DEVOIR D'ENTRAÎNEMENT

Un opérateur téléphonique A souhaite prévoir l'évolution de nombre de ses abonnés dans une grande ville par rapport à son principal concurrent B à partir de 2019.

En 2013, les opérateurs A et B ont chacun 300 milliers d'abonnés.

Pour tout entier naturel n, on note a_n le nombre d'abonnés, en milliers, de l'opérateur A la n-ième année après 2019, et b_n le nombre d'abonnés, en milliers, de l'opérateur B la n-ième année après 2019.

Ainsi, $a_0 = 300$ et $b_0 = 300$.

Des observations réalisées les années précédentes conduisent à modéliser la situation par la relation suivante :

pour tout entier naturel n, $\begin{cases} a_{n+1} = 0,7a_n + 0,2b_n + 60 \\ b_{n+1} = 0,1a_n + 0,6b_n + 70 \end{cases}$.

On considère les matrices $M = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 \\ 0,1 & 0,6 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 60 \\ 70 \end{pmatrix}$.

Pour tout entier naturel n, on note $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

1. (a) Calculer U_1 puis interpréter les résultats obtenus.
   (b) Vérifier que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = M \times U_n + P$.
2. On note I la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Calculer $(I - M) \times \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.
   (b) En déduire que la matrice $I - M$ est inversible et préciser son inverse.
   (c) Déterminer la matrice U telle que $U = M \times U + P$.
3. Pour tout entier naturel, on pose $V_n = U_n - U$.
   (a) Justifier que, pour tout entier naturel n, $V_{n+1} = M \times V_n$.
   (b) En déduire que, pour tout entier naturel n, $V_n = M^n \times V_0$.
4. On admet que, pour tout entier naturel n,

$$V_n = \begin{pmatrix} -\dfrac{100}{3} \times 0,8^n - \dfrac{140}{3} \times 0,5^n \\ -\dfrac{50}{3} \times 0,8^n + \dfrac{140}{3} \times 0,5^n \end{pmatrix}$$

   (a) Pour tout entier naturel n, exprimer U_n en fonction de n et en déduire la limite de la suite (a_n).
   (b) Estimer le nombre d'abonnés de l'opérateur A à long terme.