

DEVOIR EN TEMPS LIBRE

Parmi les ordinateurs d'un parc informatique, 60 % présentent des failles de sécurité. Afin de pallier ce problème, on demande à un technicien d'intervenir chaque jour pour traiter les défaillances.

On estime que chaque jour, il remet en état 7 % des ordinateurs défaillants, tandis que de nouvelles failles apparaissent chez 3 % des ordinateurs sains. On suppose de plus que le nombre d'ordinateurs est constant sur la période étudiée.

Pour tout entier naturel n , on note a_n la proportion d'ordinateurs sains de ce parc informatique au bout de n jours d'intervention, et b_n la proportion d'ordinateurs défaillants au bout de n jours.

Ainsi $a_0 = 0,4$ et $b_0 = 0,6$.

Partie A

1. Décrire la situation précédente à l'aide d'un graphe.
2. Calculer a_1 et b_1 .
3. Pour tout entier naturel n , exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n .
4. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0,97 & 0,07 \\ 0,03 & 0,93 \end{pmatrix}$. On pose $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.
 - (a) Justifier que pour tout entier naturel n , $X_{n+1} = AX_n$.
 - (b) Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n , $X_n = A^n X_0$.
 - (c) Calculer, à l'aide de la calculatrice, X_{30} . En donner une interprétation concrète (les coefficients seront arrondis au millièmme).

Partie B

1. On pose $D = \begin{pmatrix} 0,9 & 0 \\ 0 & 0,9 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0,07 \\ 0,03 \end{pmatrix}$.
 - (a) Justifier que, pour tout entier naturel n , $a_{n+1} + b_{n+1} = 1$.
 - (b) Montrer que, pour tout entier naturel n ,

$$X_{n+1} = DX_n + B.$$

2. On pose, pour tout entier naturel n , $Y_n = X_n - 10B$.
 - (a) Montrer que pour tout entier naturel n , $Y_{n+1} = DY_n$.
 - (b) On admet que pour tout entier naturel n , $Y_n = D^n Y_0$.
En déduire que pour tout entier naturel n , $X_n = D^n (X_0 - 10B) + 10B$.
 - (c) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n ,

$$D^n = \begin{pmatrix} 0,9^n & 0 \\ 0 & 0,9^n \end{pmatrix}$$

- (d) En déduire les expressions de a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de n .
3. Selon cette étude, que peut-on dire de la proportion d'ordinateurs défaillants sur le long terme ?