Exercice 1.

1. À l'aide de l'algorithme d'Euclide, on a successivement :

$$\begin{array}{rcl} 405 & = & 351\times 1+54 \\ 351 & = & 54\times 6+27 \\ 54 & = & 27\times 2+0 \end{array}$$

   Le dernier reste non nul est 27 donc le pgcd de 351 et 405 est 27.

2. Si d est un diviseur commun de 351 et 405 alors d doit donc diviser leur pgcd donc d divise 27.
   Tous les diviseurs positifs de 27 donc : 1 ; 3 ; 9 et 27.
   On en déduit alors que les diviseurs positifs communs de 351 et 405 sont 1 ; 3 ; 9 et 27.

Exercice 2.

1. Facile $\dfrac{b-a}{c-a}=\mathrm{i}$ qui est un imaginaire pur.
2. $\dfrac{b-a}{c-a}=\mathrm{i}$ donc $\dfrac{b-a}{c-a}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$.
3. On a $\left|\dfrac{b-a}{c-a}\right|=\dfrac{AB}{AC}=1$ donc $AB=AC$ et le triangle ABC est isocèle en A.
   De plus $\arg\left(\dfrac{b-a}{c-a}\right)=\arg(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}})=\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$ donc $(\overrightarrow{AC}\,;\overrightarrow{AB})=\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$ ce qui prouve que le triangle ABC est également rectangle en A : il est donc rectangle isocèle en A.

Exercice 3.

1. On a $(1+\mathrm{i})^2=2\mathrm{i}$ donc $(1+\mathrm{i})^4=(2\mathrm{i})^2=-4$.
2. $z^4=-4\Longleftrightarrow\left(\dfrac{z}{1+\mathrm{i}}\right)^4=1\Longleftrightarrow\dfrac{z_k}{1+\mathrm{i}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{k\pi}{2}},\ k\in[\![0\,;3]\!]\Longleftrightarrow z_k=(1+\mathrm{i})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{k\pi}{2}},\ k\in[\![0\,;3]\!]$.

   — Si $k=0$ on obtient $z=1+\mathrm{i}$.
   — Si $k=1$ on obtient $z=-1+\mathrm{i}$.
   — Si $k=2$ on obtient $z=-1-\mathrm{i}$.
   — Si $k=3$ on obtient $z=1-\mathrm{i}$.

   D'où $S_{\mathbb{C}}=\{1+\mathrm{i};-1+\mathrm{i};-1-\mathrm{i};1-\mathrm{i}\}$.

Exercice 4.

On pose $\omega=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{7}}$, $A=\omega+\omega^2+\omega^4$ et $B=\omega^3+\omega^5+\omega^6$.

1. $1+A+B=1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4+\omega^5+\omega^6$.
   Or,vu que $\omega\neq 0$ (somme de suite géométrique) :

$$\begin{array}{rcl} 1+A+B & = & \dfrac{1-\omega^7}{1-\omega} \\ & = & \dfrac{1-\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi}}{1-\omega} \\ & = & 0 \end{array}$$

De plus,

$$\begin{aligned}
AB &= (\omega+\omega^2+\omega^4)(\omega^3+\omega^5+\omega^6)\\
&= \omega^4+\omega^6+\omega^7+\omega^5+\omega^7+\omega^8+\omega^7+\omega^9+\omega^{10}\\
&= \omega^4(1+\omega^2+\omega^3+\omega+\omega^3+\omega^4+\omega^3+\omega^5+\omega^6)\\
&= \omega^4(1+A+B+2\omega^3) \quad \text{vu que} \quad 1+A+B=0\\
&= 2\omega^7\\
&= 2
\end{aligned}$$

2. On a $AB=2$ et $1+A+B=0$ donc $B=-1-A$ et donc $A(-1-A)=2$ soit $A^2+A+2=0$ qui est une équation du second degré dont le discriminant est $\Delta=-7<0$ donc cette équation a deux solutions complexes conjugués qui sont :

$$A_1=\frac{-1-\sqrt{7}\mathrm{i}}{2} \text{ ou } A_2=\frac{-1+\sqrt{7}\mathrm{i}}{2}.$$

Or $A=\omega+\omega^2+\omega^4$ donc $A=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{7}}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{7}}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{8\pi}{7}}$.

On a $\mathrm{Im}(A)=\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)+\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right)+\sin\left(\frac{8\pi}{7}\right)$.
Or $\sin\left(\frac{8\pi}{7}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)$ donc $\mathrm{Im}(A)=\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)+\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)$.
La fonction sin étant croissante, positive sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ et que $\frac{2\pi}{7}$ et $\frac{\pi}{7}$ sont des éléments de cet intervalle $\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)>\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)>0$ et enfin $\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right)>0$ vu que $\frac{4\pi}{7}\in\left]0\,;\pi\right[$ on a $\mathrm{Im}(A)>0$.

Ainsi $A=\frac{-1+\sqrt{7}\mathrm{i}}{2}$ et $B=-1-A=\frac{-1-\sqrt{7}\mathrm{i}}{2}=\overline{A}$.