur**, q **le quotient** et r **le reste** de la division euclidienne de a par b.

dividende	diviseur
reste	quotient

Il y a de multiples écritures de a sous la forme $bq + r$. Prenons par exemple $a = 103$ et $b = 13$.
On a $103 = 13 \times 7 + 12$ ou $103 = 13 \times 6 + 25$ ou encore $103 = 13 \times 5 + 38$, etc.
Mais seule la 1re égalité, où $0 \leqslant r < b$, est **la relation de la division euclidienne** de a par b.

Propriété 6.4.
Dans la division euclidienne de a par b, il y a b restes possibles :

$$0, 1, 2 \ldots, b-1.$$

Propriété 7.4.
Soient a un entier naturel et b un entier naturel non nul.
b divise a **si et seulement si** le reste dans la division euclidienne de a par b est nul.

Propriété 8.4.
Soit b un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Tout *entier relatif* s'écrit sous l'une des formes suivantes : $bq,\ bq+1,\ bq+2, \cdots, bq+(b-1)$ où q est un entier relatif.

Exemple 3.4.
Tout entier a pour reste 0, 1, 2 ou 3 dans la division euclidienne par 4, donc s'écrit sous la forme $4k$, $4k+1$, $4k+2$ ou $4k+3$ avec k entier.

Application 6.4. En utilisant la méthode de disjonction des cas, démontrer que n^2+1, $n \in \mathbb{Z}$, n'est jamais divisible par 3.

4.3 Congruences dans $\mathbb{Z}$

4.3.1 Propriété et définition

Propriété 9.4.
Soit n un entier naturel non nul.
Deux entiers relatifs a et b ont même reste dans la division euclidienne par n **si et seulement si** $a-b$ est *multiple* de n.

Démonstration. On écrit les relations de division euclidienne par n :
$a = nq + r$, $0 \leqslant r < n$ et $b = nq' + r'$, $0 \leqslant r' < n$.
On en déduit que $a - b = n(q-q') + r - r'$ et que $-n < r - r' < n$.

- Supposons que $r = r'$ alors $a - b = n(q-q')$ avec $q - q'$ entier, donc $a - b$ multiple de n.
- Réciproquement, si $a-b$ multiple de n, alors $n|a-b$ et comme $n|n(q-q')$ alors $n|a-b-n(q-q')$ c'est-à-dire $n|r-r'$. Or $-n < r-r' < n$, il faut avoir $r - r' = 0$ c'est-à-dire $r = r'$.

□

Définition 2.4.
Soit n un entier naturel non nul.
Si a et b ont *même reste* dans la division euclidienne par n, on dit que a et b sont *congrus modulo* n et on écrit : $a \equiv b \pmod n$ ou $a \equiv b\ (n)$ ou encore $a \equiv b\ [n]$, notation qu'on privilégiera.

Exemple 4.4.
Sur la droite numérique, on a repéré en bleu des multiples de 4 et en rouge des nombres ayant tous pour reste 1 dans la division par 4 ; ils sont tous congrus entre eux.
$5 \equiv 1\ [4]$, $-7 \equiv 1\ [4]$, $-3 \equiv 5\ [4]$.

Illustration :

▶ **Note 2.4.**
$a \equiv b\ [n] \Longleftrightarrow b \equiv a\ [n]$.
On dit aussi que a et b sont *congrus* modulo n.

Propriété 10.4.
Soient a et b deux entiers relatifs et n un entier naturel non nul.

- $a \equiv 0\ [n]$ si et seulement si a est *divisible* par n.
- $a \equiv a\ [n]$.
- r est le reste de la division euclidienne de a par n **si et seulement si** $a \equiv r\ [n]$ *et* $0 \leqslant r < n$.

4.3.2 Congruence et transitivité

Propriété 11.4.
Soient a, b, c des entiers relatifs et n un entier naturel non nul.
Si $a \equiv b\ [n]$ et $b \equiv c\ [n]$ alors $a \equiv c\ [n]$.

Démonstration. Par hypothèse, il existe k et k' entiers relatifs tels que $a = b + kn$ et $b = c + k'n$... □

4.3.3 Compatibilité avec les opérations algébriques

Propriété 12.4.
Soient a, b, c et d quatre entiers relatifs et n un entier naturel non nul.

Si $a \equiv b\ [n]$ et $c \equiv d\ [n]$ alors :

- $a + c \equiv b + d\ [n]$
- $a - c \equiv b - d\ [n]$
- $ac \equiv bd\ [n]$
- $a^p \equiv b^p\ [n]$ pour tout entier naturel p.

En particulier, si $a \equiv b\ [n]$, pour tout entier relatif m, on a : $ma \equiv mb\ [n]$.

⚠ La réciproque est fausse ! On ne peut pas simplifier une congruence comme une égalité.
Par exemple, on a $22 \equiv 18\ (4)$ mais 11 et 9 ne sont pas congrus modulo 4.

Application 7.4.

1. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $3x \equiv 2\ [5]$.
2. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $2^{6n} - 1$ est multiple de 7.
3. Déterminer le reste dans la division euclidienne de 11^{2023} par 3.

4.4 Les exercices du chapitre

○○○ **Exercice 90.**
Compléter les _____ par **multiple** ou **diviseur :**

1. 25 est un __________ de 5.
2. 2 020 est un __________ de 0.
3. 21 est un __________ de $-2\,100$.
4. 0 est un __________ de 4.
5. -1 est un __________ de 4.
6. 64 est un __________ de 64.

○○○ **Exercice 91.**
Déterminer l'ensemble des diviseurs positifs des nombres -42, -13 et 20.

●○○ **Exercice 92.**
Déterminer les entiers relatifs n tels que $3n-5$ divise 4.

●○○ **Exercice 93.**
Déterminer les entiers naturels n tels que $n+7$ soit un multiple de 5.

●○○ **Exercice 94.**
Montrer que la somme de quatre entiers consécutifs est paire.
Cette somme est-elle multiple de 4 ? Justifier.

●○○ **Exercice 95.**
Démontrer qu'un multiple de 36 est aussi multiple de 9.
La réciproque est-elle vraie ?

●●○ **Exercice 96.**
Soient a et n deux entiers relatifs.
Démontrer que si a divise $2n+5$ et a divise $3n-1$ alors a divise 17.

●●○ **Exercice 97.**
Soit n un entier naturel. Montrer que $n(n^2+5)$ est pair en raisonnant par disjonction des cas.

●●○ **Exercice 98.**

1. Soit $n \in \mathbb{Z}$.
   Démontrer que $A = \dfrac{n(n+1)}{2}$ est un entier.
2. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Déterminer, en utilisant la disjonction des cas, les valeurs de n pour lesquelles $A = n^2+5$ est divisible par 3.
3. (a) Déterminer les restes possibles dans la division euclidienne d'un nombre impair par 4.
   (b) Montrer que, si n est un nombre impair, alors n^2-1 est divisible par 8.

●●● Exercice 99.
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_n = (3n-1)^2 - 2 + (-2)^n.$$

1. Démontrer que pour tout entier naturel n,
   $u_{n+1} + 2u_n$ est un multiple de 27.
2. Démontrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \text{ est un multiple de } 27.$$

●●○ Exercice 100.
Un nombre s'écrit en base 10 sous la forme $\Delta5\Delta5\Delta5\Delta5\Delta5\Delta$.
Quelle valeur donner à Δ pour que la somme des chiffres de ce nombre soit un multiple de 7 ?

○○○ Exercice 101.
Écrire la division euclidienne de a par b dans les cas suivants :

1. $a = 327$ et $b = 8$.
2. $a = -89$ et $b = 6$.
3. $a = -17$ et $b = 25$.

●●○ Exercice 102.
Si on divise un entier naturel n par 105, le reste est 21, mais si on divise ce même entier naturel n par 103, le quotient augmente de 2 et le reste diminue de 6.
Déterminer cet entier naturel n.

●●○ Exercice 103.
Dans une division, le quotient et le reste ne changent pas quand on augmente le dividende de 168 et le diviseur de 4. Quel est le quotient ?

●○○ Exercice 104.
Dire pour chaque proposition si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse :

1. $18 \equiv 0\ [9]$
2. $127 \equiv 5\ [2]$
3. $-47 \equiv -3\ [5]$
4. $-117 \equiv 0\ [3]$

●○○ Exercice 105.
Compléter :

1. $12 \equiv$ ______ $[5]$
2. $10 \equiv$ ______ $[11]$
3. $77 \equiv$ ______ $[4]$
4. $66 \equiv$ ______ $[9]$
5. $-2 \equiv$ ______ $[8]$
6. $-18 \equiv$ ______ $[7]$

●●○ Exercice 106.
Résoudre dans $\mathbb{Z}$ les équations suivantes :à l'aide d'un tableau de congruences :

1. $x + 5 \equiv 2\ [3]$
2. $3x \equiv 7\ [4]$
3. $(x - 3)(x + 7) \equiv 0\ [5]$

●○○ Exercice 107.
Déterminer le reste de la division euclidienne de $2\,020 \times 2\,022 \times 2\,023$ par 11.

●●○ Exercice 108.

1. Étudier les congruences des puissances de 2 modulo 5.
2. En déduire le reste de la division euclidienne de $2\,022^{2\,023}$ par 5.

●●○ Exercice 109.

1. Vérifier que $5^3 \equiv 1\ [31]$.
2. Quel est le reste de la division euclidienne de $7 \times 5^{15} - 6$ par 31 ?

●●○ Exercice 110.
Démontrer que $1^{2\,023} + 2^{2\,023} + 3^{2\,023} + 4^{2\,023}$ est un multiple de 5.

●○○ Exercice 111.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $A = n(n^2 + 5)$.
Montrer, en utilisant la congruence modulo 3, que $3 \mid A$.

●●○ Exercice 112.
Démontrer que $n \equiv 5\ [7] \Longleftrightarrow n^2 - 3n + 4 \equiv 0\ [7]$.
Pour la condition suffisante, on complétera le tableau de congruence ci-dessous :

$n \equiv \dots\ [7]$	0	1	2	3	4	5	6
$n^2 \equiv \dots\ [7]$							
$3n \equiv \dots\ [7]$							
$n^2 - 3n + 4 \equiv \dots\ [7]$							

●○○ Exercice 113.
Montrer, en utilisant la congruence modulo 6, que pour tout entier naturel n, $n(n + 1)(2n + 1)$ est multiple de 6.

●●○ Exercice 114.
Soit n un entier naturel non nul.
On note $n! = n(n - 1) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1$.

1. L'entier naturel $(n - 1)! + 1$ est-il pair ?
2. Prouver que $(15 - 1)! + 1$ n'est pas divisible par 15.
3. L'entier $(11 - 1)! + 1$ est-il divisible par 11 ?

●●○ **Exercice 115.**
On considère la suite (u_n) d'entiers naturels définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 8u_n + 1 \end{cases}$$

1. Calculer les 5 premiers termes.
2. Quelle conjecture peut-on émettre concernant le dernier chiffre de u_n pour $n \geqslant 1$?
3. Valider cette conjecture à l'aide d'une démonstration par récurrence.

●●○ **Exercice 116.**
On considère l'équation (F) : $11x^2 - 7y^2 = 5$, où x et y sont des entiers relatifs.

1. Démontrer que si le couple $(x\ ;\ y)$ est solution de (F), alors $x^2 \equiv 2y^2\ [5]$.
2. Soient x et y des entiers relatifs.
   Compléter les deux tableaux suivants :

Modulo 5, x est congru à	0	1	2	3	4
Modulo 5, x^2 est congru à					

Modulo 5, y est congru à	0	1	2	3	4
Modulo 5, $2y^2$ est congru à					

   Quelles sont les valeurs possibles du reste de la division euclidienne de x^2 et de $2y^2$ par 5 ?
3. En déduire que si le couple $(x\ ;\ y)$ est solution de (F), alors x et y sont des multiples de 5.
4. Démontrer que si x et y sont des multiples de 5, alors le couple $(x\ ;\ y)$ n'est pas solution de (F). Que peut-on en déduire pour l'équation (F) ?

CHAPITRE

5

Nombres complexes : partie géométrique

5.1 Image d'un nombre complexe et affixe

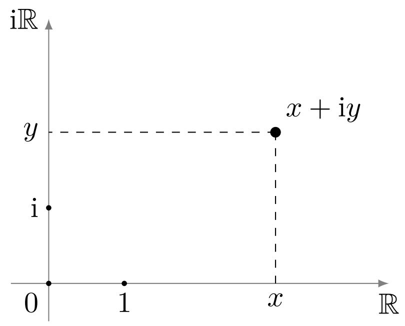
5.1.1 Affixe d'un point

Définitions.

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v})$:

- À tout nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$ avec x et y réels, on associe le point $M(x\,;\,y)$.
- Réciproquement à tout point $M(x\,;\,y)$ on associe le nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$.
- On dit que le point M est le *point image* du nombre complexe z et que z est *l'affixe* du point M.
- Le plan est alors appelé *plan complexe.*

Illustration :



Application 1.5.

1. Soit D d'affixe $-7 + 8\mathrm{i}$. Donner les coordonnées du point D.
2. Soit $E(3\,;\,-5)$. Donner l'affixe du point E.

► **Note 1.5.**
L'axe des abscisses est appelé *axe des réels* et l'axe des ordonnées, *axe des imaginaires purs.*

Propriété 1.5.
Soit A et B deux points du plan complexe d'affixe respective z_A et z_B.

- Les points A et B sont confondus *si et seulement si* $z_A = z_B$.
- Le milieu du segment $[AB]$ a pour affixe $\dfrac{z_A + z_B}{2}$.

Application 2.5. Dans le plan complexe, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = -3 + \mathrm{i}$, $z_B = 5 - 3\mathrm{i}$, $z_C = 1 + \mathrm{i}$ et $z_D = -7 + 5\mathrm{i}$.

1. Placer ces points dans le plan complexe et conjecturer la nature du quadrilatère $ABCD$.
2. Démontrer ou invalider cette conjecture.

5.1.2 Affixe d'un vecteur

Définition 1.5.

À tout complexe $z = x + \mathrm{i}y$ avec x et y réels, on associe le vecteur $\vec{w}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ du plan complexe.

On dit que le vecteur $\vec{w}$ est le *vecteur image* du nombre complexe z et que z est *l'affixe* du vecteur $\vec{w}$.

Propriétés 1.5.

Dans le plan complexe, on considère deux vecteurs $\vec{w}$ et $\vec{w'}$ d'affixes respectives z et z' et k un réel.

- Les vecteurs $\vec{w}$ et $\vec{w'}$ sont égaux *si et seulement si* $z = z'$.
- Le vecteur $\vec{w} + \vec{w'}$ a pour affixe $z + z'$.
- Le vecteur $k\vec{w}$ a pour affixe kz.

5.1.3 Lien entre affixe d'un point et affixe d'un vecteur

Propriétés 2.5.

- Soit M un point du plan complexe muni d'un repère $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$ et z un nombre complexe.
  Le point M a pour *affixe* z si et seulement si le vecteur $\overrightarrow{OM}$ a pour affixe z.
- Soient A et B deux points du plan complexe d'affixes respectives z_A et z_B.
  Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$.

Application 3.5. On donne A$(-4-2\mathrm{i})$, B$(3-\mathrm{i})$ et C(-1). Déterminer l'affixe du point D telle que le quadrilatère $ACBD$ soit un parallélogramme.

5.2 Module d'un nombre complexe

5.2.1 Définition

Définition 2.5.

Soit le nombre complexe de forme algébrique $z = x + \mathrm{i}y$ et M l'image de z dans le plan complexe.
Le module de z, noté $|z|$, est le réel positif noté $|z|$ tel que :

$$\boxed{|z| = \sqrt{z\ \overline{z}} = x^2 + y^2}$$

Remarque.

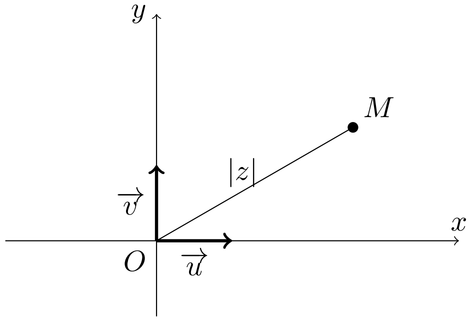
Si z est *réel*, $|z| = \sqrt{z\ \overline{z}} = \sqrt{z^2} = |z|$ donc le module de z est bien la valeur absolue de z et la notation utilisée pour le module est cohérente.
La notion de module dans $\mathbb{C}$ généralise donc celle de valeur absolue dans $\mathbb{R}$.

Application 5.5. Calculer les modules des complexes suivants :

1. $z_1 = 5 + \mathrm{i}$.
2. $z_2 = -3 + 2\mathrm{i}$.
3. $z_3 = -6$.
4. $z_4 = 9\mathrm{i}$.

Propriétés 3.5.

- Soit z un nombre complexe et M le point image associé dans le repère $(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v})$, $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ qui n'est autre que la norme du vecteur $\overrightarrow{OM}$ c'est-à-dire la distance OM, ainsi $|z| = OM$.



- Soit A et B deux points d'affixes respectives z_A et z_B.
  On a alors :

$$\boxed{AB = |z_B - z_A| = |z_A - z_B|}$$

Application 6.5. Soit $A(1 + 2\mathrm{i})$, $B(2)$ et $C(-1 + \mathrm{i})$ dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v})$.

1. Placer ces points dans le plan complexe et conjecturer la nature du triangle ABC.
2. Démontrer ou invalider cette conjecture.

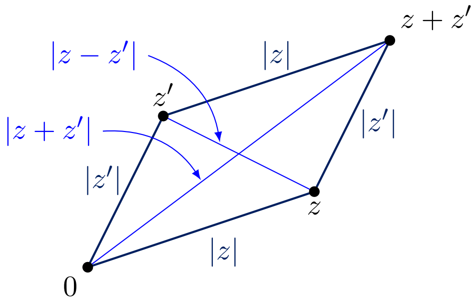
5.2.2 Propriétés du module

Propriétés 4.5.
Soit z un nombre complexe de forme algébrique $z = x + \mathrm{i}y$ avec $(x\,;\,y) \in \mathbb{R}^2$.

1. $z = 0 \iff |z| = 0$
2. $|z|^2 = z \times \overline{z} = x^2 + y^2$
3. $|z| = |-z| = |\overline{z}| = |-\overline{z}|$

Propriétés 5.5.
On considère z et z' deux nombres complexes.

1. $|zz'| = |z||z'|$
2. Si $z \neq 0$, $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$
3. Si $z \neq 0$, $\left|\dfrac{z'}{z}\right| = \dfrac{|z'|}{|z|}$
4. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|z^n| = |z|^n$
5. Si $z \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $|z^n| = |z|^n$
6. $|z + z'| \leqslant |z| + |z'|$: inégalité triangulaire.
7. $|z + z'| = |z| + |z'| \iff \exists k \in \mathbb{R}^+ / z' = kz \quad \text{ou} \quad z = kz'$ (cas d'égalité).



Application 7.5. Déterminer les modules des complexes suivants :

1. $z_1 = (1 + \mathrm{i})(2 - 4\mathrm{i})$
2. $z_2 = (1 + \mathrm{i})^{15}$
3. $z_3 = \dfrac{3 - \mathrm{i}}{2 + 5\mathrm{i}}$
4. $z_4 = \dfrac{(-3 + 4\mathrm{i})^5}{(5 - 4\mathrm{i})^4}$

5.2.3 Nombres complexes de module 1

Définition 3.5.
Soit z un nombre complexe. z est de module 1 si et seulement si $|z| = 1$. L'ensemble des nombres complexes de module 1 est noté $\mathbb{U}$.
Ainsi $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\}$

► **Note 2.5.**
Dans le plan complexe, l'ensemble des points images des éléments de $\mathbb{U}$ est *le cercle trigonométrique.*

Propriétés 6.5.

1. Si $(z\,;\,z') \in \mathbb{U}^2$ alors $zz' \in \mathbb{U}$
2. Si $z \in \mathbb{U}$ alors $\dfrac{1}{z} \in \mathbb{U}$
3. Si $(z\,;\,z') \in \mathbb{U}^2$ alors $\dfrac{z'}{z} \in \mathbb{U}$

5.3 Arguments d'un nombre complexe

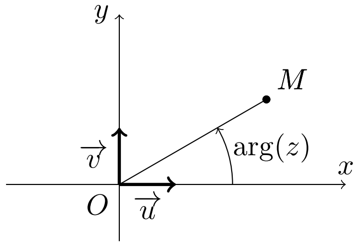
5.3.1 Notion d'arguments

Définition 4.5.

Soit z un nombre complexe *non nul* d'image M.
On appelle *argument* de z *toute mesure en radian* de l'angle orienté :

$$\boxed{\arg(z) = (\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{\text{OM}})}$$

Si θ est un argument de z, $\theta + 2k\pi$ en est également un pour tout $k \in \mathbb{Z}$.
On note $\theta = \arg(z)\ [2\pi]$ et on lit « θ égal à arg de z modulo 2π ».



Remarques.

- 0 *n'a pas d'argument.*
- Tout nombre *réel positif* a un argument égal à 0.
- Tout nombre *réel négatif* a un argument égal à π.
- Tout nombre *imaginaire pur* $\mathrm{i}y$ avec $y > 0$ a un argument égal à $\dfrac{\pi}{2}$.
- Tout nombre *imaginaire pur* $\mathrm{i}y$ avec $y < 0$ a un argument égal à $-\dfrac{\pi}{2}$.

Propriétés 7.5.

- Soient z un nombre complexe non nul et $\overrightarrow{w}$ le vecteur image associé.
  On a alors $(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{w}) = \arg(z)\ [2\pi]$
- Soient A et B deux points *distincts* d'affixes respectives z_A et z_B.
  On a alors $(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{AB}) = \arg(z_B - z_A)\ [2\pi]$

5.3.2 Propriétés sur les arguments

Propriétés 8.5.

Soit z un nombre complexe *non nul*.

- $\arg(\overline{z}) = -\arg(z)\ [2\pi]$
- $\arg(-z) = \arg(z) + \pi\ [2\pi]$
- $\arg(-\overline{z}) = -\arg(z) + \pi\ [2\pi]$
- $z \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow \arg(z) = 0\ [\pi]$
- $z \in \mathrm{i}\mathbb{R} \Longleftrightarrow \arg(z) = \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$

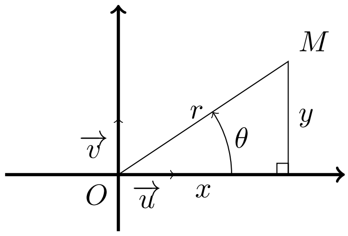
5.3.3 Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul

Soit z un nombre complexe non nul.
Son module $|z| = r$ et un argument θ permettent de caractériser son image M sur le plan, au même titre que les coordonnées $(x\,;\,y)$.
Le couple $[r\,;\theta]$ forme alors ce que l'on appelle les *coordonnées polaires* du point M. On passe des coordonnées polaires aux coordonnées cartésiennes par les relations :

$$x = r\cos\theta \quad \text{et} \quad y = r\sin\theta$$

En effet, d'après la figure ci-contre,

$$\sin(\theta) = \frac{y}{r} \quad \text{et} \quad \cos(\theta) = \frac{x}{r}$$



Définition 5.5.
Soit z un nombre complexe non nul de forme algébrique $z = x + \mathrm{i}y$ un nombre complexe de module r et d'argument θ. D'après la remarque précédente, on a :

$$z = x + iy = r\cos\theta + \mathrm{i}r\sin\theta = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$$

Cette dernière expression est appelée *forme trigonométrique* de z.

Application 8.5.

1. Calculer un argument des nombres complexes suivants :
   (a) $z_1 = -2$
   (b) $z_2 = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$
2. Déterminer la forme algébrique du complexe z_3 tel que $|z_3| = 2$ et $\arg(z_3) = -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.
3. Déterminer la forme trigonométrique de $z_4 = 2\sqrt{3} - 2\mathrm{i}$.

Propriété 2.5.
Soient z et z' deux nombres complexes *non nuls*.

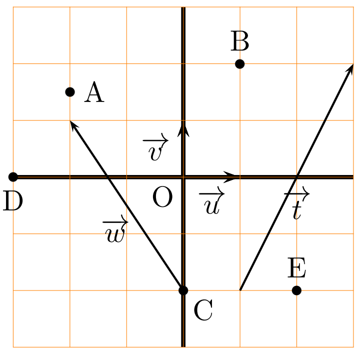
$$\boxed{z = z' \iff |z| = |z'| \quad \text{et} \quad \arg(z) = \arg(z')\ [2\pi]}$$

Propriétés 9.5.
Soient z et z' deux nombres complexes *non nuls*.

- $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi]$
- $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)\ [2\pi]$
- $\arg\left(\frac{z'}{z}\right) = \arg(z') - \arg(z)\ [2\pi]$
- $\forall n \in \mathbb{Z},\ \arg(z^n) = n\arg(z)\ [2\pi]$

5.4 Les exercices du chapitre

○○○ **Exercice 117.**
Lire graphiquement les affixes des points placés sur la figure ci-dessous ainsi que celles des vecteurs $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{t}$:



○○○ **Exercice 118.**
On donne $A(-3+\mathrm{i})$ et $B(2-4\mathrm{i})$.
Déterminer l'affixe du point K milieu du segment $[AB]$.

○○○ **Exercice 119.**
Dans le plan complexe, on donne les affixes de deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$: $z_{\overrightarrow{u}} = -2+\mathrm{i}$ et $z_{\overrightarrow{v}} = 3-5\mathrm{i}$.
Déterminer les affixes des vecteurs suivants :

1. $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$.
2. $\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}$.
3. $\dfrac{3}{5}\overrightarrow{u}$.
4. $2\overrightarrow{u}-3\overrightarrow{v}$.

●○○ **Exercice 120.**
Dans le plan complexe, on considère les points $A(-4+\mathrm{i})$, $B(3\mathrm{i})$, $C(3)$ et $D(-1-2\mathrm{i})$.

1. Calculer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$.
2. Que peut-on en déduire pour le quadrilatère $ABCD$?

●○○ **Exercice 121.**
Dans le plan complexe, on considère les points $A(4-5\mathrm{i})$, $B(3\mathrm{i})$, $C(-1+4\mathrm{i})$ et $D(11-20\mathrm{i})$.
Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

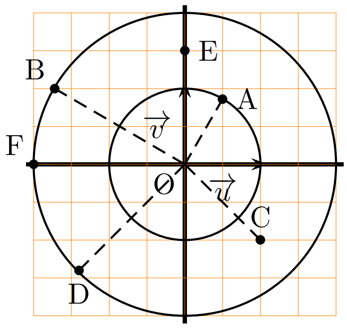
●○○ **Exercice 122.**
Dans le plan complexe, on considère les points $A(1-3\mathrm{i})$, $B(2+4\mathrm{i})$ et $C(5+3\mathrm{i})$.

1. Calculer l'affixe du point D pour que le quadrilatère $ABCD$ soit un parallélogramme.
2. Calculer l'affixe du point K centre du parallélogramme $ABCD$.
3. Calculer l'affixe du point G symétrique du point K par rapport au point A.

○○○ **Exercice 123.**
Déterminer le module des nombres complexes suivants :

1. $z_1 = 1 + \mathrm{i}$
2. $z_2 = -2 + 2\mathrm{i}$
3. $z_3 = 4 + 5\mathrm{i}$
4. $z_4 = 2 - \mathrm{i}$

●○○ **Exercice 124.**
Déterminer graphiquement les modules des nombres complexes z_A, z_B, z_C, z_D, z_E et z_F :



●○○ **Exercice 125.**
Dans le plan complexe, on considère les points $A(-5)$, $B(3-4\mathrm{i})$, $C(-4-3\mathrm{i})$ et $D(-4+3\mathrm{i})$.

1. Placer ces quatre points dans le plan complexe.
2. Montrer que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

●○○ **Exercice 126.**
Soit $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1. Parmi les complexes suivants, déterminer ceux qui appartiennent à $\mathbb{U}$:

1. $z_1 = \dfrac{1}{4} + \dfrac{\mathrm{i}}{4}$.
2. $z_2 = \dfrac{2\sqrt{6} + \mathrm{i}}{5}$.
3. $z_3 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$.

●○○ **Exercice 127.**
Soient $z_1 = 4\mathrm{i}$, $z_2 = -10$, $z_3 = 5 - 5\mathrm{i}$ et $z_4 = \sqrt{3} + \mathrm{i}$. Déterminer le module des nombres complexes suivants après avoir calculé les modules des nombres complexes z_1, z_2, z_3 et z_4 :

1. $a = z_1 z_2$.
2. $b = z_3^2 \times z_2$.

●●○ **Exercice 128.**
On se place dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal d'origine O.
Soit $\mathscr{C} = \{M(z)/|z| = 3\}$.
$M \in \mathscr{C} \iff OM = 3$. Donc l'ensemble $\mathscr{E}$ est le cercle de centre O et de rayon 3.
Reconnaître et représenter les ensembles suivants :

1. $\{M(z)/|z| = 0\}$.
2. $\{M(z)/|z-2| = 3\}$.
3. $\{M(z)/|z+4-\mathrm{i}| = 2\}$.

●●○ Exercice 129.

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal, on donne $R(1-\mathrm{i})$, $S(6+3\mathrm{i})$, $T(10-2\mathrm{i})$ et $U(5-6\mathrm{i})$.

1. Conjecturer la nature du quadrilatère $RSTU$.
2. Valider ou invalider la conjecture émise à la question précédente.

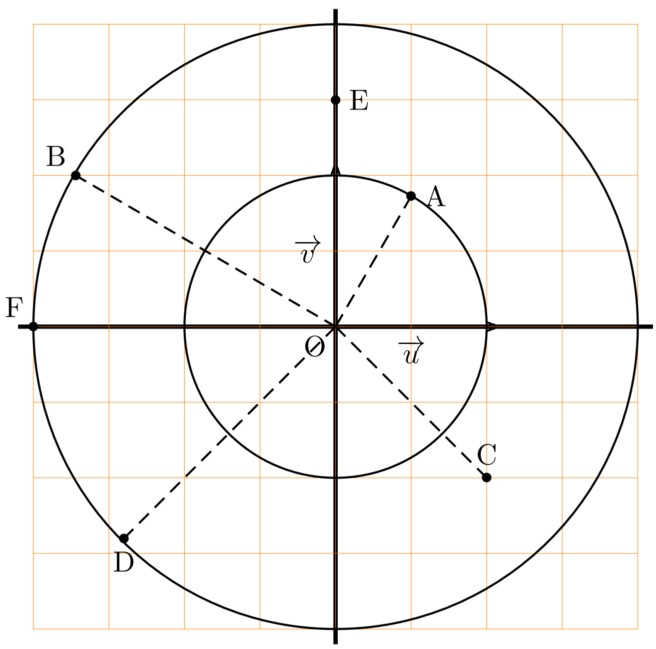
●●○ Exercice 130.
On se place dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal. Traduire en utilisant des modules les propositions suivantes :

1. Le triangle ABC est équilatéral.
2. Le triangle HGY est rectangle en Y.
3. Le point M appartient à la médiatrice du segment $[LK]$.
4. Le point C appartient au cercle de centre $A(1-\mathrm{i})$ et de rayon 7.

●○○ Exercice 131.
Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal, on donne $R(2-\mathrm{i})$, $S(6-\mathrm{i})$, et $T(4+(2\sqrt{3}-1)\mathrm{i})$.

1. Démonter que le triangle RST est équilatéral.
2. Calculer l'aire du triangle RST.

●○○ Exercice 132.
Déterminer graphiquement les arguments des nombres complexes z_A, z_B, z_C, z_D, z_E et z_F :

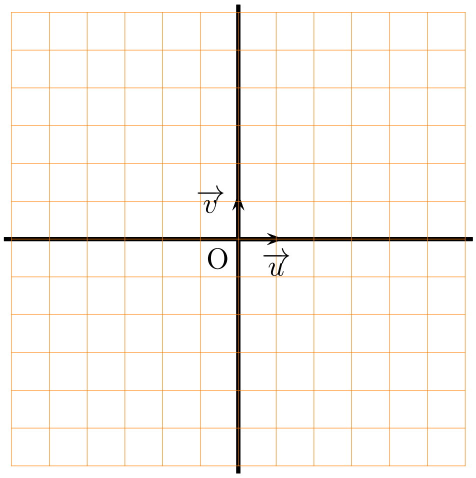


●○○ Exercice 133.
Déterminer un argument des nombres complexes suivants :

1. $z_1 = 1 + \sqrt{3}\mathrm{i}$
2. $z_2 = -4$
3. $z_3 = \sqrt{3} - 3\mathrm{i}$
4. $z_4 = -2 - 2\mathrm{i}$

●○○ Exercice 134.
Dans chaque cas, placer ci-dessous les points A, B, C et D tels que :

1. $|z_A| = 2$ et $\arg(z_A) = \dfrac{3\pi}{2}\ [2\pi]$.
2. $|z_B| = 3$ et $\arg(z_B) = \dfrac{\pi}{6}\ [2\pi]$.
3. $|z_C| = 4$ et $\arg(z_C) = -\dfrac{3\pi}{4}\ [2\pi]$.
4. $|z_D| = 5$ et $\arg(z_D) = \dfrac{2\pi}{3}\ [2\pi]$.



●○○ Exercice 135.
Dans chaque cas, donner la forme algébrique du complexe z tel que :

1. $|z| = 3$ et $\arg(z) = \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$.
2. $|z| = 5$ et $\arg(z) = \pi\ [2\pi]$.
3. $|z| = 2$ et $\arg(z) = -\dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$.
4. $|z| = 7$ et $\arg(z) = \dfrac{3\pi}{4}\ [2\pi]$.
5. $|z| = 6$ et $\arg(z) = -\dfrac{5\pi}{6}\ [2\pi]$.

●●○ Exercice 136.
On donne $z_1 = 2\sqrt{3} - 2\mathrm{i}$ et $z_2 = -1 + \mathrm{i}$.

1. Calculer le module et un argument de z_1 et z_2.
2. En déduire le module et un argument des complexes suivants :
   (a) $a = -4z_2$
   (b) $b = \dfrac{z_1}{z_2}$

CHAPITRE

6

Les graphes

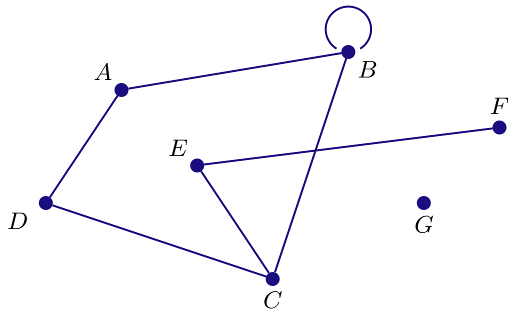
6.1 Graphes non orientés

6.1.1 Généralités

Définitions 1.6.

- Un graphe *non orienté* G est un ensemble de *sommets* reliés par des arêtes.
- Deux sommets reliés par une arête sont *adjacents*.
- Une arête est une *boucle* si elle relie un sommet *à lui-même*.
- L'*ordre* d'un graphe est le nombre total de ses sommets.
- On appelle *degré* d'un sommet le nombre d'arêtes dont ce sommet est une extrêmité (les boucles étant comptées deux fois). Ce degré vaut 0 si ce sommet est *isolé*.
- Un graphe est *simple* si deux sommets distincts sont joints par *au plus* une arête et s'il est *sans boucle*.
- Un *sous-graphe* G' d'un graphe G est un graphe constitué de *certains sommets* de G ainsi que des arêtes qui relient ces sommets.

Application 1.6. On considère le graphe ci-dessous :



1. Quel est l'ordre du graphe ?
2. Ce graphe est-il simple ? Justifier.
3. À l'aide d'un tableau, déterminer le degré de chacun des sommets du graphe.
4. Les sommets A et D sont-ils adjacents ? Justifier.
   Même question pour D et E.
5. Dessiner le sous-graphe $ACDE$. Quel est son ordre et combien possède-t-il d'arêtes ?

Théorème 1.6.
Dans un graphe *simple non-orienté*, la *somme* des degrés des sommets égal au double du *nombre d'arêtes*.

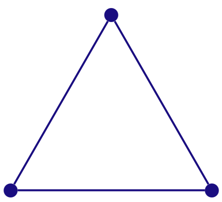
Démonstration. Lorsqu'on additionne les degrés des sommets, une arête est comptée deux fois, une pour chaque extrémité. □

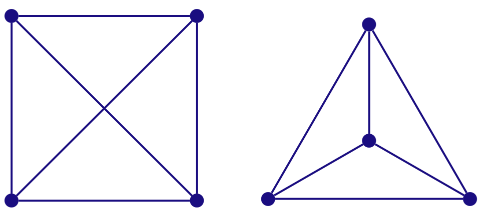
Théorème 2.6.
Dans un graphe *simple non- orienté*, le nombre de sommets de degré *impair* est *pair*.

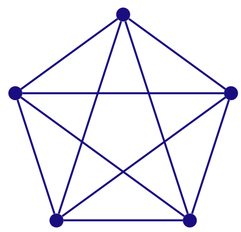
Démonstration. Soit p la somme des degrés des sommets pairs et m la somme des degrés des sommets impairs.
$m + p$ est égal à la somme des degrés des sommets c'est donc un nombre pair donc m est un nombre pair.
Or une somme d'entiers impairs est paire si, et seulement si, il y a un nombre pair de termes.
On en déduit que le nombre de sommets impairs est un entier pair. □

6.1.2 Graphe complet

Définition 1.6.
Un graphe non-orienté est *complet* si *tous* ses sommets sont deux à deux *adjacents*.


Graphe complet d'ordre 3


Graphes complets d'ordre 4


Graphe complet d'ordre 5

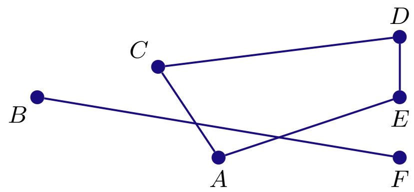
6.2 Parcourir un graphe non-orienté

6.2.1 Chaîne

Définitions 2.6.

- Dans un graphe non-orienté, une *chaîne* est une suite de sommets dans laquelle deux sommets consécutifs sont *adjacents*.
- La *longueur* d'une chaîne est le *nombre d'arêtes* qui composent la chaîne.
- Une chaîne est *fermée* si le premier et dernier sommet sont *confondus*.
- Un *cycle* est une chaîne fermée dont les arêtes sont *distinctes*.
- Un graphe est dit *connexe* si deux sommets distincts quelconques de ce graphe peuvent être reliés par une arête.

Exemple. On considère le graphe suivant :



- Ce graphe est d'ordre 6 mais est non connexe car il n'existe pas de chaîne reliant les sommets F et C.
- La chaîne $A - E - D - C - A$ est un cycle de longueur 4.

6.2.2 Chaîne eulérienne

Définitions 3.6.

- Une *chaîne eulérienne* est une chaîne qui contient chaque arête du graphe *une et une seule fois*.
- Un *cycle eulérien* est une chaîne eulérienne *fermée*.

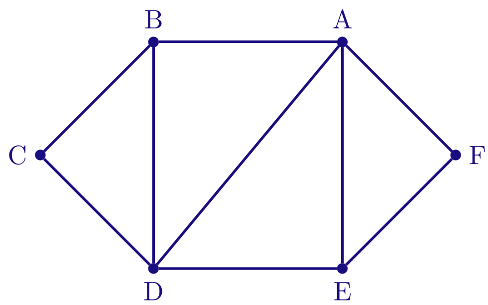
Théorème 3.6.
Dans le cas d'un graphe non-orienté, un graphe *connexe* admet une *chaîne eulérienne* si et seulement si le nombre de sommets de *degré impair* vaut 0 ou 2.
Ce théorème porte le nom d'Euler.

Théorème 4.6.

- Un graphe *connexe* admet un *cycle eulérien* si et seulement si *tous* ses sommets sont de degré *pair*.
- Un graphe ayant plus de deux sommets de degré impair ne possède pas de chaîne eulérienne.

Application 2.6.

Le graphe suivant modélise le plan d'une zone résidentielle. Les arêtes du graphe représentent les rues et les sommets du graphe les carrefours :



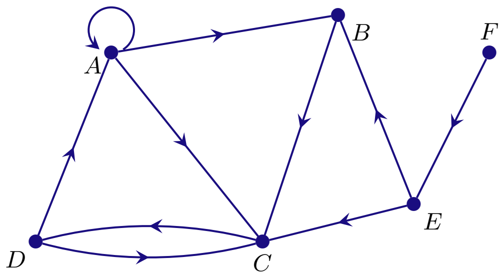
1. Donner l'ordre du graphe puis le degré de chacun des sommets.
2. Un piéton peut-il parcourir toutes ces rues sans emprunter plusieurs fois la même rue :
   (a) en partant d'un carrefour et en revenant à son point de départ ? Justifier la réponse.
   (b) en partant d'un carrefour et en arrivant à un carrefour différent ? Justifier la réponse.

6.3 Graphes orientés

6.3.1 Définition et exemples

Définition 2.6.
Un graphe est *orienté* lorsque ses arêtes sont définies par une origine et une extrémité. Dans ce cas, les arêtes sont aussi appelées *arcs* et on parle de degré entrant d'un sommet pour le nombre d'arcs dirigés vers le sommet et de degré sortant pour le nombre d'arcs partant du sommet.

Exemple 1.6.



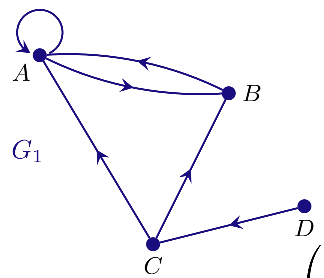
Remarque.
Les définitions et les propriétés relatives aux graphes non-orientés s'appliquent dans le cas d'un graphe orienté, excepté la notion de *graphe complet* et *théorème d'Euler*.

6.3.2 Matrice d'adjacence d'un graphe

Définition 3.6.
La matrice associée à un graphe, orienté ou non, d'ordre n est la matrice de taille n, où le terme de la i-ème *ligne* et de la j-ème *colonne* est égal au *au nombre d'arêtes* reliant les sommets i et j. Cette matrice est appelée *matrice d'adjacence* du graphe.

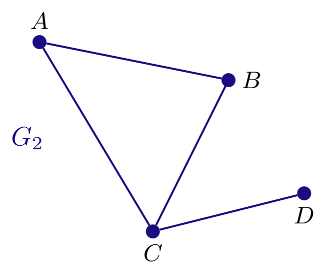
Illustration.

1. Cas d'un graphe *orienté* :



La matrice d'adjacence du graphe orienté G_1 est $M\left(G_1\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

2. Cas d'un graphe *non orienté* :



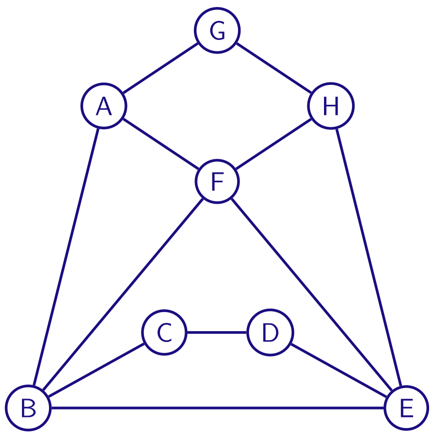
La matrice d'adjacence du graphe simple G_2 est $M\left(G_2\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

La matrice d'adjacence d'un graphe non-orienté est toujours *symétrique* et la diagonale de cette matrice ne comporte que des *zéros*.

Théorème 5.6.
On considère un graphe d'ordre n et on note M sa matrice d'adjacence.
Le *nombre de chemins* de longueur p reliant deux sommets i et j est donné par le terme de la i-ème *ligne* et de la j-ème *colonne* de la matrice M^p noté m_{ij}^p.

Application 4.6.

On considère le graphe Γ ci-dessous.



1. Donner la matrice M associée au graphe Γ (les sommets seront rangés dans l'ordre alphabétique).
2. On donne :

$$M^3 = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 & 3 & 4 & 8 & 5 & 3 \\ 7 & 4 & 6 & 1 & 10 & 8 & 3 & 4 \\ 1 & 6 & 0 & 4 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & 0 & 6 & 3 & 1 & 1 \\ 4 & 10 & 1 & 6 & 4 & 8 & 3 & 7 \\ 8 & 8 & 3 & 3 & 8 & 6 & 2 & 8 \\ 5 & 3 & 1 & 1 & 3 & 2 & 0 & 5 \\ 3 & 4 & 3 & 1 & 7 & 8 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

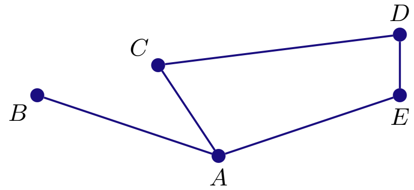
Déterminer, en justifiant, le nombre de chaînes de longueur 3 reliant B à H. Les citer toutes.

6.4 Les exercices du chapitre

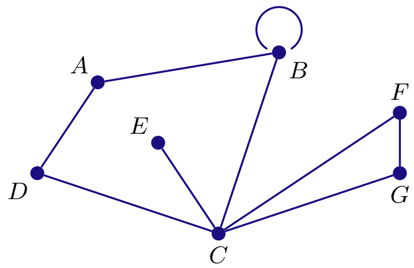
●○○ **Exercice 137.**
Pour chacun des graphes suivants, répondre aux questions suivantes :

1. Quel est l'ordre du graphe ?
2. Quel est le degré de chacun des sommets ?
3. Quel est le nombre d'arêtes ?

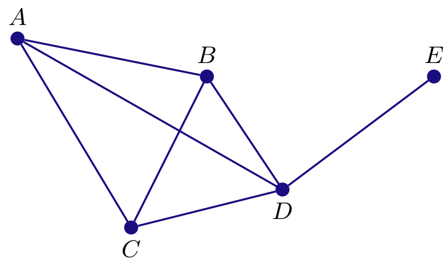
Graphe 1



Graphe 2



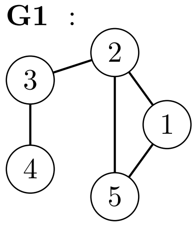
●○○ **Exercice 138.**
On considère le graphe ci-dessous :



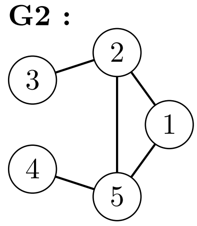
1. Quel est l'ordre du graphe ?
2. Le graphe est-il complet ?
3. Déterminer un sous-graphe complet :
   (a) d'ordre 2 ;
   (b) d'ordre 3 ;
   (c) d'ordre 4.

●○○ **Exercice 139.**
Dire si le graphe indiqué admet au moins une chaîne eulérienne et dans l'affirmative indiquez-en une :

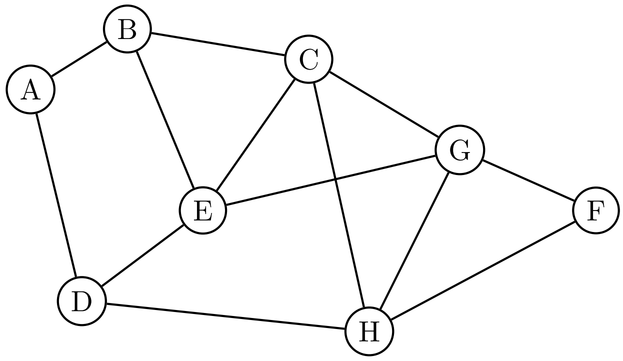
1. **G1** :



2. **G2 :**



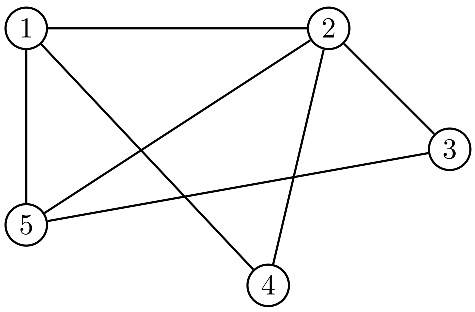
●●○ **Exercice 140.**
Lors d'une campagne électorale, un homme politique doit effectuer une tournée dans les villes A, B, C, D, E, F, G et H, en utilisant le réseau autoroutier. Le graphe $\mathcal{G}$ ci-dessous, représente les différentes villes de la tournée et les tronçons d'autoroute reliant ces villes (une ville est représentée par un sommet, un tronçon d'autoroute par une arête) :



1. Déterminer, en justifiant, si le graphe $\mathcal{G}$ est :
   (a) complet ;
   (b) connexe ;
   (c) simple.
2. (a) Justifier qu'il est possible d'organiser la tournée en passant au moins une fois par chaque ville, tout en empruntant une fois et une seule chaque tronçon d'autoroute.
   (b) Citer un trajet de ce type.

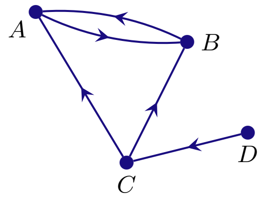
●●○ **Exercice 141.**
Un parc de loisirs propose à ses visiteurs des parcours d'accrobranches.

Les différents parcours sont modélisés par le graphe Γ ci-dessous où les sommets correspondent aux cinq arbres marquant leurs extrémités. Chaque parcours est représenté par une arête du graphe et peut être réalisé dans les deux sens.



1. Déterminer, en justifiant, si le graphe Γ est :
   (a) complet ;
   (b) connexe.
2. L'organisateur du parc de loisirs souhaite que les visiteurs puissent, s'ils le souhaitent, réaliser un itinéraire complet d'accrobranches, c'est-à-dire un itinéraire empruntant une fois et une seule chaque parcours et en commençant cet itinéraire par l'arbre numéro 1.
   Justifier que ce souhait est réalisable et proposer un tel itinéraire.

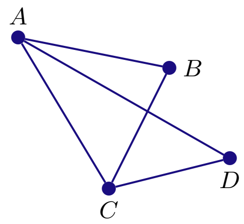
●○○ Exercice 142.
On considère le graphe orienté ci-dessous :



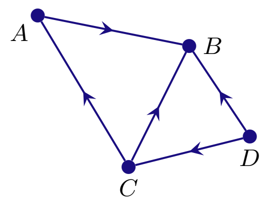
1. Quel est son ordre ?
2. Quel est le degré entrant du sommet A ?
3. Quel est le degré sortant du sommet B ?
4. Déterminer une chaîne de longueur 3 reliant les sommets D et A.

●○○ Exercice 143.
Déterminer la matrice d'adjacence des graphes suivants :

1. Graphe 1 :



2. Graphe 2 :



●○○ Exercice 144.
On considère la matrice d'adjacence d'un graphe G :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Quel est l'ordre du graphe G ?
2. Le graphe G est-il non orienté ? Justifier.
3. Dessiner un graphe possible.

●●○ Exercice 145.

La matrice d'un graphe non orienté $\mathcal{G}$ de sommets A, B, C, D, E est la matrice M suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sans dessiner le graphe, répondre aux questions suivantes en justifiant la réponse à l'aide de la matrice M suivante :

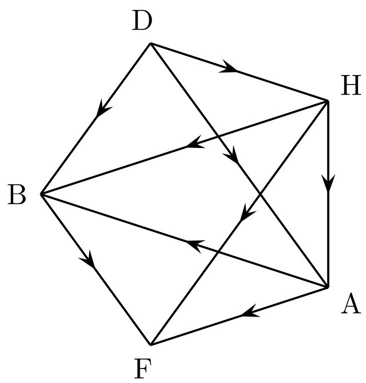
1. Quel est l'ordre du graphe ?
2. Quel est le nombre d'arêtes du graphe G ?
3. Le graphe G est-il complet ?
4. Le graphe G est-il simple ?
5. Donner le degré de chacun des sommets du graphe.
6. Le graphe admet-il une chaîne eulérienne ?
7. Le graphe admet-il un cycle eulérien ?

●●○ Exercice 146.

Un parcours sportif est composé d'un banc pour abdominaux, de haies et d'anneaux. Le graphe orienté ci-contre indique les différents parcours conseillés partant de D et terminant à F.

Les sommets sont : D (départ), B (banc pour abdominaux), H (haies), A (anneaux) et F (fin du parcours).

Les arêtes représentent les différents sentiers reliant les sommets.



1. Quel est l'ordre du graphe ?
2. On note M la matrice d'adjacence de ce graphe où les sommets sont rangés dans l'ordre alphabétique.
   (a) Déterminer M.
   (b) On donne $M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
   Assia souhaite aller de D à F en faisant un parcours constitué de 3 arêtes.
   Est-ce possible ? Si oui, combien de parcours différents pourra-t-elle emprunter ?
   Préciser ces trajets.

CHAPITRE

7

Matrices et applications

7.1 Suites de matrices

7.1.1 Suite de matrices colonnes

Définition 1.7.

Soit n un entier naturel.

On appelle *suite de matrices colonnes*, notée (U_n) des matrices colonnes dont tous les éléments sont des termes de suites numériques.

Exemple 1.7.

La suite (U_n) définie pour tout entier naturel n par $U_n = \begin{pmatrix} n+3 \\ n^2+1 \\ 3^n \end{pmatrix}$ est une suite de matrice dont les coefficients sont les suites numériques (a_n), (b_n) et (c_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$a_n = \qquad\qquad , \; b_n = \qquad\qquad \text{et } c_n =$$

Remarque.

On peut définir de la même manière les suites de matrices lignes.

Définition 2.7.

Une suite (U_n) de matrices *converge* si et seulement si toutes les suites formant les coefficients de cette matrice convergent. La limite de la suite (U_n) est alors la matrice ayant pour coefficients les limites de chaque terme (U_n).

Exemple 2.7.

Soit la suite de matrice (U_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par, $U_n = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-\frac{1}{n}} \\ \\ 5 - \dfrac{\ln n}{n} \end{pmatrix}$.

Cette suite de matrices converge vers la matrice :

$$U = \begin{pmatrix} \qquad\qquad \end{pmatrix}$$

7.1.2 Suites de matrices définies par des relations de récurrence

Propriété 1.7.
Soit A une matrice *carrée* d'ordre p avec p entier naturel supérieur ou égal à 2 et (U_n) une suite de matrices *colonnes* à p lignes telles que pour tout entier naturel n : $U_{n+1} = AU_n$.
Alors pour tout entier naturel n,

$$\boxed{U_n = A^n U_0}$$

Propriété 2.7.
Soit A une matrice *carrée* d'ordre p avec p entier naturel supérieur ou égal à 2, B est une matrice *colonne* à p lignes et (U_n) une suite de matrices *colonnes* à p lignes telles que pour tout entier naturel n : $U_{n+1} = AU_n + B$.
Si la suite (U_n) *converge* alors sa limite U est une matrice colonne vérifiant : $U = AU + B$.
La matrice U est appelée *état stable* de la suite (U_n).

Application 2.7. Soit la suite de matrices colonnes (U_n) définie pour tout entier naturel n par $U_{n+1} = AU_n + B$ avec :

$$U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ A = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 \\ -0,5 & 0,5 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer une matrice colonne U telle que $U = AU + B$.
2. On pose $V_n = U_n - U$.
   Montrer que, pour tout entier naturel n, $V_{n+1} = AV_n$.
3. En déduire l'expression de V_n en fonction de n.

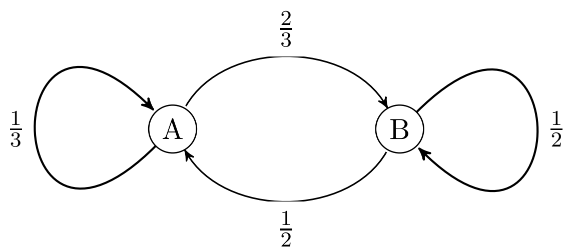
7.2 Chaînes de Markov

7.2.1 Graphe orienté pondéré

Définitions 1.7.

- Un graphe orienté est *pondéré* lorsque chaque arête est affectée d'un nombre réel positif, appelé *poids* de cette arête.
- Un graphe *probabiliste* est un graphe orienté pondéré où tous les poids sont compris entre 0 et 1 te tel que la *somme des poids* des arêtes issues d'un même sommet est égale à 1.
- Les sommets d'un graphe probabiliste sont appelés des *états*.

Exemple 3.7.
Voici un graphe probabiliste à deux états :



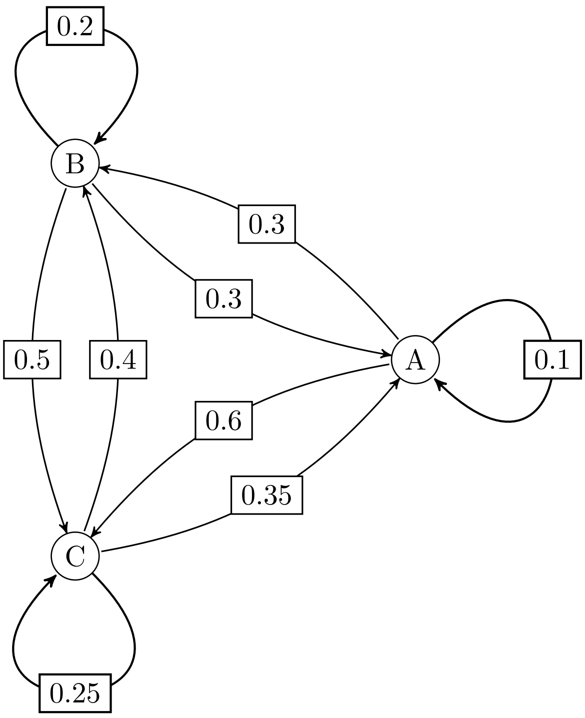
7.2.2 Matrice de transition

Définition 3.7.

La matrice associée à un graphe probabiliste comportant p sommets s'appelle *matrice de transition*. C'est une matrice carrée d'ordre p où le terme de la i-ème ligne et la j-ième colonne est égale au poids de l'arête allant du sommet i au sommet j si elle existe, 0 sinon.

Application 3.7.

1. Donner la matrice de transition associée au graphe donné ci-dessous, les sommets étant rangés dans l'ordre alphabétique.
2. Quelle remarque peut-on faire sur la somme des termes appartenant à une même ligne ?



7.2.3 Chaîne de Markov associée à deux ou trois états

Définitions 2.7.

On considère une suite de variables aléatoires (X_n) permettant de modéliser l'évolution par étapes successives d'un système aléatoire comportant différents états.

- À l'étape $n = 0$, la loi de probabilité de X_0 s'appelle la *distribution initiale* du système.
- À l'étape n, la loi de probabilité de X_n s'appelle la *distribution après n transitions.*

Lorsque, à chaque étape, la probabilité de transition d'un état à un autre *ne dépend pas de n*, on dit que la suite (X_n) est une *chaîne de Markov.*

► **Note 1.7.**

On peut associer à une chaîne de Markov :

- un graphe probabiliste où les sommets sont les états du système aléatoire et le poids de chaque arête est égal à la probabilité de transition d'un état à un autre.
- La matrice de transition de ce graphe probabiliste.

Application 4.7. Un robot se déplace sur un triangle ABC. À chaque étape :

- s'il est en A, il choisit de façon aléatoire soit de rester en A, soit de se déplacer vers B ou C ;
- s'il est en B, il se déplace aléatoirement vers A ou c ;
- s'il est en c, il se déplace vers A.

On note X_n la variable aléatoire donnant la position du robot à l'étape n. Au début de l'expérience, pour $n = 0$, on place le robot en A.

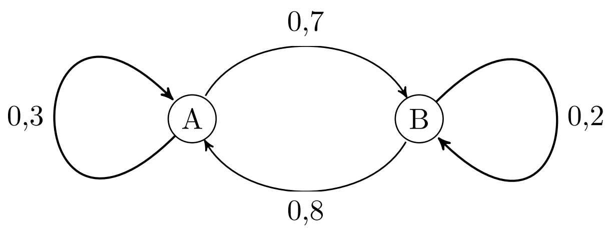
1. Donner la distribution initiale du système, c'est-à-dire $\mathbb{P}(X_0 = A)$, $\mathbb{P}(X_0 = B)$ et $\mathbb{P}(X_0 = C)$.
2. À l'aide d'un arbre pondéré, déterminer la distribution du système après deux étapes.
3. Expliquer pourquoi la suite (X_n) est une chaîne de Markov et donner le graphe probabiliste et la matrice associée.

7.3 Représentation d'une chaîne de Markov à l'aide d'une suite de matrices

7.3.1 Modélisation à l'aide d'une suite de matrice

Propriété 3.7.
On considère une chaîne de Markov à 2 (respectivement à 3) états et P la matrice de transition associée.
Soit n, i et j trois entiers naturels tels que $n \geqslant 1$, $1 \leqslant i \leqslant 2$ et $1 \leqslant j \leqslant 2$ (respectivement $1 \leqslant i \leqslant 3$ et $1 \leqslant j \leqslant 3$).
La probabilité de passer de l'état i à l'état j en n étapes est égale au terme de la i-ième ligne et j-ième colonne de la matrice P^n.

Application 5.7. On considère une marche aléatoire à deux états modélisée par le graphe probabiliste suivant :



1. Déterminer la matrice de transition associée à cette marche aléatoire.
2. Calculer M^3. En déduire la probabilité de passer de l'état 1 à l'état 2 en trois étapes.

7.3.2 Étude asymptotique

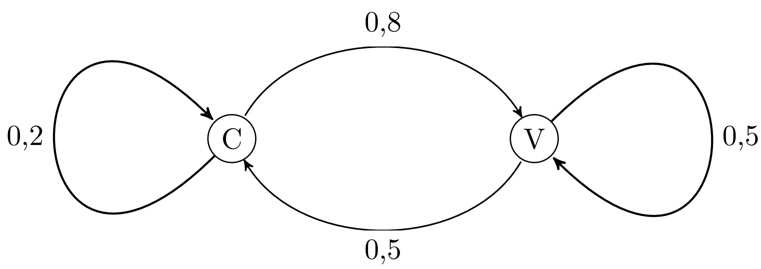
Définition 4.7.
On considère une chaîne de Markov à 2 (respectivement à 3) états et P la matrice de transition associée.
On note π_n la matrice ligne à 2 (respectivement à 3) colonnes dont le terme de la j-ième colonne est la probabilité qu'à l'étape n la variable aléatoire X_n soit égale à j. Autrement dit :

$$\pi_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 1) & P(X_n = 2) \end{pmatrix} \text{ ou}$$
$$\pi_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 1) & P(X_n = 2) & P(X_n = 3) \end{pmatrix}.$$

► **Note 2.7.**
La matrice π_0 représente la distribution initiale et la matrice π_n la distribution après n transitions.

Propriété 4.7.
Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $\pi_{n+1} = \pi_n P$ et $\pi_n = \pi_0 P^n$.
S'il existe un entier n tel que la matrice P^n *ne contient pas de 0* alors la suite (π_n) *converge* vers la matrice π vérifiant $\pi = \pi P$ et cette limite de *dépend pas* de π_0.
On dit que la matrice π représente *la distribution invariante* du système.

Application 6.7. On a programmé un ordinateur pour qu'il affiche successivement des lettres qui sont soit des consonnes C, soit des voyelles V selon le graphe probabiliste suivant :



1. On suppose que la première lettre est une consonne. Calculer la probabilité que la cinquième lettre soit une consonne.
2. Déterminer la distribution invariante de ce système. Interpréter le résultat.

7.4 Les exercices du chapitre

●○○ **Exercice 147.**

On considère la suite de matrices colonnes (U_n) définie par $U_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = AU_n$ avec $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0,5 \end{pmatrix}$.

1. Calculer à la main U_1 et U_2.
2. Exprimer U_n en fonction de n et donner la matrice U_5 à l'aide de la calculatrice.

●●○ **Exercice 148.**

On considère la suite de matrices colonnes (U_n) définie par $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = AU_n$ avec $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
La suite (U_n) a-t-elle un état stable ?

●●○ **Exercice 149.**
On considère deux suites de nombres réels (x_n) et (y_n) vérifiant pour tout entier naturel :
$x_{n+1} = 5x_n + 3y_n$ et $y_{n+1} = -2x_n + 6y_n$.

1. On donne $x_3 = 284$ et $y_3 = -56$.
   Déterminer x_0 et y_0 grâce au calcul matriciel.
2. Déterminer x_6 et y_6 grâce au calcul matriciel.

●●○ **Exercice 150.**

On considère la suite de matrices colonnes (U_n) définie par $U_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = AU_n$ avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 4 \\ 8 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.
Déterminer si cette suite possède un état stable.

●●○ **Exercice 151.**

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 \\ 0 & 0,1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,4 \end{pmatrix}$ et $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et on considère la suite de matrices (U_n) telles que pour tout entier naturel n,

$$U_{n+1} = AU_n + B.$$

1. Déterminer une matrice colonne U telle que
   $U = AU + B$.
2. On pose $V = U_n - U$.
   (a) Montrer que pour tout entier naturel n,
   $V_{n+1} = AV_n$ et en déduire l'expression de V_n en fonction de n.
   (b) En déduire l'expression de U_n en fonction de n.
3. Étudier la convergence de la suite (U_n).

●●○ Exercice 152.

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $U_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On considère la suite (U_n) de matrices colonnes par :

$$U_{n+1} = AU_n + C.$$

Montrer que la suite (U_n) converge vers une matrice limite L à déterminer.

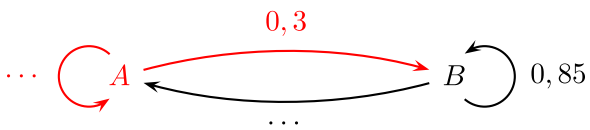
●○○ Exercice 153.

Dans chacun des cas suivants, justifier que la matrice P est une matrice de transition, puis représenter le graphe pondéré associé à P.

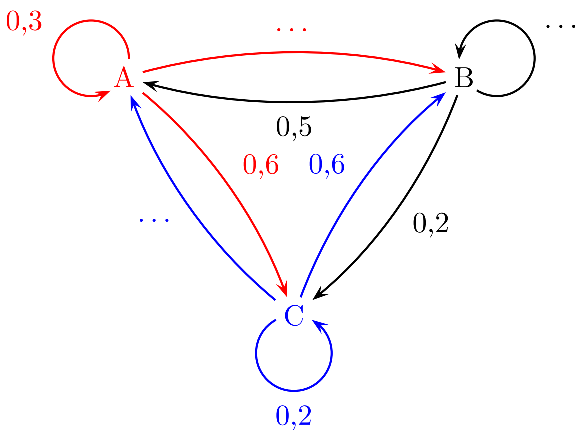
1. $P = \begin{pmatrix} 0,25 & 0,75 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$.
2. $P = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 & 0 \\ 0,3 & 0,2 & 0,5 \\ 0,2 & 0 & 0,8 \end{pmatrix}$.
3. $P = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{4} & \dfrac{5}{8} & \dfrac{1}{8} \\ \dfrac{1}{6} & \dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

○○○ Exercice 154.

1. Compléter le graphe suivant puis donner la matrice de transition associée :



2. Mêmes questions qu'au **1.** avec le graphe suivant :



●●○ Exercice 155.
Pour déterminer la distribution après n transitions d'une chaîne de Markov, Lorea a écrit le script de la fonction distribution d'argument n suivant :

```
def distribution(n):
    x,y=0.5,0.5
    for i in range(n):
      x,y=0.25*x+0.5*y,0.75*x+0.5*y
    return x,y
```

1. Donner la matrice de transition et la distribution initiale de cette chaîne de Markov.
2. À l'aide de cette fonction, conjecturer le comportement asymptotique de cette chaîne.
3. Vérifier le résultat précédent par le calcul.

●●○ Exercice 156.
La matrice $P = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 \\ 0,8 & 0,2 \end{pmatrix}$ est la matrice de transition associée à une chaîne de Markov.

1. Représenter le graphe associé.
2. Déterminer la distribution invariante de cette chaîne. En déduire le comportement asymptotique de cette chaîne.

●●● Exercice 157.
Un atome d'hydrogène peut se trouver dans deux états différents, l'état stable et l'état excité. À chaque nanoseconde, l'atome peut changer d'état.

Partie A - Étude d'un premier milieu

Dans cette partie, on se place dans un premier milieu (milieu 1) où, à chaque nanoseconde, la probabilité qu'un atome passe de l'état stable à l'état excité est $0,005$, et la probabilité qu'il passe de l'état excité à l'état stable est $0,6$.

On observe un atome d'hydrogène initialement à l'état stable.

On note a_n la probabilité que l'atome soit dans un état stable et b_n la probabilité qu'il se trouve dans un état excité, n nanosecondes après le début de l'observation.

On a donc $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$.

On appelle X_n la matrice ligne $X_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$.

L'objectif est de savoir dans quel état se trouvera l'atome d'hydrogène à long terme.

1. Vérifier que $a_2 = 0{,}993\,025$
   et $b_2 = 0{,}006\,975$.
2. Déterminer la matrice A telle que, pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = X_n A$.
   A est appelée matrice de transition dans le milieu 1.
   On rappelle alors que, pour tout entier naturel n,
   $X_n = X_0 A^n$.

3. On définit la matrice P par $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 120 \end{pmatrix}$.

   On admet que P est inversible et que

   $$P^{-1} = \frac{1}{121}\begin{pmatrix} 120 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Déterminer la matrice D définie par :

   $$D = P^{-1}AP.$$

4. Démontrer que, pour tout entier naturel n : $A^n = PD^nP^{-1}$.
5. On admet par la suite que, pour tout entier naturel n,

   $$A^n = \frac{1}{121}\begin{pmatrix} 120 + 0,395^n & 1 - 0,395^n \\ 120\,(1 - 0,395^n) & 1 + 120 \times 0,395^n \end{pmatrix}.$$

   En déduire une expression de a_n en fonction de n.
6. Déterminer la limite de la suite (a_n). Conclure.

Partie B - Étude d'un second milieu

Dans cette partie, on se place dans un second milieu (milieu 2), dans lequel on ne connaît pas la probabilité que l'atome passe de l'état excité à l'état stable. On note a cette probabilité supposée constante. On sait, en revanche, qu'à chaque nanoseconde, la probabilité qu'un atome passe de l'état stable à l'état excité est $0,01$.

1. Donner, en fonction de a, la matrice de transition M dans le milieu 2.
2. Après un temps très long, dans le milieu 2, la proportion d'atomes excités se stabilise autour de $2\,\%$.

   On admet qu'il existe un unique vecteur X, appelé état stationnaire, tel que $XM = X$, et que $X = \begin{pmatrix} 0,98 & 0,02 \end{pmatrix}$.

   Déterminer la valeur de a.

CHAPITRE

8 Complexes et trigonométrie

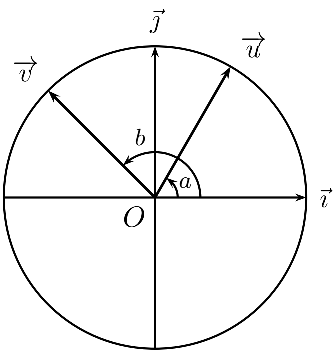
8.1 Formules de trigonométrie

8.1.1 Formules d'addition

Propriétés 1.8.
Soient a et b deux réels.

$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) \quad (8.1)$$
$$\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a) \quad (8.2)$$
$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \quad (8.3)$$
$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a) \quad (8.4)$$

Démonstration. On démontre la première égalité.
Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ considérons deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ unitaires (c'est-à-dire de norme 1) et tels que $(\vec{i}\,;\vec{u}) = a$ et $(\vec{i}\,;\vec{v}) = b$ (voir le schéma).



On sait que $(\vec{u}\,;\vec{v}) = (\vec{u}\,;\vec{i}) + (\vec{i}\,;\vec{v}) =$ ______.
Or on a $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}\,;\vec{v}) = \cos(b-a)$
donc $\vec{u}.\vec{v} = \cos(b-a) = \cos(a-b)$ car $\cos x =$ ______.
On sait aussi que $\vec{u}\begin{pmatrix}\cos a\\ \sin a\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\cos b\\ \sin b\end{pmatrix}$. Et donc $\vec{u}.\vec{v} = \cos a\cos b + \sin a \sin b$.

On en déduit que : $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$. □

Application 1.8. Calculer $\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

8.1.2 Formules de duplication

Des formules d'addition précédentes, en prenant $b = a$, on en déduit les propriétés suivantes :

Propriétés 2.8.
Soit a un réel.

- $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a)$ et $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$
- $\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1$ et $\cos(2a) = 1 - 2\sin^2(a)$
- $\cos^2(a) = \dfrac{\cos(2a)+1}{2}$ et $\sin^2(a) = \dfrac{1-\cos(2a)}{2}$

Application 2.8.

1. Démonter que pour tout réel x : $\sin(x) - \cos(x) = \sqrt{2}\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$.
2. (a) Exprimer $\cos\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)$ et $\sin\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.

   (b) En déduire les solutions dans $]-\pi\,;\,\pi]$ de $\cos(x) - \sqrt{3}\sin(x) = -1$.

8.2 Forme exponentielle d'un nombre complexe

8.2.1 Notation $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$

Définition 1.8.
Pour tout réel θ, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)$.

Remarques.

- $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ est le nombre complexe de *module* 1 et d'*argument* θ.
- **Cas particuliers :** $\mathrm{e}^{\mathrm{i}0} = 1$, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -1$ et $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = \mathrm{i}$.

Exemple 1.8.
Écrire la forme algébrique de $\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.

8.2.2 Relation fonctionnelle

Propriétés 3.8.
Soit θ et θ' deux nombres réels et n un entier relatif.

- $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'} =$ ________________.
- $\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^n =$ ________________.
- $\dfrac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} =$ ________________.
- $\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'}} =$ ________________.
- $\overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} =$ ________________.

Application 3.8. Simplifier les écritures suivantes :

1. $\left(2e^{-i\frac{\pi}{2}}\right)\left(3e^{i\frac{\pi}{3}}\right)$
2. $\left(3e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^4$

8.2.3 Forme exponentielle d'un nombre complexe

Définition 2.8.
Soit z un nombre complexe *non nul*, r et θ deux réels avec $r > 0$.
$|z| = r$ et $\arg(z) = \theta\ [2\pi] \iff z = re^{i\theta}$.
L'écriture $re^{i\theta}$ est appelée *forme exponentielle* de z.

Application 4.8. On donne $z = 1 + i\sqrt{3}$.

1. Écrire z sous forme exponentielle.
2. En déduire la forme exponentielle puis la forme algébrique de $\left(1 + i\sqrt{3}\right)^{13}$.

8.3 Formules d'Euler et de De Moivre

8.3.1 Formules d'Euler

Propriété 1.8.
Pour tout réel θ,

$$\boxed{\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \text{ et } \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}}.$$

Application 5.8. Démontrer que pour tout réel x,

$$\cos(2x)\sin(3x) = \frac{1}{2}\left(\sin(5x) + \sin(x)\right).$$

8.3.2 Formules de De Moivre

Propriété 2.8.
Pour tout réel θ et tout entier naturel n,

$$\boxed{(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)}$$

Exemple 2.8.
Utiliser la formule de De Moivre pour $n = 2$ et retrouver les formules de duplication

8.4 Les exercices du chapitre

●○○ **Exercice 158.**

1. Vérifier que : $\dfrac{5\pi}{12} = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{6}$.
2. En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$.

●○○ **Exercice 159.**

1. Calculer $\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{6}$.
2. En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

●○○ **Exercice 160.**

a désigne un réel. Simplifier l'expression suivantes :

$$A = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}a} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}a}\right)^2 + \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}a} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}a}\right)^2.$$

●○○ **Exercice 161.**

1. Exprimer, pour tout réel a, le nombre $\cos^2(a)$ en fonction de $\cos(2a)$.
2. En déduire la valeur exacte de $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$.

●●○ **Exercice 162.**

1. Exprimer, pour tout réel a, le nombre $\sin^2(a)$ en fonction de $\cos(2a)$.
2. En déduire la valeur exacte de $\sin\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$.
3. À l'aide de la question **1.**, déterminer la valeur exacte de $\sin\left(\dfrac{11\pi}{8}\right)$.

●○○ **Exercice 163.**

Écrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

1. $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi}$
2. $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$
3. $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$

●○○ **Exercice 164.**

Démontrer que les nombres suivants peuvent s'écrire sous la forme $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$:

1. $a = \mathrm{i}$
2. $b = -1$
3. $c = \dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
4. $d = \dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}$

●●○ Exercice 165.
Soit x un nombre réel.

1. Écrire sous forme algébrique $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}$.
2. En écrivant $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}$ comme un produit d'exponentielles complexes, trouver une autre expression du nombre z.
3. En déduire les solutions sur $\mathbb{R}$ de :
   (a) $\cos(x) - \sqrt{3}\sin(x) = \sqrt{2}$.
   (b) $\sqrt{3}\cos(x) + \sin(x) = \sqrt{2}$.

●○○ Exercice 166.
Écrire sous forme exponentielle les nombres complexes suivants :

1. $a = -\dfrac{2}{7}\mathrm{i}$
2. $b = -10$
3. $c = 4\mathrm{i}$
4. $d = 1 + \mathrm{i}$

●○○ Exercice 167.
Écrire sous forme exponentielle les nombres complexes suivants :

1. $a = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$
2. $b = -\dfrac{5}{2} + \dfrac{5\mathrm{i}}{2}$
3. $c = 2 - 2\mathrm{i}$
4. $d = -\sqrt{2} - \mathrm{i}\sqrt{2}$

●○○ Exercice 168.
Écrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

1. $a = 3\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$
2. $b = 5\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$
3. $c = 6\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$
4. $d = 7\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$

●○○ Exercice 169.
Écrire sous forme exponentielle les nombres complexes suivants :

1. $a = 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} \times \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}$
2. $b = (\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}})^5$
3. $c = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{5}}}$
4. $d = -\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$

●○○ Exercice 170.
Placer l'image des nombres complexes suivants dans le plan complexe muni d'un repère :

1. $a = 3\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$
2. $b = \sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$
3. $c = 4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$
4. $d = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$

●○○ **Exercice 171.**
Écrire sous forme exponentielle les nombres complexes suivants :

1. $a = \dfrac{8\mathrm{i}}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}$
2. $b = -5\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$
3. $c = 2\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{7}}}$
4. $d = \dfrac{\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right)^5}{\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right)^2}$

●○○ **Exercice 172.**
Écrire sous forme exponentielle les nombres complexes suivants :

1. $a = \sqrt{3} - \mathrm{i}$
2. $b = \dfrac{2-2\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$
3. $c = \left(\dfrac{\mathrm{i}}{2}\right)^{18}$
4. $d = (1+\mathrm{i})^{13}$

●●○ **Exercice 173.**
Soit $z = 3 - \mathrm{i}\sqrt{3}$.

1. Déterminer la forme exponentielle de z.
2. En déduire la forme exponentielle des nombres complexes suivants :
   (a) $4z$
   (b) $3\mathrm{i}z$
   (c) $\overline{\mathrm{i}z}$
   (d) $-5z$

●●○ **Exercice 174.**
Soit α un nombre réel. Déterminer la forme exponentielle des nombres suivants :

1. $\cos(\alpha) + \mathrm{i}\sin(\alpha)$
2. $\cos(\alpha) - \mathrm{i}\sin(\alpha)$
3. $-\cos(\alpha) + \mathrm{i}\sin(\alpha)$
4. $-\cos(\alpha) - \mathrm{i}\sin(\alpha)$

●●○ **Exercice 175.**
Soit le nombre complexe $z = -1 + \mathrm{i}$.

1. Écrire z sous forme exponentielle.
2. En déduire la forme algébrique de z^{10}.

●●○ **Exercice 176.**
On considère les nombres complexes z_1 et z_2 définis par :

$$z_1 = 2\sqrt{3} - 2\mathrm{i} \text{ et } z_2 = 1 - \mathrm{i}.$$

1. Écrire z_1 et z_2 sous forme exponentielle.
2. En déduire celles de :
   (a) $z_1 z_2$
   (b) $\dfrac{z_1}{z_2}$
   (c) $\dfrac{z_1^3}{z_2^2}$

●●○ **Exercice 177.**
Soit x un nombre réel appartenant à l'intervalle $]0\,;\pi[$.

1. En factorisant par $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{x}{2}}$, déterminer le module et un argument de $a = 1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ et de $b = 1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$.
2. Montrer que $\dfrac{a}{b}$ est un nombre imaginaire pur.

●●● **Exercice 178.**
Soit x un nombre réel.
On pose $z = \cos(x) + \mathrm{i}\sin(x)$.

1. Démontrer que pour tout entier naturel n,
$$z^n - \frac{1}{z^n} = 2\mathrm{i}\sin(nx).$$
2. Trouver une expression analogue
   pour $z^n + \dfrac{1}{z^n}$.

●●○ **Exercice 179.**
Soit x un nombre réel. Écrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

1. $a = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}$
2. $b = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}$
3. $c = \mathrm{e}^{4\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-4\mathrm{i}x}$
4. $d = \mathrm{e}^{-5\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{5\mathrm{i}x}$

●●● **Exercice 180.**

1. Développer $(a+b)^4$.
2. En utilisant une formule d'Euler, prouver que :
$$\sin^4(x) = \frac{1}{8}\left(\cos(4x) - 4\cos(2x) + 3\right).$$

●●● **Exercice 181.**

1. À l'aide des formules d'Euler, démontrer que $\cos^3 x = \dfrac{3\cos x + \cos(3x)}{4}$.
2. En déduire $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\, dx$.

●●○ **Exercice 182.**

On donne les complexes $z_1 = \dfrac{\sqrt{6} - \mathrm{i}\sqrt{2}}{2}$ et
$z_2 = 1 - \mathrm{i}$.

1. Écrire sous forme exponentielle z_1 et z_2 puis $\dfrac{z_1}{z_2}$.
2. Écrire $\dfrac{z_1}{z_2}$ sous forme algébrique.
3. En déduire que $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

CHAPITRE

9

Compléments sur les nombres complexes

Dans tout le chapitre, on se place dans un repère *orthonormé direct* $(O\,;\,\vec{u}\,,\vec{v})$.

9.1 Interprétation du module et de l'argument de $\dfrac{c-a}{b-d}$

9.1.1 Module de $\dfrac{c-a}{b-d}$

Propriété 1.9.
Soient quatre points *distincts* A, B et C et D d'affixes respectives a, b, c et d.
On a :

- $|c-a| = |a-c| = AC$
- $\left|\dfrac{c-a}{d-b}\right| = \dfrac{AC}{BD}$

9.1.2 Argument de $\dfrac{c-a}{b-d}$

Propriété 2.9.
Soient quatre points *distincts* A, B et C et D d'affixes respectives a, b, c et d.
On a :

$$\boxed{\arg\left(\frac{c-a}{d-b}\right) = (\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AC})\ [2\pi]}$$

Application 1.9.

1. Soient A, B et C d'affixes respectives $a = 1+2\mathrm{i}$, $b = 2$ et $c = -1+\mathrm{i}$.
   (a) Calculer AB et AC.
   (b) Calculer $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.
   (c) En déduire la nature du triangle ABC.
2. Dans chaque cas, déterminer l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant la condition :

   (a) $\left|\dfrac{z+4+\mathrm{i}}{z+5}\right| = 1$ (b) $\arg\left(\dfrac{z-3\mathrm{i}}{z-4}\right) = \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$

9.2 Racines n-ièmes de l'unité

Définition 1.9.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On appelle *racine n-ième* de l'unité, tout nombre complexe z tel que $z^n = 1$

Propriété 3.9.
Pour tout entier naturel n non nul, l'équation $z^n = 1$ admet *exactement* n racines distinctes : ce sont les nombres complexes de la forme $\omega_k = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}}$, $k \in [\![0\,;\,n-1]\!]$.

Remarques.

- Pour tout entier naturel n non nul, 1 est solution de $z^n = 1$.
- Les racines n-ièmes de l'unité sont les *racines* du polynôme $z^n - 1$.

Application 2.9. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $(z+3)^5 = 1$.
2. $z^3 = -64$.

Définition 2.9.
On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité :

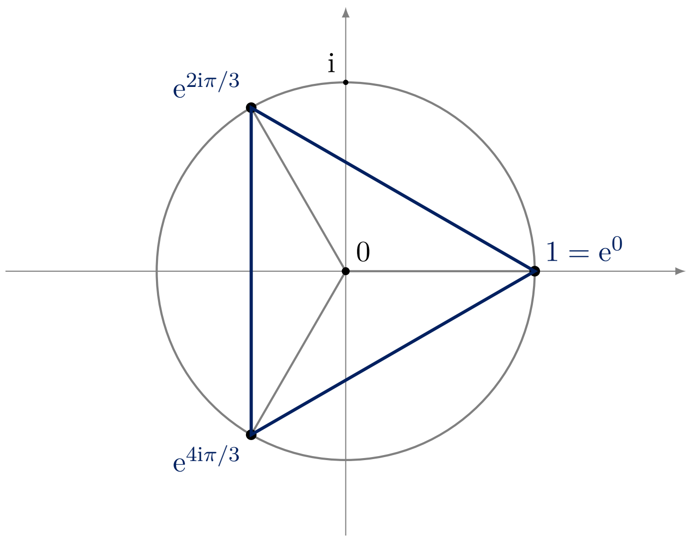
$$\boxed{\mathbb{U}_n = \{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}},\ k \in [\![0\,;\,n-1]\!]\}}$$

Exemple 1.9.
Préciser les racines 2-ièmes de l'unité.

Propriété 4.9.

- Les points images de $\mathbb{U}_n$, pour $n \in \mathbb{N}^*$, appartiennent au *cercle trigonométrique*.
- Les points images de $\mathbb{U}_n$, pour $n \geqslant 3$, sont les sommets d'un *polygone régulier* à n sommets.

Exemple 2.9.
$n = 3$: les racines 3-ièmes de l'unité sont les affixes des sommets d'un triangle équilatéral.



9.3 Les exercices du chapitre

●○○ **Exercice 183.**
Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct, on donne les trois points A, B et C d'affixes respectives :
$z_A = -4 + 2\text{i}$, $z_B = -\text{i}$, $z_C = 3 + 3\text{i}$
et $z_D = -1 + 6\text{i}$.

1. Placer ces quatre points. Quelle conjecture peut-on émettre sur le quadrilatère $ABCD$?
2. Écrire le quotient $\dfrac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$ sous forme algébrique puis sous forme exponentielle.
3. Démontrer la conjecture émise à la question **1.**

●○○ **Exercice 184.**
Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $(z + \text{i})^4 = 1$
2. $z^4 = 81$

●○○ **Exercice 185.**
Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $(z - 8)^5 = 1$
2. $z^5 = 4\sqrt{2}$

●○○ **Exercice 186.**
Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^5 = 32\text{i}$
2. $z^4 = -9\text{i}$

●●○ **Exercice 187.**

1. Calculer $(1 + \text{i})^3$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = -2(1 - \text{i})$.
3. Donner le module et un argument de chaque solution.

●●○ **Exercice 188.**

1. Vérifier que le complexe $\sqrt{3} - \text{i}$ est une racine quatrième du complexe $-8(1 + \text{i}\sqrt{3})$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :
$$z^4 = -8(1 + \text{i}\sqrt{3})$$
3. Donner le module et un argument de chaque solution.

●●○ **Exercice 189.**

1. (a) Calculer le module et u argument du nombre complexe $4\sqrt{2}(-1 + \text{i})$.
   (b) Soit $z = r\text{e}^{\text{i}\theta}$. Exprimer le module et un argument de z^3.
   En déduire l'écriture exponentielle des solutions de l'équation :
$$z^3 = 4\sqrt{2}(-1 + \text{i})$$
2. En utilisant les racines cubiques de 1, écrire les solutions de l'équation $z^3 = 4\sqrt{2}(-1 + \text{i})$ sous forme algébrique.
3. Déduire des deux questions précédentes les valeurs de $\cos\left(\dfrac{11\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{11\pi}{12}\right)$.

●●● Exercice 190.

On pose $z_0 = 8$ et, pour tout entier naturel n :

$$z_{n+1} = \frac{3 - \mathrm{i}\sqrt{3}}{4} z_n.$$

On note A_n le point du plan d'affixe z_n.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n,

$$z_n = 8 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{n\pi}{6}}.$$

2. Pour tout entier naturel n, on pose :

$$u_n = |z_n|$$

Déterminer la nature et la limite de la suite (u_n).

3. (a) Démontrer que, pour tout entier naturel k,

$$\frac{z_{k+1} - z_k}{z_{k+1}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{i}.$$

En déduire que, pour tout entier naturel k, on a l'égalité : $A_k A_{k+1} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \mathrm{O}A_{k+1}$.

(b) Pour tout entier naturel n, on appelle ℓ_n la longueur de la ligne brisée reliant dans cet ordre les points $A_0,\ A_1,\ A_2, \ldots, A_n$.
On a ainsi : $\ell_n = A_0A_1 + A_1A_2 + \ldots + A_{n-1}A_n$.
Démontrer que la suite (ℓ_n) est convergente et calculer sa limite.

●●● Exercice 191.

Soit la suite de nombres complexes (z_n) définie par

$$\begin{cases} z_0 & = & 100 \\ z_{n+1} & = & \dfrac{\mathrm{i}}{3} z_n \quad \text{pour tout entier naturel } n. \end{cases}$$

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct. Pour tout entier naturel n, on note M_n le point d'affixe z_n.

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n, les points O, M_n et M_{n+2} sont alignés.
2. On rappelle qu'un disque de centre A et de rayon r, où r est un nombre réel positif, est l'ensemble des points M du plan tels que $AM \leqslant r$.
Démontrer que, à partir d'un certain rang, tous les points M_n appartiennent au disque de centre O et de rayon 1.

CHAPITRE

10 Plus Grand Commun Diviseur

10.1 Diviseurs communs, PGCD

10.1.1 PGCD de deux entiers

Définition 1.10.

Soient $a, b \in \mathbb{Z}$ deux entiers, *non tous les deux nuls.*
Le plus grand entier qui divise à la fois a et b s'appelle le *plus grand diviseur commun* de a, b et se note $\mathrm{pgcd}(a, b)$.

Exemples.

- $\mathrm{pgcd}(-21, 14) =$
- $\mathrm{pgcd}(12, 32) =$
- $\mathrm{pgcd}(21, 26) =$

Propriétés.

1. $\mathrm{pgcd}(a\,,\,ka) = a$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et $a \neq 0$.
2. Cas particuliers : pour tout $a \neq 0$, on a $\mathrm{pgcd}(a, 0) = a$ et $\mathrm{pgcd}(a, 1) = 1$ et enfin pour a et b non nuls tous les deux : $\mathrm{pgcd}(|a|, |b|) = \mathrm{pgcd}(a, b)$

Application 1.10.

1. Déterminer, dans $\mathbb{N}$, tous les diviseurs de 92 et de 64.
2. En déduire le PGCD de 92 et 64.

10.1.2 Algorithme d'Euclide

,

Lemme 1.10.
Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$. Écrivons la division euclidienne $a = bq + r$. Alors :

$$\boxed{\mathrm{pgcd}(a, b) = \mathrm{pgcd}(b, r)}$$

En fait on a même $\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(b, a - qb)$ pour tout $q \in \mathbb{Z}$. Mais pour optimiser l'algorithme d'Euclide on applique le lemme avec q le quotient.

Démonstration. Nous allons montrer que les diviseurs de a et de b sont exactement les mêmes que les diviseurs de b et r. Cela impliquera le résultat car les plus grands diviseurs seront bien sûr les mêmes.

- Soit d un diviseur de a et de b. Alors d divise b donc aussi bq, en plus d divise a donc d divise $a - bq = r$.
- Soit d un diviseur de b et de r. Alors d divise aussi $bq + r = a$.

□

Propriété 1.10.
On souhaite calculer le pgcd de $a, b \in \mathbb{N}*$. On peut supposer $a \geqslant b$. On calcule des divisions euclidiennes successives. Le pgcd sera le dernier reste non nul.

- division de a par b, $a = bq_1 + r_1$. Par le lemme précédent $\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(b, r_1)$ et si $r_1 = 0$ alors $\text{pgcd}(a, b) = b$ sinon on continue :
- $b = r_1q_2 + r_2, \quad \text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(b, r_1) = \text{pgcd}(r_1, r_2)$,
- $r_1 = r_2q_3 + r_3, \quad \text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(r_2, r_3)$,
- $\ldots$
- $r_{k-2} = r_{k-1}q_k + r_k, \quad \text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(r_{k-1}, r_k)$,
- $r_{k-1} = r_kq_k + 0, \quad \text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(r_k, 0) = r_k$.

Comme à chaque étape le reste est plus petit que le quotient on sait que $0 \leqslant r_{i+1} < r_i$. Ainsi l'algorithme se termine car nous sommes sûrs d'obtenir un reste nul, les restes formant une suite décroissante d'entiers positifs ou nuls : $b > r_1 > r_2 > \cdots \geqslant 0$.

Exemple 1.10.
Calculons le pgcd de $a = 600$ et $b = 124$.

Application 2.10.

1. À l'aide de l'algorithme d'Euclide, déterminer le pgcd de 1 551 et 132. Vérifier le résultat à l'aide de la calculatrice.
2. En déduire l'ensemble des diviseurs communs de 1 551 et 132.

10.1.3 Ensemble des diviseurs communs

Propriété 2.10.
Soit a et b deux entiers naturels non nuls et soit d leur pgcd.
L'*ensemble des diviseurs communs* de a et de b est l'ensemble des *diviseurs* de d.

10.2 Nombres premiers entre eux

10.2.1 Couples d'entiers premiers entre eux

Définition 2.10.

Soient deux entiers relatifs a et b non nuls.
On dit que a et b sont *premiers entre eux* lorsque $\text{pgcd}(a, b) = 1$.

Exemple 2.10.

Pour tout $a \in \mathbb{Z}$, a et $a+1$ sont premiers entre eux. En effet soit d un diviseur commun à a et à $a+1$. Alors d divise aussi $a+1-a$. Donc d divise 1 ce qui induit que $d = -1$ ou $d = +1$. Le plus grand diviseur de a et $a+1$ est donc 1. Et donc $\text{pgcd}(a, a+1) = 1$ et par suite a et $a+1$ sont premiers entre eux.

Définition 3.10.

Soit a un entier relatif et b un entier naturel non nul.
La fraction $\dfrac{a}{b}$ est *irréductible* si les entiers a et b sont *premiers entre eux*.

Propriété 3.10.
Soient a et b deux entiers relatifs non nuls.
Si $d = \text{pgcd}(a, b)$ alors il existe deux entiers a' et b' *premiers entre eux* tels que :

$$\boxed{a = da' \quad \text{et} \quad b = db'}.$$

Application 3.10. Déterminer tous les couples d'entiers naturels $(x\,;\,y)$ tels que :

$$\begin{cases} x & < & y \\ x+y & = & 600 \\ \text{pgcd}(x\,;\,y) & = & 50 \end{cases}$$

10.2.2 Théorème de Bachet-Bézout

Théorème 1.10.
Soit a et b deux entiers relatifs non nuls.
a et b sont *premiers entre eux* si et seulement il existe *deux entiers relatifs* u et v tels :

$$\boxed{au + bv = 1}$$

Application 4.10.

1. Démontrer qu'il existe deux entiers relatifs u et v tels que $38u + 15v = 1$.
2. À l'aide de l'algorithme d'Euclide, déterminer un tel couple $(u\,;\,v)$.

10.2.3 Caractérisation du pgcd

Théorème 2.10.
Soient a et b deux entiers relatifs non nuls.
$\text{pgcd}(a, b) = d$ si et seulement si d *divise* a et b et s'il *existe* deux entiers relatifs u et v tels que :

$$\boxed{au + bv = d}$$

10.3 Conséquences du théorème de Bézout

10.3.1 Lemme de Gauss

Lemme 2.10. *de Gauss*
Soit a, b et c des entiers non nuls.
Si a divise bc et a est *premier* avec b alors a divise c.

Démonstration. a divise bc donc il existe un entier k tel que $bc = ka$. Or a et b étant premiers entre eux, il existe u et v entiers tels que $au + bv = 1$. Alors, en multipliant par c cette égalité, on obtient $auc + bvc = c$ soit $acu + vka = c$ donc $a(cu + vk) = c$ avec $cu + vk$ entier. Donc c est multiple de a ou a divise c. □

Corollaire. Soient a, b et c trois entiers non nuls.
Si a divise c et b divise c avec a et b *premiers entre eux* alors ab divise c.

10.3.2 Équations de Diophante

Propriété 4.10.
Soient a et b deux entiers non nuls et c un entier quelconque. Une *équation diophantienne* est une équation de la forme $ax + by = c$, d'inconnues entières x et y.
Cette équation admet des solutions si et seulement si c est *un multiple* du pgcd de a et b.
Si $c = \text{pgcd}(a, b)$, le théorème de Bézout généralisé donne l'existence d'un couple d'entiers $(x\,;\,y)$ solution de l'équation $ax + by = c$.

Application 5.10. Parmi les équations suivantes où les inconnues x et y sont des entiers relatifs, quelles sont celles qui admettent au moins une solution ? Justifier ?

1. $(E_1)\ :\ 13x + 14y = 3$.
2. $(E_2)\ :\ 39x - 42y = 2$.
3. $(E_3)\ :\ 5x - 9y = 1$.

Application 6.10. On considère l'équation $(E)\ :\ 2x + 5y = 4$ où $(x\,;\,y) \in \mathbb{Z}^2$.

1. Trouver deux entiers relatifs u et v tels que $2u + 5v = 1$.
2. En déduire une solution particulière $(x_0\,;\,y_0)$ de (E).
3. Justifier que $(E) \iff 2(x - x_0) = 5(y_0 - y)$.
   En déduire toutes les solutions de (E).

10.3.3 Homogénéité du pgcd

Propriété 5.10.
Soient a et b deux entiers relatifs non nuls.
Pour tout entier naturel k non nul, $\text{pgcd}(ka\,;\,kb) = k\,\text{pgcd}(a,b)$.

Application 7.10. En utilisant l'homogénéité du pgcd, déterminer :

1. $\text{pgcd}(1\,200\,;\,350)$.
2. $\text{pgcd}(2^3 \times 5^2 \times 13^5\,;\,2^2 \times 5^2 \times 13^4 \times 17)$

10.4 Les exercices du chapitre

●○○ **Exercice 192.**

1. Déterminer dans $\mathbb{Z}$ tous les diviseurs de 143.
2. En déduire le pgcd de 143 avec les nombres suivants :
   (a) 0 ;
   (b) $1\,034$;
   (c) -10^5.

●○○ **Exercice 193.**
Utiliser l'algorithme d'Euclide pour calculer le pgcd des nombres suivants :

1. 322 et 1 078
2. 1 024 et 652
3. 544 et 268.

●○○ **Exercice 194.**

1. Calculer le pgcd de 10 010 et de 2 772.
2. En déduire tous les diviseurs communs de 10 010 et de 2 772.

●●○ **Exercice 195.**
Soit n un entier naturel. Lorsqu'on divise 825 par n, il reste 6 et lorsqu'on divise 711 par n, il reste 18.
Déterminer toutes les valeurs possibles pour n.

●●○ **Exercice 196.**
On note d un diviseur des entiers naturels a et b non nuls.

1. Démontrer que d divise $4a + 3b$ et $5a + 4b$.
2. Réciproquement, démontrer que tout diviseur de $4a + 3b$ et $5a + 4b$ divise a et b.
3. En déduire que $(a\,;\,b)$ et $(4a + 3b\,;\,5a + 4b)$ ont même PGCD.

●●○ **Exercice 197.**
Soit n un entier naturel tel que $n > 3$ et on pose $a = 3n + 11$ et $b = n + 2$.

1. À l'aide de la calculatrice ou d'un tableur, conjecturer le pgcd de a et b.
2. (a) Écrire la division euclidienne de a par b.
   (b) En déduire que $\text{pgcd}(a, b)$ divise 5.
3. Montrer que $\text{pgcd}(a, b) = 5 \iff n \equiv 3\ [5]$.

●○○ **Exercice 198.**
Soit n un entier relatif.

1. Démontrer que les nombres $a = 2n + 1$ et $b = 3n + 2$ sont premiers entre eux.
2. Même question avec les nombres $a = 7n + 4$ et $b = 7n + 3$.

●○○ **Exercice 199.**

Soit n un entier relatif.
Démontrer que la fraction $\dfrac{(n+2)^2}{(n+3)(n+1)}$ est irréductible.

●○○ **Exercice 200.**
À l'aide de l'algorithme d'Euclide, déterminer une solution particulière pour chacune des équations suivantes où $(x\,;\,y) \in \mathbb{Z}^2$:

1. $11x + 19y = 1$.
2. $28x - 33y = 1$.
3. $23x + 32y = 1$.
4. $1274x - 275y = 1$.

●●○ **Exercice 201.**

1. Quels sont les diviseurs de 2^{10} ? De 3^{10} ?
2. Justifier qu'il existe deux entiers relatifs u et v tels que $2^{10}u + 3^{10}v = 1$.
3. Déterminer un couple d'entiers $(u\,;\,v)$ tel que $2^{10}u + 3^{10}v = 1$.

●○○ **Exercice 202.**
Résoudre les équations suivantes où $(x\,;\,y) \in \mathbb{Z}^2$.

1. $47x = 28y$.
2. $5(x - 1) = 2(y + 3)$.

●●○ **Exercice 203.**
n est un entier naturel compris entre 20 et 800. De plus, la division euclidienne de n par 60 donne pour reste 15 et la division euclidienne de n par 156 donne aussi pour reste 15. Déterminer n.

●●○ **Exercice 204.**
On considère l'équation $7x + 17y = 1$ où x et y sont des entiers relatifs.

1. Justifier que cette équation admet au moins une solution.
2. Déterminer une solution particulière.
3. Résoudre l'équation en utilisant le lemme de Gauss.

●○○ **Exercice 205.**
Parmi les équations suivantes où $(x\,;\,y) \in \mathbb{Z}^2$, quelles sont celles qui admettent des solutions ? Justifier.

1. $32x + 28y = 8$.
2. $46x + 51y = 1$.
3. $222x - 72y = 8$.
4. $7x - 32y = -5$.

●○○ **Exercice 206.**
Déterminer une solution particulière pour chacune des équations suivantes où $(x\,;\,y) \in \mathbb{Z}^2$:

1. $15x + 10y = 5$.
2. $29x + 5y = 1$.
3. $14x - 9y = 30$.

●○○ **Exercice 207.**
Déterminer tous les couples d'entiers naturels $(x\,;\,y)$ solutions de l'équation $17x + 3y = 72$.

●●○ **Exercice 208.**
Résoudre les équations suivantes où x et y sont des entiers relatifs.

1. $24x + 17y = 1$.
2. $11x - 3y = 1$.
3. $5x + 13y = 3$.

●●○ **Exercice 209.**

1. Soit $(E): \ 16x + 21y = 797$
   où $(x\,;\,y) \in \mathbb{Z}^2$.
   (a) Déterminer une solution particulière de l'équation $16x + 21y = 1$.
   (b) En déduire une solution particulière de (E).
   (c) Résoudre l'équation (E).
2. Un restaurateur propose deux menus : le premier « plat-dessert » à 16 euros et le second « entrée-plat-dessert » à 21 euros. Sa recette s'élève à 797 euros.
   Peut-on déterminer le nombre de repas de chaque sorte qu'il a servi ?

●●○ **Exercice 210.**

1. On considère l'équation $(E): \ 23x - 17y = 6$ où $(x\,;\,y) \in \mathbb{Z}^2$.
   (a) Vérifier que le couple $(1\,;\,1)$ est une solution particulière de (E).
   (b) Résoudre l'équation (E).
2. Déterminer tous les entiers naturels N inférieurs à 1 000 tels que dans la division euclidienne de N par 23 le reste soit 2, et dans celle de N par 17 le reste soit 8.

●●● **Exercice 211.**

Partie A

On considère l'équation

$$\text{(E)}: \qquad 11x - 26y = 1,$$

où x et y désignent deux nombres entiers relatifs.

1. Vérifier que le couple $(-7\ ;\ -3)$ est solution de (E).
2. Résoudre alors l'équation (E).
3. En déduire le couple d'entiers relatifs $(u\ ;\ v)$ solution de (E) tel que $0 \leqslant u \leqslant 25$.

Partie B

On assimile chaque lettre de l'alphabet à un nombre entier comme l'indique le tableau ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

On « code » tout nombre entier x compris entre 0 et 25 de la façon suivante :

— on calcule $11x + 8$

— on calcule le reste de la division euclidienne de $11x + 8$ par 26, que l'on appelle y.

x est alors « codé » par y.
Ainsi, par exemple, la lettre L est assimilée au nombre 11 ; $11 \times 11 + 8 = 129$ or
$129 \equiv 25$ (0 modulo 26) ; 25 est le reste de la division euclidienne de 129 par 26. Au nombre 25 correspond la lettre Z.
La lettre L est donc codée par la lettre Z.

1. Coder la lettre W.
2. Le but de cette question est de déterminer la fonction de décodage.
   (a) Montrer que pour tous nombres entiers relatifs x et j, on a :
   $$11x \equiv j \quad [26] \text{ équivaut à } x \equiv 19j[26]$$
   (b) En déduire un procédé de décodage.
   (c) Décoder la lettre W.

●●● Exercice 212.

1. Calculer le P.G.C.D. de $4^5 - 1$ et de $4^6 - 1$.
2. Soit u la suite numérique définie par :
   $u_0 = 0,\ u_1 = 1$ et, pour tout entier naturel n,
   $$u_{n+2} = 5u_{n+1} - 4u_n.$$
   (a) Calculer les termes $u_2,\ u_3$ et u_4 de la suite u.
   (b) Montrer que la suite u vérifie, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 4u_n + 1$.
   (c) Montrer que, pour tout entier naturel n, u_n est un entier naturel.
   (d) En déduire, pour tout entier naturel n, le P.G.C.D. de u_n et u_{n+1}.
3. Soit v la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n + \dfrac{1}{3}$.
   (a) Montrer que v est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme v_0.
   (b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.
   (c) Déterminer, pour tout entier naturel n, le P.G.C.D. de $4^{n+1} - 1$ et de $4^n - 1$.

CHAPITRE

11

LES NOMBRES PREMIERS

11.1 Définition d'un nombre premier

Définitions.

Un entier naturel n est dit *premier* s'il possède *exactement* deux diviseurs dans $\mathbb{N}$:

____

Enfin, si cet entier naturel n, distinct de 1, est non premier, on dira qu'il est ______________.

Exemples, contre-exemples.

- 2 est **premier** car ses seuls diviseurs positifs sont 1 et 2.
- 0 n'est pas premier car il possède une infinité de diviseurs positifs.
- 1 n'est **pas premier** car il de possède qu'un seul diviseur, lui-même !

Application 1.11. Soit n un entier naturel n supérieur ou égal à 2. Le nombre $n^2 - 1$ peut-il être premier ?

Théorème 1.11.
Il existe une infinité de nombres premiers.

Démonstration. Raisonnons par l'absurde : supposons qu'il existe un nombre fini de nombres premiers. Soit p le plus grand d'entre eux.
Soit N le produit de tous ces nombres premiers.
$N = 2 \times 3 \times \ldots \times p$.
Posons $N' = N + 1$.
Alors, pour tout nombre premier d, la division euclidienne de N' par d a pour reste 1 car $N' = d \times q + 1$.
Donc N' n'est divisible par aucun d'entre eux, donc N' est premier.
Mais $N' > p$, ce qui est impossible car p est le plus grand nombre premier.
Donc il n'existe pas un nombre fini de nombres premiers. □

Théorème 2.11.

- Tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 admet *un diviseur premier*.
- Tout entier naturel $n \geqslant 2$, *non premier*, admet un diviseur premier inférieur ou égal à $\sqrt{n}$.

Démonstration. Soit n un entier $n \geqslant 2$.

- Si n est premier, il est un diviseur premier de lui-même.
- Si n n'est pas premier, il admet un diviseur positif autre que 1 et lui-même.
  L'ensemble E des diviseurs positifs, autres que 1 et n, est donc un ensemble d'entiers naturels non vide : il a donc un plus petit élément que l'on note p.
  Si p n'était pas premier, il existerait un diviseur propre d de p qui serait plus petit que p ; comme d diviserait n avec p qui divise n, d diviserait n donc d serait un élément de E plus petit que p ce qui est impossible.
  Ainsi p est premier et divise n ; par suite il existe un entier q tel que $n = pq$ avec $1 < q < n$.
  Donc q est un diviseur propre de n et par conséquent $p \leqslant q$.
  On en déduit que $p^2 \leqslant pq$ soit $p^2 \leqslant n$ et donc $p \leqslant \sqrt{n}$.

□

Propriété 1.11.
Soit n un entier supérieur à 2.
Si n n'est divisible par aucun des nombres premiers inférieurs ou égaux à $\sqrt{n}$ alors n est *un nombre premier.*

Démonstration. Si n n'est pas premier, il admet un diviseur premier inférieur ou égal à $\sqrt{n}$ d'après le premier théorème. Cette propriété est donc la contraposée du second théorème. □

Application 2.11. Démontrer que 139 est un nombre premier.

11.2 Deux théorèmes fondamentaux pour finir l'année

11.2.1 Décomposition en produit de facteurs premiers

Théorème 3.11.
Tout entier naturel $n \geqslant 2$ se décompose en un *produit de nombres premiers.*
Cette décomposition est unique à l'ordre des facteurs près.
On écrira $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ où $n \geqslant 2$, p_1, p_2,..., p_k sont des nombres premiers deux à deux distincts et α_1, α_2, ..., α_k sont des entiers naturels non nuls.

Application 3.11. Décomposer 140 en produit de facteurs premiers et en déduire la liste des diviseurs positifs de 140.

Propriété 2.11.
Si n est un entier naturel supérieur ou égal à 2, admettant pour décomposition en produit de facteurs premiers
$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ admet alors n possède
exactement $(\alpha_1 + 1) \times (\alpha_2 + 1) \times \dots \times (\alpha_k + 1)$ diviseurs positifs.

Application 4.11. Déterminer le nombre de diviseurs positifs de 72.

11.2.2 Petit théorème de Fermat

Théorème 4.11. *Admis*
Soit n un nombre entier.
Si p est un nombre *premier* ne divisant pas n alors $n^{p-1} \equiv 1$ $[p]$.

Conséquence : si p est un nombre premier et n un entier, alors $n^p \equiv n$ $[p]$.

Application 5.11. Montrer, que pour tout entier naturel n, $n^{13} - n$ est divisible par 26.

11.3 Les exercices du chapitre

○○○ **Exercice 213.**
Les nombres suivants sont-ils premiers ?

a. 117 **b.** 143

●○○ **Exercice 214.**
1. Démontrer que tout nombre premier supérieur ou égal à 5 est de la forme $6k+1$ ou $6k-1$ avec $k \in \mathbb{N}^*$.
2. La réciproque est-elle vraie ?

●○○ **Exercice 215.**
Soit a un entier naturel.
1. Développer $(a^2-a+1)(a^2+a+1)$.
2. Le nombre a^4+a^2+1 peut-il être premier ?
3. Trouver une factorisation de 10 101.

●●○ **Exercice 216.**
p est un nombre premier au moins égal à 5.
1. Quels sont les restes possibles dans la division de p par 12 ?
2. Montrer que p^2+11 est divisible par 12.

●○○ **Exercice 217.**
1. Vérifier que 149 est un nombre premier.
2. Déterminer tous les couples $(x\,;\,y)$ d'entiers qui vérifient l'équation $x^2-y^2=149$.
3. Reprendre la question précédente avec l'équation $x^2-y^2=p$ où p est un nombre premier quelconque.

●○○ **Exercice 218.**
1. Démontrer « l'égalité de Sophie Germain » :
$$n^4+4m^4=(n^2+2m^2+2mn)(n^2+2m^2-2mn)$$
2. Pour quelles valeurs de l'entier naturel n, n^4+4 est-il premier ?
3. Démontrer que $4^{545}+545^4$ n'est pas un nombre premier.
On pourra écrire $4^{545}=4\times\left(4^{136}\right)^4$.

○○○ **Exercice 219.**
Décomposer en produit de facteurs premiers :
1. 125
2. 1 080
3. 64×81
4. $12^5\times 14^3$

●○○ **Exercice 220.**
1. Écrire le nombre 8 775 en produit de facteurs premiers.
2. Déterminer le plus petit nombre entier naturel k non nul tel que $8\,775k$ soit un carré parfait.
3. Même question avec un cube parfait.

●●○ Exercice 221.

Un entier n s'écrit $2^\alpha 3^\beta$.
Le nombre de diviseurs de $12n$ est le double du nombre de diviseurs de n.

1. Montrer que l'on a $\beta(\alpha-1)=4$.
2. En déduire les trois valeurs possibles pour n.

●○○ Exercice 222.

Montrer que pour tout entier naturel n le nombre $n^{11}-n$ est divisible par 33.

●○○ Exercice 223.

Soit p un nombre premier différent de 3.
Démontrer que pour tout entier naturel n, $3^{n+p}-3^{n+1}$ est divisible par p.

●●○ Exercice 224.

Soit n un entier naturel non nul.

1. Montrer que $n^{13}-n$ est pair.
2. Montrer que 13 et 7 divisent $n^{13}-n$.
3. En déduire que $n^{13}-n$ est divisible par 182.

●●○ Exercice 225.

1. Montrer que $\forall a \in \mathbb{Z},\ a^{31}-a$ est divisible par 62.
2. Montrer que $\forall a \in \mathbb{Z},\ \forall n \in \mathbb{N},\ a^{30+n}-a^n$ est divisible par 62.

●●○ Exercice 226.

On considère la suite (u_n) d'entiers naturels définie par :

$$u_0 = 1 \,\text{et, pour tout entier naturel}\, n, u_{n+1} = 10u_n + 21.$$

1. Calculer $u_1,\ u_2$ et u_3.
2. (a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $3u_n = 10^{n+1}-7$.
   (b) En déduire, pour tout entier naturel n, l'écriture décimale de u_n ·
3. Montrer que u_2 est un nombre premier.

   On se propose maintenant d'étudier la divisibilité des termes de la suite (u_n) par certains nombres premiers.
4. Démontrer que, pour tout entier naturel n, u_n n'est divisible ni par 2, ni par 3, ni par 5.
5. (a) Démontrer que, pour tout entier naturel n,
   $3u_n \equiv 4-(-1)^n \quad [11]$.
   (b) En déduire que, pour tout entier naturel n, u_n n'est pas divisible par 11.
6. (a) Démontrer l'égalité : $10^{16} \equiv 1$ [17].
   (b) En déduire que, pour tout entier naturel k, u_{16k+8} est divisible par 17.

●●● Exercice 227.

Partie A

On considère l'équation (E) : $25x - 108y = 1$ où x et y sont des entiers relatifs.

1. Vérifier que le couple $(13\ ;\ 3)$ est solution de cette équation.
2. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).

Partie B

Dans cette partie, a désigne un entier naturel et les nombres c et g sont des entiers naturels vérifiant la relation $25g - 108c = 1$.

On rappelle le petit théorème de Fermat :

Si p est un nombre premier et a un entier non divisible par p, alors a^{p-1} est congru à 1 modulo p que l'on note $a^{p-1} \equiv 1\ [p]$.

1. Soit x un entier naturel.
   Démontrer que si $x \equiv a\ [7]$ et $x \equiv a\ [19]$, alors $x \equiv a\ [133]$.
2. (a) On suppose que a n'est pas un multiple de 7.
   Démontrer que $a^6 \equiv 1\ [7]$ puis que $a^{108} \equiv 1\ [7]$.
   En déduire que $\left(a^{25}\right)^g \equiv a\ [7]$.
   (b) On suppose que a est un multiple de 7.
   Démontrer que $\left(a^{25}\right)^g \equiv a\ [7]$.
   (c) On admet que pour tout entier naturel a,
   $\left(a^{25}\right)^g \equiv a\ [19]$.
   Démontrer que $\left(a^{25}\right)^g \equiv a\ [133]$.

Partie C

On note A l'ensemble des entiers naturels a tels que : $1 \leqslant a \leqslant 26$.

Un message, constitué d'entiers appartenant à A, est codé puis décodé.

La phase de codage consiste à associer, à chaque entier a de A, l'entier r tel que $a^{25} \equiv r\ [133]$ avec $0 \leqslant r < 133$.

La phase de décodage consiste à associer à r , l'entier r_1 tel que $r^{13} \equiv r_1\ [133]$ avec $0 \leqslant r_1 < 133$.

1. Justifier que $r_1 \equiv a\ [133]$.
2. Un message codé conduit à la suite des deux entiers suivants : 128 59.
   Décoder ce message.

●●● Exercice 228.

Partie A

On considère l'équation suivante dont les inconnues x et y sont des entiers naturels :

$$x^2 - 8y^2 = 1. \quad (E)$$

1. Déterminer un couple solution $(x\ ;\ y)$ où x et y sont deux entiers naturels.
2. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

   On définit les suites d'entiers naturels (x_n) et (y_n) par $x_0 = 1$, $y_0 = 0$ et pour tout entier naturel n : $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$.
   (a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, le couple $(x_n\ ;\ y_n)$ est solution de l'équation (E).
   (b) En admettant que la suite (x_n) est à valeurs strictement positives, démontrer que pour tout entier naturel n, on a : $x_{n+1} > x_n$.
3. En déduire que l'équation (E) admet une infinité de couples solutions.

Partie B

Un entier naturel n est appelé un nombre puissant lorsque, pour tout diviseur premier p de n, p^2 divise n.

1. Vérifier qu'il existe deux nombres entiers consécutifs inférieurs à 10 qui sont puissants.

L'objectif de cette partie est de démontrer, à l'aide des résultats de la partie A, qu'il existe une infinité de couples de nombres entiers naturels consécutifs puissants et d'en trouver quelques exemples.

1. Soient a et b deux entiers naturels.
   Montrer que l'entier naturel $n = a^2b^3$ est un nombre puissant.
2. Montrer que si $(x\ ;\ y)$ est un couple solution de l'équation (E) définie dans la partie A, alors $x^2 - 1$ et x^2 sont des entiers consécutifs puissants.
3. Conclure quant à l'objectif fixé pour cette partie, en démontrant qu'il existe une infinité de couples de nombres entiers consécutifs puissants.
   Déterminer deux nombres entiers consécutifs puissants supérieurs à 2018.

