Chapitre

6

Primitives, équations différentielles

1. Équation différentielle $y' = f$ et primitive

1.1 Définition de l'équation différentielle $y' = f$

Définition 1.6

Soit f une fonction **continue** sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

- On dit qu'une fonction F est **solution** de l'équation différentielle $y' = f$ sur I lorsque F est dérivable sur I et que $F' = f$.
- **Résoudre** sur I l'équation différentielle $y' = f$, c'est trouver toutes les fonctions F dérivables sur I telle que $F' = f$.

Exemple. Soit (E) l'équation différentielle $y' = x$. La fonction F dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par $F(x) = \frac{1}{2}x^2$ est une solution de (E), en effet pour tout réel x on a $F'(x) = x$.

1.2 Primitives d'une fonction

Définition 2.6

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.
On appelle **primitive** de f sur I toute fonction F dérivable sur I telle que $F' = f$.

Exemple. La fonction $F : x \to \mathrm{e}^x + 2x + 1$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \to \mathrm{e}^x + x^2 + x + 5$.

Application 1.6. Soit $(E) : y' = x\mathrm{e}^x$ et $f : x \to (x-1)\mathrm{e}^x$. Vérifier que f est solution de (E).

Propriété 1.6 (admise).
Toute fonction **continue** sur un intervalle I admet **des** primitives sur I.

Propriété 2.6.
Soient f une fonction **continue** sur un intervalle I et G une **primitive** de f sur I.
Les primitives de f sur I, c'est-à-dire, les solutions de l'équation différentielle $y' = f$, sont les fonctions F définies sur I par $f(x) = G(x) + C$, où C est une constante réelle.

Propriété 3.6. Soit f une fonction **continue** sur un intervalle I. Pour tout réel $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$, il **existe une unique** primitive F de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$.
Autrement dit, l'équation différentielle $y' = f$ admet une unique solution F telle que $F(x_0) = y_0$.

2. Opérations sur les primitives

La méthode de recherche d'une primitive vient la bonne connaissance des formules de dérivation, puisqu'il s'agit de faire l'opération contraire.
Les seuls cas « évidents » de formules sont les sommes et les produits par une constante, et par suite les fonctions polynomiales.

2.1 Primitives des fonctions de référence

Fonction $f\ :\ x \to \cdots$	Une primitive $F :\ x \to \cdots$	Intervalle I
a (constante)		$\mathbb{R}$
x		$\mathbb{R}$
Plus généralement : x^n où $n \in \mathbb{N}$		$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x^2}$		$]-\infty\,;\,0[$ ou $]0\,;\,+\infty[$
Plus généralement : $\dfrac{1}{x^n}$ où $n \in \mathbb{N}$ et $n \geqslant 2$		$]-\infty\,;\,0[$ ou $]0\,;\,+\infty[$
$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$		$]0\,;\,+\infty[$
$\dfrac{1}{x}$		$]0\,;\,+\infty[$
$f(x) = \mathrm{e}^{x}$		$\mathbb{R}$
$f(x) = \mathrm{e}^{-x}$		$\mathbb{R}$
$f(x) = \mathrm{e}^{ax+b}$ où $a \neq 0$		$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin(x)$		$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos(x)$		$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin(ax+b)$ où $a \neq 0$		$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos(ax+b)$ où $a \neq 0$		$\mathbb{R}$

2.2 Primitives et opérations sur les fonctions

Propriété 4.6. Soient f et g deux fonctions admettant respectivement les fonctions F et G comme primitives sur un intervalle I.
- $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur I.
- Pour tout réel k, kF est une primitive de kf.

Application 2.6. Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle I :

1. $f(x) = x^4 - 2x^2 - 2$ sur $I = \mathbb{R}$.

2. $f(x) = -\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}$ sur $I =]0\,;\,+\infty[$.

2.3 Primitives et composition

Fonction de la forme	Une primitive F :	Conditions d'existence
$u'\mathrm{e}^u$	e^u	
$u' \times u^n$	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$	Si $n < -1$, $u(x) \neq 0$
$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\sqrt{u}$	$u(x) > 0$ pour tout x de I
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln\lvert u\rvert$	$u(x) \neq 0$ pour tout x de I
$(v' \circ u) \times u'$	$v \circ u$	

Application 3.6. Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle I :

1. $f_1(x) = 2x(x^2+1)^4$ et $I = \mathbb{R}$.

2. $f_2(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ et $I = \mathbb{R}$.

3. Équations différentielles du premier ordre

3.1 Solution d'une équation différentielle

Définition 3.6

Une **équation différentielle du premier ordre** est une égalité reliant une fonction dérivable et sa dérivée et une **solution d'une équation différentielle** est une fonction qui vérifie cette égalité.

Exemple. On considère l'équation différentielle $y' = 3y$. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{3x}$ est **une** solution de cette équation différentielle. En effet, $f'(x) = 3\mathrm{e}^{3x} = 3f(x)$.

3.2 Résolution d'équations différentielles

Propriété 5.6 (équation différentielle $y' = ay$). Soit a un nombre réel non nul. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = ay$ sont les fonctions $x \to C\mathrm{e}^{ax}$, où C est une constante réelle.

Démonstration.

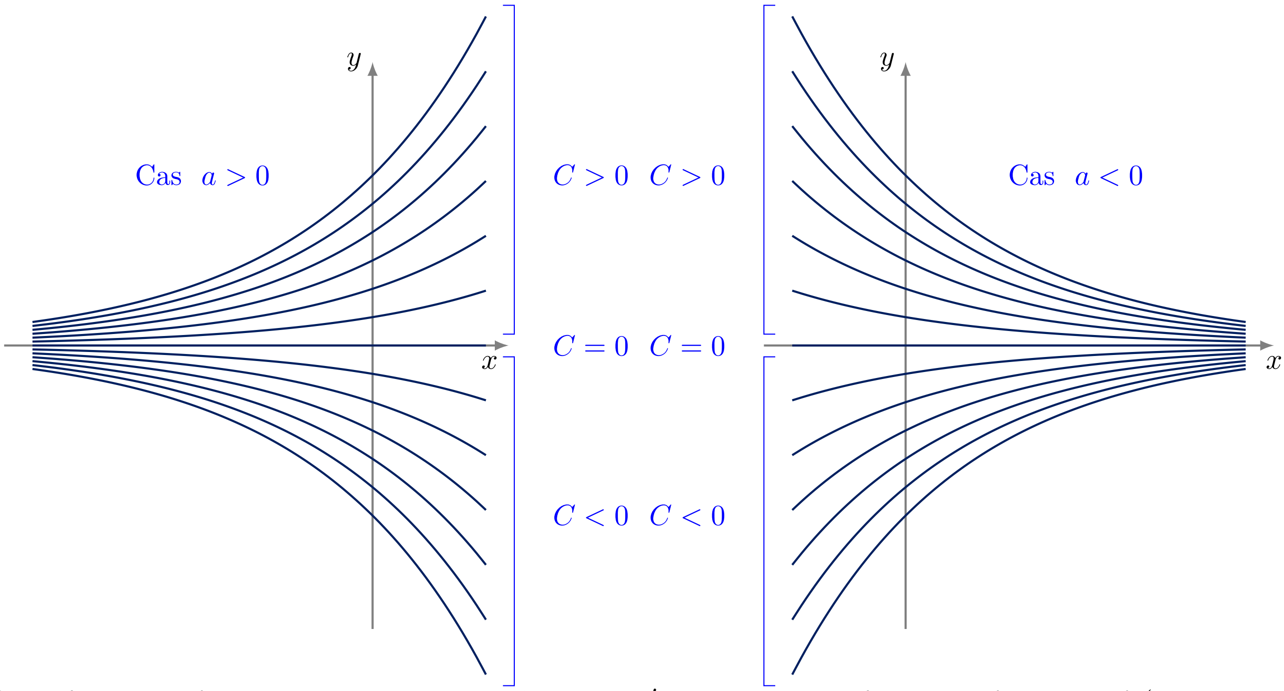
- Soit $C \in \mathbb{R}$. La fonction f_C, définie sur $\mathbb{R}$ par $f_C(x) = C\mathrm{e}^{ax}$, est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x, $f'_C(x) = Ca\mathrm{e}^{ax} = af_C(x)$ ce qui prouve que f_C est donc une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle.

- Prouvons l'unicité des fonctions f_C. Soit g une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ solution de (E). On note h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = g(x)\mathrm{e}^{-ax}$.
  h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $h'(x) = \mathrm{e}^{-ax}(g'(x) - ag(x))$. Or g est solution de (E) donc $g'(x) = ag(x)$ soit $g'(x) - ag(x) = 0$ ce qui induit que $h'(x) = 0$ et par suite que h est constante. Pour tout réel x on a donc $h(x) = C$ soit $g(x)\mathrm{e}^{-ax} = C$ d'où $g(x) = C\mathrm{e}^{ax}$.

$\square$

Remarques.

- Soit a un réel non nul fixé. Les courbes de solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = ay$ ont les allures suivantes :



- Si les fonctions f et g sont solutions de l'équation $y' = ay$, alors les fonctions $f + g$ et kf (où k est un réel) sont également solutions de cette équation.

Propriété 6.6 (équation différentielle $y' = ay + b$). Soient a et b deux réels non nuls. On considère l'équation différentielle $(E)\ :\ y' = ay + b$.

- (E) admet une unique solution **particulière constante**, qui est la fonction $x \to -\dfrac{b}{a}$.
- Les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E) sont les fonctions $x \to C\mathrm{e}^{ax} - \dfrac{b}{a}$ où C est une constante réelle.
- Pour tous réels x_0 et y_0, l'équation (E) admet une unique solution g vérifiant la condition initiale $g(x_0) = y_0$.

Démonstration.

- Montrer que les fonction $x \to C\mathrm{e}^{ax} - \dfrac{b}{a}$ sont solutions sur $\mathbb{R}$ de (E).
- Réciproquement : soit f une solution de (E) sur $\mathbb{R}$. On pose $g(x) = -\dfrac{b}{a}$.
  Vérifier que g est solution de (E). Justifier que la fonction $f - g$ est dérivable et que $f - g$ est solution de $(E)'\ :\ y' = ay$. En déduire une expression de $f - g$ puis de f.

Application 4.6.

1. Résoudre l'équation différentielle $y' = 5y$.

2. Résoudre l'équation différentielle $y' = 6y + 1$ puis en déduire l'unique solution h de cette équation vérifiant $h(0) = 4$.

Propriété 7.6 (équation différentielle $y' = ay + f$). Soient a un nombre réel et f une fonction définie sur un intervalle I. On considère l'équation différentielle $(E)\ :\ y' = ay + f$ et g une solution particulière de (E) sur I.
Les solutions de (E) sur I sont les fonctions $x \to C\mathrm{e}^{ax} + g(x)$ où C est une constante réelle.

Application 5.6. Soit l'équa

1. Résoudre l'équation différentielle $y' = 5y$.

2. Résoudre l'équation différentielle $y' = 6y + 1$ puis en déduire l'unique solution h de cette équation vérifiant $h(0) = 4$.