Question de cours. **/3**

1. Soient a et b deux réels.
   Compléter $\sin(a+b) =$ .... et $\sin(a-b) =$ ....
2. Déterminer, en utilisant la question 1, la valeur exacte de :

$$\alpha = \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{18}\right)} - \frac{\sqrt{3}}{\cos\left(\frac{\pi}{18}\right)}.$$

Exercice 1. **/7**

Les sites internet A, B, C ont des liens entre eux. Un internaute connecté sur un de ces trois sites peut, à toutes les minutes, soit y rester soit utiliser un lien vers un des deux autres sites.

- Pour un internaute connecté sur le site A, la probabilité d'utiliser le lien vers B est de 0,2 et celle d'utiliser le lien vers C est de 0,2.
- Pour un internaute connecté sur le site B, la probabilité d'utiliser le lien vers A est de 0,1 et celle d'utiliser le lien vers C est de 0,4.
- Pour un internaute connecté sur le site C, la probabilité d'utiliser le lien vers A est de 0,2 mais il n'y a pas de lien direct avec B.

L'unité de temps est la minute, et à un instant $t = 0$, le nombre de visiteurs est, respectivement sur les sites A, B et C : 100, 0 et 0.
On représente la distribution des internautes sur les trois sites après t minutes par une matrice N_t ; ainsi $N_0 = \begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
On suppose qu'il n'y a ni déconnexion pendant l'heure (de $t = 0$ à $t = 60$) ni nouveaux internautes visiteurs.

1. Représenter le graphe probabiliste de sommets A, B et C correspondant à la situation décrite.
2. Écrire la matrice M de transition associée à ce graphe (dans l'ordre A, B, C).
3. On donne

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0,42 & 0,22 & 0,36 \\ 0,19 & 0,27 & 0,54 \\ 0,28 & 0,04 & 0,68 \end{pmatrix}.$$

   Calculer N_2. Interpréter le résultat obtenu.
4. On donne $E = \begin{pmatrix} 31,25 & 12,5 & 56,25 \end{pmatrix}$.
   (a) Calculer $E \times M$.
   (b) En déduire la matrice représentant l'état probabiliste stable, autrement dit la distribution invariante π, puis donner une interprétation du résultat obtenu.

Exercice 2. **10 points**

Deux entreprises concurrentes « Alphacopy » et « Bêtacopy » proposent des contrats annuels d'entretien de photocopieurs. Ces deux entreprises se partagent le marché des contrats d'entretien sur un secteur donné.

Le patron de Alphacopy remarque que, chaque année :

- 15 % des clients qui avaient souscrit un contrat d'entretien chez Alphacopy décident de souscrire un contrat d'entretien chez Bêtacopy. Les autres restent fidèles à Alphacopy ;
- 25 % des clients qui avaient souscrit un contrat d'entretien chez Bêtacopy décident de souscrire un contrat d'entretien chez Alphacopy. Les autres restent fidèles à Bêtacopy.

On définit les évènements suivants :

- A : « le client est sous contrat avec l'entreprise Alphacopy » ;
- B : « le client est sous contrat avec l'entreprise Bêtacopy ».

À partir de 2017, on choisit au hasard un client ayant un contrat d'entretien de photocopieurs et on note, pour tout entier naturel n :

- a_n la probabilité que le client soit sous contrat avec l'entreprise Alphacopy l'année $2017 + n$;
- b_n la probabilité que le client soit sous contrat avec l'entreprise Bêtacopy l'année $2017 + n$.

On note $\pi_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne de l'état probabiliste pour l'année $2017 + n$.

L'objectif de l'entreprise Alphacopy est d'obtenir au moins 62 % des contrats d'entretien des photocopieurs.

Partie A

1. Représenter le graphe probabiliste de cette situation et donner la matrice de transition M associée à ce graphe dont les sommets sont pris dans l'ordre alphabétique.
2. Déterminer l'état probabiliste stable de ce système c'est-à-dire la distribution invariante π.
3. À votre avis, l'entreprise Alphacopy peut-elle espérer atteindre son objectif ?

Partie B

En 2017, on sait que 46 % des clients ayant un contrat d'entretien de photocopieurs étaient sous contrat avec l'entreprise Alphacopy.

1. Préciser la distribution initiale π_0.
2. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 0,85a_n + 0,25b_n$ puis que

$$a_{n+1} = 0,60a_n + 0,25.$$

3. À l'aide du programme incomplet écrit en langage Python ci-dessous, on cherche à déterminer en quelle année l'entreprise Alphacopy atteindra son objectif :

```
def seuil():
  n=0
  a=0.46
  While .......... :
      n=..........
      a..........
  return .....
```

Compléter ce programme.