## Exercice 1. /4.5

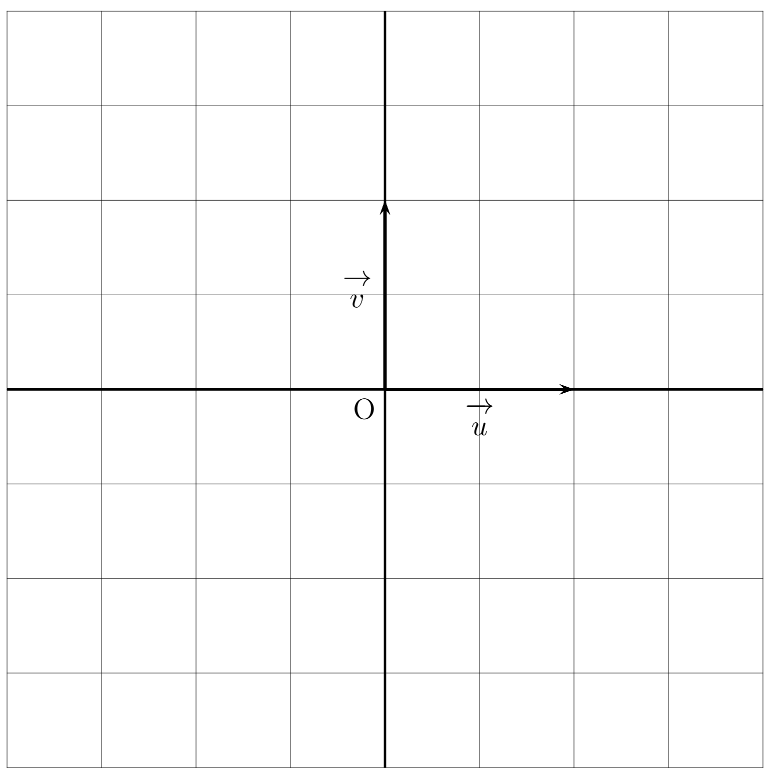
Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ d'unité graphique 2 cm.
On considère les points A, B et C d'affixes respectives :

$$z_{\mathrm{A}} = -2\mathrm{i}, \quad z_{\mathrm{B}} = -\sqrt{3} + \mathrm{i} \ \text{ et } \ z_{\mathrm{C}} = \sqrt{3} + \mathrm{i}.$$

1. Écrire $z_{\mathrm{A}}$, $z_{\mathrm{B}}$ et $z_{\mathrm{C}}$ sous trigonométrique.
2. En déduire le centre et le rayon du cercle $\Gamma$ passant par les points A, B et C.
3. Faire une figure et placer le point A, tracer le cercle $\Gamma$ puis placer les points B et C.
4. Émettre une conjecture sur la nature du triangle $ABC$ puis démontrer cette conjecture.
5. (a) Déterminer l'ensemble $(E)$ des points $M$ d'affixe $z$ tels que

$$|z| = \left|z + \sqrt{3} + \mathrm{i}\right|.$$

   (b) Montrer que les points A et B appartiennent à $(E)$.
   *On ne demande pas de représenter $(E)$.*



**Exercice 2.** **/4**

On définit la suite de nombres complexes $(z_n)$ de la manière suivante : $z_0 = 1$ et, pour tout entier naturel $n$,

$$z_{n+1} = \frac{1}{3}z_n + \frac{2}{3}\mathrm{i}.$$

On se place dans un plan muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.

- Pour tout entier naturel $n$, on note $\mathrm{A}_n$ le point du plan d'affixe $z_n$.
- Pour tout entier naturel $n$, on pose $u_n = z_n - \mathrm{i}$ et on note $\mathrm{B}_n$ le point d'affixe $u_n$.
- On note C le point d'affixe i.

1. Exprimer $u_{n+1}$ en fonction de $u_n$, pour tout entier naturel $n$.
2. Démontrer que, pour tout entier naturel $n$,

$$u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n (1 - \mathrm{i})\,.$$

3. (a) Pour tout entier naturel $n$, calculer, en fonction de $n$, le module de $u_n$.

   (b) Démontrer que :

$$\lim_{n \to +\infty} \left|z_n - \mathrm{i}\right| = 0.$$

   (c) Quelle interprétation géométrique peut-on donner de ce résultat ?

**Exercice 3.** **/1.5**

Soit $a$, $b$ et $c$ trois nombres complexes de module 1.

Démontrer que $|a + b + c| = |ab + ac + bc|$.

**Aide :** $|z|^2 = z\overline{z}$