Exercice 1. **/7**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$.
On pose $z_0 = 8$ et, pour tout entier naturel n :

$$z_{n+1} = \frac{3 - \mathrm{i}\sqrt{3}}{4} z_n.$$

On note A_n le point du plan d'affixe z_n.

1. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = |z_n|$.
   (a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n = 8 \times \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$.
   (b) Calculer la limite de la suite (u_n) et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
2. (a) Démontrer que, pour tout entier naturel k,
   $$\frac{z_{k+1} - z_k}{z_{k+1}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{i}.$$
   En déduire que, pour tout entier naturel k, on a l'égalité : $A_k A_{k+1} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \mathrm{O}A_{k+1}$.
   (b) Pour tout entier naturel n, on appelle ℓ_n la longueur de la ligne brisée reliant dans cet ordre les points $A_0,\ A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n$.
   On a ainsi : $\ell_{2022} = A_0A_1 + A_1A_2 + \ldots + A_{2021}A_{2022}$.
   Calculer la valeur exacte de ℓ_{2022}.

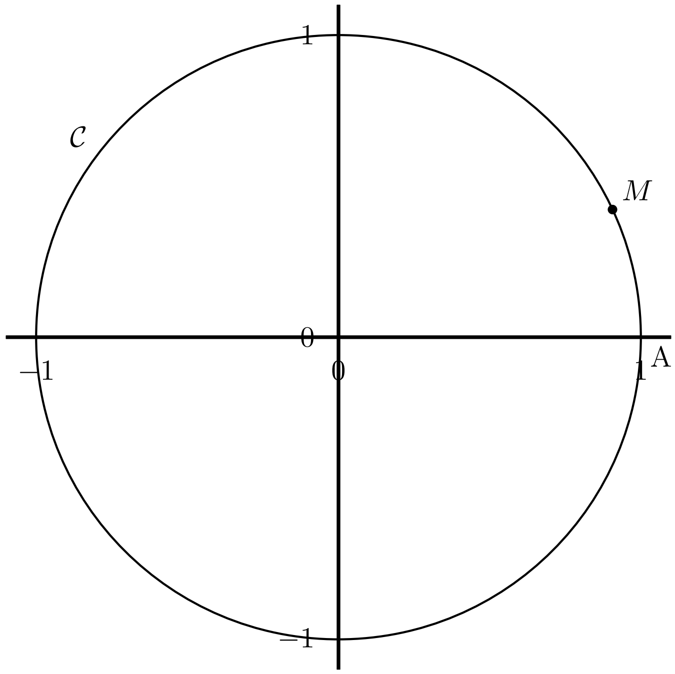
Exercice 2. **/5**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé. À tout point M d'affixe z, on associe le point M' d'affixe

$$z' = -z^2 + 2z.$$

Le point M' est appelé image du point M.

1. Soit M un point d'affixe z et M' son image d'affixe z'.
   On note N le point d'affixe $z_N = z^2$.
   Montrer que M est le milieu du segment $[NM']$.
2. Dans cette question, on suppose que le point M ayant pour affixe z, appartient au cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1. On note θ un argument de z.
   (a) Déterminer le module de chacun des nombres complexes z et z_N, ainsi qu'un argument de z_N en fonction de θ.
   (b) Sur la figure donnée ci-dessous, on a représenté un point M sur le cercle $\mathcal{C}$.
   Construire sur cette figure les points N et M' en utilisant une règle et un compas (on laissera les traits de construction apparents).
   (c) Soit A le point d'affixe 1. Quelle est la nature du triangle AMM' ?



Exercice 3. **/3**

Soit z et z' deux nombres complexes de module 1.
On suppose que $|2 + zz'| = 1$.
Démontrer alors que $zz' = -1$.