Portfolio-Optimierung und Capital Asset Pricing

Prof. Dr. Nikolaus Hautsch
Institut für Statistik und Ökonometrie
Humboldt-Universität zu Berlin
CASE, CFS, QPL

Econ Boot Camp, SFB 649, Berlin, 8. Januar 2009

Was ist Ökonometrie?

- Sprachliche Neuschöpfung aus den griechischen Wörtern

"Oikonomia" (Verwaltung, Wirtschaft)

und

"metron" (Maß, Messen)

$\Rightarrow$ *Messung* (Quantifizierung) wirtschaftswissenschaftlicher Zusammenhänge auf Basis

- von Daten,
- statistischer Theorie,
- ökonometrischer Software.

Beispiele für ökonometrische Fragestellungen

- Wie stark und wie schnell ändert sich die Konsumneigung nach Erhöhungen der Mehrwertsteuer?
- Wie stark ändern sich Wachstum und Inflation, wenn die Zentralbank die Zinsen senkt/erhöht?
- Welche Erhöhung der Rendite kann ich erwarten, wenn sich das Risiko meiner Finanzanlage erhöht?
- Wie hoch ist das erwartete Ausfallrisiko eines Kredits?
- Wie hoch ist die erwartete Volatilität an Finanzmärkten nächsten Monat?
- Wie erfolgreich sind Arbeitsmarktprogramme?

Agenda

1. Einführung ✓
2. Portfolioanalyse
3. Das Capital Asset Pricing Modell

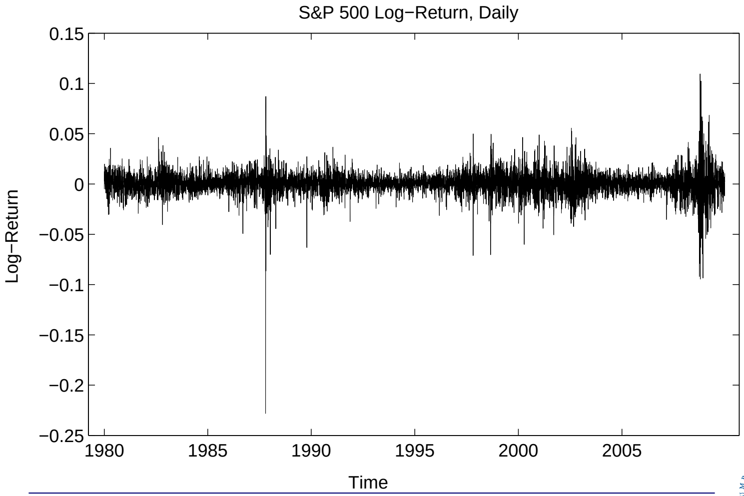
Grundlegende Konzepte

- $P_{i,0}$: Preis eines Wertpapiers i zum Kaufzeitpunkt $t = 0$.
- $P_{i,1}$: Preis eines Wertpapiers i zum Zeitpunkt $t = 1$
- Rendite: $R_i = (P_{i,1} - P_{i,0}) / P_{i,0}$
- Falls $t = 1$ in der Zukunft liegt: *Erwartete* Rendite $\mathrm{E}[R_i]$

  $\Rightarrow$ Tatsächliche Rendite schwankt um diesen Wert.

  $\Rightarrow$ Varianz als Maß für die "Schwankungen" ("Risiko") der Rendite: $V[R_i] = \mathrm{E}[(R_i - \mathrm{E}[R_i])^2] := \sigma^2$
- Frage: Wie bestimmen wir die *erwartete* Rendite $\mathrm{E}[R_i]$ und Varianz $V[R_i]$?

Tägliche Renditen, S&P500, 1980-2009



Schätzungen von $\mathrm{E}[R_i]$ und $V[R_i]$

- Annahme: Zukünftige Renditen weisen "ähnliche" Eigenschaften auf wie historische Renditen:
  - Gleicher Mittelwert
  - Gleiche Varianz

$\Rightarrow$ Schätzung von $\mathrm{E}[R_i]$ und $V[R_i]$ auf Basis historischer Daten.

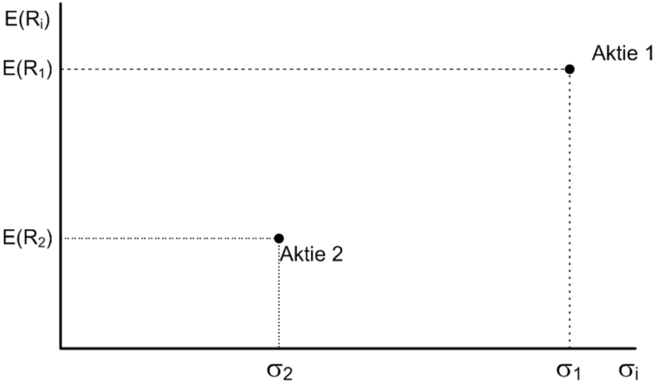
- $E(R_i)$ wird geschätzt durch das Stichprobenmittel

$$\overline{R}_i = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} R_{i,t}.$$

- σ^2 wird geschätzt durch die Stichprobenvarianz

$$s_i^2 = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} \left(R_{i,t} - \overline{R}_i\right)^2.$$

Mittelwert-Varianz-Diagramm



⇒ Welche Aktie würden Sie präferieren?

Rendite und Risiko eines Portfolios

- Portfolio aus 2 Aktien mit Portfoliogewichten w und $1-w$ ($w \in [0,1]$)
- Erwartete Rendite des Portfolios:

$$\mathrm{E}[R_p] = w\,\mathrm{E}[R_1] + (1-w)\,\mathrm{E}\left[R_2\right].$$

- Geschätzte erwartete Rendite:

$$\overline{R}_p = w\,\overline{R}_1 + (1-w)\,\overline{R}_2.$$

- Varianz der Portfoliorendite:

$$\sigma_p^2 = w^2\sigma_1^2 + (1-w)^2\sigma_2^2 + 2w(1-w)\sigma_{1,2}$$

- Standardabweichung der Portfoliorendite: σ_p

$\Rightarrow$ Was ist $\sigma_{1,2}$?

Kovarianz und Korrelation

- Kovarianz:

$$\sigma_{i,j} = \mathrm{E}[(R_i - \mathrm{E}[R_i])(R_j - \mathrm{E}[R_j])]$$

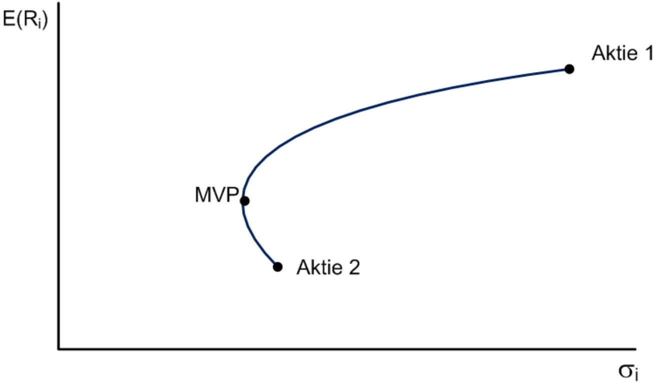
  - Maß für den (linearen) Zusammenhang zwischen Renditen von 2 Wertpapieren.
  - Schätzung durch Stichprobenkovarianz:

$$s_{i,j} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} \left(R_{i,t} - \overline{R}_i\right) \left(R_{j,t} - \overline{R}_j\right).$$

- Korrelation: $\rho_{i,j} = \sigma_{i,j} / (\sigma_i \, \sigma_j)$
  - Normiertes Zusammenhangsmaß: $-1 \leq \rho_{i,j} \leq 1$.
  - Schätzung durch

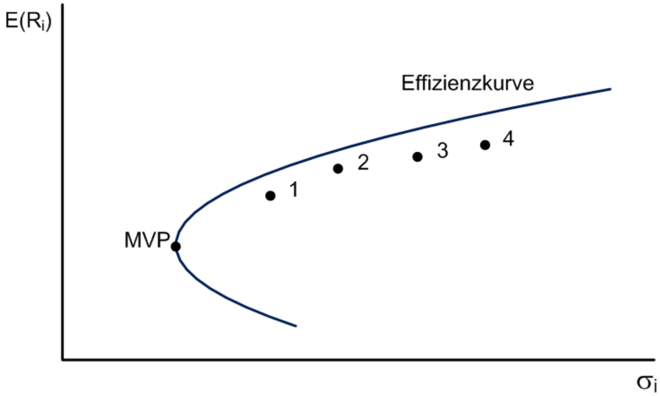
$$r_{i,j} = \frac{s_{i,j}}{s_i \, s_j}.$$

Portfolios aus 2 Wertpapieren



⇒ Welche Kombination ist optimal?

Portfolios aus 4 Wertpapieren



Portfoliotheorie nach Markowitz

- Harry M. Markowitz: Nobelpreis 1990.

- Markowitz, H. M. (1952), *Portfolio Selection*, The Journal of Finance 7 (1), 77–91.
- Umfassende Methodik zur Portfolioanalyse.
- Bestimmung effizienter Portfolios

Effiziente Portfolios

- Investoren wollen erwartete Rendite maximieren und Risiko minimieren.
- Effiziente Portfolios:
  - Minimieren Risiko für gegebene erwartete Rendite.
  - Maximieren erwartete Rendite für gegebenes Risikoniveau.
- Investor wählt optimales Portfolio aus dem effizienten Set entsprechend persönlicher (Risiko-)Präferenzen.

Idiosynkratisches Risiko & Diversifizierung

- Portfolio aus N Wertpapieren mit Gewichten w_i, $i = 1, \dots, N$.
- Portfoliovarianz:

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} w_i w_j \sigma_{ij} = \sum_{i=1}^{N} w_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=i+1}^{N} w_i w_j \sigma_{ij}$$

- Für $N \to \infty \quad \Rightarrow \quad \sigma_p^2 \to 2 \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=i+1}^{N} w_i w_j \sigma_{ij}$

$\Rightarrow$ Einfluß idiosynkratischen Risikos σ_i^2 wird reduziert durch

- die Verwendung von Aktienkombinationen mit kleinen (oder negativen) σ_{ij}'s
- die Verwendung von großen Portfolios.

Erweiterung des Grundmodells

James Tobin: Nobelpreis 1981.

- Markowitz: Effiziente Portfolios aus riskanten Wertpapieren.
- Erweiterung durch Tobin: Risikolose Anlage (z.B. Schatzbriefe, Spareinlagen) mit Verzinsung R_f.

Kombination aus riskofreien und risikobehafteten Anlagen

- Portfolio aus einer risikofreien und einer risikobehafteten Anlage.
- Erwartete Rendite:

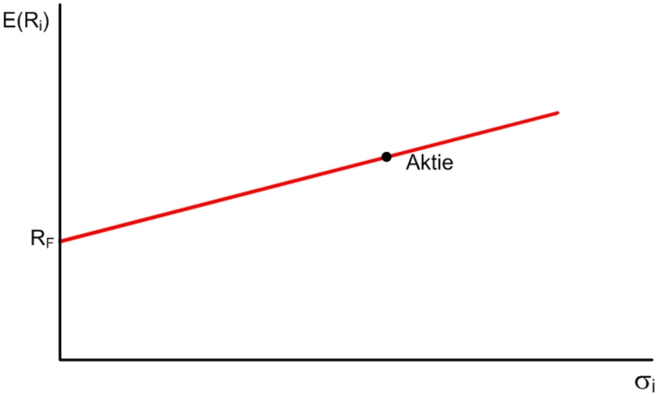
$$\mathrm{E}\left[R_p\right] = w_f\, R_f + (1 - w_f)\, \mathrm{E}\left[R_i\right].$$

- Varianz:

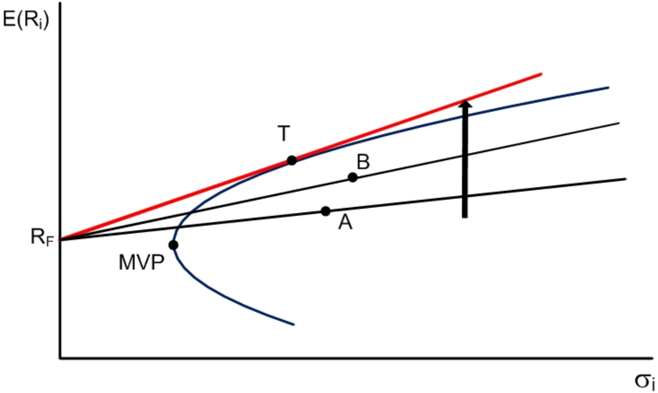
$$\sigma_p^2 = (1 - w_f)^2 \sigma_i^2.$$

⇒ Wie sieht das optimale Portfolio aus, wenn Investoren auch risikolos anlegen können?

Risikofreie Anlage und Aktie



Risikofreie Anlage und riskantes Portfolio



⇒ Riskantes Portfolio *T* ist optimal!

Tobin-Separation

(i) Bestimmung des optimalen <u>riskanten</u> Portfolios:

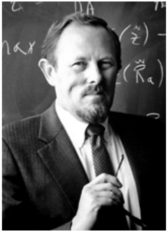
- Ermittlung effizienter Portfolios.
- Ermittlung des Tangentialportfolios.

(ii) Bestimmung des optimalen Portfolios <u>inklusive</u> der risikolosen Anlage:

- Kombination aus (riskantem) Tangentialportfolio mit risikoloser Anlage.
- Wahl der Kombination hängt ab von der individuellen Risikoaversion

Das Capital-Asset-Pricing-Modell (CAPM)

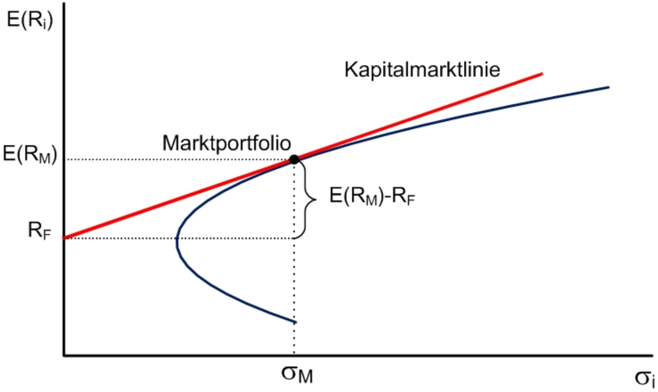
- Gleichgewichtsmodell für Wertpapierrenditen auf Basis der Portfoliotheorie nach Markowitz und Tobin.
- Entwickelt von Jack Treynor, William Sharpe, John Lintner und Jan Mossin (unabhängig voneinander).
- William F. Sharpe: Nobelpreis 1990.



Implikationen des CAPM

- Annahmen:
  - Investoren handeln gemäß der Portfoliotheorie nach Markowitz und Tobin.
  - Investoren haben identische Schätzungen für erwartete Renditen und (Ko-)Varianzen ("homogene Erwartungen").
  - Risikofreier Zins für jeden Anleger gleich.
- Implikationen des CAPM:
  - Effizientes Set für jeden Investor identisch.
  - Alle Anleger halten das gleiche riskante Portfolio $\Rightarrow$ "Tangentialportfolio" = Marktportfolio.

Marktportfolio und Kapitalmarktlinie



CAPM-Gleichung

- Gemäß des CAPM gilt für Wertpapier i:

$$\mathrm{E}\left[R_i\right] = R_F + \beta_i \left(\mathrm{E}\left[R_M\right] - R_F\right).$$

- Erwartete Rendite hängt positiv von β_i ("Beta") ab.
- Beta beschreibt die "Stärke" der linearen Abhängigkeit zwischen $\mathrm{E}\left[R_i\right] - R_F$ und $(\mathrm{E}\left[R_M\right] - R_F)$.
  - $\beta_i = 1$: Überrendite von i identisch mit Marktüberrendite.
  - $\beta_i = 0$: Überrendite von i unabhängig von Marktüberrendite.
  - $\beta_i < 0$: Überrendite von i negativ abhängig von Marktüberrendite.

$\Rightarrow$ Aber durch was wird β_i eigentlich determiniert?

Beta als Maß für Systematisches Risiko

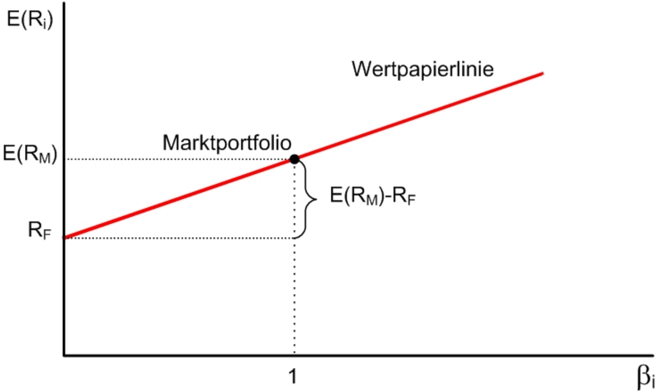
- CAPM impliziert:

$$\beta_i = \frac{\sigma_{i,M}}{\sigma_M^2} = \frac{\text{Kovarianz zw. Asset i und Marktportfolio}}{\text{Varianz des Marktportfolios}}.$$

- Beta = Standardisierte Kovarianz = Maß für Abhängigkeit zwischen Rendite i und Marktrendite
- Intuition: Beta mißt Beitrag eines Wertpapiers zum Marktrisiko
- Je höher Beta, desto größer ist das <u>systematische</u>, d.h. nicht diversifizierbare Risiko von Wertpapier i
- Je höher Beta, desto höher die notwendige Kompensation:

$$\Rightarrow \quad \mathrm{E}[R_i - R_F] = \beta_i \underbrace{\mathrm{E}[R_m - R_f]}_{\text{Risikoprämie}>0}$$

Wertpapierlinie



Von der Theorie zur Empirie ...

- CAPM: $\mathrm{E}[R_i] = R_F + \beta_i (\mathrm{E}[R_M] - R_F)$.
- Daten über Perioden $t = 1 \ldots, n$:
  - Renditen eines Wertpapiers oder Portfolios i ($R_{i,t}$)
  - Renditen des Marktportfolios ($R_{M,t}$)
  - Risikofreier Zinssatz ($R_{F,t}$)
- Lineares Regressionsmodell

$$\underbrace{R_{i,t} - R_{F,t}}_{R^e_{i,t}} = \alpha_i + \beta_i \underbrace{(R_{M,t} - R_{F,t})}_{R^e_{M,t}} + \varepsilon_{i,t},$$

wobei $\varepsilon_{i,t}$ ein zufälliger Störterm mit $\mathrm{E}[\varepsilon_{i,t}] = 0$ ist.

- Gemäß CAPM: $\alpha_i = 0$

Kleinst-Quadrate-Schätzung

- Berechnung von Schätzwerten für α und β durch Minimierung der Summe der quadrierten Residuen

$$SSR = \sum_{t=1}^{n} \left[R_t^e - \widehat{\alpha} - \widehat{\beta}\, R_{M,t}^e \right]^2 .$$

- Lösungen:

$$\widehat{\beta}_i = \frac{\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\left(R_{i,t}^e - \overline{R}_i^e\right)\left(R_{M,t}^e - \overline{R}_M^e\right)}{\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\left(R_{M,t}^e - \overline{R}_M^e\right)^2},$$

$$\widehat{\alpha}_i = \overline{R}^e - \widehat{\beta}_i\, \overline{R}_M^e .$$

Datensätze

- S&P500:
  - S&P500-Index und 30 Aktien mit der größten Gewichtung.
  - Monatliche Renditen Feb. 1984 - Okt. 2009.
- Industrie-Portfolios:
  - Klassifikation von NYSE-, AMEX- und NASDAQ-Aktien auf Basis von SIC-Codes ("Standard Industrial Classification"). $\Rightarrow$ 30 Portfolios.
  - Monatliche Renditen Jan. 1963 - Sep. 2009.
- Size-Book-to-Market-Portfolios:
  - Klassifikation von NYSE-, AMEX- und NASDAQ-Aktien nach Marktkapitalisierung ("Size"). $\Rightarrow$ 5 Portfolios.
  - Klassifikation nach Buchwert-Marktwert-Verhältnis ("Book-to-Market-Ratio"). $\Rightarrow$ 5 Portfolios.
  - 25 Portfolios als Schnittmengen.
  - Monatliche Renditen Jan. 1963 - Sep. 2009.

Fragestellungen

- Portfolio-Optimierung:
  - Auf welche Branchen sollte sich ein renditemaximierender und risikominimierender Investor konzentrieren? Welcher Industriezweig sollte bevorzugt werden, falls der Anleger auch risikolos investieren kann?
- Capital-Asset-Pricing-Modell:
  - Welche Branchen sind dem Marktrisiko besonders stark ausgesetzt?
  - Halten die Annahmen des Capital-Asset-Pricing-Modells einer Überprüfung auf Zeitreihen- und Querschnittsbasis stand?