Exercice 1.

On raisonne modulo 5. Pour cela, on utilise un tableau de congruences :

$x \equiv \dots\ [5]$	0	1	2	3	4
$x^2 \equiv \dots\ [5]$	0	1	4	4	1
$3x \equiv \dots\ [5]$	0	3	1	4	2

$x^2 \equiv 3x\ [5] \iff x \equiv 0\ [5] \quad \text{ou} \quad x \equiv 3\ [5]$.

Conclusion : $\boxed{x \equiv 0\ [5] \quad \text{ou} \quad x \equiv 3\ [5]}$.

Exercice 2.

1. a. $9^2 - (-4) = 85$ et $85 = 5 \times 17$ donc $9^2 - (-4) \equiv 0\ [17]$ soit $\boxed{9^2 \equiv -4\ [17]}$.

b. On a $9^4 = (9^2)^2$. Or $9^2 \equiv -4\ [17]$ donc $9^4 \equiv -1\ [17]$.

Ainsi $9^8 = (9^4)^2$ donc : $\boxed{9^8 \equiv 1\ [17]}$.

2. On a $2015 = 17 \times 118 + 9$ donc $2015 \equiv 9\ [17]$ puis $2015^{2015} \equiv 9^{2015}\ [17]$.
$2015 = 8 \times 251 + 7$ donc $9^{2015} = (9^8)^{251} \times 9^7$.
Or $9^8 \equiv 1\ [17]$ d'où $(9^8)^{251} \equiv 1\ [17]$ et par suite $9^{2015} \equiv 9^7\ [17]$.
Enfin $9^7 = 9^4 \times 9^2 \times 9 \equiv -1 \times (-4) \times 9\ [17]$ soit $9^7 \equiv 2\ [17]$.
On en déduit donc que $2015^{2015} - 2 \equiv 0\ [17]$ ce qui prouve que $2015^{2015} - 2$ est divisible par 17.

Exercice 3.

1. $A_0 = 14 = 7 \times 2$ donc A_0 est divisible par 7.

2. $6 \equiv -1\ [7]$ donc pour tout entier naturel n, $6^n \equiv (-1)^n\ [7]$.
De même $13 \equiv -1\ [7]$ donc $13^{n+1} \equiv (-1)^{n+1}\ [7]$.
Par addition : $A_n \equiv (-1)^n + (-1)^{n+1}\ [7]$.
Or pour tout entier naturel n, $(-1)^n + (-1)^{n+1} = (-1)^n(1 + (-1)) = 0$.

Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n \equiv 0\ [7]$ ce qui justifie que A_n est divisible par 7.

Exercice 4.

1. On suppose que $(a\,;\,b\,;\,c) \in \mathbb{Z}^3$ est solution de (E) on a donc $a^2 + b^2 - 8c = 6$.

On raisonne modulo 8 : $8c \equiv 0\ [0]$ d'où $\boxed{a^2 + b^2 \equiv 6\ [8]}$.

2. a. Voici le tableau complété :

$n \equiv \dots\ [8]$	0	1	2	3	4	5	6	7
$n^2 \equiv \dots\ [8]$	0	1	4	1	0	1	4	1

b. On constate que les restes possibles pour pour un carré modulo 8 sont 0, 1 et 4. Pour déterminer les restes possibles de $a^2 + b^2$ modulo 8, faisons un tableau à double entrée :

	0	1	4
0	0	1	4
1	1	2	5
4	4	5	0

Ainsi les restes possibles dans la division euclidienne de $a^2 + b^2$ par 8 sont donc 0, 1, 2, 4 et 5.

c. D'après la question 1, on devait avoir $a^2 + b^2 \equiv 6$ [8] ce qui induirait que le reste dans la division euclidienne de $a^2 + b^2$ par 8 serait 6 ce qui est en contradiction avec la question précédente : l'équation initiale n'a donc pas de solution entière.

Exercice 5.

1. a. $7^2 = 49 \equiv -1$ [10] donc $7^4 \equiv (-1)^4$ [10] soit $\boxed{7^4 \equiv 1\ [10]}$.

b. Les restes dans la division euclidienne de n par 4 sont 0, 1, 2 et 3.

- Si $r = 0$ on a $n = 4k$ avec $k \in \mathbb{N}$ et $7^n = 7^{4k} = (7^4)^k$.
  Or $7^4 \equiv 1$ [10] donc $(7^4)^k \equiv 1$ [10] et dans ce cas $\boxed{7^n \equiv 1\ [10]}$.

- Si $r = 1$ on a $n = 4k + 1$ avec $k \in \mathbb{N}$ et $7^{4k+1} = 7^{4k} \times 7$.
  Or $7^{4k} \equiv 1$ [10] donc $7^{4k+1} \equiv 7$ [10] et dans ce cas $\boxed{7^n \equiv 7\ [10]}$.

- Si $r = 2$ on a $n = 4k + 2$ avec $k \in \mathbb{N}$ et $7^{4k+2} = 7^{4k} \times 7^2$.
  Or $7^2 \equiv 9$ [10] donc $7^{4k+2} \equiv 9$ [10] et dans ce cas $\boxed{7^n \equiv 9\ [10]}$.

- Si $r = 3$ on a $n = 4k + 3$ avec $k \in \mathbb{N}$ et $7^{4k+3} = 7^{4k} \times 7^3$.
  Or $7^{4k+3} \equiv 3$ [10] donc $7^{4k+3} \equiv 3$ [10] et dans ce cas $\boxed{7^n \equiv 3\ [10]}$.

2.
- Si m est pair alors il existe un entier naturel p tel que $m = 2p$.
  $7^m = 7^{2p}$ et $7^{2p} = (7^2)^p$.
  Or $7^2 \equiv 1$ [4] d'où $\boxed{7^m \equiv 1\ [4]}$.
- Si m est impair alors il existe un entier naturel p tel que $m = 2p + 1$.
  $7^m = 7^{2p} \times 7$ donc $\boxed{7^m \equiv 3\ [4]}$.

3. Le nombre B est de la forme 7^C avec $C = 7^7$ donc B est le produit de C nombres impairs (tous égaux à 7) donc B est impair.

4. On a $A = 7^{7^B}$. Comme B est impair, d'après la question 2, le reste de 7^B modulo 4 est 3 et donc, d'après la question 1, $7^{7^B} \equiv 3[10]$.
Or, $7^{7^B} = 7^{7^{7^{7^7}}} = A$ donc $A \equiv 3$ [10] ce qui prouve que le chiffre des unités de A est 3.