1. sup και inf

i) $\boldsymbol{A = (0, 2)}$

Απόδειξη. (Με Ορισμό)

Έχουμε ότι $\sup A = 2$ και $\inf A = 0$.

- Θα δείξουμε ότι $\sup A = 2$. Πράγματι: 2 α.φ. του A, γιατί $a < 2, \ \forall a \in A$. Έστω M α.φ. του A, δηλ. $a \leq M, \ \forall a \in A$. Θ.δ.ο. $2 \leq M$ (Με άτοπο). Πράγματι: Έστω $M < 2$. Τότε $(M, 2) \neq \emptyset \Rightarrow (M, 2) \cap A \neq \emptyset$, άρα $\exists a \in (M, 2)$. Δηλαδή $\exists a \in A$ με $a > M$. άτοπο, γιατί M α.φ. του A.
- Θα δείξουμε ότι $\inf A = 0$. Πράγματι: 0 κ.φ. του A, γιατί $a > 0, \ \forall a \in A$. Έστω m κ.φ. του A, δηλ. $a \geq m, \ \forall a \in A$. Θ.δ.ο. $0 \geq m$ (Με άτοπο). Πράγματι: Έστω $m > 0$. Τότε $(0, m) \neq \emptyset \Rightarrow (0, M) \cap A \neq \emptyset$, άρα $\exists a \in (0, m)$. Δηλαδή $\exists a \in A$ με $a < m$, άτοπο, γιατί m κ.φ. του A.

ii) $\boldsymbol{A = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x < 0\}}$.

Απόδειξη. (Με Ορισμό)

Έχουμε ότι $\sup A = 0$ και $\inf A = -\infty$.

- Θα δείξουμε ότι $\sup A = 0$. Πράγματι: 0 α.φ. του A, γιατί $a < 0, \ \forall a \in A$. Έστω M α.φ. του A, δηλ. $a \leq M, \ \forall a \in A$. Θ.δ.ο. $0 \leq M$ (Με άτοπο). Πράγματι: Έστω $M < 0$. Τότε $(M, 0) \neq \emptyset$, άρα $\exists a \in (M, 0)$. Δηλαδή $\exists a \in A$ με $a > M$, άτοπο, γιατί M α.φ. του A.
- Θα δείξουμε ότι $\inf A = -\infty$. Πράγματι: $A \neq \emptyset$ και A όχι κάτω φραγμένο. Άρα γράφουμε $\inf A = -\infty$.

iii) $\boldsymbol{A = \left\{\frac{1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N}\right\}}$.

Απόδειξη.

Έχουμε ότι $\sup A = 1$ και $\inf A = 0$.

- Θα δείξουμε ότι $\sup A = 1$. Πράγματι: $\frac{1}{n} \leq 1, \ \forall n \in \mathbb{N}$, άρα το 1 είναι α.φ. του A και επίσης $1 \in A$ (για $n = 1$). Άρα $1 = \max A$. Άρα $\sup A = \max A = 1$.
- Θα δείξουμε ότι $\inf A = 0$. Πράγματι: Προφανώς $0 \leq \frac{1}{n}, \ \forall n \in \mathbb{N}$, άρα το 0 κ.φ. του A. Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ με $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$ τ.ω. $\frac{1}{n_0} < 0 + \varepsilon$, με $\frac{1}{n_0} \in A$.

iv) $\boldsymbol{A = \left\{\frac{n}{n+1} \ : \ n \in \mathbb{N}\right\}}$

Απόδειξη.

Έχουμε ότι $\sup A = 1$ και $\inf A = \frac{1}{2}$

- Θα δείξουμε ότι $\sup A = 1$. Πράγματι: 1 α.φ. του A, γιατί $\frac{n}{n+1} < 1, \ \forall n \in \mathbb{N}$. (Δοκιμή: $1 - \varepsilon < \frac{n}{n+1} \Leftrightarrow \varepsilon > 1 - \frac{n}{n+1} \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} < \varepsilon \Leftrightarrow n + 1 > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$) Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ με $n_0 > \frac{1}{\varepsilon} - 1$ τ.ω. $1 - \varepsilon < \frac{n_0}{n_0+1}$, με $\frac{n_0}{n_0+1} \in A$.
- Θα δείξουμε ότι $\inf A = \frac{1}{2}$. Πράγματι: $\frac{1}{2}$ κ.φ. του A, γιατί $\frac{n}{n+1} \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow n + 1 \leq 2n \Leftrightarrow n \geq 1, \ \forall n \in \mathbb{N}$ (ισχύει) και $\frac{1}{2} \in A$ (για $n = 1$). Άρα $\frac{1}{2} = \min A$. Άρα $\inf A = \min A = \frac{1}{2}$.

v) $\boldsymbol{A = \left\{\frac{1}{n} + (-1)^n \ : \ n \in \mathbb{N}\right\}}$.

Απόδειξη.

Παρατηρούμε ότι

$$
\begin{aligned}
A &= \left\{0, \frac{1}{2} + 1, \frac{1}{3} - 1, \frac{1}{4} + 1, \frac{1}{5} - 1, \dots\right\} \\
&= \left\{0, \frac{1}{3} - 1, \frac{1}{5} - 1, \dots\right\} \cup \left\{\frac{1}{2} + 1, \frac{1}{4} + 1, \dots\right\} \\
&= \left\{\frac{1}{2n - 1} - 1 \ : \ n \in \mathbb{N}\right\} \cup \left\{\frac{1}{2n} + 1 \ : \ n \in \mathbb{N}\right\} \\
&= A_1 \cup A_2
\end{aligned}
$$

Αν παραστήσουμε τα στοιχεία του $A=\{0,\frac{3}{2},-\frac{2}{3},\frac{5}{4},-\frac{4}{5},\dots\}$, πάνω στην ευθεία των πραγματικών αριθμών, παρατηρούμε ότι $\inf A=\inf A_1=-1$ και $\sup A=\sup A_2=\max A_2=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$. Πράγματι, από γνωστή πρόταση έχουμε ότι $\sup A=\max\{\sup A_1,\sup A_2\}=\max\{0,\frac{3}{2}\}=\frac{3}{2}$ και $\inf A=\min\{\inf A_1,\inf A_2\}=\min\{-1,1\}=-1$ Οπότε αρκεί να αποδείξουμε τα sup και inf των A_1,A_2.

- Θα δείξουμε ότι $\sup A_2=\frac{3}{2}$. Πράγματι: $\frac{3}{2}$ α.φ. του A_2, γιατί $\frac{1}{2n}+1\leq\frac{3}{2}\Leftrightarrow\frac{1+2n}{2n}\leq\frac{3}{2}\Leftrightarrow 2+4n\leq 6n\Leftrightarrow n\geq 1,\ \forall n\in\mathbb{N}$ (ισχύει) και $\frac{3}{2}\in A_2$ (για $n=1$). Άρα $\frac{3}{2}=\max A_2$. Άρα $\sup A_2=\max A_2=\frac{3}{2}$.
- Θα δείξουμε ότι $\inf A_1=-1$. Πράγματι: -1 κ.φ. του A_1, γιατί προφανώς $\frac{1}{2n-1}-1\geq -1,\ \forall n\in\mathbb{N}$. (Δοκιμή: $\frac{1}{2n-1}-1<-1+\varepsilon\Leftrightarrow\frac{1}{2n-1}<\varepsilon\Leftrightarrow 2n-1>\frac{1}{\varepsilon}\Leftrightarrow n>\frac{1/\varepsilon+1}{2}$). Έστω $\varepsilon>0$. Τότε $\exists n_0\in\mathbb{N}$ με $n_0>\frac{1/\varepsilon+1}{2}$ τ.ω. $\frac{1}{2n_0-1}-1<\varepsilon-1$, με $\frac{1}{2n_0-1}-1\in A$.

vi) $\boldsymbol{A=\{\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\ :\ n,m\in\mathbb{N}\}}$ Έχουμε ότι $\sup A=1$ και $\inf A=-1$.

- Θα δείξουμε ότι $\inf A=-1$. Πράγματι: -1 κ.φ. του A, γιατί $\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\geq\frac{1}{n}-1>-1,\ \forall n\in\mathbb{N}$. Έστω $\varepsilon>0$. Τότε, $\exists n_0\in\mathbb{N}$ με $\frac{1}{n_0}<\varepsilon$ ώστε $\frac{1}{n_0}-1<\varepsilon-1$ με $\frac{1}{n_0}-1\in A$.
- Θα δείξουμε ότι $\sup A=1$. Πράγματι: Παρατηρούμε ότι $A=-A$, άρα από γνωστή πρόταση έχουμε ότι

$$\inf A=-\sup(-A)=-\sup A$$

Άρα

$$\sup A=-\inf A=-(-1)=1$$

2. Έστω A,B μη-κενά, φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι:

   i) $A\cup B$ είναι φραγμένο

   ii) $\sup(A\cup B)=\max\{\sup A,\sup B\}$

   iii) $\inf(A\cup B)=\min\{\inf A,\inf B\}$

   iv) Ισχύει κάτι ανάλογο για το $\sup(A\cap B)$ και $\inf(A\cap B)$;

Απόδειξη.

i) A φραγμένο $\Leftrightarrow\exists M\in\mathbb{R}>0,\ -M<a<M,\ \forall a\in A$
B φραγμένο $\Leftrightarrow\exists N\in\mathbb{R}>0,\ -N<b<N,\ \forall b\in B$
Θέτουμε $K=\max\{M,N\}$.
Θα αποδείξουμε (με άτοπο) ότι $-K<c<K,\ \forall c\in A\cup B$.Πράγματι:
Έστω $c\in A\cup B$ με $|c|\geq K=\max\{M,N\}$. Τότε

$$\left.\begin{aligned}&\text{Αν } c\in A \text{ τότε } M>|c|\geq\max\{M,N\},\ \text{άτοπο}\\&\text{Αν } c\in B \text{ τότε } N>|c|\geq\max\{M,N\},\ \text{άτοπο}\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$-K<c<K,\ \forall c\in A\cup B$.

ii) $$\left.\begin{aligned}&A\neq\emptyset,\ \text{και άνω φραγμένο}\overset{\text{Α.Π.}}{\Rightarrow}\exists\sup A\\&B\neq\emptyset,\ \text{και άνω φραγμένο}\overset{\text{Α.Π.}}{\Rightarrow}\exists\sup B\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

χ.β.γ. έστω $\max\{\sup A,\sup B\}=\sup A$.
Θα δείξουμε ότι $\sup(A\cup B)=\sup A$. Πράγματι:
Έστω $c\in A\cup B$. Τότε, αν $c\in A\Rightarrow c\leq\sup A$, ενώ αν $c\in B\Rightarrow c\leq\sup B\leq\sup A$. Άρα σε κάθε περίπτωση $c\leq\sup A,\ \forall c\in A\cup B$. Άρα $\sup A$ α.φ. του $A\cup B$.
Ισχύει ότι $\sup(A\cup B)\leq\sup A\quad$ (1), γιατί $\sup A$ α.φ. του $A\cup B$. Θα δείξουμε ότι $\sup A\leq\sup(A\cup B)\quad$ (2). Πράγματι:
Αρκεί να δείξουμε ότι $\sup(A\cup B)$ α.φ. του A. Πράγματι:
έστω $a\in A\Rightarrow a\in A\cup B\Rightarrow a\leq\sup(A\cup B),\ \forall a\in A$, άρα το $\sup A$ α.φ. του A.
Οπότε από τις (1) και (2), προκύπτει το ζητούμενο.

3. Έστω A,B μη-κενά, άνω φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$.

Αν $A+B=\{a+b\ :\ a\in A,\ b\in B\}$ και $A\cdot B=\{a\cdot b\ :\ a\in A,\ b\in B\}$. Να δείξετε ότι

i) $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$.

ii) $\sup(A \cdot B) = \sup A \cdot \sup B$

Απόδειξη.

$$\left.\begin{array}{l} a \leq \sup A,\ \forall a \in A \\ b \leq \sup B,\ \forall b \in B \end{array}\right\} \Rightarrow a+b \leq \sup A + \sup B,\ \forall a \in A \text{ και } b \in B.$$

Οπότε $\sup A + \sup B$ α.φ. του $A+B \Rightarrow \sup(A+B) \leq \sup A + \sup B$. Θ.δ.ο. $\sup A + \sup B \leq \sup(A+B)$. Πράγματι:

Έστω $a \in A$ και $b \in B \Rightarrow a+b \leq \sup(A+B) \Leftrightarrow a \leq \sup(A+B) - b,\ \forall a \in A$

Άρα $\sup(A+B) - b$ α.φ. του $A,\ \forall b \in B$,

άρα $\sup A \leq \sup(A+B) - b,\ \forall b \in B \Leftrightarrow b \leq \sup(A+B) - \sup A,\ \forall b \in B$.

Άρα $\sup(A+B) - \sup A$ α.φ. του B, και άρα

$\sup B \leq \sup(A+B) - \sup A \Leftrightarrow \sup A + \sup B \leq \sup(A+B)$.