Exercice 1.

Partie A

Déterminons le ***mot*** codé correspondant au ***mot*** « SI » est assimilé à la matrice $X = \begin{pmatrix}18\\8\end{pmatrix}$.

Or $AX = \begin{pmatrix}4 & 1\\3 & 2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}18\\8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}80\\70\end{pmatrix}$.

On a $80 \equiv 2\ [26]$ et $70 \equiv 18\ [26]$ donc $C = \begin{pmatrix}2\\18\end{pmatrix}$, ce qui montre que le mot « SI » est codé par le mot « CS ».

Partie B : deux résultats mathématiques

1. On a $5 \times 21 = 105 = 26 \times 4 + 1$ donc $5 \times 21 \equiv 1\ [26]$.
2. (a) $B \times A = 5I_2$.

   (b) Si $AX = U$, alors en multipliant cette égalité à gauche par B il vient $BAX = BU$.
   Or $BA = 5I_2$ donc $BAX = 5X$ et par suite $5X = BU$.

1. Si $5X = BU$ alors $5\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & -1\\-3 & 4\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$ soit $\left\{\begin{array}{rcl}5x & = & 2u - v\\5y & = & -3u + 4v\end{array}\right.$.

   Or $\left\{\begin{array}{rcl}u & \equiv & 1 \text{ modulo } 26\\v & \equiv & 4 \text{ modulo } 26\end{array}\right.$ donc que $\left\{\begin{array}{rcl}5x & \equiv & 2 - 4 \text{ modulo } 26\\5y & \equiv & -3 + 16 \text{ modulo } 26\end{array}\right.$ soit $\left\{\begin{array}{rcl}5x & \equiv & -2 \text{ modulo } 26\\5y & \equiv & 13 \text{ modulo } 26\end{array}\right.$.
2. On multiplie chaque équation de ce système par 21 et il vient : $\left\{\begin{array}{rcl}21 \times 5x & \equiv & -42 \text{ modulo } 26\\21 \times 5y & \equiv & 13 \times 21 \text{ modulo } 26\end{array}\right.$.

   Or $-42 \equiv 10\ [26]$ et $13 \times 21 \equiv\ 13(-5)\ [26]$ soit $13 \times 21 \equiv\ 13\ [26]$
   Ainsi le ***mot*** « BE » est décodé en « KN ».

Exercice 2.

1. (a) Il y a 6 sommets donc ce graphe est d'ordre 6.

   (b) Il n'y a pas d'arête reliant A et R donc ce graphe n'est pas complet.

   (c) Deux sommets quelconques peuvent être reliés par un chemin, donc ce graphe est connexe.
   Par exemple, le chemin A – B – P – C – F – R relie entre eux tous les sommets.
2. (a) On cherche le degré de chaque sommet :

Sommet	A	B	C	F	P	R
Degré	4	5	4	4	3	2

   Le graphe est connexe et il y exactement deux sommets de degrés impairs, B et P, donc, d'après le théorème d'Euler, il existe un chemin passant par tous les lieux en empruntant une seule fois chacune des rues ; ce chemin part de B et se termine en P, ou part de P et se termine en B ;
   Par exemple : B – A – C – B – F – R – B – P – A – F – C – P.

   (b) Pour envisager un parcours passant par tous ces lieux en empruntant une seule fois chacune des rues, et dont le départ et l'arrivée se font au même endroit, il faudrait que tous les sommets soient de degrés pairs, ce qui n'est pas le cas.
   Un tel parcours n'existe donc pas.