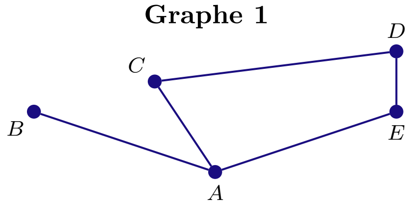
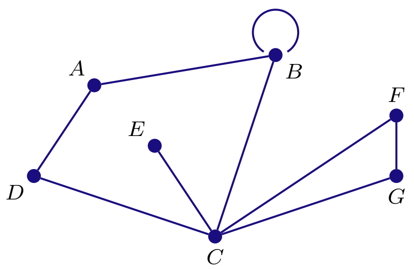
106 Pour chacun des graphes suivants, répondre aux questions suivantes :

1. Quel est l'ordre du graphe ?
2. Quel est le degré de chacun des sommets ?
3. Quel est le nombre d'arêtes ?
4. Le graphe est-il connexe ? Complet ?

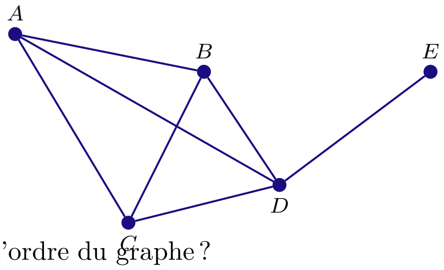
Graphe 1



Graphe 2



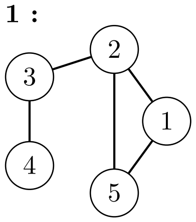
107 On considère le graphe ci-dessous :



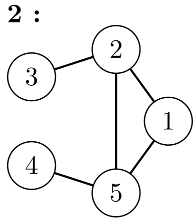
1. Quel est l'ordre du graphe ?
2. Le graphe est-il complet ?
3. Déterminer un sous-graphe complet :
   (a) d'ordre 2 ;
   (b) d'ordre 3 ;
   (c) d'ordre 4.

108 Dire si le graphe indiqué admet au moins une chaîne eulérienne et dans l'affirmative indiquez-en une :

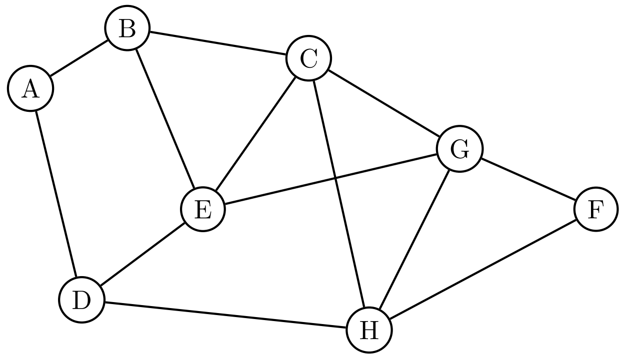
1. **Graphe 1 :**



2. **Graphe 2 :**



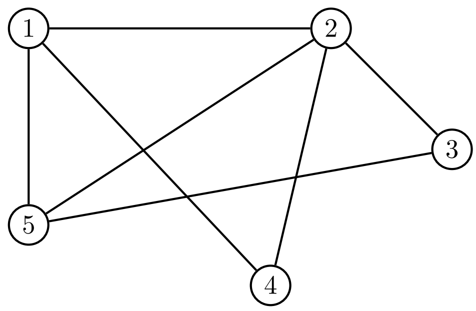
109 Lors d'une campagne électorale, un homme politique doit effectuer une tournée dans les villes A, B, C, D, E, F, G et H, en utilisant le réseau autoroutier. Le graphe $\mathcal{G}$ ci-dessous, représente les différentes villes de la tournée et les tronçons d'autoroute reliant ces villes (une ville est représentée par un sommet, un tronçon d'autoroute par une arête) :



1. Déterminer, en justifiant, si le graphe $\mathcal{G}$ est :
   (a) complet ;
   (b) connexe ;
   (c) simple.
2. (a) Justifier qu'il est possible d'organiser la tournée en passant au moins une fois par chaque ville, tout en empruntant une fois et une seule chaque tronçon d'autoroute.
   (b) Citer un trajet de ce type.

110 Un parc de loisirs propose à ses visiteurs des parcours d'accrobranches.

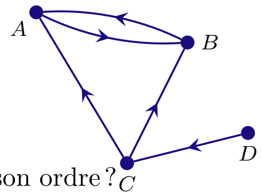
Les différents parcours sont modélisés par le graphe Γ ci-dessous où les sommets correspondent aux cinq arbres marquant leurs extrémités. Chaque parcours est représenté par une arête du graphe et peut être réalisé dans les deux sens.



1. Déterminer, en justifiant, si le graphe Γ est :
   (a) complet ;
   (b) connexe.
2. L'organisateur du parc de loisirs souhaite que les visiteurs puissent, s'ils le souhaitent, réaliser un itinéraire complet d'accrobranches, c'est-à-dire un itinéraire empruntant une fois et une seule chaque parcours et en commençant cet itinéraire par l'arbre numéro 1.

   Justifier que ce souhait est réalisable et proposer un tel itinéraire.

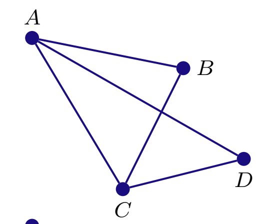
111 On considère le graphe orienté ci-dessous :



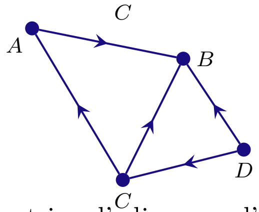
1. Quel est son ordre ?
2. Quel est le degré entrant du sommet A ?
3. Quel est le degré sortant du sommet B ?
4. Déterminer une chaîne de longueur 3 reliant les sommets D et A.

112 Déterminer la matrice d'adjacence des graphes suivants :

1. Graphe 1 :



2. Graphe 2 :



113 On considère la matrice d'adjacence d'un graphe G :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Quel est l'ordre du graphe G ?
2. Le graphe G est-il non orienté ? Justifier.
3. Dessiner un graphe possible.

114 La matrice d'un graphe non orienté G de sommets A, B, C, D, E est la matrice M suivante :

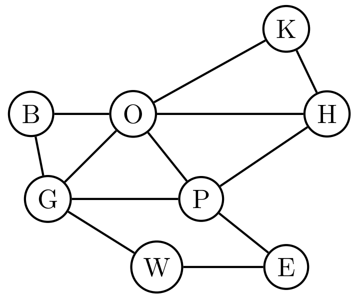
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sans dessiner le graphe, répondre aux questions suivantes en justifiant la réponse à l'aide de la matrice M suivante :

1. Quel est l'ordre du graphe ?
2. Quel est le nombre d'arêtes du graphe G ?
3. Le graphe G est-il complet ?
4. Le graphe G est-il simple ?
5. Donner le degré de chacun des sommets du graphe.
6. Le graphe admet-il une chaîne eulérienne ?
7. Le graphe admet-il un cycle eulérien ?

115 On a schématisé ci-dessous une partie du plan du métro londonien par un graphe Γ dont les sommets sont les stations et les arêtes sont les lignes desservant ces stations.

Chaque station de métro est désignée par son initiale comme indiqué dans la légende.



Légende :
B : Bond Street
E : Embankment
G : Green Park
H : Holborn
K : King's Cross St Pancras
O : Oxford Circus
P : Piccadilly Circus
W : Westminster

1. (a) Déterminer en justifiant si le graphe Γ est connexe.

   (b) Déterminer en justifiant si le graphe Γ est complet.

2. Déterminer, en justifiant, si le graphe Γ admet une chaîne eulérienne. Si oui, donner une telle chaîne.

3. Donner la matrice d'adjacence M du graphe Γ (les sommets seront rangés dans l'ordre alphabétique).

   Pour la suite de l'exercice, on donne la matrice :

$$M^3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 & 4 & 2 & 7 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 6 & 4 \\ 6 & 1 & 4 & 4 & 4 & 9 & 10 & 6 \\ 4 & 1 & 4 & 4 & 5 & 8 & 8 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 5 & 2 & 7 & 3 & 1 \\ 7 & 3 & 9 & 8 & 7 & 8 & 10 & 3 \\ 3 & 6 & 10 & 8 & 3 & 10 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 6 & 3 & 1 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Un touriste se trouve à la station Holborn. Il prévoit de se rendre à la station Green Park en utilisant exactement trois lignes de métro sur son trajet.

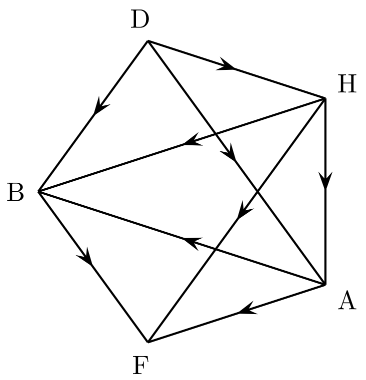
   (a) Sans utiliser le graphe, donner le nombre de trajets possibles et justifier la réponse.

   (b) Donner les trajets possibles .

116 Un parcours sportif est composé d'un banc pour abdominaux, de haies et d'anneaux. Le graphe orienté ci-contre indique les différents parcours conseillés partant de D et terminant à F.

Les sommets sont : D (départ), B (banc pour abdominaux), H (haies), A (anneaux) et F (fin du parcours).

Les arêtes représentent les différents sentiers reliant les sommets.



1. Quel est l'ordre du graphe ?
2. On note M la matrice d'adjacence de ce graphe où les sommets sont rangés dans l'ordre alphabétique.
   (a) Déterminer M.
   (b) On donne $M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

   Assia souhaite aller de D à F en faisant un parcours constitué de 3 arêtes.
   Est-ce possible ? Si oui, combien de parcours différents pourra-t-elle emprunter ?
   Préciser ces trajets.

117 Dans chaque cas, déterminer un graphe dont la matrice donnée est la matrice d'adjacence associée à ce graphe :

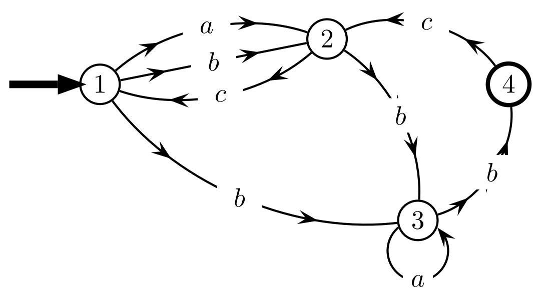
1. Graphe 1 :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Graphe 2 :

$$M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

118 Pour accéder à un local d'une petite entreprise, les employés doivent choisir un code reconnu par l'automate suivant :



Une succession de lettres constitue un code possible si ces lettres se succèdent sur un chemin du graphe orienté ci-dessus, en partant du sommet 1 et en sortant au sommet 4.

Par exemple :

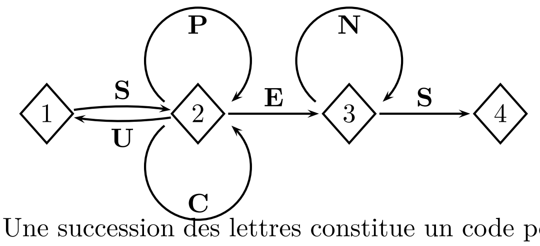
- le mot *bcbab* est un mot reconnu par cet automate, et correspond au chemin 121334 ;
- le mot *abac* n'est pas reconnu par cet automate.

1. Parmi les mots suivants, quels sont ceux qui sont reconnus par cet automate ?
   abab, *abc*, *abbcbb*.
2. Compléter la matrice d'adjacence :
   $$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$
   associée au graphe orienté dans laquelle les sommets sont rangés dans l'ordre croissant.
3. Un logiciel de calcul formel donne :

   $M^4 = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 10 & 5 \\ 1 & 6 & 7 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ et

   $M^5 = \begin{pmatrix} 3 & 15 & 18 & 10 \\ 6 & 6 & 14 & 7 \\ 3 & 4 & 8 & 4 \\ 1 & 6 & 7 & 4 \end{pmatrix}$. Combien de mots de 4 lettres sont-ils reconnus par l'automate ? Justifier. Quels sont-ils ?

119 Pour accéder à sa messagerie, Antoine a choisi un code qui doit être reconnu par le graphe étiqueté suivant, de sommets 1, 2, 3 et 4 :



Une succession des lettres constitue un code possible si ces lettres se succèdent sur un chemin du graphe orienté ci-dessus, en partant du sommet 1 et en sortant au sommet 4. Les codes SES et SPPCES sont ainsi des codes possibles, contrairement aux codes SUN et SPEN.

1. Parmi les trois codes suivants, écrire sur votre copie le (ou les) code(s) reconnu(s) par le graphe.

   SUCCES SCENES SUSPENS

2. Recopier et compléter la matrice d'adjacence A associée au graphe. On prendra les sommets dans l'ordre 1-2-3-4.
   $$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$
3. Avec une calculatrice on a calculé :
   $$A^4 = \begin{pmatrix} 5 & 12 & 8 & 3 \\ 12 & 29 & 20 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
   En déduire le nombre de codes de 4 lettres reconnus par le graphe. Quels sont ces codes ?