

## Σειρές (Ασκήσεις)

1. Να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση οι παρακάτω σειρές

$$\text{i)} \sum_{n=1}^{\infty} (n^2 + 1)$$

Απ: αποκλίνει

$$\text{iii)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^3 + n - 1}{n^3 + 4}$$

Απ: αποκλίνει

$$\text{ii)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{3n^2 - 1}$$

Απ: αποκλίνει

2. Να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση οι παρακάτω σειρές (Κριτήριο Σύγκρισης ή Ορίου)

$$\text{i)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2 + 1}$$

Απ: αποκλίνει

$$\text{viii)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^3 + 1}$$

Απ: συγκλίνει

$$\text{ii)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10n + 2020}{n^2 + 1}$$

Απ: αποκλίνει

$$\text{ix)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n + 5\sqrt{n}}$$

Απ: αποκλίνει

$$\text{iii)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^3 + 1}{4n^4 - 1}$$

Απ: αποκλίνει

$$\text{x)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{5^n + 1}$$

Απ: συγκλίνει

$$\text{iv)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{n}$$

Απ: αποκλίνει

$$\text{xi)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left( \frac{2}{5} \right)^n$$

Απ: συγκλίνει

$$\text{v)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2 + 1}}{n + 1}$$

Απ: αποκλίνει

$$\text{xii)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^4 n}{1 + \sqrt{n^5}}$$

Απ: συγκλίνει

$$\text{vi)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$$

Απ: αποκλίνει

$$\text{xiii)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 5}{4^n + n^2}$$

Απ: συγκλίνει

$$\text{vii)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n^2 - 4}$$

Απ: αποκλίνει

$$\text{xiv)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

Απ: συγκλίνει

$$\text{viii)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + 2n + 1}{5n^5 - 7}$$

Απ: συγκλίνει

$$\text{xv)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n + 1}$$

Απ: αποκλίνει

3. Να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση οι παρακάτω σειρές (Κριτήριο Λόγου)

$$\text{i)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^n}$$

Απ: αποκλίνει

$$\text{v)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 4^n}{5^n + 4^n}$$

Απ: συγκλίνει

$$\text{ii)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$$

Απ: αποκλίνει

$$\text{vi)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

Απ: συγκλίνει

$$\text{iii)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n!}{n^n}$$

Απ: αποκλίνει

$$\text{vii)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{1 \cdot 3 \cdots (2n - 1)}$$

Απ: συγκλίνει

$$\text{iv)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n}{2n + 7}$$

Απ: αποκλίνει

4. Να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση οι παρακάτω σειρές (Κριτήριο Ρίζας)

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{3n}{n+1} \right)^n$	Απ: αποκλίνει	v) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n \cdot e^{n+1}}$	Απ: συγκλίνει
ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^n}$	Απ: συγκλίνει	vi) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^n$	Απ: συγκλίνει
iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{5n}$	Απ: αποκλίνει	vii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \cdot \left( \frac{n+1}{n} \right)^{n^2}$	Απ: συγκλίνει
iv) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{e^{n^2}}$	Απ: συγκλίνει	viii) $\sum_{n=1}^{\infty} \left( 1 + \frac{1}{4n} \right)^{-n^2}$	Απ: συγκλίνει

5. Να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση οι παρακάτω σειρές (Κριτήριο Ορίου)

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n - 1}$	Απ: συγκλίνει	iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3 + n^2}}$	Απ: συγκλίνει
ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2+3}$	Απ: αποκλίνει	iv) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^3 + n}}$	Απ: αποκλίνει

6. Να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση οι παρακάτω σειρές (Κριτήριο Leibnitz)

i) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}$	Απ: συγκλίνει	iv) $\sum_{n=1}^{\infty} \left( -\frac{1}{2} \right)^n$	Απ: συγκλίνει
ii) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n^2+3}}$	Απ: συγκλίνει	v) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{\sqrt{n}}$	Απ: $(\cos(n\pi) = (-1)^n)$ συγκλίνει

7. Να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση οι παρακάτω σειρές (Κριτήριο Απόλυτης Σύγκλισης)

i) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{ne}{n!}$	Απ: συγκλίνει	v) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n}$	Απ: συγκλίνει
ii) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n^2}{n^4+2}$	Απ: συγκλίνει	vi) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \sin \left( \frac{n^2+1}{n+2} \right)$	Απ: συγκλίνει
iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(3n+1)}{10^n}$	Απ: συγκλίνει	vii) $\sum_{n=1}^{\infty} \left[ \sin(n^2+5) \cdot \frac{n+1}{n^3+7} \right]$	Απ: συγκλίνει
iv) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\cos n + \sin n}{5^n}$	Απ: συγκλίνει	viii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \sin \frac{\pi}{n}$	Απ: $\left( \left  \sin \frac{\pi}{n} \right  \leq \left  \frac{\pi}{n} \right  \right)$ συγκλίνει

## Υποδείξεις

- Στην άσκηση 2. **όλα** τα παραδείγματα, λύνονται με κριτήριο σύγκρισης. Εννοείται, πως σε κάποια με ρητές, και αυτά με τις ρίζες, βολεύει επίσης και το κριτήριο του Ορίου. **Προσοχή**, όμως, γιατί στο κριτήριο του Ορίου, πρέπει οι ακολουθίες να είναι **θετικών** όρων, αλλιώς εφαρμόζω (κατάλληλα), μόνο το κριτήριο σύγκρισης. Σε αυτές με τα παραγοντικά, βολεύει και το κριτήριο Λόγου. Για να εφαρμόσετε, κρ. σύγκρισης, θυμηθείτε ότι  $n! \geq 2^{n-1}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .