Ακολουθίες
Ασκήσεις

1.1 *Φραγμένες Ακολουθίες*

1. Να δείξετε ότι η ακολουθία $a_n = \dfrac{n}{3^n}$ είναι φραγμένη.

Απόδειξη.

$3^n = (1+2)^n \geq 1 + 2n > 2n \quad (1.1),\ \forall n \in \mathbb{N}$. Άρα

$$|a_n| = \left|\frac{n}{3^n}\right| = \frac{n}{3^n} \overset{(1.1)}{<} \frac{n}{2n} = \frac{1}{2},\ \forall n \in \mathbb{N}$$

2. Να δείξετε ότι η ακολουθία $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$ είναι φραγμένη.

Απόδειξη.

$$|a_n| = \left|\frac{n!}{n^n}\right| = \frac{n!}{n^n} = \frac{1 \cdot 2 \cdots n}{n^n} \leq \frac{\overbrace{n \cdot n \cdots n}^{n-\text{φορές}}}{n^n} = \frac{n^n}{n^n} = 1,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

3. Να δείξετε ότι η ακολουθία $a_n = \dfrac{\cos n + n \sin n}{n^2}$ είναι φραγμένη.

Απόδειξη.

$$\left|\frac{\cos n + n \sin n}{n^2}\right| = \frac{|\cos n + n \sin n|}{n^2} \leq \frac{|\cos n| + |n \sin n|}{n^2} = \frac{|\cos n| + n|\sin n|}{n^2} \leq \frac{1 + n \cdot 1}{n^2} =$$
$$= \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n} \leq 1 + 1 = 2,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

4. Να δείξετε ότι η ακολουθία $a_n = \dfrac{5\cos^3 n}{n+2}$ είναι φραγμένη.

Απόδειξη.

$$|a_n| = \left|\frac{5\cos^3 n}{n+2}\right| = \frac{5 \cdot \left|\cos^3 n\right|}{n+2} = \frac{5 \cdot |\cos n|^3}{n+2} \leq \frac{5 \cdot 1^3}{n+2} < \frac{5}{2},\ \forall n \in \mathbb{N}$$

5. Να δείξετε ότι η ακολουθία $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ είναι φραγμένη.

Απόδειξη.

$$\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{|(-1)^n|}{n} = \frac{|-1|^n}{n} = \frac{1}{n} \leq 1,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

6. Να δείξετε ότι η ακολουθία $a_1 = 3,\ a_{n+1} = \dfrac{a_n + 4}{2},\ \forall n \in \mathbb{N}$ είναι άνω φραγμένη.

Απόδειξη.

Προφανώς, $a_n > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$

Παρατηρούμε ότι, $a_2 = 3.5,\ a_3 = 3.75,\ a_4 = 3.875,\ \ldots$

Θ.δ.ο. $a_n < 4,\ \forall n \in \mathbb{N}$

- Για $n=1$, έχουμε: $a_1 = 3 < 4$, ισχύει.
- Έστω ότι ισχύει για n, δηλαδή $a_n < 4$
- Θ.δ.ο. ισχύει για $n+1$. Πράγματι

$$a_n < 4 \Leftrightarrow a_n + 4 < 8 \Leftrightarrow \frac{a_n+4}{2} < 4 \Leftrightarrow a_{n+1} < 4$$

7. Να δείξετε ότι η ακολουθία $a_1 = \sqrt{2},\ a_{n+1} = \sqrt{2+a_n},\ \forall n \in \mathbb{N}$ είναι άνω φραγμένη.

Απόδειξη.

Προφανώς, $a_n > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$

Παρατηρούμε ότι, $a_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}} < \sqrt{2+2} = 2,\ a_3 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} < \sqrt{2+\sqrt{2+2}} = 2, \ldots$
Θ.δ.ο. $a_n < 2,\ \forall n \in \mathbb{N}$

- Για $n=1$, έχουμε: $a_1 = \sqrt{2} < 2$, ισχύει.
- Έστω ότι ισχύει για n, δηλαδή $a_n < 2$
- Θ.δ.ο. ισχύει για $n+1$. Πράγματι

$$a_n < 2 \Leftrightarrow 2 + a_n < 4 \Leftrightarrow \sqrt{2+a_n} < 2 \Leftrightarrow a_{n+1} < 2$$

8. Να δείξετε ότι η ακολουθία $a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{n!}$ είναι άνω φραγμένη.

Απόδειξη.

Ισχύει ότι $n! > 2^{n-1},\ \forall n \in \mathbb{N}$, άρα

$$a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots \frac{1}{n!} < 1 + \underbrace{\frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots \frac{1}{2^{n-1}}}_{\text{γεωμ. πρόοδος}} = 1 + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\frac{1}{2} - 1} =$$

$$= 1 + 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 1 + 2 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3$$

9. Να δείξετε ότι η ακολουθία $a_n = 2^n$ δεν είναι άνω φραγμένη.

Απόδειξη.

Έστω ότι η $a_n = 2^n$ είναι άνω φραγμένη. Τότε

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \exists M \in \mathbb{R} \ :\ 2^n \leq M,\ \forall n \in \mathbb{N} \\ \bullet\ 2^n = (1+1)^n \geq 1+n,\ \forall n \in \mathbb{N} \end{array}\right\} \Rightarrow M \geq 1 + n \Leftrightarrow n \leq M - 1,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

άτοπο, γιατί $\mathbb{N}$ δεν είναι άνω φραγμένο.

10. Να δείξετε ότι η ακολουθία $a_n = \frac{n^2}{3n + \sin^2 n}$ δεν είναι άνω φραγμένη.

Απόδειξη.

Έστω ότι η $a_n = \frac{n^2}{3n+\sin^2 n}$ είναι άνω φραγμένη. Τότε, θα είναι φραγμένη, γιατί προφανώς $0 \leq a_n,\ \forall n \in \mathbb{N}$, άρα

$$\exists M > 0 \ :\ \left|\frac{n^2}{3n+\sin^2 n}\right| \leq M \Leftrightarrow n^2 \leq M(3n + \sin^2 n) \leq M(3n+1) \Leftrightarrow n^2 - 3Mn - M \leq 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Το οποίο ισχύει ανν $r_1 < n < r_2$, όπου r_1, r_2 οι ρίζες του τριωνύμου, το οποίο έχει $\Delta = 9M^2 + 4M > 0$. Όμως αυτό είναι άτοπο, γιατί $\mathbb{N}$ δεν είναι άνω φραγμένο.

1.2 *Μονότονες Ακολουθίες*

1. Να δείξετε ότι ακολουθία $a_n = \dfrac{n}{5n-1}$ είναι γνησίως φθίνουσα.

Απόδειξη.

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{5(n+1)-1} - \frac{n}{5n-1} = \frac{n+1}{5n+4} - \frac{n}{5n-1} = \frac{5n^2+5n-n-1-5n^2-4n}{(5n+4)(5n-1)}$$
$$= -\frac{1}{(5n+4)(5n-1)} < 0$$

2. Να δείξετε ότι ακολουθία $a_n = \dfrac{n}{3^n}$ είναι γνησίως φθίνουσα.

Απόδειξη.

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{3^{n+1}} - \frac{n}{3^n} = \frac{n+1-3n}{3^{n+1}} = \frac{1-2n}{3^{n+1}} < 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

3. Να δείξετε ότι η ακολουθία $a_n = \dfrac{2^n}{n!}$ είναι γνησίως φθίνουσα.

Απόδειξη.

Είναι $a_n > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$, επομένως η ακολουθία διατηρεί πρόσημο, όποτε

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \frac{2^{n+1}}{2^n} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{2}{n+1} \leq 1,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

4. Να δείξετε ότι ακολουθία $a_n = \dfrac{2n^2-1}{n}$ είναι γνησίως αύξουσα.

Απόδειξη.

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2(n+1)^2-1}{n+1} - \frac{2n^2-1}{n} = \cdots = \frac{2n^2+2n+1}{n(n+1)} > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

5. Να δείξετε ότι η ακολουθία $a_1 = 0, a_{n+1} = \dfrac{2a_n+4}{3},\ \forall n \in \mathbb{N}$ είναι γνησίως αύξουσα.

Απόδειξη.

Θα δέιξουμε ότι $a_{n+1} > a_n,\ \forall n \in \mathbb{N}$. Πράγματι,

- Για $n = 1$, έχουμε $a_2 = \dfrac{4}{3} > 0 = a_1$, ισχύει.
- Έστω ότι ισχύει για n, δηλ. $a_{n+1} > a_n$.
- Θ.δ.ο. ισχύει για $n+1$. Πράγματι,

$$a_n < a_{n+1} \Leftrightarrow 2a_n < 2a_{n+1} \Leftrightarrow 2a_n + 4 < 2a_{n+1} + 4 \Leftrightarrow \underbrace{\frac{2a_n+4}{3}}_{a_{n+1}} < \underbrace{\frac{2a_{n+1}+4}{3}}_{a_{n+2}},\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Β' Τρόπος:

$$a_{n+1} - a_n > 0 \Leftrightarrow \frac{2a_n+4}{3} - a_n > 0 \Leftrightarrow \frac{4-a_n}{3} > 0 \Leftrightarrow a_n < 4,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Θα δείξουμε ότι $a_n < 4,\ \forall n \in \mathbb{N}$. Πράγματι,

- Για $n = 1$, έχουμε $a_1 = 0 < 4$, ισχύει.
- Έστω ότι ισχύει για n, δηλ. $a_n < 4$

- Θ.δ.ο. ισχύει για $n+1$. Πράγματι,

$$a_{n+1} = \frac{2a_n+4}{3} < \frac{2\cdot 4+4}{3} = \frac{12}{3} = 4$$

6. Να δείξετε ότι ακολουθία $a_1 = 1, a_n = \sqrt{a_n+1},\ \forall n \in \mathbb{N}$ είναι γνησίως αύξουσα.

Απόδειξη.
- Για $n=1$, έχω $a_1 = 1 < \sqrt{2} = a_2$, ισχύει.
- Έστω ότι ισχύει για n, δηλ. $a_n < a_{n+1}$
- Θ.δ.ο. ισχύει για $n+1$. Πράγματι,

$$a_n < a_{n+1} \Leftrightarrow a_n + 1 < a_{n+1}+1 \Leftrightarrow \sqrt{a_n+1} < \sqrt{a_{n+1}+1} \Leftrightarrow a_{n+1} < a_{n+2}$$

7. Να δείξετε ότι ακολουθία $a_n = (-1)^n \dfrac{1}{n^2+2}$ δεν είναι μονότονη.

Απόδειξη.

Θα δείξουμε ότι η ακολουθία δεν διατηρεί πρόσημο. Πράγματι, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^2+2} - \frac{(-1)^n}{n^2+2} = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^2+2} + \frac{(-1)^{n+1}}{n^2+2} =$$

$$= (-1)^{n+1}\underbrace{\left[\frac{1}{(n+1)^2+2} + \frac{1}{n^2+2}\right]}_{b_n>0,\ \forall n\in\mathbb{N}} = \begin{cases} -b_n, & n \text{ περιττός} \\ b_n, & n \text{ άρτιος} \end{cases}$$

1.3 Ορισμός του Ορίου

1. Να δείξετε ότι οι παρακάτω ακολουθίες δεν συγκλίνουν.

i) $a_n = (-1)^n \dfrac{n}{n+1}$

ii) $a_n = (-1)^n \dfrac{n+3}{2n}$

iii) $a_n = \lambda n,\ \lambda > 0$

Απόδειξη.

i) Θεωρούμε τις υπακολουθίες $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ και $(a_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}}$. Έχουμε,

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n} = \lim_{n\to\infty} (-1)^{2n}\frac{2n}{2n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n}{2n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n(2+\frac{1}{n})} = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{2+\frac{1}{n}} = \frac{2}{2+0} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n-1} = \lim_{n\to\infty} (-1)^{2n-1}\frac{2n-1}{2n-1+1} = \lim_{n\to\infty} -\frac{2n-1}{2n} = -\lim_{n\to\infty}\frac{n(2-\frac{1}{n})}{2n} = -\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{1}{n}}{2} = -1$$

Επειδή $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} \neq \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n-1}$ η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δε συγκλίνει.

ii) Θεωρούμε τις υπακολουθίες $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ και $(a_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}}$. Έχουμε,

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n} = (-1)^{2n}\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{2\cdot 2n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{4n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n(2+\frac{3}{n})}{4n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{3}{n}}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n-1} = \lim_{n\to\infty}(-1)^{2n-1}\frac{2n-1+3}{2\cdot(2n-1)} = \lim_{n\to\infty} -\frac{2n+2}{4n-2} = -\lim_{n\to\infty}\frac{n(2+\frac{2}{n})}{n(4-\frac{2}{n})} = -\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{2}{n}}{4-\frac{2}{n}} = -\frac{1}{2}$$

Επειδή $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} \neq \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n-1}$ η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δε συγκλίνει.

iii) Η ακολουθία $(\lambda n)_{n\in\mathbb{N}}$ δε συγκλίνει, διότι δεν είναι φραγμένη. Πράγματι, γιατί αν $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη, τότε

$$|a_n| = |\lambda n| \overset{\lambda\geq 0}{=} \lambda n \leq a,\ \forall n\in\mathbb{N} \Leftrightarrow n \leq \frac{a}{\lambda},\ \forall n\in\mathbb{N} \text{ άτοπο, γιατι } \mathbb{N} \text{ όχι άνω φραγμένο}$$

1.4 Άλγεβρα και Θεωρήματα Ορίων

1. Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια.

i) $$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+3n}{n^2+2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(1+\frac{3}{n})}{n^2(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2})} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{3}{n}}{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}} = \frac{1+0}{1+0+0} = 1$$

ii) $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{\frac{n^3+n}{n^3+2n}} = \sqrt[3]{\lim_{n\to\infty} \frac{n^3(1+\frac{1}{n^2})}{n^3(1+\frac{2}{n^2})}} = \sqrt[3]{\lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{2}{n^2}}} = \sqrt[3]{\frac{1+0}{1+0}} = \sqrt[3]{1} = 1$$

2. Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια με τη βοήθεια του Κριτηρίου Παρεμβολής.

i) $$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+2n}$$

Απόδειξη.

$$|a_n| = \left|\frac{(-1)^n}{n^2+2n}\right| = \frac{|(-1)^n|}{|n^2+2n|} = \frac{1}{n^2+2n} \le \frac{1}{n^2}$$

Όμως $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$, άρα και $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+2n} = 0$

ii) $$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n})$$

Απόδειξη.

$$\begin{aligned} |a_n| &= \left|\sqrt{n+2} - \sqrt{n}\right| = \sqrt{n+2} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})(\sqrt{n+2}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} = \frac{n+2-n}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} \le \frac{2}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

Όμως $\lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{n}} = 0$, άρα και $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+2} - \sqrt{n} = 0$

iii) $$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^3+4} - \sqrt{n^3+1}\right)$$

Απόδειξη.

$$\begin{aligned} |a_n| &= \left|\sqrt{n^3+4} - \sqrt{n^3+1}\right| = \sqrt{n^3+4} - \sqrt{n^3+1} = \frac{(\sqrt{n^3+4}-\sqrt{n^3+1})(\sqrt{n^3+4}+\sqrt{n^3+1})}{\sqrt{n^3+4}+\sqrt{n^3+1}} \\ &= \frac{n^3+4-n^3-1}{\sqrt{n^3+4}+\sqrt{n^3+1}} = \frac{3}{\sqrt{n^3+4}+\sqrt{n^3+1}} < \frac{3}{\sqrt{n^3+1}+\sqrt{n^3+1}} = \frac{3}{2\sqrt{n^3+1}} < \frac{3}{\sqrt{n^3}} \\ &= \frac{3}{n\sqrt{n}} \end{aligned}$$

Όμως $\lim_{n\to\infty} \frac{3}{n\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 0 \cdot 0 = 0$, άρα και $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^3+4} - \sqrt{n^3+1}\right) = 0$

iv) $$\lim_{n\to\infty} \frac{4\sin^3 n + 3\cos^2 n}{n^2}$$

Απόδειξη.

$$\left|\frac{4\sin^3 n + 3\cos^2 n}{n^2}\right| = \frac{\left|4\sin^3 n + 3\cos^2 n\right|}{n^2} \leq \frac{\left|4\sin^3 n\right| + \left|3\cos^2 n\right|}{n^2} = \frac{4\left|\sin^3 n\right| + 3\left|\cos^2 n\right|}{n^2}$$
$$= \frac{4|\sin n|^3 + 3|\cos n|^3}{n^2} \leq \frac{4\cdot 1^3 + 3\cdot 1^3}{n^2} = \frac{7}{n^2} < \frac{7}{n}$$

Όμως $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{7}{n} = 0$, άρα και $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4\sin^3 n + 3\cos^2 n}{n^2} = 0$

v) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\cos n + 3\sin 4n}{2\sqrt{n} - 1}$

Απόδειξη.

$$|a_n| = \left|\frac{\cos n + 3\sin 4n}{2\sqrt{n}-1}\right| = \frac{|\cos n + 3\sin 4n|}{2\sqrt{n}-1} \leq \frac{|\cos n| + |3\sin 4n|}{2\sqrt{n}-1} = \frac{|\cos n| + 3|\sin 4n|}{2\sqrt{n}-1} \leq \frac{1+3\cdot 1}{2\sqrt{n}-1}$$
$$= \frac{4}{2\sqrt{n}-1}$$

Όμως $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4}{\sqrt{n}(2-\frac{1}{\sqrt{n}})} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\cdot\dfrac{4}{(2-\frac{1}{\sqrt{n}})}\right) = 0\cdot\dfrac{4}{2-0} = 0$

vi) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n + 4^n + n}$

Απόδειξη.

Ισχύει

$$4^n \leq 3^n + 4^n + n \leq 4^n + 4^n + 4^n,\ \forall n \in \mathbb{N}$$
$$4^n \leq 3^n + 4^n + n \leq 3\cdot 4^n,\ \forall n \in \mathbb{N}$$
$$\sqrt[n]{4^n} \leq \sqrt[n]{3^n + 4^n + n} \leq \sqrt[n]{3\cdot 4^n},\ \forall n \in \mathbb{N}$$
$$4 \leq \sqrt[n]{3^n + 4^n + n} \leq 4\cdot\sqrt[n]{3},\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Όμως $\lim\limits_{n\to\infty} 4 = 4$ και $\lim\limits_{n\to\infty} 4\sqrt[n]{3} = 4\cdot 1 = 4$, άρα από Κριτήριο παρεμβολής και $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3^n + 4^n + n} = 4$

vii) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{n^2}{3n^2+2}}$

Απόδειξη.

Ισχύει

$$\frac{1}{5} = \frac{n^2}{5n^2} \leq \frac{n^2}{3n^2 + 2n^2} \leq \frac{n^2}{3n^2+2} \leq \frac{n^2}{3n^2} = \frac{1}{3},\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Επομένως

$$\sqrt[n]{\frac{1}{5}} \leq \sqrt[n]{\frac{n^2}{3n^2+2}} \leq \sqrt[n]{\frac{1}{3}},\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Όμως $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{1}{5}} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\dfrac{1}{3}} = 1$, άρα από Κριτήριο Παρεμβολής και $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{n^2}{3n^2+2}} = 1$

viii) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2+n}$

Απόδειξη.

Ισχύει

$$1 < \sqrt[n]{n^2+n} \leq \sqrt[n]{n^2+n^2} = \sqrt[n]{2n^2}, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Όμως $\lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1$ και $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt[n]{2}\cdot\sqrt[n]{n^2}) = \lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt[n]{2}\cdot\sqrt[n]{n}\cdot\sqrt[n]{n}) = 1\cdot 1\cdot 1 = 1$, άρα και $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2+n} = 1$

3. Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια με τη βοήθεια του ορίου $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

i) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-2}\right)^n, \ n \geq 3$

Απόδειξη.

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n-2}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n-2}\right)^{n-2+2} = \underbrace{\left(1+\frac{1}{n-2}\right)^{n-2}}_{\tilde{a}_{n-2}}\cdot\left(1+\frac{1}{n-2}\right)^2 \xrightarrow{n\to\infty} e\cdot(1+0)^2 = e$$

γιατί

$$\lim_{n\to\infty}\tilde{a}_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \overset{\text{Πρότ.}}{\Rightarrow} \lim_{n\to\infty}\tilde{a}_{n-2} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-2}\right)^{n-2} = e$$

ii) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3n}\right)^n$

Απόδειξη.

$$a_n = \left(1+\frac{1}{3n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{3n}\right)^{3n\cdot\frac{1}{3}} = \Bigg(\underbrace{\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{3n}}_{\tilde{a}_{3n}}\Bigg)^{\frac{1}{3}} \xrightarrow{n\to\infty} \sqrt[3]{e}$$

γιατί

$$\lim_{n\to\infty}\tilde{a}_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \overset{\text{Πρότ.}}{\Rightarrow} \lim_{n\to\infty}\tilde{a}_{3n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{3n} = e$$

iii) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n$

Απόδειξη.

$$\begin{aligned} a_n = \left(1+\frac{2}{n}\right)^n &= \left(\frac{n+2}{n}\right)^n = \left(\frac{n+2}{n+1}\cdot\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \\ &= \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} e\cdot e = e^2 \end{aligned}$$

iv) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3}{2n}\right)^{3n+2}$

Απόδειξη.

$$a_n = \left(\frac{2n+3}{2n}\right)^{3n+2} = \left(1+\frac{3}{2n}\right)^{3n+2} = \left(1+\frac{3}{2n}\right)^{3n} \cdot \left(1+\frac{3}{2n}\right)^{2} = \left[\underbrace{\left(1+\frac{3}{2n}\right)^{2n}}_{a_{2n}}\right]^{\frac{3}{2}} \cdot \left(1+\frac{3}{2n}\right)^{2}$$

$$\xrightarrow{n\to\infty} (e^3)^{\frac{3}{2}} \cdot 1 = e^4 \cdot \sqrt{e}$$

γιατί

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{a}_n = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{3}{n}\right)^{n} = e^3 \overset{\text{Προτ.}}{\Rightarrow} \lim_{n\to\infty} \tilde{a}_{2n} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{3}{2n}\right)^{2n} = e^3$$

v) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n}$

Απόδειξη.

$$a_n = \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n} = \left[\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]^{n} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n} \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{e}\cdot e = 1$$

γιατί

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\frac{n-1}{n}}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\frac{n-1+1}{n-1}\right)^{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n}} = \frac{1}{e}$$

vi) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^{n^2}$

Απόδειξη.

$$a_n = \left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^{n^2} = \left(\frac{n^2\left(1-\frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}\right)^{n^2} = \frac{\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}}{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{\frac{1}{e}}{e} = \frac{1}{e^2}$$

4. Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια.

i) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n+5^n+7^n}$

Απόδειξη.

$$\begin{aligned} 7^n < 3^n+5^n+7^n < 7^n+7^n+7^n = 3\cdot 7^n &\Leftrightarrow \\ \sqrt[n]{7^n} < \sqrt[n]{3^n+5^n+7^n} < \sqrt[n]{3\cdot 7^n} &\Leftrightarrow \\ 7 < \sqrt[n]{3^n+5^n+7^n} < 7\cdot\sqrt[n]{3} &\Leftrightarrow \end{aligned}$$

Όμως $\lim\limits_{n\to\infty} 7 = 7$ και $\lim\limits_{n\to\infty} 7\cdot\sqrt[n]{3} = 7\cdot 1 = 7$, άρα και $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n+5^n+7^n} = 7$

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{3}{5}\right)^n + \left(\frac{5}{6}\right)^n}$

Απόδειξη. Ισχύει ότι $\frac{3}{5} < \frac{5}{6}$, οπότε

$$\begin{aligned} \left(\frac{5}{6}\right)^n < \left(\frac{3}{5}\right)^n + \left(\frac{5}{6}\right)^n < \left(\frac{5}{6}\right)^n + \left(\frac{5}{6}\right)^n = 2\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^n &\Leftrightarrow \\ \sqrt[n]{\left(\frac{5}{6}\right)^n} < \sqrt[n]{\left(\frac{3}{5}\right)^n + \left(\frac{5}{6}\right)^n} < \sqrt[n]{2\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^n} &\Leftrightarrow \\ \frac{5}{6} < \sqrt[n]{\left(\frac{3}{5}\right)^n + \left(\frac{5}{6}\right)^n} < \frac{5}{6}\cdot\sqrt[n]{2} & \end{aligned}$$

Όμως $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5}{6} = \frac{5}{6}$ και $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{5}{6} \cdot \sqrt[n]{2}\right) = \frac{5}{6} \cdot 1 = \frac{5}{6}$, άρα και $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{3}{5}\right)^n + \left(\frac{5}{6}\right)^n} = \frac{5}{6}$

iii) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n}$

Απόδειξη.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{(n+1)!}{n!} = \frac{n^n}{(n+1)^n(n+1)} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot n \cdots (n+1)}{1 \cdot 2 \cdots n}$$
$$= \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \cdot \frac{1}{n+1} \cdot (n+1) = (\frac{n}{n+1})^n = \frac{1}{e} < 1$$

άρα από Κριτήριο Λόγου η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ συγκλίνει, επομένως από γνωστό θεώρημα το $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$

iv) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{6 \cdot 3^n - 7 \cdot 4^n + 8}{5^n + 3 \cdot 2^n + 1}$

Απόδειξη.

$$a_n = \frac{6 \cdot 3^n - 7 \cdot 4^n + 8}{5^n + 3 \cdot 2^n + 1} = \frac{5^n \left(6 \cdot \frac{3^n}{5^n} - 7 \cdot \frac{4^n}{5^n} + \frac{8}{5^n}\right)}{5^n \left(1 + 3 \cdot \frac{2^n}{5^n} + \frac{1}{5^n}\right)} = \frac{6 \cdot (\frac{3}{5})^n - 7 \cdot (\frac{4}{5})^n + 8 \cdot (\frac{1}{5})^n}{1 + 3 \cdot (\frac{2}{5})^n + (\frac{1}{5})^n}$$
$$\xrightarrow{n\to\infty} \frac{6 \cdot 0 - 7 \cdot 0 + 8 \cdot 0}{1 + 3 \cdot 0 + 0} = 0$$

v) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4^{n+3}}{\sqrt{4^{4n-2}}}$

Απόδειξη.

$$|a_n| = \left|\frac{4^{n+3}}{\sqrt{4^{4n-2}}}\right| = \frac{4^n \cdot 4^3}{\sqrt{4^{2(2n-1)}}} = \frac{4^n \cdot 4^3}{4^{2n-1}} = \frac{4^n \cdot 4^3}{4^{2n} \cdot 4^{-1}} = \frac{4^3}{4^n \cdot \frac{1}{4}} = \frac{4^4}{4^n} = 4^4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

Όμως $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$, δηλαδή $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{4^{n+3}}{\sqrt{4^{4n-2}}}\right| = 0.$

Άρα από γνωστή πρόταση και $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{4^{n+3}}{\sqrt{4^{4n-2}}} = 0$

vi) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n}{3^n(n^2+2)}$

Απόδειξη.

$$|a_n| = \left|\frac{3n}{(-3)^n(n^2+2)}\right| = \frac{|3n|}{|(-3)^n(n^2+2)|} = \frac{3n}{|(-3)^n| \cdot |n^2+2|} = \frac{3n}{3^n \cdot (n^2+2)} \leq \frac{3n}{3 \cdot (n^2+2)}$$
$$= \frac{n}{n^2+2} \leq \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$$

Όμως $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, άρα και $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n}{3^n(n^2+2)} = 0$

vii) **(Θέμα:2018)** $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}}$

Απόδειξη. Ισχύει ότι

$$\frac{1}{2}=\sqrt[n]{\frac{1}{2^n}}<\sqrt[n]{\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}}<\sqrt[n]{\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n}}=\sqrt[n]{\frac{2}{2^n}}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt[n]{2}$$

Όμως $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ και $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\sqrt[n]{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}$, άρα και $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}}=\frac{1}{2}$

viii) **(Θέμα:2018)** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3}{3^n}$

Απόδειξη. **Α' Τρόπος:(Κριτήριο Λόγου)**

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{(n+1)^3}{3^{n+1}}}{\frac{n^3}{3^n}}=\frac{(n+1)^3}{n^3}\cdot\frac{3^n}{3^{n+1}}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^3\cdot\frac{3^n}{3\cdot 3^n}=\frac{1}{3}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^3\xrightarrow{n\to\infty}\frac{1}{3}<1$$

άρα από κριτήριο Λόγου, έχουμε ότι η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{3^n}$ συγκλίνει, επομένως από γνωστό θεώρημα έχουμε ότι $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3}{3^n}=0$.

Β' Τρόπος:(Κριτήριο Ρίζας)

$$\sqrt[n]{a_n}=\sqrt[n]{\frac{n^3}{3^n}}=\frac{\sqrt[n]{n^3}}{3}\,\frac{\sqrt[n]{n}\cdot\sqrt[n]{n}\cdot\sqrt[n]{n}}{3}\xrightarrow{n\to\infty}\frac{1\cdot 1\cdot 1}{3}=\frac{1}{3}<1$$

άρα από κριτήριο Ρίζας, έχουμε ότι η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{3^n}$ συγκλίνει, επομένως από γνωστό θεώρημα έχουμε ότι $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3}{3^n}=0$.

Γ' Τρόπος: (Βλάχου)

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^3}{3^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n^3}}{3}=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt[n]{n})^3}{3}\xrightarrow{n\to\infty}\frac{1}{3}$$

Άρα για $\varepsilon=\frac{1}{2}>0$ έχουμε ότι $\exists n_0\in\mathbb{N}\ :\ \forall n\geq n_0\quad\left|\sqrt[n]{\frac{n^3}{3^n}}-\frac{1}{3}\right|<\frac{1}{2}$.

Άρα $-\frac{1}{2}<\sqrt[n]{\frac{n^3}{3^n}}-\frac{1}{3}<\frac{1}{2}$, $\forall n\geq n_0\Rightarrow\sqrt[n]{\frac{n^3}{3^n}}-\frac{1}{3}<\frac{1}{2}, \forall n\geq n_0\Rightarrow\sqrt[n]{\frac{n^3}{3^n}}<\frac{5}{6}, \forall n\geq n_0$

Επομένως $\frac{n^3}{3^n}<\left(\frac{5}{6}\right)^n, \forall n\geq n_0\Leftrightarrow 0<\frac{n^3}{3^n}<\left(\frac{5}{6}\right)^n, \forall n\geq n_0$

Όμως $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{5}{6})^n=0$, οπότε από Κριτήριο Παρεμβολής, έπεται ότι $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3}{3^n}=0$

ix) **(Θέμα:2019)** $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+\frac{1}{5^n}}$

Απόδειξη.
Όπως και το θέμα του 2018.

x) **(Θέμα:2019)** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^4+5n-6}{2^n}$

Απόδειξη.

Α' Τρόπος:(Βλάχου) Θα υπολογίσουμε το όριο $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^4+5n-6}{2^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n^4+5n-6}}{2}$

Για το όριο του αριθμητή έχουμε:

$$1 < n^4 + 5n - 6 < n^4 + 5n^4 = 6 \cdot n^4, \ \forall n \in \mathbb{N}$$
$$1 < \sqrt[n]{n^4 + 5n - 6} < \sqrt[n]{6 \cdot n^4}, \ \forall n \in \mathbb{N}$$
$$1 < \sqrt[n]{n^4 + 5n - 6} < \sqrt[n]{6} \cdot \sqrt[n]{n^4}, \ \forall n \in \mathbb{N}$$
$$1 < \sqrt[n]{n^4 + 5n - 6} < \sqrt[n]{6} \cdot (\sqrt[n]{n})^4, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Όμως $\lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1$ και $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{6} \cdot (\sqrt[n]{n})^4 = 1 \cdot 1^4 = 1$, άρα και $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^4 + 5n - 6} = 1$

Επομένως $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{n^4 + 5n - 6}}{2} = \dfrac{1}{2}$

Για $\varepsilon = \dfrac{1}{3} > 0$, έχουμε ότι $\exists n_0 \in \mathbb{N} \ : \ \forall n \geq n_0 \quad \left| \sqrt[n]{\dfrac{n^4 + 5n - 6}{2^n}} - \dfrac{1}{2} \right| < \dfrac{1}{3}$

Άρα

$$\sqrt[n]{\frac{n^4 + 5n - 6}{2^n}} - \frac{1}{2} < \frac{1}{3}, \ \forall n \geq n_0 \Leftrightarrow \sqrt[n]{\frac{n^4 + 5n - 6}{2^n}} < \frac{5}{6}, \ \forall n \geq n_0$$

οπότε

$$0 \leq \frac{n^4 + 5n - 6}{2^n} < \left(\frac{5}{6}\right)^n, \ \forall n \geq n_0$$

όμως $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{5}{6}\right)^n = 0$, άρα από Κριτήριο Παρεμβολής, έχουμε ότι $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^4 + 5n - 6}{2^n} = 0$

Β' Τρόπος:

$$0 < \frac{n^4 + 5n - 6}{2^n} \leq \frac{n^4 + 5n^4}{2^n} = \frac{6n^4}{2^n} = 6 \cdot \frac{n^4}{2^n}, \ \forall n \geq 2$$

όμως $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^4}{2^n} = 0$ (υπολογίζεται όπως και το $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3}{3^n}$) επομένως από Κριτήριο παρεμβολής, έπεται το ζητούμενο.