2. Για τα παρακάτω σύνολα, να υπολογιστούν και να αποδειχθούν τα supremum και infimum.

   i) $\boldsymbol{A = (0, 2)}$

   Απόδειξη. (Με Ορισμό) Έχουμε ότι $\sup A = 2$ και $\inf A = 0$.

   - Θα δείξουμε ότι $\sup A = 2$. Πράγματι: 2 α.φ. του A, γιατί $a < 2, \ \forall a \in A$. Έστω M α.φ. του A, δηλ. $a \leq M, \ \forall a \in A$. Θ.δ.ο. $2 \leq M$ (Με άτοπο). Πράγματι: Έστω $M < 2$. Τότε $(M, 2) \neq \emptyset \Rightarrow (M, 2) \cap A \neq \emptyset$, άρα $\exists a \in (M, 2)$. Δηλαδή $\exists a \in A$ με $a > M$. άτοπο, γιατί M α.φ. του A.
   - Θα δείξουμε ότι $\inf A = 0$. Πράγματι: 0 κ.φ. του A, γιατί $a > 0, \ \forall a \in A$. Έστω m κ.φ. του A, δηλ. $a \geq m, \ \forall a \in A$. Θ.δ.ο. $0 \geq m$ (Με άτοπο). Πράγματι: Έστω $m > 0$. Τότε $(0, m) \neq \emptyset \Rightarrow (0, m) \cap A \neq \emptyset$, άρα $\exists a \in (0, m)$. Δηλαδή $\exists a \in A$ με $a < m$, άτοπο, γιατί m κ.φ. του A.

   ii) $\boldsymbol{A = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x < 0\}}$.

   Απόδειξη. (Με Ορισμό) Έχουμε ότι $\sup A = 0$ και $\inf A = -\infty$.

   - Θα δείξουμε ότι $\sup A = 0$. Πράγματι: 0 α.φ. του A, γιατί $a < 0, \ \forall a \in A$. Έστω M α.φ. του A, δηλ. $a \leq M, \ \forall a \in A$. Θ.δ.ο. $0 \leq M$ (Με άτοπο). Πράγματι: Έστω $M < 0$. Τότε $(M, 0) \neq \emptyset$, άρα $\exists a \in (M, 0)$. Δηλαδή $\exists a \in A$ με $a > M$, άτοπο, γιατί M α.φ. του A.
   - Θα δείξουμε ότι $\inf A = -\infty$. Πράγματι: $A \neq \emptyset$ και A όχι κάτω φραγμένο. Άρα γράφουμε $\inf A = -\infty$.

3. Έστω A φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ τέτοιω ώστε $\sup A = \inf A$. Να δείξετε ότι το A είναι μονοσύνολο.

Απόδειξη. Έστω $c = \inf A = \sup A$. Τότε $\forall a \in A$ ισχύει $c \leq a \leq c$. Άρα $A = \{c\}$.

4. Έστω A, B μη-κενά υποσύνολα του $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $a \leq b, \ \forall a \in A$ και $\forall b \in B$. Να δείξετε ότι:

   i) $\sup A \leq b, \ \forall b \in B$

   ii) $\sup A \leq \inf B$

Απόδειξη.

   i) Έστω $b \in B \Rightarrow a \leq b, \ \ \forall a \in A$. Άρα $b \in B$ α.φ. του $A, \ \forall b \in B$. Άρα $\sup A \leq b, \ \forall b \in B$.

   ii) Από το i) έχουμε ότι $\sup A \leq b, \ \forall b \in B$. Άρα το $\sup A$ κ.φ. του B. Άρα $\sup A \leq \inf B$.

5. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ μη-κενό, και κάτω φραγμένο και έστω B το σύνολο των κάτω φραγμάτων του A. Να δείξετε ότι:

   i) $B \neq \emptyset$

   ii) B άνω φραγμένο.

   iii) $\sup B = \inf A$

Απόδειξη.

   i) A κάτω φραγμένο. Άρα $\exists x \in \mathbb{R}$ τ.ω. x κ.φ. του A, οπότε $x \in B \Rightarrow B \neq \emptyset$.

   ii) $A \neq \emptyset$, άρα $\exists x \in A$. Τότε $\forall y \in \mathbb{R}$ με $y > x$ έχουμε ότι y όχι κ.φ. του Α. Άρα $y \notin b$. Άρα το B είναι άνω φραγμένο.

   iii) $\left.\begin{array}{l} B \neq \emptyset \\ B \text{ άνω φραγμένο} \end{array}\right\} \overset{\text{Α.Π.}}{\Rightarrow}$ B έχει supremum, έστω $a = \sup B$. Τότε $a \geq x, \ \ \forall x \in B$, άρα $a \geq x, \ \ \forall x$ όπου x είναι κ.φ. του A, άρα $a \geq \inf A$. Οπότε αρκεί να δείξουμε ότι $\inf A \geq a$, δηλ. αρκεί να δείξουμε ότι a κ.φ. του A (Με άτοπο). Πράγματι:
   Έστω ότι a όχι κ.φ. του A. Άρα $\exists x \in A, \ \ x < a$. Όμως $a = \sup B$, οπότε από τη χαρ. ιδιοτ. του supremum έχουμε ότι $\exists y \in B, \ \ x < y < a$. Άτοπο, γιατί y κ.φ. του A.
   Άρα $\sup B = \inf A$.

6. Να αποδείξετε ότι το σύνολο $\mathbb{Z}$ δεν είναι φραγμένο.

Απόδειξη. (Με άτοπο) Έστω ότι το σύνολο $\mathbb{Z}$ είναι άνω φραγμένο. Είναι και μη κενό, άρα από το αξίωμα πληρότητας υπάρχει το $\sup \mathbb{Z} = s \in \mathbb{R}$. Τότε το $s \in \mathbb{Z}$ ή $s \notin \mathbb{Z}$.

- Αν $s \in \mathbb{Z}$ τότε $s + 1 \in \mathbb{Z}$, άτοπο (γιατί s α.φ. του $\mathbb{Z}$)
- Αν $s \notin \mathbb{Z}$, τότε από τη χαρακτηριστική ιδιότητα του sup, έχουμε ότι για $\varepsilon = 1 > 0, \quad \exists z \in \mathbb{Z} \ : \ s - 1 < z \Rightarrow s < z + 1$, άτοπο, γιατί s α.φ. του $\mathbb{Z}$. Ομοίως αποδεικνύουμε ότι $\mathbb{Z}$ δεν είναι κάτω φραγμένο.

7. Να αποδείξετε ότι το σύνολο $A = \{3k \ : \ k \in \mathbb{Z}\}$ δεν είναι άνω φραγμένο.

Απόδειξη. Πράγματι, έστω A άνω φραγμένο, και επειδή $A \neq \emptyset$ υπάρχει το supremum του A, έστω $\sup A = s$. Τότε $s - 1 < s$. Άρα από τη χαρ. ιδιοτ. του supremum, $\exists k \in \mathbb{Z}, \ 3k > s - 1$. Άρα $3k + 3 > s - 1 + 3 \Leftrightarrow 3(k+1) > s + 2 > s$. Όμως $3(k+1) \in \mathbb{Z}$, άτοπο, γιατί $s = \sup A$.

8. Να αποδείξετε με χρήση της Μαθηματικής Επαγωγής τους παρακάτω τύπους.

   i) $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \ \forall n \in \mathbb{N}$

   ii) $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2, \ \forall n \in \mathbb{N}$

Απόδειξη.

   i) Για $n = 1$, έχω: $1^2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = 1$, ισχύει.
   Έστω ότι ισχύει για $n = k$, δηλ, $1^2 + \cdots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} \quad (1)$
   θ.δ.ο ισχύει και για $n = k + 1$. Πράγματι:

$$
\begin{aligned}
1^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 &\overset{(1)}{=} \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \\
&= \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6} \\
&= \frac{(k+1)[k(2k+1) + 6(k+1)]}{6} \\
&= \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6} \\
&= \frac{(k+1)2(k+2)(k+\frac{3}{2})}{6} \\
&= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} \\
&= \frac{(k+1)[((k+1)+1)[2(k+1)+}{6}
\end{aligned}
$$

ii) Για $n=1$, έχω: $1^3 = 1^2$, ισχύει.

Έστω ότι ισχύει για $n=k$, δηλ. $1^3+\cdots+k^3 = (1+\cdots+k)^2$ (2)

Θ.δ.ο. ισχύει και για $n=k+1$. Πράγματι:

$$
\begin{aligned}
[1+\cdots+k+(k+1)]^2 &= (1+\cdots+k)^2 \\
&\quad + 2(1+\cdots+k)(k+1) + (k+1)^2 = \\
&\overset{(2)}{=} 1^3+\cdots+k^3 + 2\cdot\frac{k(k+1)}{2}\cdot(k+1) + (k+1)^2 \\
&= 1^3+\cdots+k^3 + (k+1)^2(k+1) \\
&= 1^3+\cdots+k^3 + (k+1)^3
\end{aligned}
$$

9. Βρείτε ένα κλειστό τύπο για τα παρακάτω αθροίσματα:

   i) $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = 1+3+5+\cdots+(2n-1)$

   ii) $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 = 1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2$

Απόδειξη.

i)

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}(2k-1) &= 1+3+\cdots+(2n-1) \\
&= 1+2+3+\cdots+2n-2(1+\cdots+n) \\
&= \frac{2n(2n+1)}{2} - 2\cdot\frac{n(n+1)}{2} \\
&= 2n^2 + \cancel{n} - n^2 - \cancel{n} = n^2
\end{aligned}
$$

ii)

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 &= 1^2+3^2\cdots+(2n-1)^2 = \\
&= 1^2+2^2+3^2+\cdots+(2n)^2 - [2^2+4^2+6^2+\cdots+(2n)^2] \\
&= \frac{2n(2n+1)(4n+1)}{6} - 4[1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2] \\
&= \frac{2n(2n+1)(4n+1)}{6} - 4\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
&= \frac{2n(2n+1)[(4n+1)-2(n+1)]}{6} \\
&= \frac{n(2n+1)(2n-1)}{3}
\end{aligned}
$$

10. **(Θέμα: 2018)** Να αποδείξετε ότι $\sum_{n=2}^{N-2}\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{3} - \frac{1}{N}$

Απόδειξη.

$a_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{A}{n+1} + \frac{B}{n+2} = \frac{A(n+2)+B(n+1)}{(n+1)(n+2)}$

Άρα $A(n+2) = B(n+1) = 1, \ \forall n\in\mathbb{N}$

Δηλ. $(A+B)n + 2A + B = 1, \ \forall n\in\mathbb{N}$, οπότε πρέπει:

$$
\left.\begin{aligned} A+B&=0 \\ 2A+B&=1 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{aligned} A&=1 \\ B&=-1 \end{aligned}
$$

Οπότε $a_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$

Άρα

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=2}^{N-2}\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \sum_{n=2}^{N-2}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = \\
&= \frac{1}{2+1} - \frac{1}{2+2} + \frac{1}{3+1} - \frac{1}{3+2} + \cdots + \frac{1}{N-2+1} - \frac{1}{N-2+2} \\
&= \frac{1}{3} - \frac{1}{N}
\end{aligned}
$$

11. Να αποδείξετε ότι $n^5 - n$ είναι πολλαπλάσιο του 5, $\forall n\in\mathbb{N}$.

Απόδειξη. Για $n=1$, έχω: $1-1=0$, είναι πολ/σιο του 5, γιατί $0 = 0\cdot 5$.

Έστω ότι ισχύει για n, δηλ. $n^2 - n$ είναι πολ/σιο του 5 $\Leftrightarrow n^2 - n = 5k, \ k\in\mathbb{Z}$ (3).

Θ.δ.ο. ισχύει και για (n+1). Πράγματι:

$$
\begin{aligned}
(n+1)^5 - (n+1) &= n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n + 1 - n + 1 \\
&= n^5 - n + 5(n^4 + 2n^3 + 2n^2 + n) \\
&\overset{(3)}{=} 5k + 5(n^4 + 2n^3 + 2n^2 + n) \\
&= 5(k + n^4 + 2n^3 + 2n^2 + n)
\end{aligned}
$$

12. Να αποδείξετε ότι $n! > 2^n, \forall n \geq 4$

Απόδειξη.

Για $n=4$, έχω: $4! = 1\cdot2\cdot3\cdot4 = 24 > 16 = 2^4$

Έστω ότι ισχύει για n, δηλ $n! > 2^n$.

Θ.δ.ο. ισχύει και για $n+1$. Πράγματι:

$(n+1)! = 1\cdot 2\cdots n\cdot(n+1) = n!(n+1) > 2^n(n+1) \geq 2^n\cdot 2 =$

13. Έστω $a\in\mathbb{R}$ και $n\in\mathbb{N}$. Να δείξετε με τη βοήθεια της μαθηματικής επαγωγής της παρακάτω ανισότητες.

   i) Αν $0 < a < \frac{1}{n}$ τότε $(1+a)^n < \frac{1}{1-na}$

   ii) Αν $0 \leq a \leq 1$ τότε $1 - na \leq (1-a)^n \leq \frac{1}{1+na}$

Απόδειξη.

i) Για $n=1$, έχω: $1 + a < \frac{1}{1-a} \Leftrightarrow (1+a)(1-a) < 1 \Leftrightarrow 1 - a^2 < 1 \Leftrightarrow a^2 > 0$, ισχύει για $0 < a < 1$.

Έστω ισχύει για n, δηλ. $(1+a)^n < \frac{1}{1-na}$, για $0 < a < \frac{1}{n}$.

Θ.δ.ο. ισχύει για $n+1$. Πράγματι:

$$
\begin{aligned}
(1+a)^{n+1} &= (1+a)(1+a)^n < (1+a)\cdot\frac{1}{1-na} \\
&= \frac{(1+a)(1-a)}{(1-na)(1-a)} = \frac{1-a^2}{(1-na)(1-a)} \\
&= \frac{1-a^2}{1-na-a+na^2} = \frac{1-a^2}{1-a(n+1)+na^2} \\
&< \frac{1-a^2}{1-a(n+1)} < \frac{1}{1-a(n+1)}
\end{aligned}
$$

ii) Αποδεικνύουμε πρώτα ότι $(1-a)^n \leq \frac{1}{1+na}$, αν $0\leq a\leq 1$.

Για $n=1$, έχω: $1 - a \leq \frac{1}{1+a} \Leftrightarrow (1-a)(1+a) \leq 1 \Leftrightarrow 1 - a^2 \leq 1 \Leftrightarrow a^2 \geq 0$, ισχύει για $0 \leq a \leq 1$.

Έστω ότι ισχύει για n, δηλ. $(1-a)^n \leq \frac{1}{1+na}$, αν $0 \leq a \leq 1$.

θ.δ.ο. ισχύει για $n+1$. Πράγματι:

$$
\begin{aligned}
(1-a)^{n+1} &= (1-a)^n(1-a) \\
&\leq \frac{1}{1+na}\cdot(1-a) \\
&= \frac{(1-a)(1+a)}{(1+na)(1+a)} \\
&= \frac{1-a^2}{1+(n+1)a+na^2} \\
&< \frac{1-a^2}{1+(n+1)a} \\
&< \frac{1}{1+(n+1)a}
\end{aligned}
$$

Αποδεικνύουμε, τώρα, ότι $1 - na \leq (1-a)^n$, αν $0 \leq a \leq 1$.
Για $n = 1$, έχω: $1 - a \leq 1 - a$, ισχύει.
Έστω ότι ισχύει για n, δηλ. $1 - na \leq (1-a)n$.
θ.δ.ο. ισχύει και για $n+1$. Πράγματι:

$$\begin{aligned}(1-a)^{n+1} &= (1-a)^n \cdot (1-a) \\ &\geq (1-na)(1-a) \\ &= 1 - a - na + na^2 \\ &= 1 - (n+1)a + na^2 \\ &\geq 1 - (n+1)a\end{aligned}$$

14. Αν $a > 0$ τότε να αποδείξετε ότι $(1+a)^n \geq 1 + na + \frac{n(n-1)a^2}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Απόδειξη.

Για $n = 1$, έχω: $1 + a \geq 1 + a$, ισχύει.

Έστω ότι ισχύει για n, δηλ. $(1+a)^n \geq 1 + na + \frac{n(n-1)a^2}{2}$.

θ.δ.ο. ισχύει και για $n+1$. Πράγματι:

$$\begin{aligned}(1+a)^{n+1} &= (1+a)^n \cdot (1+a) \geq (1 + na + \frac{n(n-1)a^2}{2})(1+a) \\ &= 1 + na + \frac{n(n-1)a^2}{2} + a + na^2 + \frac{n(n-1)a^3}{2} \\ &= 1 + (n+1)a + \frac{n^2-n+2n}{2}a^2 + \frac{n(n-1)}{2}a^3 \\ &\overset{a>0}{>} 1 + (n+1)a + \frac{n(n+1)}{2}a^2\end{aligned}$$

15. Να δείξετε ότι οι παρακάτω αριθμοί είναι άρρητοι.

i) $\sqrt{3}$ και $\sqrt{5}$
ii) $\sqrt[3]{2}$ και $\sqrt[3]{3}$
iii) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ και $\sqrt{2} + \sqrt{6}$

Απόδειξη.

i) Έστω $\sqrt{2} + \sqrt{6}$ ρητός. Άρα $(\sqrt{2} + \sqrt{6})^2 = 2 + 2\sqrt{12} + 6 = 8 + 4\sqrt{3}$ ρητός, που σημαίνει ότι $\sqrt{3}$ είναι ρητός (θυμάμαι ότι ρητός + άρρητος = άρρητος). Άτοπο, γιατί $\sqrt{3}$ άρρητος.