Exercice 1. **/4**

1. Écrire la matrice carrée d'ordre 3 telle que pour tous entiers naturels $1 \leqslant i \leqslant 3$ et $1 \leqslant j \leqslant 3$:

$$a_{ij} = \begin{cases} i & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i < j, \\ -1 & \text{si } i > j \end{cases}$$

2. Soit la matrice $A = (a_{ij})$ telle que $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

   Calculer les sommes suivantes :

   (a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{3} a_{i3}$

   (b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{4} a_{ii}$

Exercice 2. **/4**

Soient A et B deux matrices carrées non nulles d'ordre p telles que $A + B = I_p$.
Soit M une matrice carrée d'ordre p telle qu'il existe deux réels non nuls et distincts λ et μ tels que : $M = \lambda A + \mu B$ et $M^2 = \lambda^2 A + \mu^2 B$.

1. Démontrer que $(M - \lambda I_p)(M - \mu I_p) = 0_p$ où 0_p désigne la matrice nulle carré d'ordre p.
2. En déduire que $BA = 0_p$.

Exercice 3. **/6**

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -3 & \dfrac{1}{2} & -3 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$. On note $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice identité d'ordre 3.

1. Vérifier l'égalité $2M^2 + M = I$.
2. En déduire que M est inversible et exprimer M^{-1} en fonction des matrices I et M.
3. Calculer M^{-1}.
4. Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système : $\begin{cases} x - y + 2z & = & 1 \\ -3x + \frac{1}{2}y - 3z & = & 2 \\ -2x + y - 3z & = & 3 \end{cases}$

Exercice 4 **/6**

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0,6 & -0,2 \\ 0,2 & 0,6 \end{pmatrix}$ ainsi que la matrice colonne $Z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans laquelle x et y sont des nombres réels vérifiant $N(Z) = x^2 + y^2 = 1$ et $xy > 0$.

1. Montrer que $0 \leqslant N(AZ) \leqslant \dfrac{1}{2} N(Z)$.
2. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant N(A^n Z) \leqslant \dfrac{1}{2^n}$.
3. En déduire $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} N(A^n Z)$.