○○○ Exercice 20.
Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{1}{4}u_n + 2 \end{cases}$$

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n,
$$u_n \leqslant u_{n+1}.$$
2. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

●●○ Exercice 21.
On considère (u_n) une suite réelle telle que pour tout entier naturel n, $n < u_n < n+1$.
Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

●○○ Exercice 22.
On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{14}{3} \text{ et } u_0 = 1.$$

1. Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est majorée par 7.
2. Étudier la monotonie de la suite (u_n).

○○○ Exercice 23.
Soit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = 5+\cos(n^2)$.
Démontrer que la suite (v_n) est bornée.

●○○ Exercice 24.
Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \dfrac{n}{n+1}$.
Démontrer que la suite (u_n) est bornée.

●○○ Exercice 25.
Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{2}{3}u_n + 2n + 1 \end{cases}$$

1. Conjecturer la limite de la suite (u_n) à la calculatrice.
2. On considère le programme Python :

```python
def seuil():
    u=2;n=0
    while u.....  :
        u=..........
        n=n+1
    return .....
```

Compléter la fonction Python ci-dessus pour qu'elle retourne le premier terme de la suite strictement supérieur à 100.

●○○ Exercice 26.
Calculer les limites des suites (u_n) définies de façon explicite de la façon suivante :

1. $u_n = \sqrt{n}\left(4 + \dfrac{1}{n}\right)$
2. $u_n = -n^3(3n^2+5)$
3. $u_n = \left(-7 + \dfrac{2}{\sqrt{n}}\right)(1-n)$

●○○ Exercice 27.
Déterminer la limite (si elle existe) de la suite (u_n) dans les cas suivants :

1. $u_n = n + (-1)^n$ où $n \in \mathbb{N}$
2. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2}$ où $n \in \mathbb{N}^*$
3. $u_n = \dfrac{1}{n}\cos(n)$ où $n \in \mathbb{N}^*$

●○○ Exercice 28.
Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ dans les cas suivants :

1. $u_n = \dfrac{1}{n}\left(n^2+n+2\right)$
2. $u_n = \dfrac{n^2-2n+3}{4n^3+1}$
3. $u_n = \dfrac{\sqrt{n}+n}{4n+5}$

○○○ Exercice 29.

1. Soit (u_n) telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 5n$.
   Déterminer la limite de la suite (u_n).
2. Soit (v_n) telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n \leqslant -n^2$.
   Déterminer la limite de la suite (v_n).
3. On considère une suite (w_n) qui vérifie $-\dfrac{1}{n} + 3 \leqslant w_n \leqslant \dfrac{1}{n} + 3$ pour tout entier naturel n non nul.
   Calculer la limite de la suite (w_n).

●○○ Exercice 30.
En utilisant les théorèmes de comparaison des limites, calculer les limites des suites suivantes dont on donne le terme général ci-dessous :

1. $u_n = n - \cos n$
2. $v_n = -n^2 + (-1)^n$
3. $w_n = \dfrac{4n+(-1)^n}{2n+3}$
4. $z_n = \dfrac{n-\sin n}{\cos n + 2}$

●○○ Exercice 31.
Déterminer la limite éventuelle des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suivantes en utilisant la limite d'une suite géométrique :

1. $u_n = \dfrac{4}{7^n}$
2. $u_n = \dfrac{1}{1+0,25^n}$
3. $u_n = 9^n - 3^n$
4. $u_n = \dfrac{(-4)^{n+1}}{5^n}$

●●○ Exercice 32.
Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} v_0 = -\dfrac{2}{3} \\ v_{n+1} = -2v_n + 1 \end{cases}$$

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n,
$$v_n = \frac{1}{3} - (-2)^n$$
2. La suite (v_n) admet-elle une limite ? Justifier.

●●○ Exercice 33.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant pour tout entier naturel n :

$$u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

●●○ Exercice 34.
On définit la suite (u_n) définie pour $n \geqslant 2$ par :

$$\begin{cases} u_2 = 1 \\ u_{n+1} = \left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right) u_n \end{cases}$$

1. (a) Démontrer que pour entier naturel n supérieur ou égal à 2,
$$0 \leqslant u_n \leqslant 1.$$
   (b) Étudier le sens de variation de la suite (u_n).
2. Justifier que la suite (u_n) est convergente.
3. Montrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2,
$$u_n = \frac{n}{2(n-1)}.$$
4. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

●●○ Exercice 35.
Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{1}{10} u_n (20 - u_n) \end{cases}$$

1. Soit f la fonction définie sur $[0\,;20]$ par
$$f(x) = \frac{1}{10}x(20-x).$$
   (a) Étudier les variations de f sur $[0\,;20]$
   (b) En déduire que pour tout $x \in [0\,;20]$,
$$f(x) \in [0\,;10].$$
   (c) On donne ci-dessous la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f dans un repère orthonormal.
   Représenter, sur l'axe des abscisses, à l'aide de ce graphique, les cinq premiers termes de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ puis émettre une conjecture quant à son sens de variation et à sa convergence.
2. Montrer par récurrence que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 10.$$
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est convergente et déterminer sa limite.