Exercice 1. On donne le nombre complexe $z = \dfrac{8+4\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$.

1. $z = \dfrac{8+4\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$ donc $z = \dfrac{(8+4\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}{2}$ soit $z = (4+2\mathrm{i})(1+\mathrm{i})$ c'est-à-dire $\boxed{z = 2+6\mathrm{i}}$.

2. $\dfrac{8+4\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} + \dfrac{8-4\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} = 2+6\mathrm{i}+2-6\mathrm{i}$ soit $\boxed{\dfrac{8+4\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} + \dfrac{8-4\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} = 4}$.

Exercice 2.

1. $\mathscr{S}_{\mathbb{C}} = \left\{\dfrac{12}{29} - \dfrac{1}{29}\mathrm{i}\right\}$.

2. $\mathscr{S}_{\mathbb{C}} = \{1+\mathrm{i}\,;\,4+\mathrm{i}\}$.

3. $\mathscr{S}_{\mathbb{C}} = \left\{\dfrac{2}{5} + \mathrm{i}\right\}$.

Exercice 3.

Soient z et Z deux complexes tels que $Z = z^2 - \overline{z} + 1$. On pose $z = x + \mathrm{i}y$ avec $(x\,;\,y) \in \mathbb{R}^2$.

1. $Z = (x+\mathrm{i}y)^2 - (x - \mathrm{i}y) + 1$ donc $Z = x^2 + 2xy\mathrm{i} - y^2 - x + y\mathrm{i} + 1$ d'où :

$$Z = x^2 - x - y^2 + 1 + \mathrm{i}(2xy + y).$$

2. Z réel $\iff \mathrm{Im}(z) = 0 \iff 2xy + y = 0 \iff y(2x+1) = 0 \iff y = 0 \quad \text{ou} \quad x = -\frac{1}{2}$.

3. Z soit imaginaire pur $\iff \mathrm{Re}(z) = 0 \iff x^2 - x - y^2 + 1 = 0$.
On fixe, par exemple x : si $x = 0$ on a alors $y^2 = 1$ soit $y = 1$ ou $y = -1$ et donc une proposition possible est i et $-$i.

Exercice 4.

1. Soit z un complexe non nul. On pose $Z = \dfrac{1}{\overline{z}} + \dfrac{1}{z}$.

a. $\overline{Z} = \overline{\dfrac{1}{\overline{z}} + \dfrac{1}{z}}$ soit $\overline{\left(\dfrac{1}{\overline{z}}\right)} + \overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)}$ c'est-à-dire $\overline{Z} = \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{\overline{z}}$ et par suite $\overline{Z} = Z$.

b. $\overline{Z} = Z$ donc Z est réel.

2. On considère de nouveau un complexe z non nul.
Avec un raisonnement analogue : $\overline{Z'} = \dfrac{\overline{z} - z}{\overline{z} \times z} = -Z'$ ce qui prouve que Z' est un imaginaire pur.

Exercice 5.

1. On a :

$$\begin{array}{rcl} P(a+\mathrm{i}b) & = & (a+\mathrm{i}b)^2 - 2a(a+\mathrm{i}b) + a^2 + b^2 \\ & = & a^2 + 2ab\mathrm{i} - b^2 - 2a^2 - 2ab\mathrm{i} + a^2 + b^2 \\ & = & 0 \end{array}$$

2. $\forall z \in \mathbb{C}$,

$$\begin{array}{rcl} P(\overline{z}) & = & (\overline{z})^2 - 2a\overline{z} + a^2 + b^2 \\ & = & \overline{z^2} - \overline{2a}\,\overline{z} + \overline{a^2+b^2} \quad \text{car} \quad \overline{2a} = 2a,\ \overline{a^2+b^2} = a^2 + b^2 \\ & = & \overline{z^2 - 2az + a^2 + b^2} \\ & = & \overline{P(z)} \end{array}$$

3. On a démontré que $z = a + \mathrm{i}b$ est une racine de P. On utilise la relation précédente avec $z = a + \mathrm{i}b$.
Il vient : $P(\overline{a+\mathrm{i}b}) = \overline{P(a+\mathrm{i}b)}$. Or $P(a+\mathrm{i}b) = 0$ d'après la question 1.
Ainsi $P(\overline{a+\mathrm{i}b}) = \overline{0} = 0$ ce qui démontre que $\overline{a+\mathrm{i}b} = a - \mathrm{i}b$ est une autre racine de P.

Exercice 1. On donne le nombre complexe $z = \dfrac{6-2\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$.

1. $z = \dfrac{6-2\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$ donc $z = \dfrac{(6-2\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{2}$ soit $z = (3-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})$ c'est-à-dire $\boxed{z = 4+2\mathrm{i}}$.

2. $\dfrac{6-2\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} - \dfrac{6+2\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} = 4+2\mathrm{i}-(4-2\mathrm{i})$ soit $\boxed{\dfrac{6-2\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} - \dfrac{6+2\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} = 4\mathrm{i}}$.

Exercice 2.

1. $\mathscr{S}_{\mathbb{C}} = \left\{\dfrac{11}{17} - \dfrac{7}{17}\mathrm{i}\right\}$.

2. $\mathscr{S}_{\mathbb{C}} = \{1+2\mathrm{i}\,;\,5-\mathrm{i}\}$.

3. $\mathscr{S}_{\mathbb{C}} = \left\{2 - \dfrac{1}{5}\mathrm{i}\right\}$.

Exercice 3.

Soient z et Z deux complexes tels que $Z = z^2 + \overline{z} + 1$. On pose $z = x + \mathrm{i}y$ avec $(x\,;\,y) \in \mathbb{R}^2$.

1. $Z = (x+\mathrm{i}y)^2 + x - \mathrm{i}y + 1$ donc $Z = x^2 + 2xy\mathrm{i} - y^2 + x - y\mathrm{i} + 1$ d'où :

$$Z = x^2 + x - y^2 + 1 + \mathrm{i}(2xy - y).$$

2. Z réel $\Longleftrightarrow \mathrm{Im}(z) = 0 \Longleftrightarrow 2xy - y = 0 \Longleftrightarrow y(2x-1) = 0 \Longleftrightarrow y = 0 \quad \text{ou} \quad x = \frac{1}{2}$.

3. Z soit imaginaire pur $\Longleftrightarrow \mathrm{Re}(z) = 0 \Longleftrightarrow x^2 + x - y^2 + 1 = 0$.
On fixe, par exemple x : si $x = 0$ on a alors $y^2 = 1$ soit $y = 1$ ou $y = -1$ et donc une proposition possible est i et $-$i.

Exercice 4.

1. Soit z un complexe non nul. On pose $Z = \dfrac{1}{z} - \dfrac{1}{\overline{z}}$.

a. $\overline{Z} = \overline{\dfrac{1}{z} - \dfrac{1}{\overline{z}}}$ soit $\left(\overline{\dfrac{1}{z}}\right) - \overline{\left(\dfrac{1}{\overline{z}}\right)}$ c'est-à-dire $\overline{Z} = \dfrac{1}{\overline{z}} - \dfrac{1}{z}$ et par suite $\overline{Z} = -Z$.

b. $\overline{Z} = -Z$ donc Z est imaginaire pur.

2. On considère de nouveau un complexe z non nul.
Avec un raisonnement analogue : $\overline{Z'} = \dfrac{\overline{z} + z}{\overline{z} \times z} = Z'$ ce qui prouve que Z' est réel.

Exercice 5.

1. On a :

$$\begin{aligned} P(a - \mathrm{i}b) &= (a-\mathrm{i}b)^2 - 2a(a-\mathrm{i}b) + a^2 + b^2 \\ &= a^2 - 2ab\mathrm{i} - b^2 - 2a^2 + 2ab\mathrm{i} + a^2 + b^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

2. $\forall z \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} P(\overline{z}) &= (\overline{z})^2 - 2a\overline{z} + a^2 + b^2 \\ &= \overline{z^2} - \overline{2a}\overline{z} + \overline{a^2+b^2} \quad \text{car} \quad \overline{2a} = 2a,\ \overline{a^2+b^2} = a^2+b^2 \\ &= \overline{z^2 - 2az + a^2 + b^2} \\ &= \overline{P(z)} \end{aligned}$$

3. On a démontré que $z = a - \mathrm{i}b$ est une racine de P. On utilise la relation précédente avec $z = a - \mathrm{i}b$.
Il vient : $P(\overline{a-\mathrm{i}b}) = \overline{P(a-\mathrm{i}b)}$. Or $P(a-\mathrm{i}b) = 0$ d'après la question 1.
Ainsi $P(\overline{a-\mathrm{i}b}) = \overline{0} = 0$ ce qui démontre que $\overline{a-\mathrm{i}b} = a + \mathrm{i}b$ est une autre racine de P.