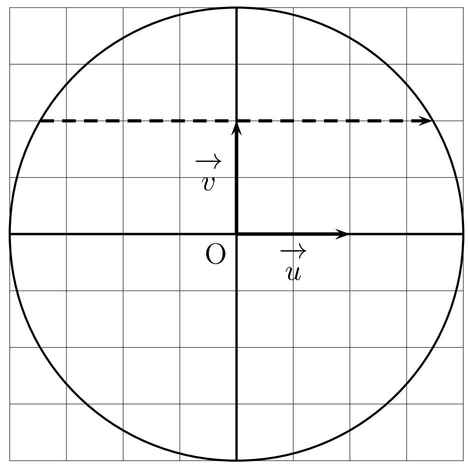
Exercice 1.

1. On a facilement $z_A = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$, $z_B = 2\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right]$ et enfin $z_C = 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$.
2. $|z_A| = |z_B| = |z_C| = 2$ donc $OA = OB = OC = 2$ donc les points A, B et C appartiennent au cercle de centre O et de rayon 2.
3. Voici la figure attendue :



Exercice 2. **/4.5**

On définit la suite de nombres complexes (z_n) de la manière suivante : $z_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$z_{n+1} = \frac{1}{3}z_n + \frac{2}{3}\mathrm{i}.$$

On se place dans un plan muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.

- Pour tout entier naturel n, on note A_n le point du plan d'affixe z_n.
- Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = z_n - \mathrm{i}$ et on note B_n le point d'affixe u_n.
- On note C le point d'affixe i.

1. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n, pour tout entier naturel n.
2. Démontrer que, pour tout entier naturel n,

$$u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n (1 - \mathrm{i}).$$

3. (a) Pour tout entier naturel n, calculer, en fonction de n, le module de u_n.

   (b) Démontrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \left|z_n - \mathrm{i}\right| = 0.$$

   (c) Quelle interprétation géométrique peut-on donner de ce résultat ?

Exercice 3. **/1.5**

Soit a, b et c trois nombres complexes de module 1.

Démontrer que $|a + b + c| = |ab + ac + bc|$.