1. (a) $U_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$

   Or $\begin{cases} a_1 = 0,7a_0 + 0,2b_0 + 60 \\ b_1 = 0,1a_0 + 0,6b_0 + 70 \end{cases} \iff \begin{cases} a_1 = 0,7 \times 300 + 0,2 \times 300 + 60 \\ b_1 = 0,1 \times 300 + 0,6 \times 300 + 70 \end{cases}$.

   Finalement $U_1 = \begin{pmatrix} 330 \\ 280 \end{pmatrix}$

   (b) Pour tout entier naturel n,

   $M \times U_n + P = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 \\ 0,1 & 0,6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 60 \\ 70 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7a_n + 0.2b_n \\ 0.1a_n + 0.6b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 60 \\ 70 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix}$

   Pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = M \times U_n + P$.

2. On note I la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Calculons $(I - M) \times \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

   $(I - M) = \begin{pmatrix} 1 - 0,7 & -0,2 \\ -0,1 & 1 - 0,6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3 & -0,2 \\ -0,1 & 0,4 \end{pmatrix}$.

   Puis

   $(I - M) \times \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \times 0,3 - 0,2 & 2 \times 0,3 - 3 \times 0,2 \\ -0,1 \times 4 + 0,4 & -0,1 \times 2 + 3 \times 0,4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

   (b) On a $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \times (I - M) = I$ et on a (à faire vous-même), $(I - M) \times \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = I$ ce qui induit que $I - M$ est inversible et a pour inverse inverse est $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

   (c) $U = M \times U + P \iff U - M \times U = P \iff (I - M) \times U = P \iff$
   $U = (I - M)^{-1} P$

   Finalement $U = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 60 \\ 70 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 380 \\ 270 \end{pmatrix}$.

3. (a) Pour tout entier naturel n,

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= U_{n+1} - U \\ &= MU_n + P - (MU + P) \\ &= M(U_n - U) \\ &= M \times V_n \end{aligned}$$

   (b) Par récurrence :
   - Soit $\mathscr{P}_n$ la proposition : $V_n = M^n \times V_0$.
   - *Initialisation* : Si $n = 0$ alors
     $M^0 = I$ et $V_0 = M^0 V_0$ donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.
   - *Hérédité* : Supposons qu'il existe un entier naturel k tel que $\mathscr{P}_k$ soit vraie (c.-à-d. $V_k = M^k \times V_0$). Montrons que $\mathscr{P}_{k+1}$ est vraie aussi (c-à-d. $V_{k+1} = M^{k+1} \times V_0$).
     $V_{k+1} = MV_k = M \times (M^k \times V_0) = M^{k+1} \times V_0$ et $\mathscr{P}_{k+1}$ est vraie.
   - $\mathscr{P}_0$ est vraie et $\mathscr{P}_n$ est héréditaire à partir du rang $n = 0$, donc par le principe de récurrence on a bien pour tout entier naturel n, $V_n = M^n \times V_0$.

4. On admet que, pour tout entier naturel n,

$$V_n = \begin{pmatrix} \dfrac{-100}{3} \times 0,8^n - \dfrac{140}{3} \times 0,5^n \\ \dfrac{-50}{3} \times 0,8^n + \dfrac{140}{3} \times 0,5^n \end{pmatrix}$$

(a) Pour tout entier naturel n,

$$V_n = U_n - U \iff U_n = V_n + U \iff U_n = \begin{pmatrix} \dfrac{-100}{3} \times 0,8^n - \dfrac{140}{3} \times 0,5^n \\ \dfrac{-50}{3} \times 0,8^n + \dfrac{140}{3} \times 0,5^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 380 \\ \\ 270 \end{pmatrix}$$

$$\iff U_n = \begin{pmatrix} \dfrac{-100}{3} \times 0,8^n - \dfrac{140}{3} \times 0,5^n + 380 \\ \\ \dfrac{-50}{3} \times 0,8^n + \dfrac{140}{3} \times 0,5^n + 270 \end{pmatrix}$$

On en déduit donc $a_n = \dfrac{-100}{3} \times 0,8^n - \dfrac{140}{3} \times 0,5^n + 380$

Comme $-1 < 0,5 < 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,5^n = 0$, d'où par produit et par somme $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 380$.

(b) De la question précédente, on en déduit que le nombre d'abonnés de l'opérateur A à long terme est donc de 380 000.