**Exercice 1.**

On donne la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Le but de cet exercice est de décrire un procédé de codage d'un ***mot*** de deux lettres (partie A) à l'aide de la matrice $A$ puis de détailler une méthode de décodage de ce ***mot*** (partie C) en s'appuyant sur des résultats mathématiques établis dans la partie B.

Un ***mot*** de deux lettres est assimilé à une matrice colonne $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, où $x$ est le nombre correspondant à la première lettre du ***mot***, et $y$ le nombre correspondant à la deuxième lettre du ***mot***, selon le tableau de correspondance ci-après :

| A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |

| N | O | P | Q | R | S | T | U | V | W | X | Y | Z |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |

Ainsi par exemple, le ***mot*** « SI » est assimilé à la matrice $X = \begin{pmatrix} 18 \\ 8 \end{pmatrix}$

**Partie A**

Pour coder le ***mot*** assimilé à la matrice $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ on calcule la matrice $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ telle que $AX = U$, puis la matrice $C = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$, où les nombres $c$ et $d$ sont les restes respectifs de la division euclidienne par 26 des nombres $u$ et $v$.

Le ***mot*** codé en alors le ***mot*** de deux lettres assimilé à la matrice $C = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$, selon le tableau de correspondance précédent, c'est-à-dire que $c$ et $d$ sont les deux lettres du ***mot*** codé.

Déterminer le ***mot*** codé correspondant au ***mot*** « SI ».

**Partie B : deux résultats mathématiques**

On considère les matrices $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Justifier que $5 \times 21 \equiv 1$ modulo 26.
2. (a) Calculer le produit matriciel $B \times A$.

   (b) Soit $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ deux matrices quelconques à deux lignes et une colonne.

   Justifier que si $AX = U$, alors $5X = BU$.

**Partie C : décodage d'un *mot***

On souhaite décoder le ***mot*** « BE » associé à la matrice $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Si $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est la matrice associée au ***mot*** de départ ; la matrice $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ définie par l'égalité $AX = U$ a ses coefficients qui vérifient : $\left\{\begin{array}{lcl} u & \equiv & 1 \text{ modulo } 26 \\ v & \equiv & 4 \text{ modulo } 26 \end{array}\right.$ d'après la **partie A**.

1. Démontrer que $\left\{\begin{array}{lcl} 5x & = & 2u - v \\ 5y & = & -3u + 4v \end{array}\right.$.

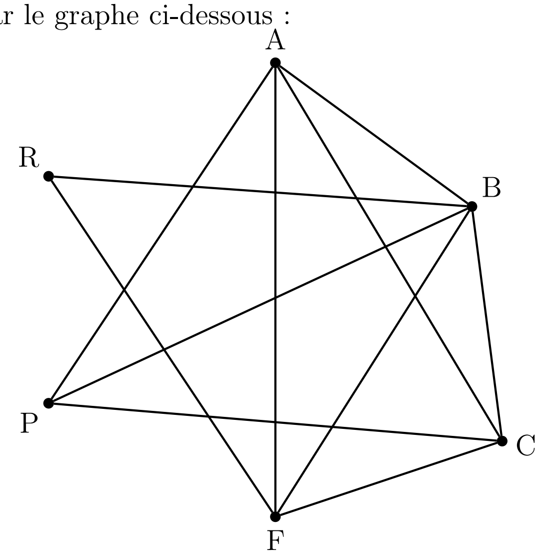
   En déduire que $\left\{\begin{array}{lcl} 5x & \equiv & -2 \text{ modulo } 26 \\ 5y & \equiv & 13 \text{ modulo } 26 \end{array}\right.$.
2. Décoder le ***mot*** « BE ».

**Exercice 2.**

L'organisatrice d'une course à pied dans la ville de Berlin voudrait faire passer les participants par les lieux suivants :

- Alexanderplatz (A)
- Porte de Brandebourg (B)
- Checkpoint Charlie (C)
- Fleamarket (F)
- Musée de Pergame (P)
- Reichstag (R)

On peut résumer la situation par le graphe ci-dessous :




Les lieux sont représentés par les sommets, et les rues ouvertes à la course par les arêtes.

1. (a) Quel est l'ordre de ce graphe ?
   (b) Est-il complet ? Justifier.
   (c) Est-il connexe ? Justifier.
2. (a) L'organisatrice peut-elle envisager un parcours passant par tous ces lieux en empruntant une seule fois chacune des rues ? Justifier.
   (b) Peut-elle envisager un parcours passant par tous ces lieux en empruntant une seule fois chacune des rues, et dont le départ et l'arrivée se font au même endroit ?