Exercice 1 — 40 minutes — **/15**

Un apiculteur étudie l'évolution de sa population d'abeilles.
Au début de son étude, il évalue à 10 000 le nombre de ses abeilles.

Chaque année, l'apiculteur observe qu'il perd 20 % des abeilles de l'année précédente.

Il achète 10 000 nouvelles abeilles chaque année.

On note u_0 le nombre d'abeilles, en dizaines de milliers, de cet apiculteur au début de l'étude.
On a donc $u_0 = 1$.

Pour tout entier naturel n non nul, u_n désigne le nombre d'abeilles, en dizaines de milliers, au bout de la n-ième année.

1. Justifier que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}8u_n + 1$.
2. (a) Vérifier qu'il y a aura 24 400 abeilles au bout de deux ans.
   (b) La suite (u_n) peut-elle être arithmétique ? Géométrique ? Justifier la réponse.
3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = u_n - 5$.
   (a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.
   (b) Exprimer, pour tout entier naturel n, v_n en fonction de n.
   (c) En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n = 5 - 4 \times 0{,}8^n$.
4. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
5. On considère le programme ci-contre, écrit en langage Python :

```
def seuil(p) :
    n=0
    u=1
    while u<=p :
        n=n+1
        u=0.8*u+1
    return n
```

   Déterminer la valeur renvoyée par la saisie de seuil(4) et l'interpréter dans le contexte de l'exercice.
6. L'apiculteur affirme qu'à long terme, sa population d'abeilles n'excèdera pas les 50 000.
   Que pensez-vous de cette affirmation ? Justifiez votre raisonnement.

Exercice 2 — 10 minutes — **/5**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - x^2 - x$.

1. Calculer la dérivée de f et étudier son signe sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.
3. Établir l'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 0.