○○○ **Exercice 36.**
Soit $f$ définie sur $I=]1\,;+\infty[$.
On sait que :

$$\lim_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x)=-\infty \text{ et que } \lim_{x\to+\infty} f(x)=4$$

1. Démontrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction $f$ admet deux asymptotes dont on précisera les équations.
2. On sait que $f$ est strictement croissante sur $I=]1\,;+\infty[$. Tracer dans un repère une allure de la courbe $\mathscr{C}_f$.

●○○ **Exercice 37.**
On considère une fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ dont le tableau de variations est donné ci-dessous :

| $x$ | $-\infty$ | | $-7$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Variation de $f$ | $4$ | $\searrow$ | $-2$ | $\nearrow$ | $7$ | $\searrow$ | $0$ |

1. Quelles sont les limites de $f$ en $-\infty$ et en $+\infty$ ?
2. Interpréter graphiquement ces résultats.
3. Donner une allure possible de la courbe représentative de $f$.

○○○ **Exercice 38.**
Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} 0,4x$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} -100$
3. $\lim\limits_{x\to-\infty} -6x^3$
4. $\lim\limits_{x\to-\infty} 9x^3$

●○○ **Exercice 39.**
Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}-3$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x+4x+5$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x+5$
4. $\lim\limits_{x\to-\infty} 3-\dfrac{5}{x}$

○○○ **Exercice 40.**
Justifier les deux résultats ci-dessous :

1. $\lim\limits_{x\to-\infty}(\mathrm{e}^x+4)(5-\mathrm{e}^x)=20$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty}(5x+4)\sqrt{x}=+\infty$

●○○ **Exercice 41.**
Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{2}{\mathrm{e}^x+3}$.

1. (a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x+3$.
   (b) En déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.
   (c) Interpréter ce résultat.
2. (a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x+3$.
   (b) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
   (c) Interpréter ce résultat.

●○○ **Exercice 42.**
Soit la fonction $f$ définie sur $]3\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{1}{x-3}.$$

1. (a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} x-3$.
   (b) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
   (c) Interpréter graphiquement ce résultat.
2. (a) Étudier le signe de $x-3$ sur $]3\,;+\infty[$.
   (b) En déduire la limite de $f$ en 3.
   (c) Interpréter ce résultat.

●○○ **Exercice 43.**
Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}.$$

1. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x}$.
2. En déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ puis interpréter ce résultat.

●○○ **Exercice 44.**
Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel $x$,

$$\frac{1}{x^2+1}\leqslant f(x)\leqslant\frac{2}{x^2+1}$$

1. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2+1}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x^2+1}$.
2. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

●○○ **Exercice 45.**

1. Rappeler les limites du cours : $\lim\limits_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^x$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{x}}$.
2. En déduire les limites :
   (a) $\lim\limits_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^x-6$
   (b) $\lim\limits_{x\to+\infty} 5+\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$
   (c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{x}}+7$

●●○ **Exercice 46.**
Déterminer les limites des fonctions suivantes après avoir factorisé numérateur et dénominateur :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{2x+9}$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x+\sqrt{x}}{x^2+5}$

3. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2+4x}{x^3+3x^2}$

**●○○ Exercice 47.**
Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x<3}} \dfrac{x^2+4}{x-3}$
2. $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x<2}} \dfrac{x}{x^2-5x+6}$
3. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \dfrac{(x+2)\mathrm{e}^x}{x}$
4. $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x<3}} \dfrac{2x+2}{3-x}$

**●○○ Exercice 48.**
Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = (\mathrm{e}^x + 8x^2 + 6x)^5$ sur $I = \mathbb{R}$
2. $f_2(x) = \sqrt{\mathrm{e}^x + 3}$ sur $I = \mathbb{R}$
3. $f_3(x) = \mathrm{e}^{-5x^3}$ sur $I = \mathbb{R}$
4. $f_4(x) = \dfrac{1}{(\mathrm{e}^x + x^2)^3}$ sur $I = \mathbb{R}$

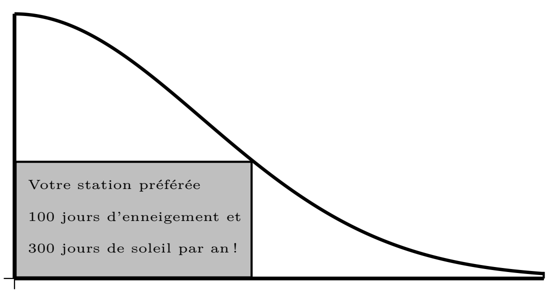
**●●○ Exercice 49.**
Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = \dfrac{x^2+2x+3}{x^2+2}$ et on note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Démontrer que $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote $(d)$ parallèle à l'axe des abscisses.
2. Étudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ et $(d)$.
3. Calculer la dérivée de $f$ et étudier son signe sur $\mathbb{R}$.
4. Dresser le tableau de variation complet de $f$ sur $\mathbb{R}$.

**●●● Exercice 50.**
Une entreprise spécialisée est chargée par l'office de tourisme d'une station de ski de la conception d'un panneau publicitaire ayant la forme d'une piste de ski.

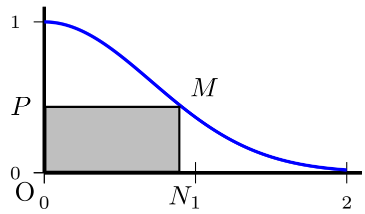
Afin de donner des informations sur la station, une zone rectangulaire est insérée sur le panneau comme indiqué sur la figure ci-dessous.




Un panneau est découpé dans une plaque rectangulaire de 2 mètres sur 1 mètre. Il est représenté ci-dessous dans un repère orthonormé ; l'unité choisie est le mètre.

Pour $x$ nombre réel appartenant à l'intervalle $[0\,;\,2]$, on note :

- $M$ le point de la courbe $\mathscr{C}_f$ de coordonnées $\left(x\ ;\ \mathrm{e}^{-x^2}\right)$,
- $N$ le point de coordonnées $(x\ ;\ 0)$,
- $P$ le point de coordonnées $\left(0\ ;\ \mathrm{e}^{-x^2}\right)$,
- $A(x)$ l'aire du rectangle $\mathrm{O}NMP$.

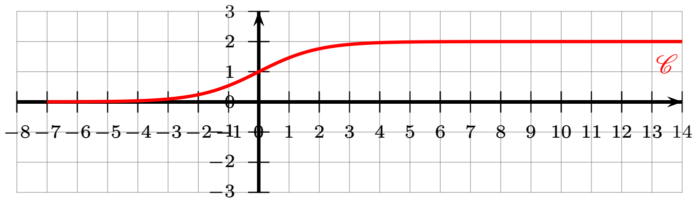



1. Justifier que pour tout nombre réel $x$ de l'intervalle $[0\,;\,2]$, on a : $A(x) = x\mathrm{e}^{-x^2}$.
2. Déterminer la position du point $M$ sur la courbe $\mathscr{C}_f$ pour laquelle l'aire du rectangle $\mathrm{O}NMP$ est maximale.

**●●● Exercice 51.**
On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{2\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}.$$

On donne ci-dessous la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction $f$ dans un repère orthonormé.




1. Calculer la limite de la fonction $f$ en moins l'infini et interpréter graphiquement le résultat.
2. Montrer que la droite d'équation $y = 2$ est asymptote horizontale à la courbe $\mathscr{C}$.
3. Calculer $f'(x)$, $f'$ étant la fonction dérivée de $f$, et vérifier que pour tout nombre réel $x$ on a :
$$f'(x) = \frac{f(x)}{\mathrm{e}^x + 1}.$$
4. Montrer que la fonction $f$ est croissante sur $\mathbb{R}$.
5. Montrer que la courbe $\mathscr{C}$ passe par le point $\mathrm{I}(0\,;\,1)$ et que sa tangente en ce point a pour coefficient directeur $0,5$.