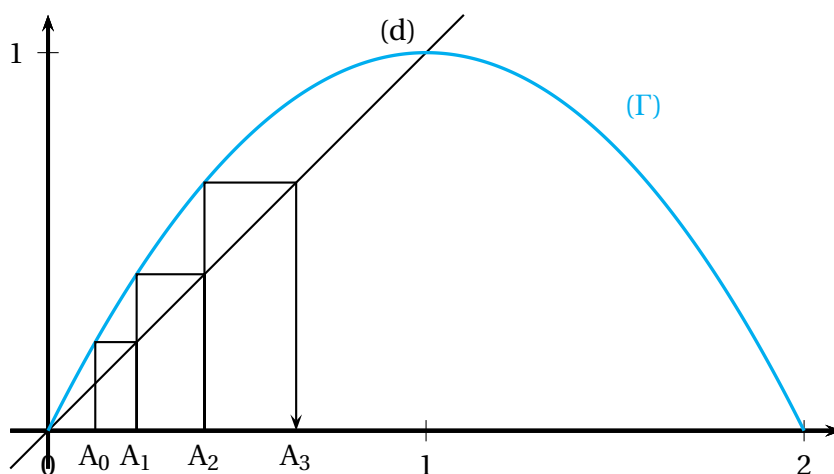

Correction exercice n°1

1. (a) $u_1 = u_0(2 - u_0)$ donc $u_1 = \frac{1}{8} \left(2 - \frac{1}{8} \right)$ d'où $u_1 = \frac{15}{64}$.

De même $u_2 = u_1(2 - u_1)$ d'où $u_2 = \frac{1695}{4096}$.

(b) On construit les quatre premiers termes de la suite :



2. (a) Soit $\mathcal{P}_n : 0 < u_n < 1$. Montrons tout d'abord que f est strictement croissante sur $[0; 1]$. f est dérivable en tant que polynôme de degré 2 sur $[0; 1]$ et pour tout réel $x \in [0; 1]$, on a $f'(x) = 2 - 2x > 0$: on en déduit que f est strictement croissante sur $[0; 1]$

— *Initialisation.* Vérifions que \mathcal{P}_0 est vraie.

On a $u_0 = a$ et $0 < a < 1$ donc \mathcal{P}_0 est vraie.

— *Hérédité.* Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons \mathcal{P}_n vraie, c'est-à-dire $0 < u_n < 1$.

Par hypothèse de récurrence $0 < u_n < 1$ donc $f(0) < f(u_n) < f(1)$ car la fonction f est strictement croissante sur $[0; 1]$ donc l'ordre est conservé sur cet intervalle.

Or $f(1) = 1$, $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(0) = 0$ donc $0 < u_{n+1} < 1$ ce qui prouve que \mathcal{P}_{n+1} est vraie.

— **Conclusion :** \mathcal{P}_0 est vraie et \mathcal{P}_n est héréditaire à partir du rang $n = 0$, on en déduit que \mathcal{P}_n est vraie pour tout n de \mathbb{N} .

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n < 1$$

(b) $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= u_n(2 - u_n) - u_n \\ &= u_n(1 - u_n) \end{aligned}$$

Or on vient de démontrer que $u_n < 1 \iff 1 - u_n > 0$ et comme $u_n > 0$, on obtient par produit $u_{n+1} - u_n > 0$, ce qui montre que la suite (u_n) est croissante.

(c) La suite (u_n) est croissante et majorée par 1 : elle est donc convergente vers une limite ℓ telle que $\ell \leq 1$.

3. (a) $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= 1 - u_{n+1} \\ &= 1 - u_n(2 - u_n) \\ &= 1 - 2u_n + u_n^2 \\ &= (1 - u_n)^2 \\ &= v_n^2 \end{aligned}$$

(b) On a $v_0 = 1 - u_0 = 1 - \frac{1}{8}$ donc $v_0 = \frac{7}{8}$.

$$\text{D'où } v_1 = v_0^2 = \left(\frac{7}{8}\right)^2.$$

$$\text{Puis } v_2 = v_1^2 = \left[\left(\frac{7}{8}\right)^2\right]^2 = \left(\frac{7}{8}\right)^{2^2}.$$

On va montrer par récurrence que $v_n = \left(\frac{7}{8}\right)^{2^n}$.

- La proposition est vraie au rang zéro.

- Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $v_n = \left(\frac{7}{8}\right)^{2^n}$.

On a $v_{n+1} = v_n^2$ et par hypothèse de récurrence $v_n = \left(\frac{7}{8}\right)^{2^n}$.

On en déduit que $v_{n+1} = \left[\left(\frac{7}{8}\right)^{2^n}\right]^2$ ce qui induit que $v_{n+1} = \left(\frac{7}{8}\right)^{2 \times 2^n} = \left(\frac{7}{8}\right)^{2^{n+1}}$.

La relation est vraie au rang $n + 1$: elle est donc vraie pour tout entier naturel n .

(c) Comme $-1 < \frac{7}{8} < 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{7}{8}\right)^n = 0$ et a fortiori $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{7}{8}\right)^{2^n} = 0$.

Conclusion : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$.

Comme $v_n = 1 - u_n \iff u_n = 1 - v_n$; on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.