1

Πραγματικοί Αριθμοί

1.1 Μαθηματική Επαγωγή

Θεώρημα 1.1.1. Έστω $S \subseteq \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε:

$$\left.\begin{array}{l}\text{(i)}\;\; 1 \in S \\ \text{(ii)}\;\; n \in S \Rightarrow n+1 \in S\end{array}\right\} \Rightarrow S = \mathbb{N}$$

Παράδειγμα 1.1.2. Να αποδείξετε ότι $4^n \geq n^2,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη.

- Για $n = 1$, έχω: $4^1 \geq 1^2$, ισχύει.
- Έστω ότι η ανισότητα ισχύει για n, δηλ. $4^n \geq n^2 \quad (1.1)$
- Θα δείξουμε ότι ισχύει και για $n+1$. Πράγματι:

$$4^{n+1} = 4^n \cdot 4 \overset{(1.1)}{\geq} n^2 \cdot 4 = 4n^2 = n^2 + 2n^2 + n^2 \geq n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2.$$

Παράδειγμα 1.1.3. Να αποδείξετε ότι $2^n \geq n^3,\ \forall n \geq 10$.

Απόδειξη.

- Για $n = 10$, έχω: $2^{10} = 1024 \geq 1000 = 10^3$, ισχύει.
- Έστω ότι η ανισότητα ισχύει για n, δηλ. $2^n \geq n^3 \quad (1.2)$.
- Θα δείξουμε ότι ισχύει και για $n+1$. Πράγματι:

$$\begin{aligned}2^{n+1} = 2^n \cdot 2 \overset{(1.2)}{\geq} n^3 \cdot 2 = 2n^3 = n^3 + n^3 = n^3 + nn^2 \overset{n\geq 10}{\geq} n^3 + 10n^2 > n^3 + 7n^2 &= n^3 + 3n^2 + 3n^2 + n^2 \\ &\geq n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \\ &= (n+1)^3\end{aligned}$$

1.2 Ανισότητα Bernoulli

$$\boxed{(1+a)^n \geq 1 + na, \quad \forall a \geq -1,\ \forall n \in \mathbb{N}}$$

Απόδειξη.

- Για $n = 1$, έχω: $(1 + a)^1 = 1 + a \geq 1 + a = 1 + 1 \cdot a$, ισχύει.
- Έστω ότι η ανισότητα ισχύει, για n, δηλ. $(1 + a)^n \geq 1 + na \quad (1.3)$
- Θα δείξουμε ότι ισχύει και για $n + 1$. Πράγματι

$$(1+a)^{n+1} = (1+a)^n(1+a) \underset{a\geq -1}{\overset{(1.3)}{\geq}} (1+na)(1+a) = 1+a+na+na^2 = 1+(n+1)a+na^2 \geq 1+(n+1)a$$

Παρατήρηση 1.2.1. Αν $n = 2, 3, 4, \ldots$ και $a > -1$, τότε ισχύει $(1 + a)^n > 1 + na$.

1.3 Απόλυτη Τιμή

Ορισμός 1.3.1. Για κάθε $a \in \mathbb{R}$, θέτουμε

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$$

Παρατήρηση 1.3.1. Άμεση συνέπεια του ορισμού είναι οι σχέσεις:

- $|a| \geq 0, \ \forall a \in \mathbb{R}$
- $-|a| \leq a \leq |a|, \ \forall a \in \mathbb{R}$

Πρόταση 1.3.2. Έστω $\theta > 0$. Τότε

$$|a| \leq \theta \Leftrightarrow -\theta \leq a \leq \theta$$

Απόδειξη.

$(\Rightarrow)$ Έστω ότι $|a| \leq \theta, \ a \in \mathbb{R}$ και $\theta > 0$.

- Έστω $a \geq 0$. Τότε $|a| = a$, οπότε: $0 \leq |a| \leq \theta \Rightarrow 0 \leq a \leq \theta \Rightarrow -\theta \leq a \leq \theta$
- Έστω $a < 0$. Τότε $|a| = -a$, οπότε: $0 \leq |a| \leq \theta \Rightarrow 0 < -a \leq \theta \Rightarrow -\theta \leq a < 0 \Rightarrow -\theta \leq a \leq \theta$

$(\Leftarrow)$ Έστω $-\theta \leq a \leq \theta$ για $a \in \mathbb{R}$ και $\theta > 0$.

- Έστω $a \geq 0$. Τότε $|a| = a$. Οπότε $|a| = a \leq \theta$.
- Έστω $a < 0$. Τότε $|a| = -a$. Οπότε $|a| = -a \leq \theta$.

Πρόταση 1.3.3 (Τριγωνική Ανισότητα)**.** Για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$, ισχύει:

(i) $|a + b| \leq |a| + |b|$

(ii) $|a| - |b| \leq |a + b|$

Απόδειξη.

(i) Έχουμε ότι

$$a \leq |a| \Rightarrow -|a| \leq a \leq |a|$$
$$b \leq |b| \Rightarrow -|b| \leq b \leq |b|$$

Με πρόσθεση, προκύπτει

$$-(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b|$$

Οπότε από την πρόταση 1.3.2, ισχύει: $|a + b| \leq |a| + |b|$

(ii) Έχουμε $|a| = |(a + b) - b| \leq |a + b| + |-b| = |a + b| + |b| \Rightarrow |a| - |b| \leq |a + b| \quad (1.4).$

Παρατήρηση 1.3.4. Έχουμε $|b| = |(a+b) - a| \leq |a+b| + |a| \Rightarrow |b| - |a| \leq |a+b|$ (1.5). Άρα, από τις (1.4) και (1.5), έχουμε $-|a+b| \leq |a| - |b| \leq |a+b|$, οπότε τελικά, από την πρόταση 1.3.2 ισχύει ότι

$$||a| - |b|| \leq |a+b| \tag{1.6}$$

Τώρα, χρησιμοποιώντας το i) υποερώτημα της πρότασης 1.3.2, για το $-b$, έχουμε:

$$|a-b| \leq |a| + |b|$$

και από την σχέση (1.6), για $-b$ έχουμε:

$$||a| - |b|| \leq |a-b|$$

Οπότε, τελικά έχουμε:

$$\boxed{||a| - |b|| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|}$$

1.4 Μέγιστο και Ελάχιστο

Ορισμός 1.4.1. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$. Λέμε ότι το A έχει **μέγιστο** στοιχείο, αν υπάρχει $x_0 \in A$ τέτοιο ώστε $a \leq x_0,\ \forall a \in A$.

Ορισμός 1.4.2. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$. Λέμε ότι το A έχει **ελάχιστο** στοιχείο, αν υπάρχει $x_0 \in A$ τέτοιο ώστε $a \geq x_0, \forall a \in A$.

Παράδειγμα 1.4.1. Έστω $A = [0,3] = \{x \in \mathbb{R} \ : \ 0 \leq x \leq 3\}$. Το $x_0 = 3$ είναι μέγιστο του A, γιατί $3 \in A$ και $a \leq 3,\ \forall a \in A$. Ομοίως $x_0 = 0$ είναι ελάχιστο του A, γιατί $0 \in A$ και $a \geq 0, \forall a \in A$.

Παράδειγμα 1.4.2. Το σύνολο $A = (-\infty, 3]$ έχει μέγιστο στοιχείο το 3, ενώ προφανώς δεν έχει ελάχιστο στοιχείο.

Παράδειγμα 1.4.3. Να δείξετε ότι το σύνολο $A = (0,3)$ δεν έχει μέγιστο στοιχείο.

Απόδειξη. (Με άτοπο)
$A = (0,3) = \{x \in \mathbb{R} \ : \ 0 < x < 3\}$. Έστω ότι $x_0 = \max A$. Άρα $x_0 \in A \Rightarrow x_0 < 3$. Άρα $(x_0, 3) \neq \emptyset \Rightarrow (x_0,3) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow \exists a \in (x_0,3) \cap A$. Δηλαδή $\exists a \in A$ τέτοιο ώστε $a > x_0$. Άτοπο, γιατί $x_0 = \max A$.

Πρόταση 1.4.4. Αν $A \subseteq \mathbb{R}$ έχει μέγιστο στοιχείο, τότε αυτό είναι μοναδικό και συμβολίζεται με max **A**.

Απόδειξη. Έστω ότι το A έχει δυο μέγιστα στοιχεία, x_0, x_0'.
Τότε

$$\left.\begin{array}{l} \blacksquare\ x_0 \text{ μέγιστο του } A \Rightarrow a \leq x_0,\ \forall a \in A \xRightarrow{x_0' \in A} x_0' \leq x_0 \\ \blacksquare\ x_0' \text{ μέγιστο του } A \Rightarrow a \leq x_0',\ \forall a \in A \xRightarrow{x_0 \in A} x_0 \leq x_0' \end{array}\right\} \Rightarrow x_0 = x_0'.$$

Πρόταση 1.4.5. Αν $A \subseteq \mathbb{R}$ έχει ελάχιστο στοιχείο, τότε αυτό είναι μοναδικό και συμβολίζεται με min **A**.

Απόδειξη. Ομοίως

Ορισμός 1.4.3. Έστω $A \subseteq \mathbb{R},\ A \neq \emptyset$. Λέμε ότι A είναι **άνω φραγμένο**, αν $\exists \mathbf{x_0} \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $a \leq x_0,\ \forall a \in A$.

Ορισμός 1.4.4. Έστω $A \subseteq \mathbb{R},\ A \neq \emptyset$. Λέμε ότι A είναι **κάτω φραγμένο**, αν $\exists \mathbf{x_0} \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $a \geq x_0,\ \forall a \in A$.

Παρατηρήσεις 1.4.6.

- Το μέγιστο (ελάχιστο) στοιχείο ενός συνόλου, όταν υπάρχει, αποτελεί άνω (κάτω) φράγμα του συνόλου.
- Ένα άνω (κάτω) φράγμα, ενός συνόλου, όταν ανήκει στο σύνολο, είναι το μέγιστο (ελάχιστο) στοιχείο του συνόλου.
- Το άνω (κάτω) φράγμα ενός συνόλου, δεν είναι μοναδικό.

Παράδειγμα 1.4.7.

(i) Το σύνολο $A = (0, 3)$ έχει ως άνω φράγματα τους αριθμούς $3, 4, 144, \ldots$ και κάτω φράγματα τους αριθμούς $0, -1, -2, -128, \ldots$. Συγκεκριμένα, το σύνολο των άνω φραγμάτων του A είναι το $\{x \in \mathbb{R} \ :\ x \geq 3\} = [3, +\infty)$ και το σύνολο των κάτω φραγμάτων είναι το $\{x \in \mathbb{R} \ :\ x \leq 0\} = (-\infty, 0]$.

(ii) Το σύνολο $B = [-1, +\infty)$ δεν είναι άνω φραγμένο, ενώ το σύνολο των κάτω φραγμάτων του είναι το $\{x \in \mathbb{R} \ :\ x \leq -1\}$. Παρατηρούμε ότι $\min B = -1$

(iii) Αν $C = (-\infty, 2) \cup \{3\}$, τότε παρατηρούμε ότι $\max C = 3$ και ότι το σύνολο των άνω φραγμάτων είναι το $[3, +\infty)$, ενώ το σύνολο C δεν είναι κάτω φραγμένο.

Παρατήρηση 1.4.8.

- Από τα παραδείγματα (ii) και (iii) υπάρχουν σύνολα που δεν είναι άνω ή κάτω φραγμένα.
- Στο παράδειγμα (i) το 3 είναι το ελάχιστο από τα άνω φράγματα του A, ενώ το 0 είναι το μέγιστο από τα κάτω φράγματα του A.

Ορισμός 1.4.5. Έστω $A \subseteq \mathbb{R},\ A \neq \emptyset$. Λέμε ότι το A είναι **φραγμένο**, αν είναι άνω και κάτω φραγμένο. Τότε υπάρχουν $m, M \in \mathbb{R}$ ώστε $m \leq a \leq M, \quad a \in A$

Πρόταση 1.4.9. Ένα σύνολο $A \subseteq \mathbb{R},\ A \neq \emptyset$ είναι φραγμένο αν και μόνο αν $\exists M > 0 \ :\ |a| \leq M,\ \forall a \in A$.

Απόδειξη.

($\Rightarrow$) Έστω A φραγμένο. Τότε $\exists m', M' \in \mathbb{R} \ :\ m' \leq a \leq M',\ \forall a \in A$.

Επιλέγω $M = \max\{|m'|, |M'|\}$. Τότε $M > 0$ και

$$-M \leq -|m'| \leq m' \leq a \leq M' \leq |M'| \leq M, \quad \forall a \in A$$
$$-M \leq a \leq M, \quad \forall a \in A$$
$$|a| \leq M, \quad \forall a \in A$$

($\Leftarrow$) Έστω ότι $\exists M > 0 \ :\ |a| \leq M,\ \forall a \in A \Leftrightarrow -M \leq a \leq M,\ \forall a \in A$.

Τότε προφανώς έχουμε ότι $-M$ και M, είναι αντίστοιχα κάτω και άνω φράγματα του A, και άρα A φραγμένο.

Πρόταση 1.4.10. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \emptyset$ και έστω $-A = \{x \in \mathbb{R} \ :\ x = -a,\ a \in A\} = \{-a \ :\ a \in A\}$. Αν M είναι άνω φράγμα του A, τότε το $-M$ είναι κάτω φράγμα του συνόλου $-A$.

Απόδειξη. Έστω M α.φ. του A. Τότε

$$a \leq M,\ \forall a \in A \Rightarrow$$
$$-a \geq -M,\ \forall a \in A \Rightarrow$$
$$-a \geq -M,\ \forall (-a) \in -A \Rightarrow$$
$$x \geq -M,\ \forall x \in -A, \quad \text{όπου θέσαμε } x = -a$$

οπότε $-M$ κ.φ. του $-A$.

Πρόταση 1.4.11. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ και έστω $-A = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x = -a, \ a \in A\} = \{-a \ : \ a \in A\}$. Αν m είναι κάτω φράγμα του A, τότε το $-m$ είναι άνω φράγμα του συνόλου $-A$.

Απόδειξη. Ομοίως

1.5 Supremum και Infimum

Ορισμός 1.5.1. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ και A άνω φραγμένο. Αν υπάρχει άνω φράγμα s του A τέτοιο ώστε

$$s \leq M, \quad \text{για κάθε M άνω φράγμα του A},$$

τότε το s ονομάζεται **supremum** του A και συμβολίζεται $s = \sup A$.

Ορισμός 1.5.2. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ και A κάτω φραγμένο. Αν υπάρχει κάτω φράγμα s του A τέτοιο ώστε

$$s \geq m, \quad \text{για κάθε m κάτω φράγμα του A},$$

τότε το s ονομάζεται **infimum** του A και συμβολίζεται $s = \inf A$.

Παράδειγμα 1.5.1. Αν $A = \{-1, -2\} \cup (1, 4]$, τότε παρατηρούμε ότι $\max A = 4, \ \min A = -2$, το σύνολο των άνω φραγμάτων είναι το $[4, +\infty]$ ενώ το σύνολο των κάτω φραγμάτων είναι το $(-\infty, -2)$. Επομένως, $\sup A = \max A = 4$ και $\inf A = \min A = -2$

Παράδειγμα 1.5.2. Έστω $A = (0, 3)$. Θα δείξουμε ότι $\sup A = 3$. Πράγματι, το 3 προφανώς είναι α.φ. του A. Θα δείξουμε ότι είναι το ελάχιστο από τα άνω φράγματα του A. Έστω ότι δεν είναι, δηλαδή $\exists M$ α.φ. του A, ώστε $M < 3 \Rightarrow (M, 3) \neq \emptyset \Rightarrow (M, 3) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow \exists a \in (M, 3) \cap A$. Τότε, έχουμε ότι $a \in A$ και $a > M$, άτοπο, γιατί M είναι α.φ. του A. Ομοίως αποδεικνύουμε ότι $\inf A = 0$.

Πρόταση 1.5.3. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}, \ A \neq \emptyset$ και το A έχει μέγιστο στοιχείο. Τότε $\sup A = \max A$.

Απόδειξη.

Έστω $x_0 = \max A \Rightarrow a \leq x_0, \ \forall a \in A$, άρα x_0 α.φ. του A. Άρα το A είναι άνω φραγμένο και επειδή $A \neq \emptyset$, από το αξίωμα πληρότητας υπάρχει το $\sup A$. Ισχύει $x_0 \leq \sup A$, γιατί $\sup A$ α.φ. του A και $x_0 \in A$. Όμως x_0 επίσης α.φ. του A, άρα $\sup A \leq x_0$, γιατί το $\sup A$ είναι το ελάχιστο άνω φράγμα. Άρα $x_0 = \sup A$.

Πρόταση 1.5.4. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}, \ A \neq \emptyset$ και το A έχει ελάχιστο στοιχείο. Τότε $\inf A = \min A$.

Απόδειξη. Ομοίως

1.6 Αξίωμα Πληρότητας

- Κάθε μη κενό και άνω φραγμένο υποσύνολο των πραγματικών αριθμών έχει supremum.
- Κάθε μη κενό και κάτω φραγμένο υποσύνολο των πραγματικών αριθμών έχει infimum.

Παρατήρηση 1.6.1.

- Αν το A δεν είναι άνω φραγμένο, τότε καταχρηστικά γράφουμε ότι $\sup A = +\infty$.
- Αν το A δεν είναι κάτω φραγμένο, τότε καταχρηστικά γράφουμε ότι $\inf A = -\infty$.

Πρόταση 1.6.2. Έστω ότι για τον $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $0 \leq x < \varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0$. Τότε $x = 0$.

Απόδειξη. Έστω ότι $0 \leq x < \varepsilon, \quad \varepsilon > 0$ και $x \neq 0 \overset{x \geq 0}{\Longrightarrow} x > 0$. Τότε για $\varepsilon = x > 0$, έχουμε ότι $0 \leq x < x$, άτοπο.

Πρόταση 1.6.3 (Αρχιμήδεια Ιδιότητα).

(i) Το $\mathbb{N}$ δεν είναι άνω φραγμένο.

(ii) $\forall y > 0, \ \exists n \in \mathbb{N} \ ; \ n > y$

(iii) $\forall \varepsilon > 0, \ \exists n \in \mathbb{N} \ : \ \frac{1}{n} < \varepsilon$

Απόδειξη.

(i) Έστω ότι το $\mathbb{N}$ είναι άνω φραγμένο. Λόγω ότι είναι και μη κενό ($1 \in \mathbb{N}$), από το αξίωμα Πληρότητας, έχουμε ότι υπάρχει το $\sup \mathbb{N}$. Τότε από τη χαρακτηριστική ιδιότητα του supremum, έχουμε ότι για $\varepsilon = 1 > 0, \ \exists n \in \mathbb{N} \ : \ \sup \mathbb{N} - 1 < n \Leftrightarrow n + 1 > \sup \mathbb{N}$, άτοπο.

(ii) Έστω ότι δεν ισχύει η πρόταση. Τότε $\exists y > 0, \ \forall n \in \mathbb{N} \ : \ n \leq y$. Δηλαδή το y είναι α.φ. του $\mathbb{N}$, άτοπο.

(iii) Έστω ότι δεν ισχύει η πρόταση. Τότε $\exists \varepsilon > 0, \ \forall n \in \mathbb{N} \ : \ \frac{1}{n} \geq \varepsilon \Leftrightarrow n \leq \frac{1}{\varepsilon}$, δηλαδή $\frac{1}{\varepsilon}$ α.φ. του $\mathbb{N}$, άτοπο.

1.7 Χαρακτηριστική Ιδιότητα του Supremum και Infimum

Πρόταση 1.7.1. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ και άνω φραγμένο. Έστω s α.φ. του A. Τότε

$$s = \sup A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \ \exists a \in A \ : \ s - \varepsilon < a$$

Απόδειξη.

$(\Rightarrow)$ Έστω $s = \sup A$. Έστω $\varepsilon > 0$. Έχουμε $s - \varepsilon < s$ άρα το $s - \varepsilon$ δεν είναι α.φ. του A, άρα $\exists a \in A$ τέτοιο ώστε $a > s - \varepsilon$.

$(\Leftarrow)$ Έστω ότι $\forall \varepsilon > 0, \ \exists a \in A \ : \ s - \varepsilon < a$. Θ.δ.ο. $s = \sup A$.

$$\left.\begin{array}{l} \blacksquare \ A \neq \emptyset \\ \blacksquare \ A \text{ άνω φραγμένο} \end{array}\right\} \Rightarrow \exists \text{ το } \sup A$$

Έστω ότι $s \neq \sup A$, και λόγω ότι s α.φ. του A έχουμε ότι $supA < s$.

Επιλέγουμε $\varepsilon = s - \sup A > 0$

Τότε από την υπόθεση έχουμε ότι υπάρχει $a \in A \ : \ s - \varepsilon < a \Rightarrow s - s + \sup A < a \Rightarrow \sup A < a$, άτοπο, γιατί $\sup A$ α.φ. του A.

Πρόταση 1.7.2. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ και κάτω φραγμένο. Έστω s κ.φ. του A. Τότε

$$s = \inf A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \ \exists a \in A \ : \ a < s + \varepsilon$$

Πρόταση 1.7.3. Αν A, B μη-κενά, φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ με $A \subseteq B$ να δείξετε ότι $\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B$.

Απόδειξη.

- Προφανώς $\inf A \leq \sup A$, γιατί $\forall x \in A, \ \inf A \leq x \leq \sup A$.

- Θα δείξουμε ότι $\inf B \leq \inf A$.
  Αρκεί να δείξουμε ότι $\inf B$ κ.φ. του A. Πράγματι:
  Έστω $x \in A \overset{A\subseteq B}{\Rightarrow} x \in B \Rightarrow \inf B \leq x,\ \forall x \in A$. Άρα $\inf B$ κ.φ. του A.
- Θα δείξουμε οτι $\sup A \leq \sup B$.
  Άρκεί να δείξουμε ότι $\sup B$ α.φ. του A. Πράγματι:
  Έστω $x \in A \overset{A\subseteq B}{\Rightarrow} x \in B \Rightarrow x \leq \sup B,\ \forall x \in A$. Άρα $\sup B$ α.φ. του A.

Πρόταση 1.7.4. Έστω A μη κενό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και έστω $-A = \{-a \ :\ a \in A\}$ Τότε:

1. $\exists$ το $\sup(-A)$ και το $\inf(-A)$.
2. $\sup(-A) = -\inf A$
3. $\inf(-A) = -\sup A$

Απόδειξη.

1. A φραγμένο, άρα $\exists m, M \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\begin{aligned} m \leq a \leq M, &\quad \forall a \in A \\ -M \leq -a \leq -m, &\quad \forall a \in A \\ -M \leq -a \leq -m, &\quad \forall (-a) \in -A \end{aligned}$$

άρα, $-m, -M$ είναι άνω και κάτω φράγματα, αντίστοιχα, του $-A$. Άρα $-A$ είναι άνω και κάτω φραγμένο, είναι επίσης και μη κενό (γιατί A μη κενό), επομένως από το αξίωμα πληρότητας υπάρχουν τα $\sup(-A)$ και $\inf(-A)$.

2. Θα δείξουμε ότι $\sup(-A) \leq -\inf A$ και $-\inf A \leq \sup(-A)$ Πράγματι:

$$\begin{aligned} -a \leq \sup(-A), &\quad \forall (-a) \in -A \\ a \geq -\sup(-A), &\quad \forall (-a) \in -A \\ a \geq -\sup(-A), &\quad \forall a \in A \end{aligned}$$

οπότε το $-\sup(-A)$ είναι κάτω φράγμα του A, άρα $-\sup(-A) \leq \inf A \Rightarrow \sup(-A) \geq -\inf A$. Ομοίως

$$\begin{aligned} \inf A \leq a, &\quad \forall a \in A \\ -a \leq -\inf A, &\quad \forall a \in A \\ -a \leq -\inf A, &\quad \forall (-a) \in -A \end{aligned}$$

οπότε το $-\inf A$ είναι άνω φράγμα του $-A$, άρα $\sup(-A) \leq -\inf A$

3. Από το προηγούμενο ερώτημα, έχουμε $-\sup A = -\sup(-(-A)) = -(-\inf(-A)) = \inf(-A)$

Πρόταση 1.7.5. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ και έστω $\lambda A = \{x \in \mathbb{R} \ :\ x = \lambda a,\ a \in A\} = \{\lambda a \ :\ a \in A\}$. Τότε

(i) A άνω φραγμένο και $\lambda > 0 \Rightarrow \exists$ το $\sup A$ και $\sup(\lambda A) = \lambda \sup A$

(ii) A κάτω φραγμένο και $\lambda < 0 \Rightarrow \exists$ το $\sup A$ και $\sup(\lambda A) = \lambda \inf A$

Απόδειξη.

(i) A άνω φραγμένο $\Rightarrow \exists M \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε

$$\begin{aligned} a \leq M,\ \forall a \in A \Rightarrow \lambda a \leq \lambda M,&\ \forall a \in A \\ \Rightarrow \lambda a \leq \lambda M,&\ \forall \lambda a \in \lambda A \\ \Rightarrow x \leq \lambda M,&\ \forall x \in \lambda A \quad \text{όπου θέσαμε } x = \lambda a \end{aligned}$$

δηλαδή, το λM είναι α.φ. του λA.

Άρα το λA είναι άνω φραγμένο και μη-κενό (γιατί $A \neq \emptyset$), άρα υπάρχει το $\sup(\lambda A)$. Θα δείξουμε ότι

$$\sup(\lambda A) \leq \lambda \sup A \text{ και } \sup(\lambda A) \geq \lambda \sup A$$

- Για την πρώτη σχέση αρκεί να δείξουμε ότι $\lambda \sup A$ είναι α.φ. του λA. Πράγματι

$$\begin{aligned} a \leq \sup A,\ \forall a \in A &\Rightarrow \lambda a \leq \lambda \sup A,\ \forall a \in A \\ &\Rightarrow \lambda a \leq \lambda \sup A,\ \forall \lambda a \in \lambda A \\ &\Rightarrow x \leq \lambda \sup A,\ \forall x \in \lambda A \end{aligned}$$

  άρα το $\lambda \sup A$ είναι α.φ. του λA.

- Αποδεικνύουμε ότι $\lambda \sup A$ είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του λA. Πράγματι
  Έστω M άνω φράγμα του λA με $M < \lambda \sup A \overset{\lambda \geq 0}{\Rightarrow} \frac{M}{\lambda} < \sup A$, άτοπο, γιατί $\frac{M}{\lambda}$ α.φ. του A.
  Πράγματι, αφού M α.φ. του λA, τότε

$$\begin{aligned} x \leq M,\ \forall x \in \lambda A &\Rightarrow \lambda a \leq M,\ \forall \lambda a \in \lambda A \\ &\Rightarrow \lambda a \leq M,\ \forall a \in A \\ &\Rightarrow a \leq \frac{M}{\lambda},\ \forall a \in A \end{aligned}$$

  άρα $\frac{M}{\lambda}$ είναι α.φ. του Α.

(ii) Ομοίως

Πρόταση 1.7.6. Έστω A, B, μη-κενά και φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Τότε:

i) Υπάρχουν τα $\sup(A \cup B)$ και $\inf(A \cup B)$

ii) $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$

iii) $\inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}$

Απόδειξη.

Έστω $x \in A \cup B \Rightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq \sup A, & \forall x \in A \\ x \leq \sup B, & \forall x \in B \end{cases}$ Άρα $x \leq \max\{\sup A, \sup B\}, \quad \forall x \in A \cup B$.

Δηλαδή, το $\max\{\sup A, \sup B\}$ είναι άνω φράγμα του συνόλου $A \cup B$. Άρα $A \cup B$ είναι άνω φραγμένο κ μη κενό (γιατί A, B μη κενά), οπότε από το αξίωμα πληρότητας υπάρχει το $\sup(A \cup B)$. Προφανώς ισχύει ότι $\sup(A \cup B) \leq \max\{\sup A, \sup B\}$. Επομένως αρκεί να δείξουμε ότι $\max\{\sup A, \sup B\} \leq \sup(A \cup B)$. Πράγματι,

$$\left.\begin{matrix} A \subseteq A \cup B \\ B \subseteq A \cup B \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \sup A \leq \sup(A \cup B) \\ \sup B \leq \sup(A \cup B) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \max\{\sup A, \sup B\} \leq \sup(A \cup B)$$

Ομοίως για το infimum.

Πρόταση 1.7.7. Έστω A και B μη κενά και φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$, με $A \cap B \neq \emptyset$. Να αποδείξετε ότι:

i) Υπάρχουν τα $\sup(A \cap B)$ και $\inf(A \cap B)$

ii) $\sup(A \cap B) \leq \min\{\sup A, \sup B\}$

iii) $\inf(A \cap B) \geq \max\{\inf A, \inf B\}$

Απόδειξη.

Έχουμε, $A\cap B\subseteq A$ και $A\cap B\subseteq B$. Οπότε το σύνολο $A\cap B$ είναι φραγμένο σύνολο, αφού τα A και B είναι φραγμένα. Είναι και μη κενό, οπότε από το αξίωμα Πληρότητας, υπάρχει το $\sup(A\cap B)$ και το $\inf(A\cap B)$.

i) Έχουμε,
$$\left.\begin{array}{l} A\cap B\subseteq A\Rightarrow \sup(A\cap B)\leq \sup A \\ A\cap B\subseteq B\Rightarrow \sup(A\cap B)\leq \sup B\end{array}\right\}\Rightarrow \sup(A\cap B)\leq \min\{\sup A,\sup B\}$$

ii) Έχουμε,
$$\left.\begin{array}{l} A\cap B\subseteq A\Rightarrow \inf A\leq \inf(A\cap B) \\ A\cap B\subseteq B\Rightarrow \inf B\leq \inf(A\cap B)\end{array}\right\}\Rightarrow \max\{\inf A,\inf B\}\leq \inf(A\cap B)$$

Λήμμα 1.7.8. Έστω $x,y\in\mathbb{R}$ και $x<y+\varepsilon \quad \forall\varepsilon>0$. Τότε $x\leq y$.

Απόδειξη. (Με άτοπο)

Έστω $x<y+\varepsilon \quad \forall\varepsilon>0$ και $x>y$. Τότε έχουμε ότι $x-y>0$ και άν θέσουμε $\varepsilon=x-y$, τότε από την υπόθεση έχουμε ότι $x<y+x-y\Rightarrow x<x$, άτοπο.

Πρόταση 1.7.9. Έστω A,B μη κενά και φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ και έστω $A+B=\{a+b \ : \ a\in A \text{ και } b\in B\}$. Τότε:

i) Υπάρχει το $\sup(A+B)$ και το $\inf(A+B)$.

ii) $\sup(A+B)=\sup A+\sup B$

iii) $\inf(A+B)=\inf A+\inf B$

Απόδειξη.

i) $A\neq\emptyset$ και φραγμένο, άρα από αξίωμα πληρότητας υπάρχουν τα $\sup A,\inf A$. Ομοίως και για το σύνολο B.
$$\left.\begin{array}{ll} a\leq \sup A, & \forall a\in A \\ b\leq \sup B, & \forall b\in B\end{array}\right\}\Rightarrow a+b\leq \sup A+\sup B,\quad \forall a\in A \text{ και } \forall b\in B$$
Άρα $\sup A+\sup B$ είναι άνω φράγμα του $A+B$. Άρα το $A+B$ είναι άνω φραγμένο και μη κενό (γιατί A,B μη κενά), οπότε από το αξίωμα πληρότητας, υπάρχει το $\sup(A+B)$. Ομοίως αποδεικνύεται ότι υπάρχει και το $\inf(A+B)$.

ii) Αφού $\sup A+\sup B$ άνω φράγμα του $A+B$, έχουμε:
$$\sup(A+B)\leq \sup A+\sup B \tag{1.7}$$
Αρκεί να δείξουμε ότι και $\sup A+\sup B\leq \sup(A+B)$. Πράγματι, έστω $\varepsilon>0$. Τότε:
$$\left.\begin{array}{ll} \exists a\in A \ : \ \sup A-\frac{\varepsilon}{2}<a<\sup A & (\text{από χαρ. ιδιοτ. του } \sup A) \\ \exists b\in B \ : \ \sup B-\frac{\varepsilon}{2}<b<\sup B & (\text{από χαρ. ιδιοτ. του } \sup B)\end{array}\right\}\Rightarrow \sup A+\sup B-\varepsilon<a+b\leq \sup(A+B)$$
Άρα
$$\sup A+\sup B<\sup(A+B)+\varepsilon,\quad \forall\varepsilon>0$$
Άρα από την πρόταση 1.7.8 έχουμε ότι
$$\sup A+\sup B\leq \sup(A+B) \tag{1.8}$$
Οπότε από τις σχέσεις (1.7) και (1.8), έπεται ότι $\sup(A+B)=\sup A+\sup B$.

iii) Ομοίως

Άσκηση 1.7.10. Έστω A,B μη κενά και φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ και έστω
$$A-B=\{a-b \ : \ a\in A \text{ και } b\in B\}\quad \text{και}\quad A\cdot B=\{a\cdot b \ : \ a\in A \text{ και } b\in B\}.$$
Τότε να εξετάσετε αν ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

1. $\sup(A - B) = \sup A - \sup B$
2. $\inf(A - B) = \inf A - \inf B$
3. $\sup(A \cdot B) = \sup A \cdot \sup B$
4. $\inf(A \cdot B) = \inf A \cdot \inf B$

Λύση. Όχι, αν θεωρήσουμε σύνολα $A = \{0, 1\}, B = \{1, 2, 3\}$ για τις δύο πρώτες σχέσεις, και $A = \{1, 2\}, B = \{-1, -2\}$, για τις δύο τελευταίες.

Παρατήρηση 1.7.11. Για το supremum και το infimum του συνόλου $A - B$ ισχύουν τα εξής:

$$\begin{aligned} \sup(A - B) &= \sup(A + (-B)) \\ &= \sup A + \sup(-B) \\ &= \sup A + (-\inf B) \\ &= \sup A - \inf B \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \inf(A - B) &= \inf(A + (-B)) \\ &= \inf A + \inf(-B) \\ &= \inf A + (-\sup B) \\ &= \inf A - \sup B \end{aligned}$$

Λήμμα 1.7.12. Έστω $x, y \in \mathbb{R}^+$, σταθεροί και έστω $\varepsilon \cdot y > x, \quad \forall \varepsilon > 1$. Τότε $x \leq y$

Απόδειξη. (Με άτοπο) Έστω $\varepsilon \cdot y > x, \quad \forall \varepsilon > 1$ και $x > y$. Τότε, $\frac{x}{y} > 1$, οπότε αν θέσουμε $\varepsilon = \frac{x}{y} > 1$, τότε από υπόθεση έχουμε ότι $x < \varepsilon \cdot y \Rightarrow x < \frac{x}{y} \cdot y = x \Rightarrow x < x$, άτοπο.

Πρόταση 1.7.13. Έστω A, B μη κενά και άνω φραγμένα σύνολα **θετικών**, πραγματικών αριθμών και έστω $A \cdot B = \{a \cdot b \ : \ a \in A, b \in B\}$. Τότε υπάρχει το $\sup(A \cdot B)$ και ισχύει ότι $\sup(A \cdot B) = \sup A \cdot \sup B$.

Απόδειξη. Έχουμε

$$\left.\begin{aligned} a \leq \sup A, \quad \forall a \in A \\ b \leq \sup B, \quad \forall b \in B \end{aligned}\right\} \Rightarrow a \cdot b \leq \sup A \cdot \sup B, \quad \forall a \in A \text{ και } b \in B$$

Άρα ο αριθμός $\sup A \cdot \sup B$ είναι άνω φράγμα του συνόλου $A \cdot B$. Άρα το $A \cdot B$ είναι άνω φραγμένο, και μη κενό (γιατί A, B μη κενά), οπότε από το αξίωμα πληρότητας, υπάρχει το $\sup(A \cdot B)$. Προφανώς ισχύει ότι $\sup(A \cdot B) \leq \sup A \cdot \sup B$. Οπότε, αρκεί να δείξουμε ότι $\sup A \cdot \sup B \leq \sup(A \cdot B)$. Πράγματι, έστω $\varepsilon > 1$, τότε:

$$\left.\begin{aligned} \exists a \in A \ : \ \tfrac{\sup A}{\sqrt{\varepsilon}} < a \leq \sup A \\ \exists b \in B \ : \ \tfrac{\sup B}{\sqrt{\varepsilon}} < b \leq \sup B \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\sup A \cdot \sup B}{\sqrt{\varepsilon}} < a \cdot b \leq \sup(A \cdot B), \quad \forall a \in A \text{ και } b \in B$$

Άρα $\frac{\sup A \cdot \sup B}{\sqrt{\varepsilon}} < \sup(A \cdot B), \quad \forall \varepsilon > 1 \Rightarrow \sup A \cdot \sup B < \varepsilon \cdot \sup(A \cdot B), \quad \forall \varepsilon > 1 \overset{1.7.12}{\Rightarrow} \sup A \cdot \sup B \leq \sup(A \cdot B)$

1.8 Ακέραιο Μέρος

Ορισμός 1.8.1. Έστω $x \in \mathbb{R}$. Ακέραιο μέρος του x καλούμε τον μεγαλύτερο ακέραιο που είναι **μικρότερος** ή **ίσος** με το x και το συμβολίζουμε με $[x]$.

Το ακέραιο μέρος ενός πραγματικού αριθμού ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

- $[x] \leq x < [x] + 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $x = [x] + \theta, \quad x \in \mathbb{R}, \ \theta \in [0, 1)$
- $[x + a] = [x] + a, \quad x \in \mathbb{R}, \ a \in \mathbb{Z}$
- $[x] + [-x] = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Z} \\ -1, & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$

Παράδειγμα 1.8.1.

(i) $[3] = 3$

(ii) $[3,14] = 3$

(iii) $[-3,14] = -4$

1.9 *Ρητοί και Άρρητοι*

Λήμμα 1.9.1.

(i) n άρτιος $\Leftrightarrow n^2$ άρτιος.

(ii) n περιττός $\Leftrightarrow n^2$ περιττός.

Απόδειξη.

(i) **($\Rightarrow$)** Έστω n άρτιος $\Rightarrow n = 2k,\ k \in \mathbb{Z} \Rightarrow n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2 \cdot (2k)^2$ άρτιος.
($\Leftarrow$) Έστω n^2 άρτιος και n περιττός. Τότε $n \cdot n = n^2$ περιττός. Άτοπο.

(ii) Ομοίως

Παρατήρηση 1.9.2. Στις αποδείξεις τους παραπάνω λήμματος, χρησιμοποιήσαμε ότι

(i) άρτιος · άρτιος = άρτιος

(ii) περιττός · περιττός = περιττός

(iii) άρτιος · περιττός = άρτιος

Θεώρημα 1.9.3. Ο $\sqrt{2}$ είναι άρρητος.

Απόδειξη. Έστω $\sqrt{2}$ όχι άρρητος. Άρα $\sqrt{2}$ ρητός, δηλαδή $\exists m, n \in \mathbb{Z}$, με $(m,n) = 1$, δηλαδή m, n πρώτοι μεταξύ τους τ.ω. $\sqrt{2} = \frac{m}{n} \Rightarrow 2 = \frac{m^2}{n^2} \Rightarrow m^2 = 2n^2 \Rightarrow m^2$ είναι άρτιος $\Rightarrow m$ άρτιος $\Rightarrow m = 2k,\ k \in \mathbb{Z}$.
Άρα $(2k)^2 = 2n^2 \Rightarrow 4k^2 = 2n^2 \Rightarrow n^2 = 2k^2 \Rightarrow n^2$ άρτιος $\Rightarrow n$ άρτιος. Άτοπο, γιατί $(m,n) = 1$.

Παράδειγμα 1.9.4. Ο $\sqrt{3}$ είναι άρρητος.

Απόδειξη. Έστω $\sqrt{3}$ όχι άρρητος. Άρα $\sqrt{3}$ ρητός, δηλαδή $\exists m, n \in \mathbb{Z}$, με $(m,n) = 1$, δηλαδή m, n πρώτοι μεταξύ τους τ.ω. $\sqrt{3} = \frac{m}{n} \Rightarrow 3 = \frac{m^2}{n^2} \Rightarrow m^2 = 3n^2 \Rightarrow 3 \mid m^2 \Rightarrow 3 \mid m \Rightarrow m \Rightarrow m = 3k,\ k \in \mathbb{Z}$.
Άρα $(3k)^2 = 3n^2 \Rightarrow 9k^2 = 3n^2 \Rightarrow n^2 = 3k^2 \Rightarrow 3 \mid n^2 \Rightarrow 3 \mid n$, άτοπο, γιατί $(m,n) = 1$.

Λήμμα 1.9.5. $3 \mid m^2 \Rightarrow 3 \mid m$

Απόδειξη. Έστω ότι $3 \nmid m \Rightarrow m = 3n+1$ ή $m = 3n+2$. Αν $m = 3n+1 \Rightarrow m^2 = (3n+1)^2 = \ldots 3(3n^2+2n)+1 \Rightarrow 3 \nmid m^2$, άτοπο και αν $m = 3n+2 \Rightarrow m^2 = (3n+2)^2 = \ldots = 3(3n^2+4n+1)+1 \Rightarrow 3 \nmid m^2$ άτοπο.

Παρατήρηση 1.9.6. Ομοίως αποδεικνύονται και ότι οι $\sqrt{5}$ και $\sqrt{6}$ είναι άρρητοι, και γενικότερα ισχύει η επόμενη πρόταση.

Πρόταση 1.9.7. $\sqrt{n}$ άρρητος $\Leftrightarrow n$ όχι τετράγωνο κάποιου φυσικού αριθμού.

Παράδειγμα 1.9.8. Να δείξετε ότι ο αριθμός $\sqrt[3]{2}$ είναι άρρητος.

Απόδειξη. Έστω $\sqrt[3]{2}$ όχι άρρητος. Άρα $\sqrt[3]{2}$ ρητός, δηλαδή $\exists m, n \in \mathbb{Z}$, με $(m,n) = 1$, δηλαδή m, n πρώτοι μεταξύ τους τ.ω. $\sqrt[3]{2} = \frac{m}{n} \Rightarrow 2 = \frac{m^3}{n^3} \Rightarrow m^3 = 2n^3 \Rightarrow m^3$ άρτιος $\Rightarrow m$ άρτιος.
Άρα $(2k)^3 = 2n^3 \Rightarrow 2k^3 = 2n^3 \Rightarrow n^3 = 4k^3 \Rightarrow n$ άρτιος, άτοπο, γιατί $(m,n) = 1$.

Παράδειγμα 1.9.9. Να δείξετε ότι $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ είναι άρρητος.

Απόδειξη. Έστω ότι $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ είναι ρητός. Τότε και ο $h(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = 2 + 2\sqrt{6} + 3 = 2\sqrt{6} + 5$ είναι ρητός, δηλαδή ο $\sqrt{6}$ είναι ρητός, άτοπο.

Πρόταση 1.9.10. $\left.\begin{array}{l} q \text{ ρητός} \\ r \text{ άρρητος} \end{array}\right\} \Rightarrow (q+r)$ άρρητος

Απόδειξη. Έστω $(q+r)$ ρητός. Τότε ο $r=(q+r)-q$ είναι ρητός ως άθροισμα δύο ρητών. Άτοπο.

Πρόταση 1.9.11. $\left.\begin{array}{l} r \text{ άρρητος} \\ s \text{ άρρητος} \end{array}\right\} \Rightarrow (r+s)$ ρητός ή άρρητος.

Απόδειξη. Για παράδειγμα, ο αριθμός $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ είναι άρρητος, ενώ ο $\sqrt{2}-\sqrt{2}=0$ ρητός, και γενικά ισχύει ότι ο αριθμός $\underbrace{r}_{\text{άρρητος}}+\underbrace{(q-r)}_{\text{άρρητος}}=q$ είναι ρητός, αν ο q είναι ρητός.

Πρόταση 1.9.12. $\left.\begin{array}{l} q \text{ ρητός} \\ r \text{ άρρητος} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} (q\cdot r) \text{ ρητός} \Leftrightarrow q=0 \\ (q\cdot r) \text{ άρρητος} \Leftrightarrow q\neq 0 \end{array}$

Απόδειξη. Πράγματι, αν $q=0$ (ρητός) και r άρρητος, τότε $q\cdot r=0$ είναι ρητός, αλλά αν $q\neq 0$ τότε $(q\cdot r)$ είναι άρρητος, γιατί αλλιώς ο $r=\underbrace{(q\cdot r)}_{\text{ρητός}}\cdot\underbrace{q^{-1}}_{\text{ρητός}}$ είναι ρητός ως γινόμενο ρητών. Άτοπο.

Παράδειγμα 1.9.13. Υπάρχει αριθμός $a\in\mathbb{R}$ τέτοιος ώστε a^2 άρρητος και a^4 ρητός;

Απόδειξη. Ναι, ο $a=\sqrt[4]{2}$. Πράγματι, $a^2=\sqrt{2}$ άρρητος, και $a^4=2$ ρητός.

Παράδειγμα 1.9.14. Υπάρχουν αριθμοί, a,b άρρητοι, ώστε $a+b, a\cdot b$ να είναι ρητοί;

Απόδειξη. Ναι οι $a=\sqrt{2}$ και $b=-\sqrt{2}$, οι οποίοι είναι και οι δύο άρρητοι και $a+b=\sqrt{2}-\sqrt{2}=0$ ρητός, και $a\cdot b=\sqrt{2}\cdot(-\sqrt{2})=-2$, επίσης ρητός.

1.10 *Πυκνότητα Ρητών και Άρρητων*

Πρόταση 1.10.1. Σε κάθε ανοιχτό διάστημα πραγματικών αριθμών, υπάρχει ρητός.

Απόδειξη.
Θα δείξουμε ότι (a,b) διάστημα στο $\mathbb{R}\Rightarrow\exists q\in\mathbb{Q}$, τ.ω. $a<q<b$. Πράγματι:
Αν $a<b\Rightarrow b-a>0 \overset{\text{Αρχ.Ιδιοτ.}}{\Rightarrow} \exists n_0\in\mathbb{N} \ : \ \frac{1}{n_0}<b-a \quad (1.9)$. Τότε, θεωρούμε:

- $x=\frac{[na]+1}{n}>\frac{na}{n}=a$
- $x=\frac{[na]+1}{n}\leq\frac{na+1}{n}=a+\frac{1}{n}\overset{(1.9)}{<}a+b-a=b$
  Άρα ο $x=\frac{[na]+1}{n}\in\mathbb{Q}\in(a,b)$.

Πρόταση 1.10.2. Σε κάθε ανοιχτό διάστημα πραγματικών αριθμών, υπάρχει άρρητος.

Απόδειξη.
Θα δείξουμε ότι αν (a,b) τυχαίο διάστημα στο $\mathbb{R}$ τότε $\exists r\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ τ.ω. $a<r<b$. Πράγματι. Έστω $\sqrt{2}$ (τυχαίος) άρρητος.
Τότε $a<b\Leftrightarrow a-\sqrt{2}<b-\sqrt{2} \overset{\text{Πυκν. Ρητών}}{\Rightarrow} \exists q\in\mathbb{Q} \ : \ a-\sqrt{2}<q<b-\sqrt{2}\Leftrightarrow a<\underbrace{q+\sqrt{2}}_{\text{άρρητος}}<b$