Exercice 1.

1. Voici la matrice voulue $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.
2. (a) $\sum_{i=1}^{2} a_{i2} = a_{12} + a_{22} = 0 + 2 = 2$. (b) $\prod_{i=1}^{2} a_{ii} = a_{11} \times a_{22} = 1 \times 2 = 2$.

Exercice 2.

1. On calcule le produit $A \times B$.

$$\begin{aligned} A \times B &= \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 5 & z & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x & -1 \\ -3 & y \\ -14 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2x+9-14 & -2-3y-1 \\ 5x-3z-42 & -5+zy-3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2x-5 & -3y-3 \\ 5x-3z-42 & zy-8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Par conséquent,

$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ si et seulement si x, y et z sont solutions du système : $\begin{cases} 2x-5=1 \\ -3y-3=0 \\ 5x-3z-42=0 \\ z \times y - 8 = 1 \end{cases}$

Or, $\begin{cases} 2x-5=1 \\ -3y-3=0 \\ 5x-3z-42=0 \\ z \times y - 8 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x=3 \\ y=-1 \\ 5\times 3-3z-42=0 \\ -z-8=1 \end{cases} \iff \begin{cases} x=3 \\ y=-1 \\ z=-9 \\ z=-9 \end{cases}$

On en déduit donc que $\boldsymbol{x = 3}$, $\boldsymbol{y = -1}$ et $\boldsymbol{z = -9}$.

2. A n'est pas une matrice carrée donc B ne peut être l'inverse de A.

Exercice 3.

1. Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.
   (a) $A \times B = I_3$.
   (b) Vu que $A \times B = B \times A = I_3$, on en déduit que les matrices A et B sont inverses l'une de l'autre.
2. Ce système : $\begin{cases} x+y+z &= 3 \\ -x-y+z &= -9 \\ -x+2y-z &= 12 \end{cases}$ peut s'écrire sous la forme $AX = C$ avec $C = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ 12 \end{pmatrix}$.
   Vu que A est inversible d'après la première question, on en déduit donc que $X = A^{-1}C$. Or $A^{-1} = B$ ce qui induit que $X = BC$ et par suite $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Exercice 4.

1. $-3I_2+T=-3\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&2\\0&0\end{pmatrix}$ donc $-3I_2+T=\begin{pmatrix}-3&0\\0&-3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&2\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&2\\0&-3\end{pmatrix}=A.$
2. $T^2=T\times T$ donc $T=\begin{pmatrix}0&2\\0&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&2\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}.$
3. Calculons A^2 :

$$\begin{aligned} A &= (-3I_2+T)(-3I_2+T)\\ &= 9I_2^2-3T-3T+T^2\\ &= 9I_2-6T+T^2\\ &= 9I_2-6T \quad \text{car} \quad T^2=0_2 \end{aligned}$$

4. Démontrons que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $A^n=(-3)^nI_2+n(-3)^{n-1}T$.
Soit $\mathscr{P}_n$: « $A^n=(-3)^nI_2+n(-3)^{n-1}T$ ».
Initialisation : si $n=1$, $A^1=A$ et $(-3)^nI_2+n(-3)^{n-1}T=-3I_2+1\times(-3)^0T=-3I_2+T=A$ d'après la question 1. On en déduit que $\mathscr{P}_1$ est bien vraie.
Hérédité : supposons $\mathscr{P}_k$ vraie pour un entier naturel k non nul quelconque, c'est-à-dire $A^k=(-3)^kI_2+k(-3)^{k-1}T$, démontrons que $\mathscr{P}_{k+1}$ est vraie, c'est-à-dire, $A^{k+1}=(-3)^{k+1}I_2+(k+1)(-3)^kT$. On a :

$$\begin{aligned} A^{k+1} &= A^k\times A\\ &= ((-3)^kI_2+k(-3)^{k-1}T)(-3I_2+T)\\ &= (-3)^{k+1}I_2+(-3)^kT+k(-3)^kT+k(-3)^{k-1}T^2\\ &= (-3)^{k+1}I_2+(-3)^k(1+k)T+0 \quad \text{car} \quad T^2=0_2\\ &= (-3)^{k+1}I_2+(-3)^k(k+1)T \end{aligned}$$

Ce qui prouve que $\mathscr{P}_{k+1}$ est vraie.
Conclusion : $\mathscr{P}_1$ est vraie et $\mathscr{P}_n$ est héréditaire. On en déduit que $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n non nul, c'est-à-dire, $A^n=(-3)^nI_2+n(-3)^{n-1}T$.