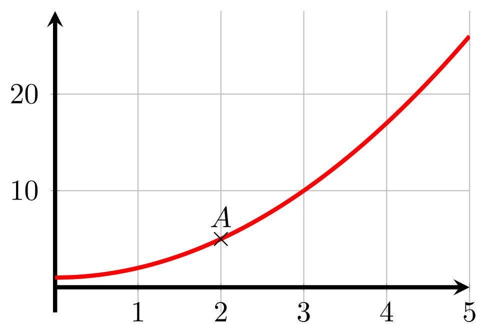
5

Dérivation

I. Tangente à une courbe

Définition 1

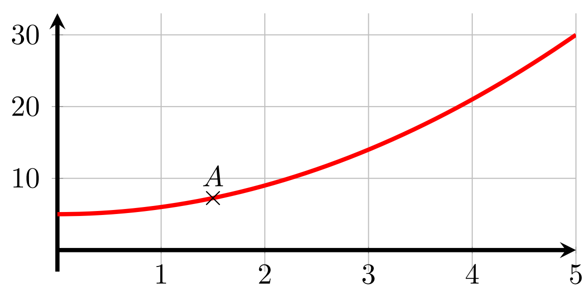
- Une **sécante** à une courbe $\mathcal{C}$ passant par le point A est une droite passant par A, et coupant la courbe en un autre point M.
- Lorsque le point M se rapproche de A, il arrive que la sécante (AM) se rapproche d'une **position limite**. Cette droite **limite** est alors appelée *tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point A*.



II. Nombre dérivé

Définition 2

Soit une fonction f de courbe représentative $\mathscr{C}$, un point A (d'abscisse a), et un nombre strictement positif h. Le point M de coordonnées $M(a+h\,;\,f(a+h))$ est un point de $\mathscr{C}$, et (AM) est une sécante à $\mathscr{C}$.
Alors le nombre réel $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ est le coefficient directeur de (AM), et le **taux de variations** de la fonction f entre a et $a+h$.



Définition 3

Si le taux de variations d'une fonction f entre a et $a+h$ tend vers un nombre l lorsque h tend vers 0, alors on dit que f est dérivable en a. Ce nombre est appelé le *nombre dérivé de f en a*, et se note $f'(a)$. On écrit :

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

III. Équation de la tangente

Définition 4

Soit f une fonction dérivable en un nombre a. On appelle *tangente à f au point d'abscisse a* la droite T, passant par le point de coordonnée $(a; f(a))$, et de coefficient directeur $f'(a)$.

Propriété 1

Si f est dérivable en a, l'équation réduite de la tangente à la courbe de f en a est :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

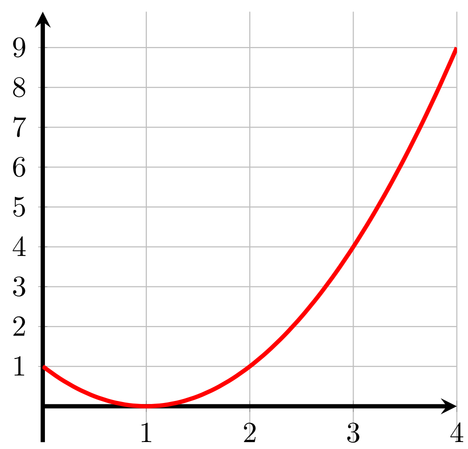
Exemple. On considère la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 2x + 1$, tracée ci-dessous.

On admet que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $f'(x) = 2x - 2$.

1. Calculer $f(3)$ et $f'(3)$.

2. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 3.

3. Tracer cette tangente.



IV. Fonction dérivée

Définition 5

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que f est *dérivable* sur I si elle est dérivable en tout nombre réel a de I.
On définit alors la *fonction dérivée de f*, notée f', qui à tout nombre x de I, associe $f'(x)$, le nombre dérivé de f en x.

Propriété 2 (**Dérivée des fonctions usuelles**)

Toutes les fonctions décrites ici sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$.

Fonction		Fonction dérivée
Fonction constante	$f(x) = k$	$f'(x) = 0$
Fonction identité	$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
Fonction carrée	$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$
Fonction cube	$f(x) = x^3$	$f'(x) = 3x^2$

Exemple. On définit f et g par : $f(x) = x$ et $g(x) = x^3$. Calculer les nombres suivants :

1. $f(2) =$
2. $f'(2) =$
3. $g(4) =$
4. $g'(4) =$
5. $g(-1) =$
6. $g'(-1) =$

Propriété 3 (**Opération sur les fonctions**)

Soient u et v deux fonctions définie sur un intervalle I, et k un nombre réel.
- La fonction définie par $f(x) = k \times u(x)$ est dérivable sur I, et pour tout nombre $x \in I$, on a : $f'(x) = k \times u'(x)$.
- La fonction définie par $f(x) = u(x) + v(x)$ est dérivable sur I, et pour tout nombre $x \in I$, on a : $f'(x) = u'(x) + v'(x)$.

Exemple. Déterminer l'expression des dérivées des fonctions suivantes.

1. $f(x) = 5$
2. $g(x) = 4x$
3. $h(x) = -2x^3$
4. $k(x) = 5x - 1$
5. $l(x) = 4x^2 - 2x + 1$
6. $m(x) = 2x^3 + 6x^2 - 4x + 7$

V. Dérivée et Variations

Propriété 4

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. Alors :
- si la fonction dérivée f' est strictement positive, alors la fonction f est croissante ;
- si la fonction dérivée f' est strictement négative, alors la fonction f est décroissante.

Exemple. Soit f une fonction. On connait le tableau de signes de la dérivée, donné dans le tableau suivant. Compléter le tableau de variations de f.

x	$-\infty$		-2		1		5		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
Variation de f									

Exemple. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x^2 - 6x + 1$.

1. Déterminer l'expression de f'.

2. Dresser le tableau de signes de f'.

3. En déduire le tableau de variations de f.

4. Quels sont les extremums de f ?

Exemple. On définit la fonction g sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 5$.

1. Calculer $g'(x)$ et vérifier que : $g'(x) = 3(x+3)(x-1)$.

2. Dresser le tableau de signes de $g'(x)$.

3. En déduire le tableau de variations de g.

4. Quels sont les extrema de g ?