Question de cours.

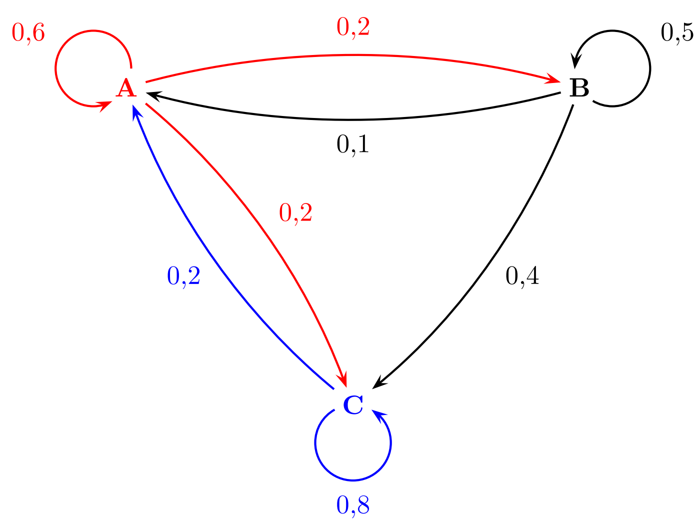
1. Pour tous réels a et b on a $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$ et $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$.
2. On a :

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha}{2} &= \frac{1}{2\sin\left(\frac{\pi}{18}\right)} - \frac{\sqrt{3}}{2\cos\left(\frac{\pi}{18}\right)} \\
&= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{18}\right)} - \frac{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{18}\right)} \\
&= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\pi}{18}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{18}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{18}\right)\cos\left(\frac{\pi}{18}\right)} \\
&= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{18}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{18}\right)\cos\left(\frac{\pi}{18}\right)} \\
&= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{9}\right)}{\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{9}\right)} \quad \text{car} \quad \sin\left(\frac{2\pi}{18}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{9}\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{18}\right)\cos\left(\frac{\pi}{18}\right) \\
&= 2
\end{aligned}$$

donc $\alpha = 4$ ahahahahh!!!!

Exercice 1.

1. On représente la situation à l'aide d'un graphe probabiliste de sommets A, B et C :



2. La matrice de transition associée à ce graphe est : $M = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 & 0,2 \\ 0,1 & 0,5 & 0,4 \\ 0,2 & 0 & 0,8 \end{pmatrix}$

3. $N_2 = N_1 \times M = N_0 \times M \times M = N_0 \times M^2 = \begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,42 & 0,22 & 0,36 \\ 0,19 & 0,27 & 0,54 \\ 0,28 & 0,04 & 0,68 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 42 & 22 & 36 \end{pmatrix}$

   On peut donc dire que, lors de la deuxième minute, il y a 42 internautes sur le site A, 22 sur le site B et 36 sur le site C.

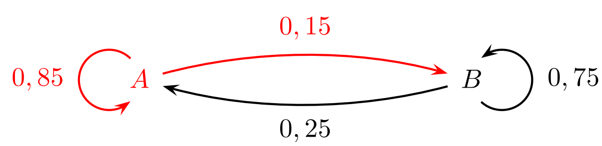
4. (a) $\begin{pmatrix} 31,25 & 12,5 & 56,25 \end{pmatrix} \times M = \begin{pmatrix} 31,25 & 12,5 & 56,25 \end{pmatrix}$ donc $E \times M = E$.

(b) On a $31,25+12,5+56,25=100$ donc $\dfrac{1}{100}E\times M=\dfrac{1}{100}E$: ainsi la matrice $\dfrac{1}{100}E=\begin{pmatrix}0,3125 & 0,125 & 0,5625\end{pmatrix}$ désigne l'état probabiliste stable du système. À long terme, l'internaute sera connecté avec le lien A avec la probabilité $0,3125$, contre $0,125$ avec le lien B et $0,5625$ avec le lien C.

Exercice 2.

Partie A

1. On représente le graphe probabiliste de cette situation en prenant les sommets dans l'ordre alphabétique :



La matrice de transition du système est $M=\begin{pmatrix}0,85 & 0,15\\0,25 & 0,75\end{pmatrix}$.

2. On pose $\pi=\begin{pmatrix}x & 1-x\end{pmatrix}$ la matrice représentant l'état probabiliste stable du système.
On sait que $\pi=\pi\times M$.
Or $\pi=\pi\times M \iff \begin{pmatrix}x & 1-x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x & 1-x\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0,85 & 0,15\\0,25 & 0,75\end{pmatrix}$
$\iff x=0,85x+0,25(1-x)\iff x=0,85x+0,25-0,25x\iff x=0,625$.

Conclusion : la matrice représentant l'état probabiliste stable est la matrice $\pi=\begin{pmatrix}0,625 & 0,375\end{pmatrix}$.

3. L'état stable est l'état limite du système, donc la probabilité que le client soit sous contrat avec l'entreprise Alphacopy va tendre vers $0,625$ soit $62,5\,\%$; l'entreprise Alphacopy va donc dépasser à un moment donné le seuil des $62\,\%$ et ainsi atteindre son objectif.

Partie B

1. On a $\pi_0=\begin{pmatrix}0,46 & 0,54\end{pmatrix}$.

2. Pour tout entier naturel n, $\pi_{n+1}=\pi_n\times M$ donc $\begin{pmatrix}a_{n+1} & b_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_n & b_n\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0,85 & 0,15\\0,25 & 0,75\end{pmatrix}$ soit
$\begin{pmatrix}a_{n+1} & b_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,85a_n+0,25b_n & 0,15a_n+0,75b_n\end{pmatrix}$.
En identifiant les premières composantes, il vient pour tout entier naturel n, $a_{n+1}=0,85a_n+0,25b_n$.
Or, pour tout n, $a_n+b_n=1$, donc

$$\begin{aligned}a_{n+1}&=0,85a_n+0,25(1-a_n)\\&=0,85a_n+0,25-0,25a_n\\&=0,60a_n+0,25\end{aligned}$$

3. Voici le programme complété :

```
def seuil():
  n=0
  a=0.46
  While a<0.62 :
      n=n+1
      a=0.6a+0.25
  return 2017+n
```