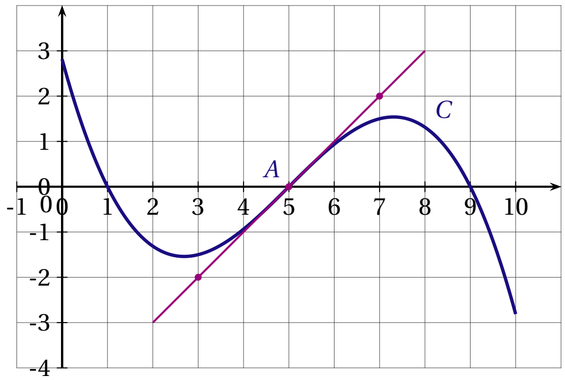
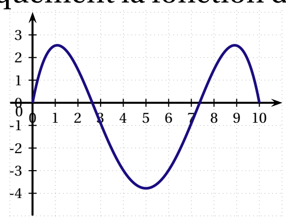
Exercice 1. On donne ci-contre la représentation graphique $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie sur $[0\,;\,10]$.

La tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse 5 est tracée.

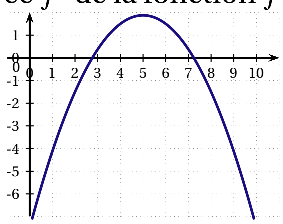


1. Lire graphiquement $f'(5)$ puis déterminez l'équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point A.

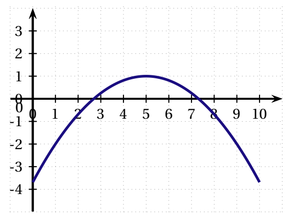
2. Parmi les quatre courbes ci-dessous, déterminez, en justifiant avec soin, laquelle représente graphiquement la fonction dérivée f' de la fonction f.



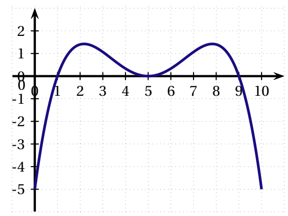
a. Courbe 1



b. Courbe 2



c. Courbe 3



d. Courbe 4

Exercice 2.

On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels et on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x\mathrm{e}^{x-1} + 1.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

Partie A : étude de la fonction

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$.

   Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}$?

2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

3. On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on note f' sa fonction dérivée.

   Montrer que, pour tout réel x, $f'(x) = (x+1)\mathrm{e}^{x-1}$.

4. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variation sur $\mathbb{R}$.

Partie B : recherche d'une tangente particulière

Soit a un réel strictement positif. Le but de cette partie est de rechercher s'il existe une tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse a, qui passe par l'origine du repère.

1. On appelle T_a la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse a. Donner une équation de T_a.
2. Démontrer qu'une tangente à $\mathscr{C}$ en un point d'abscisse a strictement positive passe par l'origine du repère si et seulement si a vérifie l'égalité

$$1 - a^2 e^{a-1} = 0.$$

3. *Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète sera prise en compte dans l'évaluation.*

   Démontrer que 1 est l'unique solution sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ de l'équation

$$1 - x^2 e^{x-1} = 0.$$

4. Donner alors une équation de la tangente recherchée.