1. (a) $d_1 = \dfrac{1}{2}d_0 + 100 = 250$ et $a_1 = \dfrac{1}{2}d_0 + \dfrac{1}{2}a_0 + 70 = 150 + 225 + 70 = 445$.

   (b) En posant $U_n = \begin{pmatrix} d_n \\ a_n \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 100 \\ 70 \end{pmatrix}$, le système s'écrit sous la forme matricielle :

$$U_{n+1} = Au_n + B$$

2. Initialisation : pour $n = 1$, on a bien $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}(I_2 + T)$.

   Hérédité : supposons que la relation soit vérifiée pour un entier k non nul. En multipliant l'expression $A^k = \left(\dfrac{1}{2}\right)^k (I_2 + kT)$ par $A = \dfrac{1}{2}(I_2 + T)$ à gauche ou à droite car I_2 et T commutent, on obtient :

$$A^{k+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^k (I_2 + kT) \times \frac{1}{2}(I_2 + T) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} (I_2 + T + kT + kT^2).$$

   Or, $T^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On dit qu'elle est nilpotente d'ordre 2.

   Donc $A^{k+1} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{k+1} (I_2 + (k+1)T)$ et la relation est héréditaire.

   La propriété est donc initialisée et héréditaire, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3. (a) Comme $\det(I_2 - A) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \dfrac{1}{4} \neq 0$, la matrice $I_2 - A$ est inversible et on a $(I_2 - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} \text{D'où } C = AC + B \iff (I_2 - A)C = B \iff C &= (I_2 - A)^{-1}B \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 100 \\ 70 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 \\ 340 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

   (b) Il suffit de se servir des question précédentes on remarquant que $\begin{pmatrix} 200 \\ 340 \end{pmatrix} = C = AC + B$.

$$V_{n+1} = U_{n+1} - C \iff V_{n+1} = AU_n + B - (AC + B) \iff U_{n+1} = A(U_n - C) = AV_n.$$

   (c) On a $V_0 = U_0 - C = \begin{pmatrix} 300 \\ 450 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 200 \\ 340 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 110 \end{pmatrix}$.

   Par définition de V_n, on a aussi : $U_n = A^n \begin{pmatrix} 100 \\ 110 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 200 \\ 340 \end{pmatrix}$.

   En utilisant le résultat de la question (2), on obtient, par calcul matriciel :

$$\begin{aligned} U_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n (I_2 + nT)\begin{pmatrix} 100 \\ 110 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 200 \\ 340 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 \\ n\left(\frac{1}{2}\right)^n & \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 100 \\ 110 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 200 \\ 340 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 100\left(\frac{1}{2}\right)^n + 200 \\ 100n\left(\frac{1}{2}\right)^n + 110\left(\frac{1}{2}\right)^n + 340 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

4. (a) En admettant que pour $n \geqslant 4$, $2^n \geqslant n^2 > 0$, en composant par la fonction inverse, décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on obtient $0 < \dfrac{1}{2^n} \leqslant \dfrac{1}{n^2}$.
En multipliant les membres de l'inégalité par $100n$, on obtient, après simplification :

$$0 \leqslant 100n\left(\frac{1}{2}\right)^n \leqslant \frac{100}{n}.$$

(b) D'après les théorèmes d'encadrement, comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{100}{n} = 0$, on obtient $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 100n\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$.
$-1 < \dfrac{1}{2} < 1$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ et par suite $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 100\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$.
Enfin, d'après les théorèmes sur les limites de sommes, on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \begin{pmatrix} \displaystyle\lim_{n\to+\infty} 100\left(\frac{1}{2}\right)^n + 200 \\ \displaystyle\lim_{n\to+\infty} 100n\left(\frac{1}{2}\right)^n + 110\left(\frac{1}{2}\right)^n + 340 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 \\ 340 \end{pmatrix}.$$

La fréquentation se stabilise, à long terme, autour de 200 internautes débutants et 340 internautes avancés.