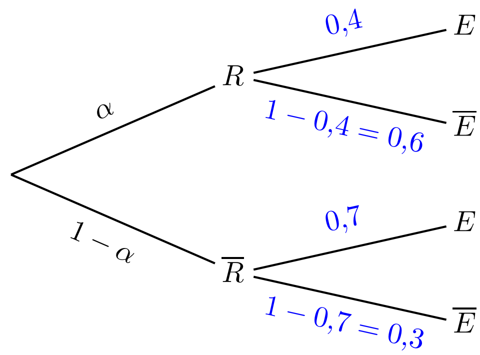
Exercice 1.

1. On complète l'arbre proposé :



2. **a.** R et $\overline{R}$ forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(E) &= \mathbb{P}(R\cap E)+\mathbb{P}\left(\overline{R}\cap E\right)\\ &= \alpha\times 0{,}4+(1-\alpha)\times 0{,}7\\ &= 0{,}4\alpha+0{,}7-0{,}7\alpha\\ &= 0{,}7-0{,}3\alpha\end{aligned}$$

b. La probabilité que le client loue un vélo électrique est $\mathbb{P}(E)=0{,}58$.
Or $\mathbb{P}(E)=0{,}7-0{,}3\alpha$. Donc $0{,}7-0{,}3\alpha=0{,}58$ ce qui équivaut à $0{,}7-0{,}58=0{,}3\alpha$ ou encore $0{,}12=0{,}3\alpha$ soit $\alpha=0{,}4$.

3. On sait que le client a loué un vélo électrique. La probabilité qu'il ait loué un vélo tout terrain est :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_E\left(\overline{R}\right) &= \frac{p\left(\overline{R}\cap E\right)}{p(E)}\\ &= \frac{(1-0{,}4)\times 0{,}7}{0{,}58}\\ &= \frac{0{,}42}{0{,}58}\\ &\approx 0{,}72\end{aligned}$$

4. La probabilité que le client loue un vélo tout terrain électrique est : $\mathbb{P}\left(\overline{R}\cap E\right)=0{,}42$.

5. Le prix de la location à la journée d'un vélo de route non électrique est de 25 euros, celui d'un vélo tout terrain non électrique de 35 euros. Pour chaque type de vélo, le choix de la version électrique augmente le prix de location à la journée de 15 euros.

On appelle X la variable aléatoire modélisant le prix de location d'un vélo à la journée.

a. On a quatre possibilités.

- La location d'un vélo de route non électrique coûte 25 €.
  Cela correspond à l'évènement $R\cap\overline{E}$ de probabilité $0{,}4\times 0{,}6=0{,}24$.
- La location d'un vélo de route électrique coûte $25+15$ soit 40 €.
  Cela correspond à l'évènement $R\cap E$ de probabilité $0{,}4\times 0{,}4=0{,}16$.
- La location d'un vélo tout terrain non électrique coûte 35 €.
  Cela correspond à l'évènement $\overline{R}\cap\overline{E}$ de probabilité $0{,}6\times 0{,}3=0{,}18$.

- La location d'un vélo tout terrain électrique coûte $35+15$ soit 50 €.
  Cela correspond à l'évènement $\overline{R}\cap E$ de probabilité $0{,}6\times 0{,}7=0{,}42$.

On établit la loi de probabilité de X :

x_i	25	35	40	50
$p_i=p(X=x_i)$	0,24	0,18	0,16	0,42

b. L'espérance mathématique de X est :

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum x_i\times p_i \\ &= 25\times 0{,}24+35\times 0{,}18+40\times 0{,}16+50\times 0{,}42 \\ &= 39{,}70 \end{aligned}$$

Le coût moyen d'une location est donc de 39,70 euros.

6. Lorsqu'on choisit 30 clients d'Hugo au hasard, on assimile ce choix à un tirage avec remise. On note Y la variable aléatoire associant à un échantillon de 30 clients choisis au hasard le nombre de clients qui louent un vélo électrique.

On rappelle que la probabilité de l'évènement E est : $\mathbb{P}(E)=0{,}58$.

a. Il s'agit d'une répétition de 30 épreuves identiques et indépendantes n'ayant que deux issues, la probabilité du succès pour une épreuve étant égale à 0,58.
Donc la variable aléatoire Y qui donne le nombre de succès sur 30 tirages, suit une loi binomiale de paramètres $n=30$ et $p=0{,}58$.

b. La probabilité qu'un échantillon contienne exactement 20 clients qui louent un vélo électrique est :
$\mathbb{P}(Y\geqslant 15)(Y=20)=\binom{30}{20}\times 0{,}58^{20}\times(1-0{,}58)^{30-20}\simeq 0{,}095$.

c. La probabilité qu'un échantillon contienne au moins 15 clients qui louent un vélo électrique est :
$\mathbb{P}(Y\geqslant 15)=1-\mathbb{P}(Y\leqslant 14)$ soit $\mathbb{P}(Y\geqslant 15)\simeq 0{,}858$.

Exercice 2.

1. $\begin{cases} u_1 = u_0+3v_0 = 2+3\times 1 = 5 \\ v_1 = u_0+v_0 = 2+1 = 3 \end{cases}$ $\begin{cases} u_2 = u_1+3v_1 = 5+3\times 3 = 14 \\ v_2 = u_1+v_1 = 5+3 = 8 \end{cases}$

$\dfrac{u_2}{v_2}=\dfrac{14}{8}=1{,}75$ **Réponse c.**

2. **Réponse d.**

3. La fonction f est :

La fonction f' est croissante sur $[-4\,;0]$ donc la fonction f est convexe sur cet intervalle.
Réponse b.

4. Le coefficient directeur de la droite (BC) est égal à $f''(1)$. **Réponse d.**

5. **Réponse b.**

Exercice 3.

Partie A

1. On cherche la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0.

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} x = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} x \ln x = 0$ d'après le cours donc par somme des limites : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = 0$.

2. On cherche la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
On a une forme indéterminée du type $\ll\ \infty - \infty\ \gg$ on change don l'écriture de $f(x)$.

$f(x) = x\,(1 - \ln x)$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - \ln x = -\infty$

Par produit de limites, on déduit : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

3. On admet que la fonction f est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.

a. Pour tout réel $x > 0$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - (1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x}) \\ &= -\ln x \end{aligned}$$

b. On étudie le signe de $f'(x)$.

- Calcul de la racine : $-\ln x = 0 \Longleftrightarrow \ln x = 0 \Longleftrightarrow x = 1$.
- $f'(x) > 0 \Longleftrightarrow -\ln x < 0 \Longleftrightarrow \ln x > 0 \Longleftrightarrow x > 1$.

On en déduit le tableau de variation de f sur $]0\ ;\ +\infty[$:

x	0		1		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
variations de f	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

4. On résout l'équation $f(x) = x$ sur $]0\ ;\ +\infty[$.

$f(x) = x \iff x - x\ln x = x \iff -x\ln x = 0 \iff \ln x = 0 \iff x = 1$

Partie B

1. On rappelle que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0{,}5\,;\,1]$.

Soit $\mathcal{P}_n$ la proposition : $0{,}5 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.

- Pour $n = 0$, $u_n = u_0 = 0{,}5$ et $u_1 = f(u_0) = f(0{,}5) \simeq 0{,}85$.
  On a donc $0{,}5 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 1$, ce qui vaut dire que $\mathcal{P}_0$ est vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie, c'est-à-dire que $0{,}5 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.
  La fonction f est croissante sur $[0{,}5\ ;\ 1]$ donc $f(0{,}5) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(1)$.
  Or $f(0{,}5) \approx 0{,}85 \geqslant 0{,}5$, $f(u_n) = u_{n+1}$, $f(u_{n+1}) = u_{n+2}$ et $f(1) = 1$.
  On a donc : $0{,}5 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 1$, donc la proposition $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

- La proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie au rang 0 ; de plus elle est héréditaire à partir du rang $n = 0$. Donc, d'après le principe de récurrence, la proposition est vraie pour tout entier naturel n.

On a donc démontré que, pour tout entier naturel n, on a : $0{,}5 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.

2. **a.** Des inégalités $0{,}5 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$, on peut déduire :

- $u_n \leqslant u_{n+1}$ donc la suite (u_n) est croissante ;
- $u_n \leqslant 1$ donc la suite (u_n) est majorée par 1.

On peut en déduire que la suite (u_n) est convergente.

b. La suite (u_n) est convergente, soit ℓ sa limite.
On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$. De même $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$. Or $u_{n+1} = f(u_n)$.
Par passage à la limite il vient : $\ell = f(\ell)$.

L'équation $f(x) = x$ a pour solution $x = 1$ donc on peut dire que $\ell = 1$.

Exercice 4.

1. **a.** La droite $\mathcal{D}'$ a pour vecteur directeur $\overrightarrow{u'}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

b. Les vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u'}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires, donc les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ne sont pas parallèles.

c. La droite $\mathcal{D}$ est l'ensemble des points $\mathrm{M}(x\,;y\,;z)$ tels que $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ et $\overrightarrow{u}$ soient colinéaires, c'est-à-dire $\overrightarrow{\mathrm{AM}} = t.\overrightarrow{u}$ avec $t \in \mathbb{R}$, soit : $\left\{\begin{array}{rcl} x-2 &=& t\\ y-4 &=& 2t\\ z-0 &=& 0t\end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$

La droite $\mathcal{D}$ a pour représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2+t\\ y &=& 4+2t\\ z &=& 0\end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$

On admet dans la suite de cet exercice qu'il existe une unique droite Δ perpendiculaire aux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$. Cette droite Δ coupe chacune des droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$. On appellera M le point d'intersection de Δ et $\mathcal{D}$, et M$'$ le point d'intersection de Δ et $\mathcal{D}'$.

On se propose de déterminer la distance MM$'$ appelée « distance entre les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ».

2. Soit le vecteur $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$.

- $\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u} = 2\times 1 + (-1)\times 2 + 1\times 0 = 0$ donc $\overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{u}$.
- $\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u'} = 2\times 0 + (-1)\times 1 + 1\times 1 = 0$ donc $\overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{u'}$.

Le vecteur $\overrightarrow{v}$ est donc orthogonal aux deux vecteurs directeurs de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$, donc c'est un vecteur directeur de leur perpendiculaire commune Δ.

3. On note $\mathcal{P}$ le plan contenant les droites $\mathcal{D}$ et Δ, c'est-à-dire le plan passant par le point A et de vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

a. Soit le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\-5\end{pmatrix}$.

- $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{u} = 2\times 1+(-1)\times 2+(-5)\times 0 = 0$ donc $\overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{u}$.
- $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{v} = 2\times 2+(-1)\times(-1)+(-5)\times 1 = 0$ donc $\overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{v}$.

Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est donc orthogonal à deux vecteurs directeurs du plan $\mathcal{P}$, donc le vecteur $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$.

b. Le plan $\mathcal{P}$ est le plan ayant $\overrightarrow{n}$ comme vecteur normal et passant par A, donc c'est l'ensemble des points P$(x\,;y\,;z)$ tels que $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\perp\overrightarrow{n}$.

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}x-2\\y-4\\z\end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AP}}\perp\overrightarrow{n} \iff \overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{n} &\iff (x-2)\times 2+(y-4)\times(-1)+z\times(-5)=0\\ &\iff 2x-4-y+4-5z=0 \iff 2x-y-5z=0\end{aligned}$$

Donc une équation du plan $\mathcal{P}$ est : $2x-y-5z=0$.

c. On rappelle que M$'$ est le point d'intersection des droites Δ et $\mathcal{D}'$.

Le plan $\mathcal{P}$ contient la droite Δ et M$'$ est un point de la droite Δ ; donc M$'$ est un point du plan $\mathcal{P}$. M$'$ appartient à $\mathcal{D}'$ et à $\mathcal{P}$ donc M$'$ est le point d'intersection de la droite $\mathcal{D}'$ et du plan $\mathcal{P}$.

Les coordonnées $(x\,;y\,;z)$ de M$'$ vérifient donc le système :

$$\begin{cases} x &= 3\\ y &= 3+t\\ z &= 3+t\\ 2x-y-5z &= 0\end{cases}$$

$2x-y-5z=0$ devient $2\times 3-(3+t)-5(3+t)=0$ soit $6-3-t-15-5t=0$ ou encore $-12=6t$ ce qui donne $t=-2$.

$x=3$; $y=3+t=3-2=1$ et $z=3+t=1$

Les coordonnées du point M$'$ sont donc $(3\,;1\,;1)$.

4. **a.** La droite Δ a pour vecteur directeur $\overrightarrow{v}$ et passe par le point M$'$, donc elle a pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 3+2t'\\ y = 1-t'\\ z = 1+t'\end{cases}\quad t'\in\mathbb{R}$.

b. Le point M est le point d'intersection de $\mathcal{D}$ et de Δ donc ses coordonnées $(x\,;y\,;z)$ sont solutions du système :

$$\begin{cases} x = 2+t\\ y = 4+2t\\ z = 0\\ x = 3+2t'\\ y = 1-t'\\ z = 1+t'\end{cases}$$

On a donc $\begin{cases} 2+t &= 3+2t'\\ 4+2t &= 1-t'\\ 0 &= 1+t'\end{cases}$ ou encore $\begin{cases} t &= -1\\ -1 &= t'\end{cases}$

$\begin{cases} x = 2+t\\ y = 4+2t\\ z = 0\end{cases}$ donc $\begin{cases} x = 1\\ y = 2\\ z = 0\end{cases}$

Donc le point M a pour coordonnées $(1\,;2\,;0)$.

c. $\mathrm{MM}' = \sqrt{(x_{\mathrm{M}'} - x_{\mathrm{M}})^2 + (y_{\mathrm{M}'} - y_{\mathrm{M}})^2 + (z_{\mathrm{M}'} - z_{\mathrm{M}})^2}$
$= \sqrt{(3-1)^2 + (1-2)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$

5. On considère la droite d de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 5t \\ y = 2+5t \\ z = 1+t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

a. On cherche l'intersection de la droite d et du plan $\mathcal{P}$, et pour cela on résout le système :

$$\begin{cases} x = 5t \\ y = 2+5t \\ z = 1+t \\ 2x - y - 5z = 0 \end{cases}$$

On a donc $2 \times (5t) - (2+5t) - 5(1+t) = 0$ soit $10t - 2 - 5t - 5 - 5t = 0$ ou encore $0t = 7$ qui absurde.
Le système n'a pas de solution donc la droite d est strictement parallèle à $\mathcal{P}$.

b. On note ℓ la distance d'un point N de la droite d au plan $\mathcal{P}$.
On veut exprimer le volume V du tétraèdre ANMM$'$ en fonction de ℓ.
$V = \dfrac{1}{3} \times B \times h$ où B désigne l'aire d'une base et h la hauteur relative à cette base.
Les points A, M et M$'$ appartiennent au plan $\mathcal{P}$ donc le triangle AMM$'$ forme une base du tétraèdre dont la hauteur est la distance du point N au plan $\mathcal{P}$, c'est-à-dire ℓ.
La droite Δ est la perpendiculaire commune à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ donc $\mathcal{D}$ est perpendiculaire à Δ.
A appartient à $\mathcal{D}$, M est le point d'intersection de $\mathcal{D}$ et de Δ, M$'$ appartient à Δ, et les droites $\mathcal{D}$ et Δ sont perpendiculaires. On peut en déduire que le triangle AMM$'$ est rectangle en M.
$\mathrm{AM} = \sqrt{(x_{\mathrm{M}} - x_{\mathrm{A}})^2 + (y_{\mathrm{M}} - y_{\mathrm{A}})^2 + (z_{\mathrm{M}} - z_{\mathrm{A}})^2}$
$= \sqrt{(1-2)^2 + (2-4)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{5}$
L'aire de la base, c'est-à-dire AMM$'$ vaut $\dfrac{1}{2} \times \mathrm{AM} \times \mathrm{MM}' = \dfrac{\sqrt{5} \times \sqrt{6}}{2} = \dfrac{\sqrt{30}}{2}$.
Le volume du tétraèdre vaut donc $\dfrac{1}{3} \times \dfrac{\sqrt{30}}{2} \times \ell = \dfrac{\ell\sqrt{30}}{6}$.