Exercice 1.

Pour tout entier relatif n, on a $-5(7n+4)+7(5n+3)=1$. Il existe donc un couple d'entiers relatifs $(u\,;\,v)$ tel que $(7n+4)u+(5n+3)v=1$. D'après le théorème de Bachet-Bézout, on en déduit que pour tout entier relatif n, $7n+4$ et $5n+3$ sont premiers entre eux.

Exercice 2.

PGCD$(a\,;\,b)=6$ donc il existe deux entiers naturels a' et b' premiers entre eux tels que $a=6a'$ et $b=6b'$ avec $a<b$ soit $a'<b'$.
$ab=432 \Longleftrightarrow 36a'b'=432 \Longleftrightarrow a'b'=12$.
Les diviseurs positifs de 12 sont : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 12.

- Si $a'=1$ alors $b'=12$ qui est bien premier avec a'.
- Si $a'=2$ alors $b'=6$ qui n'est pas premier avec a'.
- Si $a'=3$ alors $b'=4$ qui est bien premier avec a'.

Conclusion : les solutions sont donc les couples $(6\,;\,72)$ et $(18\,;\,24)$.

Exercice 3.

1. Pour démontrer que 38 et 45 sont premiers entre eux, on démontre que leur PGCD est égal à 1. On utilise l'algorithme d'Euclide.

$$\begin{aligned} 45 &= 38\times 1+7\\ 38 &= 7\times 5+3\\ 7 &= 3\times 2+1\\ 3 &= 3\times 1+0 \end{aligned}$$

   Le dernier reste non nul est 1 donc 38 et 45 sont bien premier entre eux.
2. On utilise de nouveau l'algorithme d'Euclide :

$$\begin{aligned} 1 &= 7-3\times 2\\ &= 7-(38-7\times 5)\times 2\\ &= -2\times 38+11\times 7\\ &= -2\times 38+11(45-38)\\ &= -13\times 38+11\times 45 \end{aligned}$$

   Conclusion : un couple d'entiers relatifs $(x\,;\,y)$ tel que $38x+45y=1$ est $(-13\,;\,11)$.

Exercice 4.

1. On considère l'équation

$$(\mathscr{E}) \quad : \quad 17x - 24y = 9,$$

où $(x,\ y)$ est un couple d'entiers relatifs.

(a) On a $17 \times 9 - 24 \times 6 = 9$ donc le couple $(9\,;6)$ est solution de $\mathscr{E}$.

(b) De $\left\{\begin{array}{lcl} 17x - 24y & = & 9 \\ 17 \times 9 - 24 \times 6 & = & 9 \end{array}\right.$, on déduit que $17(x-9) = 24(y-6) \quad (*)$.
Donc 24 divise $17(x-9)$. Or 24 est premier avec 17 donc d'après le lemme de Gauss, 24 divise $x-9$. Il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x - 9 = 24k$ soit $x = 9 + 24k$.
En reportant dans $(*)$, $17 \times 24k = 24(y-6) \iff 17k = y - 6 \iff y = 6 + 17k$.
L'ensemble des solutions de l'équation $(\mathscr{E})$ est donc :

$$\{(9 + 24k\ ;\ 6 + 17k)\},\ k \in \mathbb{Z}.$$

2. (a) Si Mattin a effectué y tours avant d'attraper le pompon à l'instant t, alors que le pompon a effectué x tours, alors $t = 17x$ (le pompon), et comme Mattin met $\dfrac{3}{8} \times 24 = 9$ secondes pour aller de H à A, alors pour lui $t = 9 + 24y$, soit en égalant :

$17x = 9 + 24y \iff 17x - 24y = 9, x \in \mathbb{N},\ y \in \mathbb{N}$.
Le couple $(x\ ;\ y)$ doit donc être une solution de l'équation résolue à la question 1.

(b) Or d'après l'ensemble des solutions, le plus petit couple de nombres positifs vérifiant cette équation est le couple $(9\,;6)$. Donc le temps nécessaire à Mattin pour attraper le pompon est $t = 17 \times 9 = 9 + 24 \times 6 = 153$ secondes soit 2 minutes et 33 secondes et ainsi en deux minutes Mattin n'a pas le temps d'attraper le pompon.