Exercice 1.

1. Voici la matrice carrée d'ordre 3 voulue :
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Soit la matrice $A = (a_{ij})$ telle que $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

   (a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{3} a_{i3} = a_{13} + a_{23} + a_{33} = 1 + 0 + 0 = 1.$

   (b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{4} a_{ii} = a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{44} = 5 + 3 + 0 + 6 = 14.$

Exercice 2.

1. On a :
$$\begin{array}{rcl} (M - \lambda I_p)(M - \mu I_p) & = & M^2 - \mu M - \lambda M + \lambda\mu I_p \\ & = & M^2 - (\lambda + \mu)M + \lambda\mu I_p \\ & = & \lambda^2 A + \mu^2 B - (\lambda + \mu)(\lambda A + \mu B) + \lambda\mu I_p \\ & = & \cancel{\lambda^2 A} + \cancel{\mu^2 B} - \cancel{\lambda^2 A} - \lambda\mu B - \mu\lambda A - \cancel{\mu^2 B} + \lambda\mu I_p \\ & = & \lambda\mu(I_p - A - B) \\ & = & \lambda\mu 0_p \\ & = & 0_p \end{array}$$

2. On a $(M - \lambda I_p)(M - \mu I_p) = 0_p \iff (\lambda A + \mu B - \lambda I_p)(\lambda A + \mu B - \mu I_p) = 0_p$
   Or $A + B = I_p$ donc $A = I_p - B$ et $B = A - I_p$.
   Ainsi $(\lambda A + \mu B - \lambda I_p)(\lambda A + \mu B - \mu I_p) = 0_p \iff (\mu - \lambda)B \times (\lambda - \mu)A = 0_p$
   $\iff -(\lambda - \mu)^2 BA = 0_p \iff BA = 0_p$ vu que $\lambda \neq \mu$.

Exercice 3.

1. Facile.
2. $2M^2 + M = I \iff M(2M + I) = I(2M + I) = I$ ce qui justifie que la matrice M est inversible d'inverse $M^{-1} = 2M + I$.
3. $M^{-1} = 2M + I$ i.e $M^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -6 & 2 & -6 \\ -4 & 2 & -5 \end{pmatrix}$
4. $\left\{\begin{array}{lcl} x - y + 2z & = & 1 \\ -3x + \frac{1}{2}y - 3z & = & 2 \\ -2x + y - 3z & = & 3 \end{array}\right. \iff MX = B$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

   D'après la question précédente, la matrice M est inversible d'inverse $M^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -6 & 2 & -6 \\ -4 & 2 & -5 \end{pmatrix}$.

$$MX = B \Longleftrightarrow X = M^{-1}B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -6 & 2 & -6 \\ -4 & 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -20 \\ -15 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4.

1. On a déjà $AZ = \begin{pmatrix} 0,6 & -0,2 \\ 0,2 & 0,6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6x - 0,2y \\ 0,2x + 0,6y \end{pmatrix}$.
   Ainsi :

$$\begin{aligned} N(AZ) &= (0,6x - 0,2y)^2 + (0,2x + 0,6y)^2 \\ &= 0,36x^2 - 0,24xy + 0,04y^2 + 0,04x^2 + 0,24xy + 0,36y^2 \\ &= 0,4(x^2 + y^2) \\ &= 0,4 \end{aligned}$$

   On a donc $0 \leqslant N(AZ) \leqslant \dfrac{1}{2}N(Z)$ vu que $\dfrac{1}{2}N(Z) = \dfrac{1}{2}$.

2. On démontre ce résultat par récurrence. Soit $\mathscr{P}_n$: « $0 \leqslant N(A^nZ) \leqslant \dfrac{1}{2^n}$ ».

   Initialisation : On a $N(A^0Z) = N(Z) = 1$ et $\dfrac{1}{2^0} = 1$ ce qui prouve que $\mathscr{P}_0$ est bien vraie.
   Hérédité : supposons $\mathscr{P}_k$ vraie pour un entier naturel k quelconque,
   c'est-à-dire $0 \leqslant N(A^kZ) \leqslant \dfrac{1}{2^k}$.
   Or $N(A^{k+1}Z) = N(A \times A^kZ) \leqslant \dfrac{1}{2}N(A^kZ)$ d'après la question précédente.
   Par hypothèse de récurrence, $0 \leqslant N(A^kZ) \leqslant \dfrac{1}{2^k}$ d'où $0 \leqslant N(A^{k+1}Z) \leqslant \dfrac{1}{2^{k+1}}$ ce qui prouve que $\mathscr{P}_{k+1}$ est vraie.

   Conclusion : $\mathscr{P}_0$ est vraie et $\mathscr{P}_n$ est héréditaire à partir du rang $n = 0$. On en déduit que $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n, c'est-à-dire, $0 \leqslant N(A^nZ) \leqslant \dfrac{1}{2^n}$.

3. $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{2^n} = 0$ car $2 > 1$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} 0 = 0$ et donc d'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n \to +\infty} N(A^nZ) = 0.$$