Exercice 1 **/3**

À l'aide d'un tableau de congruences, déterminer l'ensemble des entiers x tels que $x^2 \equiv 3x$ [5].

Exercice 2 **/4**

1. **a.** Vérifier que $9^2 \equiv -4$ [17].

b. En déduire que $9^8 \equiv 1$ [17].

2. Montrer que $2015^{2015} - 2$ est divisible par 17.

Exercice 3 **/4**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $A_n = 6^n + 13^{n+1}$.

1. Vérifier que A_0 est divisible par 7.

2. En utilisant les congruences, démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, A_n est divisible par 7.

Exercice 4 **/6**

On considère l'équation $(E)\ :\ x^2 + y^2 - 8z = 6$ où x, y et z sont des entiers.

On suppose que $(a\,;\,b\,;\,c) \in \mathbb{Z}^3$ est solution de (E).

1. Montrer que $a^2 + b^2 \equiv 6$ [8].

2. **a.** Soit $n \in \mathbb{Z}$. Compléter (directement sur l'énoncé) le tableau suivant :

$n \equiv \dots$ [8]	0	1	2	3	4	5	6	7
$n^2 \equiv \dots$ [8]								

b. Déduire de la question précédente les restes possibles dans la division euclidienne de $a^2 + b^2$ par 8.

c. Que peut-on conclure des questions précédentes à propos de l'équation (E) ?

Exercice 5 **/3**

On pose $A = 7^{7^{7^{7^{7}}}}$.

Le but de l'exercice est de déterminer le chiffre des unités dans l'écriture décimale de A.

1. **a.** Quel est le reste de 7^4 modulo 10 ?

b. En déduire, suivant les valeurs de $n \in \mathbb{N}$, le reste dans la division euclidienne de 7^n par 10.

2. Déterminer, pour tout $m \in \mathbb{N}$, le reste de 7^m modulo 4 en fonction de la parité de m.
Vous distinguerez donc les deux cas : m pair et m impair.

3. On pose $B = 7^{7^{7}}$. Quelle est la parité de B ?

4. Déduire des questions précédentes le chiffre des unités dans l'écriture décimale de A.