

## Semaine du 06 mai 2024

Soit  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$  par

$$f(x) = (x - 1)(2 - e^{-x}).$$

Sa courbe représentative  $\mathcal{C}$  est tracée dans le repère orthonormal ci-dessous (unité graphique 2 cm).

1. **a.** Calculer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .  
**b.** Étudier la position relative de  $\mathcal{C}$  et de la droite  $\Delta$  d'équation  $y = 2x - 2$ .  
**c.** Représenter  $\Delta$  ci-dessous.
2. **a.** Calculer  $f'(x)$  et montrer que  $f'(x) = xe^{-x} + 2(1 - e^{-x})$ .  
**b.** En déduire que, pour tout réel  $x$  strictement positif,  $f'(x) > 0$ .  
**c.** Préciser la valeur de  $f'(0)$ , puis établir le tableau de variations de  $f$ .
3. À l'aide d'une intégration par parties, calculer l'aire, exprimée en  $\text{cm}^2$ , du domaine plan limité par la courbe  $\mathcal{C}$ , la droite  $\Delta$  et les droites d'équations  $x = 1$  et  $x = 3$ .
4. **a.** Déterminer le point A de  $\mathcal{C}$  où la tangente à  $\mathcal{C}$  est parallèle à  $\Delta$ .  
**b.** Calculer la distance, exprimée en cm, du point A à la droite  $\Delta$ .

