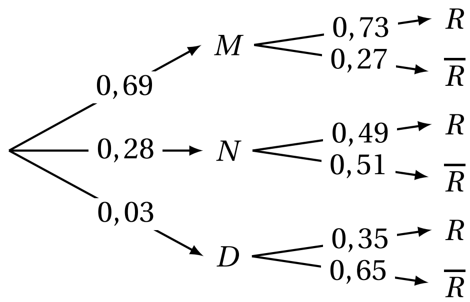
Correction exercice n°6

Partie A

1. Voici l'arbre modélisant la situation :



2. L'évènement « le déchet est dangereux et recyclable » est $D \cap R$.
   $\mathbf{P}(D \cap R) = \mathbf{P}(D) \times \mathbf{P}_D(R)$ donc
   $\mathbf{P}(D \cap R) = 0,03 \times 0,35 = 0,0105$.
3. De même $\mathbf{P}\left(M \cap \overline{R}\right) = \mathbf{P}(M) \times \mathbf{P}_M\left(\overline{R}\right)$ soit $\mathbf{P}\left(M \cap \overline{R}\right) = 0,69 \times 0,27 = 0,1863$.
   Dans le contexte de l'exercice, cela signifie que sur l'ensemble des déchets produits par l'entreprise, 18,63 % d'entre eux sont des déchets qui sont minéraux et non recyclables.
4. Les évènements M, N et D forment une partition de l'univers, donc, d'après la formule des probabilités totales, on en déduit :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(R) &= \mathbf{P}(R \cap M) + \mathbf{P}(R \cap N) + \mathbf{P}(R \cap D) \\ &= 0,69 \times 0,73 + 0,28 \times 0,49 + 0,03 \times 0,35 \\ &= 0,6514 \end{aligned}$$

5. La probabilité demandée est $\mathbf{P}_R(N)$.
   Or,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_R(N) &= \frac{\mathbf{P}(R \cap N)}{\mathbf{P}(R)} \\ &= \frac{0,28 \times 0,49}{0,6514} \\ &= \frac{686}{3257} \\ &\approx 0,2106 \quad \text{au dix-millième près.} \end{aligned}$$

Partie B

1. (a) L'expérience est la répétition de 20 épreuves identiques et indépendantes où seuls deux cas sont possibles :
   - soit le déchet est recyclable avec la probabilité $p = 0,6514$ (probabilité du succès).
   - Soit il ne l'est pas avec la probabilité $q = 1 - p = 0,3486$.

   X désignant le nombre de succès, c'est-à-dire le nombre de déchets recyclables parmi les 20, X suit la la loi binomiale $\mathscr{B}(20\ ;\ 0,6514)$.

(b) On cherche la probabilité de l'évènement $(X = 14)$.
On a :
$\mathbf{P}(X = 14) = \binom{20}{14} 0,6514^{14} \times 0,3486^{6}$ soit $\mathbf{P}(X = 14) \approx 0,1723$ au dix-millième près.

2. Dans cette question, on prélève désormais n déchets, où n désigne un entier naturel strictement positif. On note X_n la variable aléatoire qui compte le nombre de déchets recyclables dans ce nouvel échantillon. X_n suit donc la loi binomiale de paramètres $(n\ ;\ 0.6514)$

(a) On a $p_n = \mathbf{P}(X_n = 0)$ soit $p_n = \binom{n}{0} 0,6514^{0} \times 0,3486^{n} = 0,3486^{n}$.

La probabilité qu'aucun déchet ne soit recyclable sur un échantillon de n déchet est donc $p_n = 0,3486^{n}$

(b) L'évènement « au moins un déchet du prélèvement est recyclable » est contraire de celui dont on a calculé la probabilité à la question précédente. On est donc amené à résoudre $\mathbf{P}(X_n \geqslant 1) \geqslant 0,9999$.
Or $\mathbf{P}(X_n \geqslant 1) = 1 - \mathbf{P}(X_n = 0)$ donc on doit avoir $1 - 0,3486^{n} \geqslant 0,9999$.
À la calculatrice $1 - 0,3486^{8} < 0,9999$ et $1 - 0,3486^{9} > 0,9999$ donc on retient $n = 0$: on en déduit que c'est à partir de 9 déchets dans l'échantillon que la probabilité qu'au moins un des déchets soit recyclable est supérieure ou égale à $0,9999$.