Problème. 10 points

On observe la taille d'une colonie de fourmis tous les jours.
Pour tout entier naturel n non nul, on note u_n le nombre de fourmis, exprimé en milliers. dans cette population au bout du n-ième jour.
Au début de l'étude la colonie compte 5 000 fourmis et au bout d'un jour elle compte 5 100 fourmis. Ainsi, on a $u_0 = 5$ et $u_1 = 5,1$.
On suppose que l'accroissement de la taille de la colonie d'un jour sur l'autre diminue de 10 % chaque jour. En d'autres termes, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+2} - u_{n+1} = 0,9\left(u_{n+1} - u_n\right).$$

1. Démontrer, dans ces conditions, que $u_2 = 5,19$.
2. Pour tout entier naturel n, on pose $V_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1,9 & -0,9 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   (a) Vérifier que, pour tout entier naturel n, on a $V_{n+1} = AV_n$.
   (b) Rappeler l'expression de V_n en fonction de A^n et V_0 pour tout entier naturel n.
   (c) On pose $P = \begin{pmatrix} 0,9 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Justifier que la matrice P est inversible et déterminer, avec la méthode de votre choix, la matrice P^{-1}.
   (d) En détaillant les calculs, déterminer la matrice D définie par $D = P^{-1}AP$ puis donner, sans jusitifer, l'expression de la matrice D^n pour tout entier naturel n.
   (e) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a :

   $$A^n = PD^nP^{-1}.$$

   Pour tout entier naturel n, on admet que

   $$A^n = \begin{pmatrix} -10 \times 0,9^{n+1} + 10 & 10 \times 0,9^{n+1} - 9 \\ -10 \times 0,9^n + 10 & 10 \times 0,9^n - 9 \end{pmatrix}.$$

   (f) En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 6 - 0,9^n$.
3. Calculer la taille de la colonie au bout du 10^{e} jour. On arrondira le résultat à une fourmi près.
4. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
5. Déterminer, par le calcul, au bout de combien de jours, la population de fourmis dépassera pour la première fois les 5 900.
6. Calculer la limite de la suite (u_n). Interpréter ce résultat dans le contexte.