Stone-Weierstrass の定理

市ノ瀬弘祐

2024 年 7 月 30 日

1　前提

K は実数全体の集合 $\mathbb{R}$ または複素数全体の集合 $\mathbb{C}$ を表すものとする。

Notation 1.1　X を位相空間とするとき、X から実数全体または複素数全体の集合 K への連続関数全体の集合を $C(X)$、X から実数全体または複素数全体の集合 K への無限遠で消える連続関数全体の集合を $C_0(X)$ で表す。ただし、連続関数 $f\colon X \to K$ が無限遠で消えるとは、任意の正の数 ε に対して、集合 $\{x \in X \mid |f(x)| \geq \varepsilon\}$ が X のコンパクト集合となることである。

位相空間の一点コンパクト化について述べる。

X をコンパクトでない位相空間とする。∞ を X に含まれない点とし、$X^* = X \cup \{\infty\}$ に以下の位相を入れたものを考える。

$U \subset X^*$ が以下のいずれかを満たすとき、U を X^* の開集合と定義する。

- $\infty \notin U$ であり、U は X の開集合である。
- $\infty \in U$ であり、$X^* \setminus U$ は X のコンパクト集合かつ閉集合である。

この位相で X^* はコンパクト空間となる。この空間を X の一点コンパクト化空間という。

Remark 1.2　X^* がハウスドルフ空間となるための必要十分条件は、X が局所コンパクトハウスドルフ空間であることである。

2　実係数、コンパクト空間上の場合

Theorem 2.1　X はコンパクトハウスドルフ空間とする。実数値の連続関数の代数系 $C(X)$ の部分代数 A が次を満たすとする。

1. A は X 上の 0 でない定数関数を含む。
2. 任意の異なる $x, y \in X$ に対して、$f(x) \neq f(y)$ なる $f \in A$ が存在する。

このとき、A は sup ノルム $\|\cdot\|$ に関して $C(X)$ の中で稠密である。

3　複素係数、コンパクト空間上の場合

Theorem 3.1　X はコンパクトハウスドルフ空間とする。複素数値の連続関数の代数系 $C(X)$ の部分代数 A が次を満たすとする。

1. A は X 上の 0 でない定数関数を含む。
2. 任意の異なる $x, y \in X$ に対して、$f(x) \neq f(y)$ なる $f \in A$ が存在する。
3. $f \in A$ ならば、$\bar{f} \in A$ である。

このとき、A は sup ノルム $\|\cdot\|$ に関して $C(X)$ の中で稠密である。

4　実係数、局所コンパクト空間上の場合

Theorem 4.1　X は局所コンパクトハウスドルフ空間とする。実数値の無限遠で消える連続関数の代数系 $C_0(X)$ の部分代数 A が次を満たすとする。

1. 任意の $x \in X$ に対して、$f(x) \neq 0$ となる $f \in A$ が存在する。
2. 任意の異なる $x, y \in X$ に対して、$f(x) \neq f(y)$ なる $f \in A$ が存在する。

このとき、A は sup ノルム $\|\cdot\|$ に関して $C_0(X)$ の中で稠密である。

この場合の証明は X を一点コンパクト化し、X^* に対して Theorem 2.1 を適用させればよい。連続関数の空間と一点コンパクト化については以下の関係がある。証明は容易なため省略する。

Proposition 4.2　X を局所コンパクトハウスドルフ空間とする。また $C_0(X)$ から $C(X^*)$ への写像 φ を $(\varphi f)(x) = f(x)$ $(x \neq \infty)$, $(\varphi f)(\infty) = 0$ と定義する。このとき、φ は単射な等長線形写像（特に連続）であり、複素係数の場合は各 $f \in C_0(X)$ に対して $\overline{\varphi f} = \varphi \bar{f}$ が成り立つ。

Proposition 4.3（Urysohn の補題）　(1)　X が正規空間のとき、$A \cap B = \emptyset$ なる X の閉集合に対して、$f(A) = \{1\}$, $f(B) = \{0\}$ なる連続関数 $f \colon X \to [0,1]$ が存在する。

(2)　X が局所コンパクトハウスドルフ空間であるとき、X のコンパクト集合 A に対して、$\overline{\operatorname{supp} f} = A$ なる連続関数 $f \colon X \to [0,1]$ が存在する?????

Proof.（Theorem 4.1 の証明）　$f \in A$ と任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\|f - g\| < \varepsilon$ となる $g \in C_0(X)$ が存在することを示せばよい。$\varphi \colon C_0(X) \to C(X^*)$ を Proposition 4.2 で定義した写像とする。

$A^* = \varphi(A) \cup \{1 \colon X^* \to \{1\}\}$ とすると、$A^* \subset C(X^*)$ は Theorem 2.1 の仮定を満たす。実際、定数関数が含まれていることは明らかであり、$x, y \in X^*$ が $x, y \in X$ なら仮定より $g(x) \neq g(y)$ なる $g \in A$ があるので、$(\varphi g)(x) \neq (\varphi g)(y)$ となる。また $x = \infty$ の場合は、$g(y) \neq 0$ なる $g \in A$ を選べばよい。よって Theorem 2.1 より、$\|\varphi f - g\|_{C(X^*)} < \varepsilon$ なる $g \in C(X^*)$ が存在する。ここで $(\varphi f)(\infty) = 0$ であり、φf は X 上連続であるから、∞ の開近傍 U が存在して、$\sup_{x \in U} |(\varphi f)(x)| < \varepsilon$ が成り立つ。よって $\sup_{x \in U} |g(x)| \leq \|\varphi f - g\|_{C(X^*)} + \sup_{x \in U} |(\varphi f)(x)| < 2\varepsilon$ となる。$\{\infty\}$ と $X^* \setminus U$ は閉集合であり、X^* は

コンパクトハウスドルフ空間、特に正規空間である[*1]から Proposion 4.3 を使って $h(\infty)=0$ かつ $X^*\setminus U$ 上 $h=1$ となる連続関数 $h\colon X^*\to[0,1]$ を取ってこれる。このとき、

$$\begin{aligned}
\|\varphi f-gh\|_{C(X^*)} &\le \sup_{x\in U}|(\varphi f)(x)-g(x)h(x)|+\sup_{x\in X^*\setminus U}|(\varphi f)(x)-g(x)h(x)| \\
&\le \sup_{x\in U}|(\varphi f)(x)-g(x)|+\sup_{x\in U}|(g(x)-g(x)h(x)|+\sup_{x\in X^*\setminus U}|(\varphi f)(x)-g(x)| \\
&\le \|\varphi f-g\|_{C(X^*)}+2\sup_{x\in U}|g(x)|+\|\varphi f-g\|_{C(X^*)} \\
&\le 6\varepsilon.
\end{aligned}$$

また $(gh)(\infty)=0$ であるから $\varphi g_0=gh$ となる $g_0\in C_0(X)$ が存在する。φ は等長写像なので、この g_0 が求める関数である。

5 複素係数、局所コンパクト空間上の場合

Theorem 5.1 X は局所コンパクトハウスドルフ空間とする。複素数値の無限遠で消える連続関数の代数系 $C_0(X)$ の部分代数 A が次を満たすとする。

1. 任意の $x\in X$ に対して、$f(x)\neq 0$ となる $f\in A$ が存在する。
2. 任意の異なる $x,y\in X$ に対して、$f(x)\neq f(y)$ なる $f\in A$ が存在する。
3. $f\in A$ ならば、$\bar{f}\in A$ である。

このとき、A は sup ノルム $\|\cdot\|$ に関して $C(X)$ の中で稠密である。

この場合も Theorem 4.1 の場合と同様なので、証明は省略する。

参考文献

[Uch] 内田 伏一, 集合と位相, 裳華房,1986.
[Coh] Donald L.Cohn,*Measure Theory*,Springer,2013.
[Miy] 宮島 静夫, 関数解析, 横浜図書,2005.
[Ste] Elias M.Stein and Rami Shakarchi,*COMPLEX ANALYSIS*,Princeton University Press,2003.
[Yaj] 谷島 賢二, ルベーグ積分と関数解析, 朝倉書店,2002.
[Ara] 新井 仁之, 新・フーリエ解析と関数解析学, 培風館,2010.
[Ito] 伊藤 清三, ルベーグ積分入門, 裳華房,1963.

[*1] [Uch] の定理 22.5 の系