1. Formule de De Moivre

1. En utilisant la formule de De Moivre, démontrer que pour tout réel x on a :
   (a) $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$ et $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$.
   (b) $\cos(3x) = 4\cos^3 x - 3\cos x$ et $\sin(3x) = -4\sin^3 x + 3\sin x$.
2. En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$, $\cos\left(\frac{\pi}{24}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{24}\right)$.

2. Racine carrée de complexes

On se propose de déterminer les racines carrées de $8-6\mathrm{i}$, autrement dit on cherche les complexes z tels que $z^2 = 8-6\mathrm{i}$.

1. On pose $z = a + \mathrm{i}b$ où a et b sont des réels.
   (a) Démontrer que $z^2 = a^2 - b^2 + 2\mathrm{i}ab$ et que $|z^2| = a^2 + b^2 = 10$.
   (b) En déduire les valeurs de a et b.
2. Conclure quant à la question posée.
3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{C}$ par $f(z) = \dfrac{z^2}{z-2\mathrm{i}}$ avec $z \neq 2\mathrm{i}$.
   En déduire les antécédents de $1+\mathrm{i}$ par f.

3. Racines n – ième de l'unité

On se propose de résoudre l'équation (E) d'inconnue z : $(z+1)^n = (z-1)^n$.

1. Démontrer que $z = 1$ n'est pas solution de (E).
2. Démontrer que pour tout $z \neq 1$, $(E) \iff \left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^n = 1$.
3. En utilisant les racines n – ième de l'unité, démontrer que $z = \mathrm{i}\dfrac{\cos\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)}$ pour $k \in [\![0\,;\,n-1]\!]$.