
Correction exercice n°3

Partie A

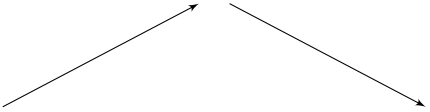
1. g est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout réel x :

$$\begin{aligned} g'(x) &= -e^x + (1-x)e^x \\ &= -xe^x \end{aligned}$$

On étudie le signe de $g'(x)$ sur \mathbb{R} .

$$g'(x) = 0 \iff x = 0.$$

On en déduit le tableau de signes de $g'(x)$ sur \mathbb{R} :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
signe de $g'(x)$	+	0	-
variations de g			

La fonction g est donc strictement croissante sur $] -\infty; 0]$ et strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.

2. Sur $[1, 27; 1, 28]$:

- la fonction g est continue car dérivable;
- la fonction g est strictement décroissante;
- $0 \in [1 + (1 - 0, 28)e^{0,28}; 1 + (1 - 0, 27)e^{0,27}]$ intervalle image de l'intervalle $[1, 27; 1, 28]$ par la fonction g , d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[1, 27; 1, 28]$.

3. On a $g(x) = e^x - xe^x + 1$.

Or $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$ (limite de cours) et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ d'où $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 1$.

La fonction g est strictement croissante sur $] -\infty; 0]$ on en déduit que $g(x) > 1$ sur $] -\infty; 0]$.

La fonction g est donc strictement positive sur $] -\infty; 0]$.

D'après la question précédente $g(x) > 0$ sur $]0; \alpha[$ et $g(x) < 0$ sur $] \alpha; +\infty[$.

La fonction g est continue et est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$. De plus, $g(\alpha) = 0$, on peut en déduire le tableau de signes de g sur $]0; +\infty[$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
signe de $g(x)$	+	0	-

Partie B

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ d'après le cours.

Pour la fonction f , on a une forme indéterminée du type « $\frac{\infty}{\infty}$ » donc on change d'écriture.
Pour tout réel $x > 0$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x}{e^x + 1} + 2 \\ &= \frac{1}{\frac{e^x}{x} + \frac{1}{x}} + 2 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{par somme des limites} \\ \Rightarrow \end{array} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} + \frac{1}{x} = +\infty.$$

Et donc par inverse des limites puis par somme :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2}.$$

On en déduit que la droite d'équation $y = 2$ est asymptote horizontale à \mathcal{C} au voisinage de $+\infty$.

2. (a) On a :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x + 1 = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{par quotient des limites} \\ \Rightarrow \end{array} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x + 1} = -\infty.$$

D'où :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty}.$$

- (b) On pose $d(x) = f(x) - (x + 2)$ et on étudie le signe de $d(x)$ sur \mathbb{R} .

$$\begin{aligned} d(x) &= f(x) - (x + 2) \\ &= \frac{x}{e^x + 1} + 2 - x - 2 \\ &= \frac{x}{e^x + 1} - x \\ &= \frac{-xe^x}{e^x + 1} \end{aligned}$$

Pour tout réel x on a $e^x > 0$ et $e^x + 1 > 0$ donc $d(x)$ a le même signe que $-x$ sur \mathbb{R} .

- Si $x < 0$ on a $d(x) > 0$ donc \mathcal{C} est située au dessus de \mathcal{D} .
- Si $x = 0$ on a $d(x) = 0$: \mathcal{C} et \mathcal{D} sont sécantes.
- Si $x > 0$ on a $d(x) < 0$ donc \mathcal{C} est située en dessous de \mathcal{D} .

3. (a) f est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout réel x ,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1 \times (e^x + 1) - x \times e^x}{(e^x + 1)^2} \\ &= \frac{e^x + 1 - xe^x}{(e^x + 1)^2} \\ &= \frac{1 + (1 - x)e^x}{(e^x + 1)^2} \\ &= \frac{g(x)}{(e^x + 1)^2} \end{aligned}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $(e^x + 1)^2 > 0$ ce qui prouve que $f'(x)$ est du signe de $g(x)$ sur \mathbb{R} .

(b) $f(\alpha) = \frac{\alpha}{e^\alpha + 1} + 2.$

Or on sait que $g(\alpha) = 0$ d'après la partie A donc $e^\alpha = \frac{1}{\alpha - 1}$ vu que $\alpha \neq 1$. Ainsi

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \frac{\alpha}{\frac{1}{\alpha - 1} + 1} + 2 \\ &= \frac{\alpha}{\frac{1}{\alpha - 1} + \frac{\alpha - 1}{\alpha - 1}} + 2 \\ &= \frac{\alpha}{\frac{\alpha}{\alpha - 1}} + 2 \\ &= \frac{\alpha - 1}{\alpha - 1} + 2 \\ &= \alpha + 1 \end{aligned}$$

On en déduit que $p = 1$ et $q = 1$.

(c) On peut donc dresser la tableau de variation complet de f sur \mathbb{R} :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
signe de $f'(x)$	+	0	-
variations de f	$-\infty$	$\alpha + 1$	2