Exercice 1.

1. Les coefficients sont : 1 4 6 4 1.
2. On a :

$$\begin{aligned}(1+2\text{i})^4 &= 1\times 1^4(2\text{i})^0+4\times 1^3(2\text{i})^1+6\times 1^2(2\text{i})^2+4\times 1^1(2\text{i})^3+1\times 1^0(2\text{i})^4\\ &= 1+8\text{i}-24-32\text{i}+16\\ &= -7-24\text{i}\end{aligned}$$

Exercice 2.

1. $2z^2+2z+5=0$ $\Delta=2^2-4\times 2\times 5=-36=(6\text{i})^2$.
   $\Delta<0$: l'équation a donc deux solutions complexes conjuguées : $z_1=\dfrac{-2-6\text{i}}{4}=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}\text{i}$ et $z_2=\overline{z_1}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}\text{i}$ donc $\mathscr{S}_{\mathbb{C}}=\left\{-\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}\text{i}\,;\,-\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}\text{i}\right\}$.
2. $\text{i}z=\sqrt{3}z^2\iff z(\text{i}-\sqrt{3}z)=0$.
   Or $z(\text{i}-\sqrt{3}z)=0\iff z=0\quad\text{ou}\quad z=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\text{i}$ donc $\mathscr{S}_{\mathbb{C}}=\left\{0\,;\,\dfrac{\sqrt{3}}{3}\text{i}\right\}$
3. $16z^2+25=0\iff z^2=-\dfrac{25}{16}=\left(\dfrac{5}{4}\text{i}\right)^2$.
   $z^2=\left(\dfrac{5}{4}\text{i}\right)^2\iff z=\pm\dfrac{5}{4}\text{i}$ donc $\mathscr{S}_{\mathbb{C}}=\left\{-\dfrac{5}{4}\text{i}\,;\,\dfrac{5}{4}\text{i}\right\}$.

Exercice 3.

On considère le polynôme défini sur $\mathbb{C}$ par $P(z)=z^3+4z^2+2z-28$.

1. $P(2)=0$ donc 2 est racine de P.
2. On trouve $P(z)=(z-2)(z^2+6z+14)$.
3. **a.** On résout les équations $z-2=0$ et $z^2+6z+14=0$. On obtient $\mathscr{S}_{\mathbb{C}}=\left\{2\,;\,-3-\sqrt{5}\text{i}\,;\,-3+\sqrt{5}\text{i}\right\}$.
   b. Pour tout complexe z, $P(z)=(z-2)(z+3+\sqrt{5}\text{i})(z+3-\sqrt{5}\text{i})$.

Exercice 4.

À tout nombre complexe z, on associe le nombre complexe $z'=\dfrac{2\text{i}-z^2}{z\overline{z}+1}$.

1. Pour tout complexe z, z' réel $\iff\overline{z'}=z'$.
   $\overline{z'}=z'\iff\dfrac{-2\text{i}-\overline{z}^2}{\overline{z}z+1}=\dfrac{2\text{i}-z^2}{z\overline{z}+1}\iff -2\text{i}-\overline{z}^2=2\text{i}-z^2\iff z^2-\overline{z}^2=4\text{i}\iff(z-\overline{z})(\overline{z}+z)=4\text{i}$.
2. On pose $z=x+\text{i}y$ avec $(x\,;\,y)\in\mathbb{R}^2$.
   $(z-\overline{z})(\overline{z}+z)=4\text{i}\iff 2\text{i}y\times 2x=4\text{i}\iff xy=1\iff y=\dfrac{1}{x}\quad\text{et}\quad x\neq 0$.
   On en déduit que z' est réel si et seulement si le point M appartient à l'hyperbole d'équation $y=\dfrac{1}{x}$.

Exercice 5.

1. $(1-3\text{i})^2=-8-6\text{i}$.
2. $z^2-4\text{i}z=(z-2\text{i})^2+4$.
   $z^2-4\text{i}z+4+6\text{i}=0\iff(z-2\text{i})^2+8+6\text{i}=0\iff(z-2\text{i})^2-(1-3\text{i})^2=0\iff(z+1-5\text{i})(z-1+\text{i})=0$
   $\iff z=-1+5\text{i}\quad\text{ou}\quad z=1-\text{i}$ donc $\mathscr{S}_{\mathbb{C}}=\{-1+5\text{i}\,;\,1-\text{i}\}$.