Ακολουθίες
Ασκήσεις

Σύγκλιση Ακολουθίας

1. Να δείξετε ότι οι παρακάτω ακολουθίες δεν συγκλίνουν.

   i) $a_n = (-1)^n \dfrac{n}{n+1}$

   ii) $a_n = (-1)^n \dfrac{n+3}{2n}$

   iii) $a_n = \lambda n, \ \lambda > 0$

Απόδειξη.

i) Θεωρούμε τις υπακολουθίες $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ και $(a_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}}$. Έχουμε,

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n} = \lim_{n\to\infty} (-1)^{2n} \frac{2n}{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n(2+\frac{1}{n})} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{2+\frac{1}{n}} = \frac{2}{2+0} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n-1} = \lim_{n\to\infty} (-1)^{2n-1} \frac{2n-1}{2n-1+1} = \lim_{n\to\infty} -\frac{2n-1}{2n} = -\lim_{n\to\infty} \frac{n(2-\frac{1}{n})}{2n} = -\lim_{n\to\infty} \frac{2-\frac{1}{n}}{2} = -1$$

Επειδή $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} \neq \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n-1}$ η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δε συγκλίνει.

ii) Θεωρούμε τις υπακολουθίες $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ και $(a_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}}$. Έχουμε,

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n} = (-1)^{2n} \lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{2\cdot 2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{4n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(2+\frac{3}{n})}{4n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{3}{n}}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n-1} = \lim_{n\to\infty} (-1)^{2n-1} \frac{2n-1+3}{2\cdot(2n-1)} = \lim_{n\to\infty} -\frac{2n+2}{4n-2} = -\lim_{n\to\infty} \frac{n(2+\frac{2}{n})}{n(4-\frac{2}{n})} = -\lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{2}{n}}{4-\frac{2}{n}} = -\frac{1}{2}$$

Επειδή $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} \neq \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n-1}$ η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δε συγκλίνει.

iii) Η ακολουθία $(\lambda n)_{n\in\mathbb{N}}$ δε συγκλίνει, διότι δεν είναι φραγμένη. Πράγματι, γιατί αν $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη, τότε

$$|a_n| = |\lambda n| \overset{\lambda\geq 0}{=} \lambda n \leq a, \ \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow n \leq \frac{a}{\lambda}, \ \forall n \in \mathbb{N} \text{ άτοπο, γιατι } \mathbb{N} \text{ όχι άνω φραγμένο}$$

1.1 Άλγεβρα και Θεωρήματα Ορίων

1. Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια.

   i) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+3n}{n^2+2n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2(1+\frac{3}{n})}{n^2(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2})} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+\frac{3}{n}}{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}} = \dfrac{1+0}{1+0+0} = 1$

   ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[3]{\dfrac{n^3+n}{n^3+2n}} = \sqrt[3]{\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3(1+\frac{1}{n^2})}{n^3(1+\frac{2}{n^2})}} = \sqrt[3]{\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{2}{n^2}}} = \sqrt[3]{\dfrac{1+0}{1+0}} = \sqrt[3]{1} = 1$

2. Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια με τη βοήθεια του Κριτηρίου Παρεμβολής.

i) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2+2n}$

Απόδειξη.

$|a_n| = \left|\dfrac{(-1)^n}{n^2+2n}\right| = \dfrac{|(-1)^n|}{|n^2+2n|} = \dfrac{1}{n^2+2n} \leq \dfrac{1}{n^2}$

Όμως $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$, άρα και $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2+2n} = 0$

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n})$

Απόδειξη.

$$\begin{aligned}|a_n| &= \left|\sqrt{n+2} - \sqrt{n}\right| = \sqrt{n+2} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+2} - \sqrt{n})(\sqrt{n+2} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} = \frac{n+2-n}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} \leq \frac{2}{\sqrt{n}}\end{aligned}$$

Όμως $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2}{\sqrt{n}} = 0$, άρα και $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n+2} - \sqrt{n} = 0$

iii) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^3+4} - \sqrt{n^3+1}\right)$

Απόδειξη.

$$\begin{aligned}|a_n| &= \left|\sqrt{n^3+4} - \sqrt{n^3+1}\right| = \sqrt{n^3+4} - \sqrt{n^3+1} = \frac{(\sqrt{n^3+4} - \sqrt{n^3+1})(\sqrt{n^3+4} + \sqrt{n^3+1})}{\sqrt{n^3+4} + \sqrt{n^3+1}} \\ &= \frac{n^3+4-n^3-1}{\sqrt{n^3+4} + \sqrt{n^3+1}} = \frac{3}{\sqrt{n^3+4} + \sqrt{n^3+1}} < \frac{3}{\sqrt{n^3+1} + \sqrt{n^3+1}} = \frac{3}{2\sqrt{n^3+1}} < \frac{3}{\sqrt{n^3}} \\ &= \frac{3}{n\sqrt{n}}\end{aligned}$$

Όμως $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3}{n\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{3}{n} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) = 0 \cdot 0 = 0$, άρα και $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^3+4} - \sqrt{n^3+1}\right) = 0$

iv) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4\sin^3 n + 3\cos^2 n}{n^2}$

Απόδειξη.

$$\begin{aligned}\left|\frac{4\sin^3 n + 3\cos^2 n}{n^2}\right| &= \frac{\left|4\sin^3 n + 3\cos^2 n\right|}{n^2} \leq \frac{\left|4\sin^3 n\right| + \left|3\cos^2 n\right|}{n^2} = \frac{4\left|\sin^3 n\right| + 3\left|\cos^2 n\right|}{n^2} \\ &= \frac{4|\sin n|^3 + 3|\cos n|^3}{n^2} \leq \frac{4\cdot 1^3 + 3\cdot 1^3}{n^2} = \frac{7}{n^2} < \frac{7}{n}\end{aligned}$$

Όμως $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{7}{n} = 0$, άρα και $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4\sin^3 n + 3\cos^2 n}{n^2} = 0$

v) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\cos n + 3\sin 4n}{2\sqrt{n} - 1}$

Απόδειξη.

$$|a_n| = \left|\frac{\cos n + 3\sin 4n}{2\sqrt{n}-1}\right| = \frac{|\cos n + 3\sin 4n|}{2\sqrt{n}-1} \leq \frac{|\cos n| + |3\sin 4n|}{2\sqrt{n}-1} = \frac{|\cos n| + 3|\sin 4n|}{2\sqrt{n}-1} \leq \frac{1+3\cdot 1}{2\sqrt{n}-1}$$
$$= \frac{4}{2\sqrt{n}-1}$$

Όμως $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4}{\sqrt{n}(2-\frac{1}{\sqrt{n}})} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}} \cdot \dfrac{4}{(2-\frac{1}{\sqrt{n}})}\right) = 0 \cdot \dfrac{4}{2-0} = 0$

vi) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n + 4^n + n}$

Απόδειξη.

Ισχύει

$$\begin{aligned} 4^n &\leq 3^n + 4^n + n \leq 4^n + 4^n + 4^n,\ \forall n \in \mathbb{N} \\ 4^n &\leq 3^n + 4^n + n \leq 3 \cdot 4^n,\ \forall n \in \mathbb{N} \\ \sqrt[n]{4^n} &\leq \sqrt[n]{3^n + 4^n + n} \leq \sqrt[n]{3 \cdot 4^n},\ \forall n \in \mathbb{N} \\ 4 &\leq \sqrt[n]{3^n + 4^n + n} \leq 4 \cdot \sqrt[n]{3},\ \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Όμως $\lim\limits_{n\to\infty} 4 = 4$ και $\lim\limits_{n\to\infty} 4\sqrt[n]{3} = 4 \cdot 1 = 4$, άρα από Κριτήριο παρεμβολής και $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n + 4^n + n} = 4$

vii) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{n^2}{3n^2+2}}$

Απόδειξη.

Ισχύει

$$\frac{1}{5} = \frac{n^2}{5n^2} \leq \frac{n^2}{3n^2 + 2n^2} \leq \frac{n^2}{3n^2+2} \leq \frac{n^2}{3n^2} = \frac{1}{3},\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Επομένως

$$\sqrt[n]{\frac{1}{5}} \leq \sqrt[n]{\frac{n^2}{3n^2+2}} \leq \sqrt[n]{\frac{1}{3}},\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Όμως $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{1}{5}} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\dfrac{1}{3}} = 1$, άρα από Κριτήριο Παρεμβολής και $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{n^2}{3n^2+2}} = 1$

viii) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2 + n}$

Απόδειξη.

Ισχύει

$$1 < n^2 + n \leq n^2 + n^2 = 2n^2,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Επομένως

$$\sqrt[n]{1} < \sqrt[n]{n^2+n} \leq \sqrt[n]{2n^2}$$

Όμως $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1} = 1$ και $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt[n]{2} \cdot \sqrt[n]{n^2}) = \lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt[n]{2} \cdot \sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{n}) = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$, άρα και $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2+n} = 1$

3. Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια.

i) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n + 5^n + 7^n}$

Απόδειξη.

$$7^n < 3^n + 5^n + 7^n < 7^n + 7^n + 7^n = 3 \cdot 7^n \Leftrightarrow$$
$$\sqrt[n]{7^n} < \sqrt[n]{3^n + 5^n + 7^n} < \sqrt[n]{3 \cdot 7^n} \Leftrightarrow$$
$$7 < \sqrt[n]{3^n + 5^n + 7^n} < 7 \cdot \sqrt[n]{3} \Leftrightarrow$$

Όμως $\lim\limits_{n\to\infty} 7 = 7$ και $\lim\limits_{n\to\infty} 7 \cdot \sqrt[n]{3} = 7 \cdot 1 = 7$, άρα και $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n + 5^n + 7^n} = 7$

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{3}{5}\right)^n + \left(\frac{5}{6}\right)^n}$

Απόδειξη. Ισχύει ότι $\frac{3}{5} < \frac{5}{6}$, οπότε

$$\left(\frac{5}{6}\right)^n < \left(\frac{3}{5}\right)^n + \left(\frac{5}{6}\right)^n < \left(\frac{5}{6}\right)^n + \left(\frac{5}{6}\right)^n = 2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^n \Leftrightarrow$$
$$\sqrt[n]{\left(\frac{5}{6}\right)^n} < \sqrt[n]{\left(\frac{3}{5}\right)^n + \left(\frac{5}{6}\right)^n} < \sqrt[n]{2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^n} \Leftrightarrow$$
$$\frac{5}{6} < \sqrt[n]{\left(\frac{3}{5}\right)^n + \left(\frac{5}{6}\right)^n} < \frac{5}{6} \cdot \sqrt[n]{2}$$

Όμως $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5}{6} = \frac{5}{6}$ και $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{5}{6} \cdot \sqrt[n]{2}\right) = \frac{5}{6} \cdot 1 = \frac{5}{6}$, άρα και $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{3}{5}\right)^n + \left(\frac{5}{6}\right)^n} = \frac{5}{6}$

iii) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{6 \cdot 3^n - 7 \cdot 4^n + 8}{5^n + 3 \cdot 2^n + 1}$

Απόδειξη.

$$a_n = \frac{6 \cdot 3^n - 7 \cdot 4^n + 8}{5^n + 3 \cdot 2^n + 1} = \frac{5^n \left(6 \cdot \frac{3^n}{5^n} - 7 \cdot \frac{4^n}{5^n} + \frac{8}{5^n}\right)}{5^n \left(1 + 3 \cdot \frac{2^n}{5^n} + \frac{1}{5^n}\right)} = \frac{6 \cdot (\frac{3}{5})^n - 7 \cdot (\frac{4}{5})^n + 8 \cdot (\frac{1}{5})^n}{1 + 3 \cdot (\frac{2}{5})^n + (\frac{1}{5})^n}$$
$$\xrightarrow{n\to\infty} \frac{6 \cdot 0 - 7 \cdot 0 + 8 \cdot 0}{1 + 3 \cdot 0 + 0} = 0$$

iv) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4^{n+3}}{\sqrt{4^{4n-2}}}$

Απόδειξη.

$$|a_n| = \left|\frac{4^{n+3}}{\sqrt{4^{4n-2}}}\right| = \frac{4^n \cdot 4^3}{\cancel{\sqrt{}}\,4^{\cancel{2}(2n-1)}} = \frac{4^n \cdot 4^3}{4^{2n-1}} = \frac{4^n \cdot 4^3}{4^{2n} \cdot 4^{-1}} = \frac{4^3}{4^n \cdot \frac{1}{4}} = \frac{4^4}{4^n} = 4^4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

Όμως $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$, δηλαδή $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{4^{n+3}}{\sqrt{4^{4n-2}}}\right| = 0.$

Άρα από γνωστή πρόταση και $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4^{n+3}}{\sqrt{4^{4n-2}}} = 0$