∽ Corrigé de l'interrogation sur la divisibilité du 22/10/2021 ∾

Questions de cours.

1. Soient a et b deux entiers avec a non nul.
« a divise b » donc il existe un entier k tel que $b = ka$.

2. Soient a et b deux entiers non nuls.
Si a divise c alors il existe un entier k tel que $c = ka$.
De même si b divise c alors il existe un entier k' tel que $c = k'b$.
On a alors $c^2 = ka \times k'b = kk'ab$ avec $kk' \in \mathbb{Z}$. Comme a et b sont non nuls, ab l'est également et par suite ab divise c^2.

Exercice 1.

Soit n un entier relatif différent de -5.
Si $n+5|3n+2$ alors étant donné que $n+5|n+5$, on a $n+5|3(n+5)-(3n+2)$ soit $n+5|13$.
Le diviseurs de 13 sont -13, -1, 1 et 13.

— 1^er^ cas : $n+5 = -13 \iff n = -18 \in \mathbb{Z}$

— 2^e^ cas : $n+5 = -1 \iff n = -6 \in \mathbb{Z}$

— 3^e^ cas : $n+5 = 1 \iff n = -4 \in \mathbb{Z}$

— 4^e^ cas : $n+5 = 13 \iff n = 8 \in \mathbb{Z}$

Je vous laisse vérifier que ces valeurs de n conviennent.

$$\boxed{S = \{-18\,;-6\,;-4\,;8\}}$$

Exercice 2.

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = 4^n + 15n - 1$.

1. $u_0 = 0 = 9 \times 0$, $u_1 = 18 = 9 \times 2$ et $u_2 = 45 = 9 \times 5$ ce qui montre que ces trois entiers sont tous divisibles par 9.

2. Pour tout entier naturel n

$$\begin{aligned} u_{n+1} - 4u_n &= 4^{n+1} + 15(n+1) - 1 - 4(4^n + 15n - 1) \\ &= 4^{n+1} + 15n + 15 - 1 - 4^{n+1} - 60n + 4 \\ &= -45n + 18 \end{aligned}$$

Donc pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - 4u_n = -45n + 18$ soit $u_{n+1} = 4u_n - 45n + 18$.

3. Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel n, u_n est divisible par 9.

- ***Initialisation*** : On a vu que $u_0 = 0$ et que u_0 est divisible par 9 ce qui prouve que $\mathscr{P}_0$ *est bien vraie.*
- ***Hérédité :*** supposons $\mathscr{P}_k$ vraie pour un entier naturel k quelconque, c'est-à-dire u_k est divisible par 9 et montrons que $\mathscr{P}_{k+1}$ est vraie c'est-à-dire u_{k+1} est aussi divisible par 9.
Par hypothèse de récurrence, u_k est divisible par 9.
Il existe alors un entier K tel que $u_k = 9K$.
Or $u_{k+1} = 4u_k - 45k + 18$ donc $u_{k+1} = 4 \times 9K - 9 \times 5k + 9 \times 2 = 9(4K - 5k + 2)$ avec $4K - 5k + 2 \in \mathbb{Z}$ ce qui prouve que u_{k+1} est divisible par 9 et que $\mathscr{P}_{k+1}$ est vraie.

Conclusion : $\mathscr{P}_0$ est vraie et $\mathscr{P}_n$ est héréditaire à partir du rang $n = 0$. On en déduit que $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n, c'est-à-dire, u_n est divisible par 9.

↜ Corrigé de l'interrogation sur la divisibilité du 22/10/2021 ↝

Questions de cours.

1. Soient a et b deux entiers avec a non nul.
   « a divise b » donc il existe un entier k tel que $b = ka$.
2. Soient a et b deux entiers non nuls.
   Si a divise c alors il existe un entier k tel que $c = ka$.
   De même si b divise c alors il existe un entier k' tel que $c = k'b$.
   On a alors $c^2 = ka \times k'b = kk'ab$ avec $kk' \in \mathbb{Z}$. Comme a et b sont non nuls, ab l'est également et par suite ab divise c^2.

Exercice 1.

Soit n un entier relatif différent de -2.
Si $n+2|3n-1$ alors étant donné que $n+2|n+2$, on a $n+2|3(n+2)-(3n-1)$ soit $n+2|7$.
Le diviseurs de 7 sont -7, -1, 1 et 7.

- 1^er^ cas : $n+2=-7 \Longleftrightarrow n=-9 \in \mathbb{Z}$
- 2^e^ cas : $n+2=-1 \Longleftrightarrow n=-3 \in \mathbb{Z}$
- 3^e^ cas : $n+2=1 \Longleftrightarrow n=-1 \in \mathbb{Z}$
- 4^e^ cas : $n+2=7 \Longleftrightarrow n=5 \in \mathbb{Z}$

Je vous laisse vérifier que ces valeurs de n conviennent.

$$\boxed{S = \{-9\,;-3\,;-1\,;5\}}$$

Exercice 2.

Soit a un entier naturel non nul et on considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = (a+1)^n - an - 1.$$

1. On a $u_0 = 0 = 0 \times a^2$, $u_1 = 0 = 0 \times a^2$ et $u_2 = a^2 = 1 \times a^2$ avec a^2 non nul donc les trois premiers termes de la suite (u_n) sont divisibles par a^2.
2. Pour tout entier naturel n

$$\begin{array}{rcl} u_{n+1}-(a+1)u_n & = & (a+1)^{n+1} - a(n+1) - 1 - (a+1)[(a+1)^n - an - 1] \\ & = & (a+1)^{n+1} - an - a - 1 - (a+1)^{n+1} + na(a+1) + a + 1 \\ & = & -an - a - 1 + na(a+1) + a + 1 \\ & = & -an - a - 1 + na^2 + na + a + 1 \\ & = & na^2 \end{array}$$

3. Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel n, u_n est divisible par a^2.

   - ***Initialisation*** : On a vu que $u_0 = 0$ et que u_0 est divisible par a^2 ce qui prouve que $\mathscr{P}_0$ *est bien vraie.*
   - ***Hérédité :*** supposons $\mathscr{P}_k$ vraie pour un entier naturel k quelconque, c'est-à-dire u_k est divisible par a^2 et montrons que $\mathscr{P}_{k+1}$ est vraie c'est-à-dire u_{k+1} est aussi divisible par a^2.
     Par hypothèse de récurrence, u_k est divisible par a^2.
     Il existe alors un entier K tel que $u_k = Ka^2$.
     Or $u_{k+1} - (a+1)u_k = ka^2$ donc $u_{k+1} = (a+1)u_k + ka^2$. On remplace alors u_k par Ka^2 il vient $u_{k+1} = (a+1)Ka^2 + ka^2$ soit $u_{k+1} = a^2(aK + K + k)$ avec $aK + K + k \in \mathbb{Z}$ ce qui prouve que u_{k+1} est divisible par a^2 et que $\mathscr{P}_{k+1}$ est vraie.

   Conclusion : $\mathscr{P}_0$ est vraie et $\mathscr{P}_n$ est héréditaire à partir du rang $n = 0$. On en déduit que $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n, c'est-à-dire, u_n est divisible par a^2.