Exercice 1.

Deux matrices colonnes $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ à coefficients entiers sont dites congrues modulo 5 si et seulement si $\left\{ \begin{array}{l} x \equiv x' \ [5] \\ y \equiv y' \ [5] \end{array} \right.$.

Deux matrices carrées d'ordre 2 $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix}$ à coefficients entiers sont dites congrues modulo 5 si et seulement si $\left\{ \begin{array}{l} a \equiv a' \ [5] \\ b \equiv b' \ [5] \\ c \equiv c' \ [5] \\ d \equiv d' \ [5] \end{array} \right.$.

Alice et Bob veulent s'échanger des messages en utilisant la procédure décrite ci-dessous.

— Ils choisissent une matrice M carrée d'ordre 2, à coefficients entiers.
— Leur message initial est écrit en lettres majuscules sans accent.
— Chaque lettre de ce message est remplacée par une matrice colonne $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ déduite du tableau ci-contre : x est le chiffre situé en haut de la colonne et y est le chiffre situé à la gauche de la ligne ; par exemple, la lettre T d'un message initial correspond à la matrice colonne $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.
— On calcule une nouvelle matrice $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ en multipliant $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ à gauche par la matrice M : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \mathrm{M} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
— On calcule r' et t' les restes respectifs des divisions euclidiennes de x' et y' par 5.
— On utilise le tableau ci-contre pour obtenir la nouvelle lettre correspondant à la matrice colonne $\begin{pmatrix} r' \\ t' \end{pmatrix}$.

	0	1	2	3	4
0	A	B	C	D	E
1	F	G	H	I	J
2	K	L	M	N	O
3	P	Q	R	S	T
4	U	V	X	Y	Z

Remarque : la lettre W est remplacée par les deux lettres accolées V.

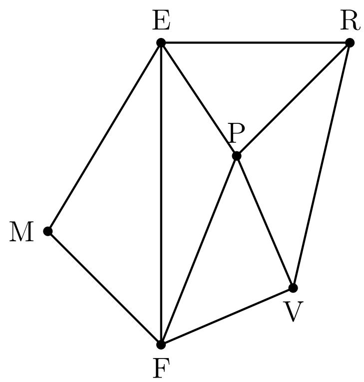
1. Bob et Alice choisissent la matrice $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que la lettre « T » du message initial est codée par la lettre « U » puis coder le message « TE ».
   (b) On pose $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$. Montrer que les matrices PM et $\mathrm{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont congrues modulo 5.
   (c) On considère A, A' deux matrices d'ordre 2 à coefficients entiers congrues modulo 5 et $\mathrm{Z} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\mathrm{Z}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux matrices colonnes à coefficients entiers congrues modulo 5. Montrer alors que les matrices AZ et A'Z' sont congrues modulo 5.

   Dans ce qui suit on admet que si A, A' sont deux matrices carrées d'ordre 2 à coefficients entiers congrues modulo 5 et si B, B' sont deux matrices carrées d'ordre 2 à coefficients entiers congrues modulo 5 alors les matrices produit AB et A'B' sont congrues modulo 5.

2. (a) On note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ deux matrices colonnes à coefficients entiers. Déduire des questions précédentes que si MX et Y sont congrues modulo 5 alors les matrices X et PY sont congrues modulo 5 ; ce qui permet de « décoder » une lettre chiffrée par la procédure utilisée par Alice et Bob avec la matrice M choisie.

   (b) Décoder alors la lettre « D ».

Exercice 2. Un restaurateur se fournit auprès de 5 producteurs locaux. Le graphe ci-dessous représente la situation géographique du restaurateur et de ses fournisseurs, les arêtes correspondant au réseau routier et les sommets aux producteurs :



Légende :
E : éleveur
F : fromager
M : maraîcher
P : pisciculteur
R : **restaurateur**
V : vigneron

1. (a) Le graphe est-il complet ? Justifier la réponse.

   (b) Le graphe est-il connexe ? Justifier la réponse.

2. Est-il possible pour le restaurateur d'organiser une visite de tous ses producteurs en partant de son restaurant et en empruntant une fois et une seule chaque route ? Justifier la réponse.

   Si oui, préciser le point d'arrivée et proposer un tel parcours.

3. On appelle N la matrice d'adjacence associée à ce graphe, les sommets étant pris dans l'ordre alphabétique.

   (a) Déterminer la matrice N.

   (b) On donne la matrice $N^3 = \begin{pmatrix} 6 & 10 & 6 & 10 & 9 & 5 \\ 10 & 6 & 6 & 10 & 5 & 9 \\ 6 & 6 & 2 & 4 & 4 & 4 \\ 10 & 10 & 4 & 8 & 8 & 8 \\ 9 & 5 & 4 & 8 & 4 & 8 \\ 5 & 9 & 4 & 8 & 8 & 4 \end{pmatrix}$

   Déterminer, en justifiant la réponse, le nombre de chemins de longueur 3 reliant l'éleveur au vigneron.