★★☆☆☆ Exercice 1. /3

On donne le nombre complexe $z = \dfrac{8+4\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$.

1. Déterminer la forme algébrique de z.

2. En déduire sans aucun calcul la valeur de $\dfrac{8+4\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} + \dfrac{8-4\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$.

★★☆☆☆ Exercice 2. /6

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $(2\mathrm{i}-5)z+2=\mathrm{i}$ **2.** $(\mathrm{i}z+1-\mathrm{i})(\overline{z}-4+\mathrm{i})=0$ **3.** $2z+3\overline{z}+\mathrm{i}-2=0$

★★★☆☆ Exercice 3. /5

Soient z et Z deux complexes tels que $Z = z^2 - \overline{z} + 1$. On pose $z = x + \mathrm{i}y$ avec $(x\,;\,y) \in \mathbb{R}^2$.

1. Démontrer que $Z = x^2 - x - y^2 + 1 + \mathrm{i}(2xy + y)$.

2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que Z soit réel.

3. Proposer deux nombres complexes z non nuls tels que Z soit imaginaire pur.

★★☆☆☆ Exercice 4. /3

1. Soit z un complexe non nul. On pose $Z = \dfrac{1}{\overline{z}} + \dfrac{1}{z}$.

   a. Calculer $\overline{Z}$.

   b. Qu'en déduire pour Z ?

2. On considère de nouveau un complexe z non nul.
Démontrer que $Z' = \dfrac{z-\overline{z}}{z \times \overline{z}}$ est un imaginaire pur.

★★★☆☆ Exercice 5. /3

Soit P le polynôme de degré 2 défini sur $\mathbb{C}$ par $P(z) = z^2 - 2az + a^2 + b^2$ où a et b sont deux réels.

1. Démontrer que $P(a+\mathrm{i}b) = 0$.

2. Démontrer pour pour tout nombre complexe z on a $P(\overline{z}) = \overline{P(z)}$.

3. En déduire une autre racine de polynôme P.
Aucun calcul n'est attendu mais justifiez avec soin le raisonnement effectué.

« *Ce qui est affirmé sans preuve peut être nié sans preuve.* »
Euclide d'Alexandrie

★★☆☆☆ **Exercice 1.** **/3**

On donne le nombre complexe $z = \dfrac{6-2\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$.

1. Déterminer la forme algébrique de z.

2. En déduire sans aucun calcul la valeur de $\dfrac{6-2\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} - \dfrac{6+2\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$.

★★☆☆☆ **Exercice 2.** **/6**

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $(3\mathrm{i}-5)z+2=4\mathrm{i}$ **2.** $(\mathrm{i}z+2-\mathrm{i})(\overline{z}-5-\mathrm{i})=0$ **3.** $3z-2\overline{z}+\mathrm{i}-2=0$

★★★☆☆ **Exercice 3.** **/5**

Soient z et Z deux complexes tels que $Z = z^2+\overline{z}+1$. On pose $z = x+\mathrm{i}y$ avec $(x\,;\,y)\in\mathbb{R}^2$.

1. Démontrer que $Z = x^2+x-y^2+1+\mathrm{i}(2xy-y)$.

2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que Z soit réel.

3. Proposer deux nombres complexes z non nuls tels que Z soit imaginaire pur.

★☆☆☆☆ **Exercice 4.** **/3**

1. Soit z un complexe non nul. On pose $Z = \dfrac{1}{z} - \dfrac{1}{\overline{z}}$.

a. Calculer $\overline{Z}$.

b. Qu'en déduire pour Z ?

2. On considère de nouveau un complexe z non nul.
Démontrer que $Z' = \dfrac{z+\overline{z}}{z\times\overline{z}}$ est réel.

★★★☆☆ **Exercice 5.** **/3**

Soit P le polynôme de degré 2 défini sur $\mathbb{C}$ par $P(z) = z^2-2az+a^2+b^2$ où a et b sont deux réels.

1. Démontrer que $P(a-\mathrm{i}b)=0$.

2. Démontrer pour pour tout nombre complexe z on a $P(\overline{z}) = \overline{P(z)}$.

3. En déduire une autre racine de polynôme P.
Aucun calcul n'est attendu mais justifiez avec soin le raisonnement effectué.

« *Ce qui est affirmé sans preuve peut être nié sans preuve.* »
EUCLIDE D'ALEXANDRIE