0. Formules à utiliser

- Soient a et b deux nombres complexes. On a alors $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.
- Formules d'Euler.

1. Résultats préliminaires

Soit x un réel. Démontrer que :

- $1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = 2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}x}{2}}$.
- $1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = -2\mathrm{i}\sin\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}x}{2}}$.
- Soit x un complexe et n un entier naturel.

  Démontrer que $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$.

2. De belles égalités

Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et x un réel. On pose $C_n = \sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$ et $S_n = \sum_{k=0}^{n} \sin(kx)$.

1. Dans cette question, on suppose que $x \equiv 0\ [2\pi]$.
   En déduire les valeurs de C_n et S_n.
2. On suppose désormais que x n'est pas congru à 0 modulo 2π.
   (a) Démontrer que $C_n + \mathrm{i}S_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right)^k$.
   (b) En déduire que $C_n + \mathrm{i}S_n = \dfrac{\sin\left(\dfrac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n}{2}x}$.
   (c) En déduire l'expression de C_n et de S_n.
3. Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et x un réel.
   On pose $U_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\cos(kx)$ et $V_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\sin(kx)$.
   (a) Démontrer que $U_n + \mathrm{i}V_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right)^k$.
   (b) En déduire que $U_n + \mathrm{i}V_n = \left(2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{x}{2}}\right)^n$.
   (c) Déduire alors l'expression de U_n et de V_n.