作业一: 洛必达法则的叙述与证明

施吉胤
强基数学 2001 3200105343

2022 年 6 月 27 日

这是一个研究未定式极限的问题. 众所周知, 如果 $f(x) \to 0$,$g(x) \to 0$ 或者 $f(x) \to \infty$,$g(x) \to \infty$, 则 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 比值的极限较为复杂, 把这种极限称为未定式. 洛必达法则就是用来解决这样的未定式的极限问题的方法.

1 问题描述

洛必达法则叙述如下:
定理 1:
若函数 f(x) 和 g(x) 都在点 a 的一个空心邻域中可导,$g'(x) \neq 0$,

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = A \tag{1}$$

(i) 若 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, 则

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = A \tag{2}$$

(ii) 若 $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$, 则也有(2)成立
定理 2:
设 f(x) 和 g(x) 都在 $|x| > a > 0$ 时可导, 且 $g'(x) \neq 0$,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)} = A \tag{3}$$

(i) 若 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$, 则

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = A \tag{4}$$

(ii) 若 $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$, 则也有(4)成立

2 证明

定理证明如下:

定理 1:

(i) 补充定义 $f(a) = g(a) = 0$, 于是 f(x) 和 g(x) 都在 $N(a,\delta)$ 上连续, 当 $x < a$, 由柯西中值定理知道, 存在 $\xi \in (x,a)$, 使得

$$\lim_{x\to a^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^-} \frac{f(a)-f(x)}{g(a)-g(x)} = \lim_{x\to a^-} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \tag{5}$$

因为 $x \to a^-$ 时,$\xi \to a^-$, 故(1)和(5)由知道右端极限为 A, 从而有

$$\lim_{x\to a^-} \frac{f(x)}{g(x)} = A \tag{6}$$

同理可证

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = A \tag{7}$$

将(6)和(7)结合起来即得到结果

(ii) 先证(6), 设 $A \in R$, 于是由(1)知道对于任意的 $\epsilon > 0$, 都存在 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x-a| \le \delta$, 就有

$$|\frac{f'(x)}{g'(x)} - A| < \epsilon \tag{8}$$

, 当 $x \in (a-\delta, a)$, 由柯西中值定理知存在 $\xi \in (a-\delta, a)$, 使得

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a-\delta)}{g(x)-g(a-\delta)} * \frac{g(x)-g(a-\delta)}{g(x)} + \frac{f(a-\delta)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} * \frac{g(x)-g(a-\delta)}{g(x)} + \frac{f(a-\delta)}{g(x)} \tag{9}$$

由于 $g'(x) \neq 0$, 并且 $g(x) \to \infty$,$(x \to a)$, 故可以设 $g(x) > 0$,$g'(x) > 0$, 且 $g(x) \to +\infty$ $(x \to a^-)$, 于是(9)式右边第一项的第二个因式为正, 从而得到 $\frac{f(x)}{g(x)} \le (A+\epsilon) * \frac{g(x)-g(a-\delta)}{g(x)} + \frac{f(a-\delta)}{g(x)}$, 令 $x \to a^-$ 取上极限, 即得

$$\overline{\lim_{x\to a^-}} \frac{f(x)}{g(x)} \le A + \epsilon \tag{10}$$

同理可证

$$\varliminf_{x\to a^-}\frac{f(x)}{g(x)}\geq A-\epsilon \tag{11}$$

把(10)和(11)结合起来, 得到 $A-\epsilon\leq\varliminf_{x\to a^-}\frac{f(x)}{g(x)}\leq\varlimsup_{x\to a^-}\frac{f(x)}{g(x)}\leq A+\epsilon$, 再由任意性即得, 同理可证, 从而知道式于 $A\in R$ 时成立.

定理 2:

令 $F(t)=f(\frac{1}{t})$,$G(t)=g(\frac{1}{t})$, 于是 F(t) 和 G(t) 都在点 0 的一个空心邻域中可导, 且 $G'(t)=g'(\frac{1}{t})*(-\frac{1}{t^2})\neq 0$,$\lim\limits_{t\to 0}\frac{F'(t)}{G'(t)}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{f'(\frac{1}{t})*(-\frac{1}{t^2})}{g'(\frac{1}{t})*(-\frac{1}{t^2})}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$. 因此由定理 1 知定理 2 成立.