Ακολουθίες

1.1 *Σύγκλιση Ακολουθίας*

Ορισμός 1.1.1. Περιοχή ενός πραγματικού αριθμού x_0 ονομάζεται κάθε ανοιχτό διάστημα (a, b) που περιέχει το x_0.

Παρατήρηση 1.1.1.

i) Αν $\varepsilon > 0$, τότε περιοχές του x_0 της μορφής $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ έχουν ακτίνα ε και κέντρο το x_0.

ii) $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \Leftrightarrow x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < x - x_0 < \varepsilon \Leftrightarrow |x - x_0| < \varepsilon$

Ορισμός 1.1.2 (Ορίου Ακολουθίας)**.** Μια ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στον πραγματικό αριθμό $a \in \mathbb{R}$ (έχει όριο το $a \in \mathbb{R}$ ή τείνει στο $a \in \mathbb{R}$), και συμβολίζουμε $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ (ή $a_n \xrightarrow{n\to\infty} a$) αν

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ :\ \forall n \in \mathbb{N} \text{ με } n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$$

Παρατήρηση 1.1.2. Γενικά το n_0 εξαρτάται από το ε και ισχύει ότι $n_0 = n_0(\varepsilon)$.

Παρατήρηση 1.1.3. Ισοδύναμα, ο ορισμός του ορίου, μας λέει, ότι

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ :\ \forall n \in \mathbb{N} \text{ με } n \geq n_0 \quad a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$$

Ορισμός 1.1.3. Μια ακολουθία λέμε ότι αποκλίνει (ή είναι αποκλίνουσα), αν

- δεν υπάρχει το όριό της, για παράδειγμα αν η ακολουθία ταλαντεύεται
- απειρίζεται, θετικά ή αρνητικά.

Ορισμός 1.1.4. Η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ λέγεται μηδενική ακολουθία αν $\lim\limits_{n\to\infty} = 0$

Παραδείγματα 1.1.4.

i) Να δείξετε ότι $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Απόδειξη.

Δοκιμή: $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$
Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ με $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ (1.1) (Αρχ. Ιδιοτ.) τέτοιο ώστε $\forall n \geq n_0$ (1.2)

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} \overset{(1.2)}{\leq} \frac{1}{n_0} \overset{(1.1)}{<} \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon$$

ii) Να δείξετε ότι $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^4} = 0$.

ΠΡΟΣΗΜΟ

Απόδειξη.

Δοκιμή: $\left|\frac{1}{n^4}-0\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{1}{n^4}\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n^4}<\varepsilon \Leftrightarrow n^4>\frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n>\sqrt[4]{\frac{1}{\varepsilon}}$

Έστω $\varepsilon>0$. Τότε $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ με $n_0>\sqrt[4]{\frac{1}{\varepsilon}}$ (1.3) (Αρχ. Ιδιοτ.) τέτοιο ώστε $\forall n \geq n_0$ (1.4)

$$\left|\frac{1}{n^4}-0\right|=\left|\frac{1}{n^4}\right|=\frac{1}{n^4}\overset{(1.4)}{\leq}\frac{1}{n_0^4}\overset{(1.3)}{<}\frac{1}{\left(\sqrt[4]{\frac{1}{\varepsilon}}\right)^4}=\frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}}=\varepsilon$$

iii) Να δείξετε ότι $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$.

Απόδειξη.

Δοκιμή: $\left|\frac{1}{\sqrt{n}}-0\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{1}{\sqrt{n}}\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{n}}<\varepsilon \Leftrightarrow \sqrt{n}>\frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n>\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^2$

Έστω $\varepsilon>0$. Τότε $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ με $n_0>\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^2$ (1.5) (Αρχ. Ιδιοτ.) τέτοιο ώστε $\forall n \geq n_0$ (1.6)

$$\left|\frac{1}{\sqrt{n}}-0\right|=\left|\frac{1}{\sqrt{n}}\right|=\frac{1}{\sqrt{n}}\overset{(1.6)}{\leq}\frac{1}{\sqrt{n_0}}\overset{(1.5)}{<}\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^2}}=\frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}}=\varepsilon$$

iv) Να δείξετε ότι $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$

Απόδειξη.

Δοκιμή: $\left|\frac{n}{n+1}-1\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{n-(n+1)}{n+1}\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{-1}{n+1}\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \frac{|-1|}{n+1}<\varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n+1}<\varepsilon \Leftrightarrow n+1>\frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n>\frac{1}{\varepsilon}-1$

Έστω $\varepsilon>0$. Τότε $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ με $n_0>\frac{1}{\varepsilon}-1$ (1.7) (Αρχ. Ιδιοτ.) τέτοιο ώστε $\forall n \geq n_0$ (1.8)

$$\left|\frac{n}{n+1}-1\right|=\left|\frac{n-(n+1)}{n+1}\right|=\frac{|-1|}{n+1}=\frac{1}{n+1}\overset{(1.8)}{\leq}\frac{1}{n_0+1}\overset{(1.7)}{\leq}\frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}-1+1}=\frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}}=\varepsilon$$

v) Να δείξετε ότι $\lim_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n}=0$

Απόδειξη.

Δοκιμή: $\left|\frac{\sin n}{n}-0\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{\sin n}{n}\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \frac{|\sin n|}{n}<\varepsilon$ (1.9)

Όμως $\frac{|\sin n|}{n}\leq\frac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ (1.10)

Οπότε από τις σχέσεις (1.9) και (1.10) αρκεί $\frac{1}{n}<\varepsilon \Leftrightarrow n>\frac{1}{\varepsilon}$

Έστω $\varepsilon>0$. Τότε $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ με $n_0>\frac{1}{\varepsilon}$ (1.11) (Αρχ. Ιδιοτ.) τέτοιο ώστε $\forall n \geq n_0$ (1.12)

$$\left|\frac{\sin n}{n}-0\right|=\left|\frac{\sin n}{n}\right|=\frac{|\sin n|}{n}\leq\frac{1}{n}\overset{(1.12)}{\leq}\frac{1}{n_0}\overset{(1.11)}{<}\frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}}=\varepsilon$$

vi) Να δείξετε ότι $\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{n^2+1}=2$.

Απόδειξη.

Δοκιμή: $\left|\frac{2n^2}{n^2+1}-2\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{2n^2-2(n^2+1)}{n^2+1}\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{-2}{n^2+1}\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \frac{|-2|}{n^2+1}<\varepsilon \Leftrightarrow \frac{2}{n^2+1}<\varepsilon$ (1.13)

Όμως $\frac{2}{n^2+1}<\frac{2}{n^2}\leq\frac{2}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ (1.14)

Οπότε από τις σχέσεις (1.13) και (1.14) αρκεί $\frac{2}{n}<\varepsilon \Leftrightarrow n>\frac{2}{\varepsilon}$

Έστω $\varepsilon>0$. Τότε $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ με $n_0>\frac{2}{\varepsilon}$ (1.15) (Αρχ. Ιδιοτ.) τέτοιο ώστε $\forall n \geq n_0$ (1.16)

$$\left|\frac{2n^2}{n^2+1}-2\right|=\left|\frac{2n^2-2(n^2+1)}{n^2+1}\right|=\left|\frac{-2}{n^2+1}\right|=\frac{|-2|}{n^2+1}=\frac{2}{n^2+1}<\frac{2}{n^2}\leq\frac{2}{n}\overset{(1.16)}{\leq}\frac{2}{n_0}\overset{(1.15)}{<}\frac{2}{\frac{2}{\varepsilon}}=\varepsilon$$

ΠΡΟΣΗΜΟ

vii) Να δείξετε ότι $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^2} = 0$

Απόδειξη.

Δοκιμή: $\left|\frac{n+1}{n^2} - 0\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{n+1}{n^2}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{n+1}{n^2} < \varepsilon \quad (1.17)$
Όμως $\frac{n+1}{n^2} \leq \frac{n+n}{n^2} = \frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n} \quad (1.18)$
Οπότε από τις σχέσεις (1.17) και (1.18) αρκεί $\frac{2}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{2}{\varepsilon}$

Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ με $n_0 > \frac{2}{\varepsilon}$ (1.19) (Αρχ. Ιδιοτ.) τέτοιο ώστε $\forall n \geq n_0$ (1.20)

$$\left|\frac{n+1}{n^2} - 0\right| = \left|\frac{n+1}{n^2}\right| = \frac{n+1}{n^2} = \frac{n}{n^2} + \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n} \overset{(1.20)}{\leq} \frac{2}{n_0} \overset{(1.19)}{<} \frac{2}{\frac{2}{\varepsilon}} = \varepsilon$$

viii) Να δείξετε ότι $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0$

Απόδειξη.

Δοκιμή:

$$\left|(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) - 0\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \cdot (\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}\right| < \varepsilon$$
$$\Leftrightarrow \left|\frac{(\sqrt{n+1})^2 - (\sqrt{n})^2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{\cancel{n} + 1 - \cancel{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \varepsilon \quad (1.21)$$

Όμως $\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}}, \ \forall n \in \mathbb{N} \quad (1.22)$
Οπότε από τις σχέσεις (1.21) και (1.22) αρκεί $\frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon \Leftrightarrow \sqrt{n} > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > (\frac{1}{\varepsilon})^2$

Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ με $n_0 > (\frac{1}{\varepsilon})^2$ (1.23) (Αρχ. Ιδιοτ.) τέτοιο ώστε $\forall n \geq n_0$ (1.24)

$$\left|(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) - 0\right| = \left|\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right| = \left|\frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \cdot (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}\right| = \cdots = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} <$$
$$< \frac{1}{\sqrt{n}} \overset{(1.24)}{\leq} \frac{1}{\sqrt{n_0}} \overset{(1.23)}{<} \frac{1}{\sqrt{(\frac{1}{\varepsilon})^2}} = \varepsilon$$

Πρόταση 1.1.5. Η ακολουθία $\{(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ δεν συγκλίνει.

Απόδειξη.
Έστω ότι η $a_n = (-1)^n$ συγκλίνει και έστω $\lim_{n\to+\infty}(-1)^n = a$.
Τότε από τον ορισμό του ορίου, έχουμε ότι για

$$\varepsilon = 1, \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ : \ \forall n \geq n_0 \quad |(-1)^n - a| < 1 \Leftrightarrow -1 < (-1)^n - a < 1 \Leftrightarrow a - 1 < (-1)^n < a + 1$$

Όμως για $n_1 \geq n_0$ με n_1 άρτιος, έχουμε:

$$a - 1 < (-1)^{n_1} < a + 1 \Leftrightarrow a - 1 < \underbrace{1 < a + 1}_{a>0}$$

Όμως για $n_2 \geq n_0$ με n_2 περιττός, έχουμε:

$$a - 1 < (-1)^{n_2} < a + 1 \Leftrightarrow \underbrace{a - 1 < -1}_{a<0} < a + 1$$

Οπότε καταλήγουμε σε άτοπο.

ΠΡΟΣΗΜΟ

Θεώρημα 1.1.6. Το όριο μιας ακολουθίας, όταν υπάρχει είναι μοναδικό.

Απόδειξη.

Έστω ότι μια ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει και έστω ότι $\exists a, b \in \mathbb{R}$ ώστε $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ και $\lim_{n\to\infty} a_n = b$. Θα δείξουμε ότι $a = b$. Έστω $\varepsilon > 0$, τότε

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ :\ \forall n \geq n_0 \quad |a_n - a| \leq \varepsilon$$

Άρα και για $\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2},\ \exists n_1 \in \mathbb{N}\ :\ \forall n \geq n_1 \quad |a_{n_1} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = b \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ :\ \forall n \geq n_0 \quad |a_n - b| \leq \varepsilon$$

Άρα και για $\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2},\ \exists n_2 \in \mathbb{N}\ :\ \forall n \geq n_2 \quad |a_{n_2} - b| < \frac{\varepsilon}{2}$
Θέτουμε $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, ώστε να ισχύουν οι κ οι δύο παραπάνω ανισότητες ταυτόχρονα.
Επομένως, έχουμε

$$0 \leq |a - b| = |a - a_n + a_n - b| \leq |a - a_n| + |a_n - b| = |a_n - a| + |a_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

άρα από την πρόταση 1.6.2 έχουμε ότι $|a - b| = 0 \Rightarrow a = b$.

Θεώρημα 1.1.7. Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι φραγμένη.

Απόδειξη. Έστω $(a_n)_{n\in}$ συγκλίνουσα $\Rightarrow \exists a \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$, άρα

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ :\ \forall n \geq n_0 \quad |a_n - a| < \varepsilon$$

άρα και για $\varepsilon = 1 > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ :\ \forall n \geq n_0 \quad |a_n - a| < 1 \quad (1.25)$.
Δηλαδή $\forall n \geq n_0$ έχουμε ότι

$$|a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| \overset{(1.25)}{<} 1 + |a|$$

Δηλαδή, καταφέραμε να φράξουμε τους όρους της ακολουθίας με δείκτες $n \geq n_0$.
Τώρα, θέτουμε $M = \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{n-1}|, 1 + |a|\}$ και έχουμε ότι $|a_n| < M,\ \forall n \in \mathbb{N}$, επομένως η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη.

Παρατήρηση 1.1.8.

i) Προσοχή, το αντίστροφο της παραπάνω πρότασης, δεν ισχύει. Πράγματι, η ακολουθία $a_n = (-1)^n,\ \forall n \in \mathbb{N}$ είναι φραγμένη, όχι όμως και συγκλίνουσα.

ii) Ενδιαφέρον παρουσιάζει το **αντιθετοαντίστροφο** της παραπάνω πρότασης, που λεέι ότι αν μια ακολουθία δεν είναι φραγμένη, τότε δεν συγκλίνει.

Παράδειγμα 1.1.9. Να δείξετε ότι η ακολουθία $a_n = 2n,\ \forall n \in \mathbb{N}$ δεν συγκλίνει.

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι η ακολουθία $a_n = 2n$ **δεν** είναι φραγμένη. Τότε σύμφωνα με την παρατήρηση 1.1.8, ii) δεν είναι δυνατόν να συγκλίνει. Πράγματι, έστω ότι η ακολουθία $a_n = 2n$ είναι φραγμένη. Τότε

$$\exists M > 0 \quad |2n| \leq M,\ \forall n \in \Leftrightarrow 2n \leq M,\ \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow n \leq \frac{M}{2},\ \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{άτοπο, γιατί το } \mathbb{N} \text{ δεν είναι άνω φραγμένο}$$

Πρόταση 1.1.10. Έστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία πραγματικών αριθμών και $l \in \mathbb{R}$. Τότε ισχύουν οι ισοδυναμίες:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} (a_n - l) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} |a_n - l| = 0$$

Απόδειξη.

ΠΡΟΣΗΜΟ

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists n_0\in\mathbb{N}\ :\ |a_n-l|<\varepsilon,\ \forall n\geq n_0$$
$$\lim_{n\to\infty} (a_n-l) = 0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists n_0\in\mathbb{N}\ :\ |(a_n-l)-0|<\varepsilon,\ \forall n\geq n_0$$
$$\lim_{n\to\infty} |a_n-l| = 0<\varepsilon \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists n_0\in\mathbb{N}\ :\ ||a_n-l|-0|<\varepsilon,\ \forall n\geq n_0$$

και προφανώς ισχύει ότι $|a_n-l| = |(a_n-l)-0| = ||a_n-l|-0|$

Πρόταση 1.1.11. Έστω $\lim_{n\to\infty} a_n = a\in\mathbb{R}$ και έστω $l<a<k$. Τότε $\exists n_0\in\mathbb{N}\ :\ \forall n\geq n_0\quad l<a_n<k$.

Απόδειξη. Αν $l<a<k$ τότε $l-a<0<k-a$. Έστω $\varepsilon>0$ τέτοιο ώστε $\varepsilon<k-a$ και $l-a<-\varepsilon$. Τότε για αυτό το $\varepsilon>0$, επειδή $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, έχουμε ότι $\exists n_0\in\mathbb{N}\ :\ \forall n\geq n_0\quad |a_n-a|<\varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon<a_n-a<\varepsilon$.
Άρα $\forall n\geq n_0$, έχουμε ότι

$$l-a<-\varepsilon<a_n-a<\varepsilon<k-a$$
$$l-a<a_n-a<k-a$$
$$l<a_n<k$$

1.2 Ιδιότητες Ορίου Ακολουθίας

Πρόταση 1.2.1. Έστω $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$ και $\lim_{n\to+\infty} b_n = b$, όπου $a,b\in\mathbb{R}$. Τότε:

i) $\lim_{n\to+\infty}(a_n+b_n) = a+b$

ii) $\lim_{n\to+\infty}\lambda a_n = \lambda a$

iii) $\lim_{n\to+\infty}(a_n\cdot b_n) = a\cdot b$

iv) $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{a_n} = \frac{1}{a},\ a\neq 0,\ a_n\neq 0,\ \forall n\in\mathbb{N}$

v) $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b},\ b\neq 0,\ b_n\neq 0, \forall n\in\mathbb{N}$

Απόδειξη.

Έστω $\varepsilon>0$.
$\lim_{n\to+\infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\ \exists n_1\in\mathbb{N}\ :\ \forall n\geq n_1\quad |a_n-a|<\varepsilon$.
Άρα και για $\frac{\varepsilon}{2}>0,\ \exists n_1\in\mathbb{N}\ :\ \forall n\geq n_1\quad |a_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}\quad$ (1.26)
$\lim_{n\to+\infty} b_n = b \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\ \exists n_2\in\mathbb{N}\ :\ \forall n\geq n_2\quad |b_n-b|<\varepsilon$.
Άρα και για $\frac{\varepsilon}{2}>0,\ \exists n_2\in\mathbb{N}\ :\ \forall n\geq n_2\quad |b_n-b|<\frac{\varepsilon}{2}\quad$ (1.27)
Θέτουμε $n_0=\max\{n_1,n_2\}$, ώστε να ισχύουν και οι δύο παραπάνω ανισότητες ταυτόχρονα.
Τότε για $n\geq n_0$, έχουμε

$$|(a_n+b_n)-(a+b)| = |(a_n-a)+(b_n-b)| \leq |a_n-a|+|b_n-b| \underset{(1.27)}{\overset{(1.26)}{<}} \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

ii) Αν $\lambda=0$, τότε η σχέση είναι προφανής.
Έστω $\lambda\neq 0$. Έστω $\varepsilon>0$.
$\lim_{n\to+\infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\ \exists n_0\in\mathbb{N}\ :\ \forall n\geq n_0\quad |a_n-a|<\varepsilon$.
Άρα και για $\frac{\varepsilon}{|\lambda|}>0$, έχουμε ότι $\exists n_0\in\mathbb{N}\ :\ \forall n\geq n_0\quad |a_n-a|<\frac{\varepsilon}{|\lambda|}\quad$ (1.28).
Τότε $\forall n\geq n_0$, έχουμε ότι

$$|\lambda a_n-\lambda a| = |\lambda(a_n-a)| = |\lambda|\cdot|a_n-a| \overset{(1.28)}{<} |\lambda|\cdot\frac{\varepsilon}{|\lambda|} = \varepsilon$$

ΠΡΟΣΗΜΟ

iii) Έχουμε ότι $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνουσα $\Rightarrow (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη. Άρα

$$\exists M > 0,\ M \in \mathbb{R}\ :\ \forall n \in \mathbb{N} \quad |a_n| \leq M \tag{1.29}$$

Τότε

$$\begin{aligned}|a_nb_n - ab| = |a_nb_n - a_nb + a_nb - ab| &= |a_n(b_n - b) + b(a_n - a)| \\ &\leq |a_n| \cdot |b_n - b| + |b| \cdot |a_n - a| \\ &\overset{(1.29)}{\leq} M \cdot |b_n - b| + |b| \cdot |a_n - a|\end{aligned}$$

Επειδή $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, τότε για $\frac{\varepsilon}{2M} > 0$

$$\exists n_1 \in \mathbb{N}\ :\ \forall n \geq n_1 \quad |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2M} \tag{1.30}$$

Ομοίως, επειδή $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, τότε για $\frac{\varepsilon}{2|b|}$

$$\exists n_2 \in \mathbb{N}\ :\ \forall n \geq n_2 \quad |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2|b|} \tag{1.31}$$

Επιλέγουμε $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ και έχουμε ότι $\forall n \geq n_0$,

$$|a_nb_n - ab| \leq M \cdot |b_n - b| + |b| \cdot |a_n - a| \underset{(1.31)}{\overset{(1.30)}{<}} M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + |b| \cdot \frac{\varepsilon}{2|b|} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

iv)

Λήμμα 1.2.2. $b \neq 0 \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}\ :\ b_n \neq 0,\ n \geq n_0$

Απόδειξη.

Έστω $b \neq 0 \Rightarrow \frac{|b|}{2} > 0$.

Για $\varepsilon = \frac{|b|}{2} > 0$ και λόγω ότι $\lim_{n\to+\infty} b_n = b$ έχουμε ότι $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ :\ \forall n \geq n_0 \quad |b_n - b| < \frac{|b|}{2}$

Άρα για $n \geq n_0$, έχουμε

$$|b| = |b - b_n + b_n| \leq |b - b_n| + |b_n| < \frac{|b|}{2} + |b_n| \Leftrightarrow |b_n| > |b| - \frac{|b|}{2} \Leftrightarrow |b_n| > \frac{|b|}{2} \tag{1.32}$$

δηλαδή, $b_n \neq 0,\ \forall n \geq n_0$. □

Οπότε, για $n \geq n_0$ έχουμε ότι:

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \left|\frac{b - b_n}{b_n \cdot b}\right| = \frac{|b - b_n|}{|b_n| \cdot |b|} \overset{(1.32)}{<} \frac{2|b - b_n|}{|b|^2}$$

Έστω $\varepsilon > 0$, τότε επειδή $\lim_{n\to+\infty} b_n = b$, για $\frac{\varepsilon|b|^2}{2} > 0$, έχουμε ότι

$$\exists n_1 \in \mathbb{N}\ :\ \forall n \geq n_1 \quad |b - b_n| < \frac{\varepsilon|b|^2}{2} \tag{1.33}$$

Επιλέγουμε $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$. Τότε $\forall n \geq n_2$ ισχύει ότι

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| < \frac{2|b - b_n|}{|b|^2} \overset{(1.33)}{<} \varepsilon$$

v) $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \left(a_n \cdot \frac{1}{b_n}\right) = \lim_{n\to+\infty} a_n \cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{b_n} = a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$

ΠΡΟΣΗΜΟ

Παράδειγμα 1.2.3.

i) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n^2+2n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n^2\left(1+\dfrac{2}{n}\right)} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(n \cdot \sqrt{1+\dfrac{2}{n}}\right) = +\infty$

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^2+1}{n^3+2n+1}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^2(1+\frac{1}{n^2})}{n^3(1+\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3})}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n} \cdot \dfrac{1+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^3}}\right) = 0 \cdot \dfrac{1+0}{1+0+0} = 0$

iii) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n^2+2n+1}{3n^2+n+2}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^2(2+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2})}{n^2(3+\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2})}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{3+\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}\right) = \dfrac{2+0+0}{3+0+0} = \dfrac{2}{3}$

iv) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{5n^3+2n+1}{2n^2+n+1}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^3(5+\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3})}{n^2(2+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(n \cdot \dfrac{5+\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{2+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}\right) = (+\infty) \cdot \dfrac{5+0+0}{2+0+0} = +\infty$

v) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\dfrac{n^2+n}{n^2+2n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\dfrac{n^2(1+\frac{1}{n})}{n^2(1+\frac{2}{n})}} = \sqrt{\dfrac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}}} = \sqrt{\dfrac{1+0}{1+0}} = 1$

Παράδειγμα 1.2.4.

Να δείξετε ότι το όριο $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-2}) = 0$

Απόδειξη.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-2}) &= \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-2})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-2})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1-n+2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-2}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{\sqrt{n(1+\frac{1}{n})}+\sqrt{n(1-\frac{2}{n})}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{2}{n}}}\right) \\
&= 0 \cdot \frac{1}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}} = 0
\end{aligned}$$

Πρόταση 1.2.5 (Μηδενική επί Φραγμένη)**.** Έστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **μηδενική** ακολουθία και $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **φραγμένη**. Τότε, $\lim_{n\to+\infty}(a_n \cdot b_n) = 0$.

Απόδειξη.

Έστω $\varepsilon > 0$, τότε

$$(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ φραγμένη } \Rightarrow \exists M > 0, : \ |b_n| \le M \ \forall n \in \mathbb{N} \tag{1.34}$$

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ μηδενική } \Rightarrow \text{για } \frac{\varepsilon}{M} > 0, \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ : \ \forall n \ge n_0 \quad |a_n - 0| < \frac{\varepsilon}{M} \Leftrightarrow |a_n| < \frac{\varepsilon}{M} \tag{1.35}$$

Άρα για κάθε $n \ge n_0$ έχουμε

$$|a_n \cdot b_n - 0| = |a_n \cdot b_n| = |a_n| \cdot |b_n| \overset{(1.34)}{\le} |a_n| \cdot M \overset{(1.35)}{<} \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon$$

Άρα $\lim_{n\to+\infty} a_n \cdot b_n = 0$.

Παράδειγμα 1.2.6. Να δείξετε ότι $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = 0$

Απόδειξη. Έχουμε ότι

$$\left.\begin{array}{l}
\blacksquare \ \text{η } (\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}} \text{ είναι μηδενική, γιατί } \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0 \\
\blacksquare \ \text{η } \{(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ είναι φραγμένη, γιατί } |(-1)^n| \le 1, \ \forall n \in \mathbb{N}
\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = 0$$

ΠΡΟΣΗΜΟ

Πρόταση 1.2.7 (Κριτήριο Παρεμβολής). Έστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, τρεις ακολουθίες, τέτοιες ώστε:

$$\left.\begin{array}{rl} \text{i)} & a_n \leq b_n \leq c_n,\ \forall n \in \mathbb{N} \\ \text{ii)} & \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} c_n = l \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} b_n = l$$

Απόδειξη.
Έστω $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} c_n = l$ και έστω $\varepsilon > 0$, τότε

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = l \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0,\ \exists n_1 \in \mathbb{N}\ :\ \forall n \geq n_1 \quad |a_n - l| < \varepsilon \Leftrightarrow \overbrace{l - \varepsilon < a_n} < l + \varepsilon$$

$$\lim_{n\to+\infty} c_n = l \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0,\ \exists n_2 \in \mathbb{N}\ :\ \forall n \geq n_2 \quad |c_n - l| < \varepsilon \Leftrightarrow l - \varepsilon < \underbrace{c_n < l + \varepsilon}$$

Επιλέγουμε $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, οπότε $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ :\ \forall n \geq n_0$

$$\begin{aligned} l - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < l + \varepsilon \Leftrightarrow \\ l - \varepsilon < b_n < l + \varepsilon \Leftrightarrow \\ -\varepsilon < b_n - l < \varepsilon \Leftrightarrow \\ |b_n - l| < \varepsilon,\ \forall n \geq n_0 \end{aligned}$$

Άρα $\lim_{n\to+\infty} b_n = l$.

Πόρισμα 1.2.8. Έστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθίες, τέτοιες ώστε:

$$\left.\begin{array}{rl} \text{i)} & |a_n| \leq |b_n|,\ \forall n \in \mathbb{N} \\ \text{ii)} & \lim_{n\to+\infty} b_n = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = 0$$

Παραδείγματα 1.2.9.

i) Να δείξετε ότι $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n^3+2)}{n^2} = 0$.

Απόδειξη.

$$\left|\frac{\sin(n^3+2)}{n^2}\right| = \frac{|\sin(n^3+2)|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n},\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Όμως $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, άρα από το Κριτήριο Παρεμβολής θα έχουμε ότι $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n^3+2}{n^2} = 0$.

ii) Να δείξετε ότι $\lim_{n\to\infty} \frac{2\sin^3 n + \cos^2 n}{n^2} = 0$.

Απόδειξη.

$$\left|\frac{2\sin^3 n + \cos^2 n}{n^2}\right| = \frac{|2\sin^3 n + \cos^2 n|}{n^2} \leq \frac{2|\sin^3 n| + |\cos^2 n|}{n^2} \leq \frac{2\cdot 1 + 1}{n^2} \leq \frac{3}{n^2} \leq \frac{3}{n},\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Όμως $\lim_{n\to\infty} \frac{3}{n} = 0$, άρα από το Κριτήριο Παρεμβολής θα έχουμε ότι $\lim_{n\to\infty} \frac{2\sin^3 n + \cos^2 n}{n^2} = 0$.

Πρόταση 1.2.10. Έστω $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$ και $\lim_{n\to+\infty} b_n = b$ και $a_n \leq b_n,\ \forall n \in \mathbb{N}$, τότε $a \leq b$.

Απόδειξη. (Με άτοπο)

ΠΡΟΣΗΜΟ

Έστω $a > b \Rightarrow a - b > 0$. Θέτουμε $\varepsilon = \frac{a-b}{2}$.
Από τον ορισμό του ορίου για τις δύο ακολουθίες, έχουμε ότι:

$$
\begin{aligned}
\exists n_1 \in \mathbb{N} \ : \ \forall n \geq n_1 \quad |a_n - a| < \frac{a-b}{2} \Leftrightarrow \overbrace{-\frac{a-b}{2} < a_n - a} < \frac{a+b}{2} \Rightarrow a_n > a - \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2} \\
\exists n_2 \in \mathbb{N} \ : \ \forall n \geq n_2 \quad |b_n - b| < \frac{a-b}{2} \Leftrightarrow -\frac{a-b}{2} < \underbrace{b_n - b < \frac{a-b}{2}} \Rightarrow b_n < b + \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2}
\end{aligned}
$$

Δηλαδή, έχουμε ότι

$$
a_n > \frac{a+b}{2}, \quad \forall n \geq n_1 \text{ και } b_n < \frac{a+b}{2}, \quad \forall n \geq n_2
$$

Άρα για $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ έχουμε ότι $b_n < \frac{a+b}{2} < a_n, \quad \forall n \geq n_0$, δηλαδή $a_n > b_n, \quad \forall n \geq n_0$, άτοπο.

Πρόταση 1.2.11. Έστω $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$ και $\lim_{n\to+\infty} b_n = b$ και $a_n < b_n, \ \forall n \in \mathbb{N}$, τότε $a \leq b$

Απόδειξη. $a_n < b_n, \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow a_n \leq b_n, \ \forall n \in \mathbb{N} \overset{1.2.10}{\Rightarrow} a \leq b$

Παράδειγμα 1.2.12.
Αν $a_n = 0, \ \forall n \in \mathbb{N}$ και $b_n = \frac{1}{n}, \ \forall n \in \mathbb{N}$, τότε έχουμε ότι $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0 = a$ και $\lim_{n\to+\infty} b_n = 0 = b$, δηλαδή $a = b = 0$.

Πόρισμα 1.2.13. Έστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία, τέτοια ώστε $a_n \geq 0, \ \forall n \in \mathbb{N}$ και $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$, τότε $a \geq 0$.

Απόδειξη. Έστω $b_n = 0, \ \forall n \in \mathbb{N}$. Τότε προφανώς $a_n \geq b_n, \ \forall n \in \mathbb{N} \overset{1.2.10}{\Rightarrow} a = \lim_{n\to+\infty} a_n \geq \lim_{n\to+\infty} b_n = 0$.

1.3 Άπειρο Όριο Ακολουθίας

Ορισμός 1.3.1. Μια ακολουθία πραγματικών αριθμών $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ αποκλίνει στο $+\infty$ (συμβ.: $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$), αν $\forall M > 0, \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ : \ a_n > M, \ \forall n \geq n_0$

Παράδειγμα 1.3.1. $\lim_{n\to\infty}(3n - 2) = +\infty$.

Απόδειξη.
Εχουμε $3n - 2 > M \Leftrightarrow 3n > M + 2 \Leftrightarrow n > \frac{M+2}{3}$.
Έστω $M > 0$. Τότε $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ με $n_0 > \frac{M+2}{3}$ (Αρχ. Ιδιοτ.) ώστε $\forall n \geq n_0$ να ισχύει

$$
a_n = 3n - 2 \geq 3n_0 - 2 > 3\frac{M+2}{3} - 2 = M
$$

Παράδειγμα 1.3.2. $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2}{3n} = +\infty$

Απόδειξη.
Έχουμε $\frac{n^2+2}{3n} > M \quad (1.36)$.
Όμως $\frac{n^2+2}{3n} > \frac{n^2}{3n} = \frac{n}{3} \quad (1.37)$.
Οπότε από τις σχέσεις (1.36) και (1.37) αρκεί $\frac{n}{3} > M \Leftrightarrow n > 3M$
Έστω $M > 0$. Τότε $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ με $n_0 > 3M$ (Αρχ. Ιδιοτ.) ώστε $\forall n \geq n_0$

$$
a_n = \frac{n^2+2}{3n} > \frac{n^2}{3n} = \frac{n}{3} \geq \frac{n_0}{3} > \frac{3M}{3} = M
$$

Ορισμός 1.3.2. Μια ακολουθία πραγματικών αριθμών $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ αποκλίνει στο $-\infty$ (συμβ.: $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$), αν $\forall M > 0, \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ : \ a_n < -M, \ \forall n \geq n_0$

ΠΡΟΣΗΜΟ

Παράδειγμα 1.3.3. $\lim_{n\to\infty} \frac{1-n}{4} = -\infty$

Απόδειξη. Έχουμε $\frac{1-n}{4} < -M \Leftrightarrow 1-n < -4M \Leftrightarrow n > 4M+1$
Έστω $M > 0$. Τότε $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ με $n_0 > 4M+1$ (Αρχ. Ιδιοτ.) ώστε $\forall n \geq n_0$

$$a_n = \frac{1-n}{4} \leq \frac{1-n_0}{4} < \frac{1-(4M+1)}{4} = -M$$

Παράδειγμα 1.3.4. $\lim_{n\to\infty}(-n^2-n-1) = -\infty$

Απόδειξη.

Έχουμε $-n^2-n-1 < -M \quad (1.38)$
Όμως $-n^2-n-1 < -n^2 \quad (1.39)$.
Οπότε από τις σχέσεις (1.38) και (1.39) αρκεί $-n^2 < -M \Leftrightarrow n^2 > M \Leftrightarrow n > \sqrt{M}$
Έστω $M > 0$. Τότε $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ με $n_0 > \sqrt{M}$ (Αρχ. Ιδιοτ.) ώστε $\forall n \geq n_0$

$$a_n = (-n^2-n-1) \leq -n^2 \leq -n_0^2 < -(\sqrt{M})^2 = -M$$

Θεώρημα 1.3.5. Έστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **αύξουσα (ή γνησίως αύξουσα)** ακολουθία, πραγματικών αριθμών. Τότε:

1. Αν η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι **άνω φραγμένη**, τότε συγκλίνει στο supremum του συνόλου των όρων της.
2. Αν η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δεν είναι άνω φραγμένη, τότε $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

Απόδειξη.

1. Έστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία πραγματικών αριθμών, τέτοια ώστε:

i) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ αύξουσα $\Leftrightarrow a_{n+1} \geq a_n, \ \forall n \in \mathbb{N}$

ii) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ άνω φραγμένη $\Leftrightarrow a_n \leq M, \ \forall n \in \mathbb{N}$, με $M \in \mathbb{R}$.

Η ακολουθία a_n είναι άνω φραγμένη, δηλαδή το σύνολο των όρων της $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι άνω φραγμένο, και μη κενό, άρα από το αξίωμα πληρότητας υπάρχει το $\sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Έστω $s = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Θα δείξουμε ότι $\lim_{n\to\infty} a_n = s$, δηλαδή ότι $\forall \varepsilon > 0, \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \ \forall n \geq n_0 \quad s-\varepsilon < a_n < s+\varepsilon$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Από τη χαρακτηριστική ιδιότητα του supremum, έχουμε ότι $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για τον $a_{n_0} \in \{a_{n_0} : n \in \mathbb{N}\}$ να ισχύει $s-\varepsilon < a_{n_0}$. Επειδή a_n αύξουσα, έχουμε ότι $\forall n \geq n_0, \ a_n \geq a_{n_0}$. Επομένως

$$s-\varepsilon < a_{n_0} \leq a_n, \quad \forall n \geq n_0$$

Επίσης

$$a_n \leq s < s+\varepsilon, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

2. Έστω $\varepsilon > 0$. Η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δεν είναι άνω φραγμένη, δηλαδή το σύνολο των όρων της $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ δεν είναι άνω φραγμένο, άρα για το $\varepsilon > 0, \ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για τον $a_{n_0} \in \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ να ισχύει $a_{n_0} > \varepsilon$. Επειδή $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ αύξουσα, έχουμε ότι $\forall n \geq n_0, \ a_n \geq a_{n_0}$. Επομένως

$$a_n \geq a_{n_0} > \varepsilon, \quad \forall n \geq n_0$$

Άρα $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

Θεώρημα 1.3.6. Έστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **φθίνουσα (ή γνησίως φθίνουσα)** ακολουθία, πραγματικών αριθμών. Τότε:

1. Αν η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι **κάτω φραγμένη**, τότε συγκλίνει στο infimum του συνόλου των όρων της.
2. Αν η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δεν είναι κάτω φραγμένη, τότε $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Απόδειξη. Ομοίως

ΠΡΟΣΗΜΟ

Πρόταση 1.3.7. Έστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθίες πραγματικών αριθμών, με $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$. Τότε:

i) $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}(a_n + b_n) = +\infty$

ii) $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}(a_n \cdot b_n) = +\infty$

iii) $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}(a_n \cdot b_n) = -\infty$

iv) Αν $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι κάτω φραγμένη τότε $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = +\infty$

v) $\lim_{n\to\infty} b_n = b \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = +\infty$

vi) $\lim_{n\to\infty} b_n = b \neq 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}(a_n \cdot b_n) = \begin{cases} +\infty, & b > 0 \\ -\infty, & b < 0 \end{cases}$

Απόδειξη. i) Έστω $\varepsilon > 0$. Αρκεί να βρούμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\forall n \geq n_0 \quad a_n + b_n > \varepsilon$. Πράγματι:

- $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \Rightarrow$ για $\frac{\varepsilon}{2} > 0,\ \exists n_1 \in \mathbb{N}\ :\ \forall n \geq n_1 \quad a_n > \frac{\varepsilon}{2}$
- $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty \Rightarrow$ για $\frac{\varepsilon}{2} > 0,\ \exists n_2 \in \mathbb{N}\ :\ \forall n \geq n_2 \quad b_n > \frac{\varepsilon}{2}$

Επομένως για $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, έχουμε ότι $\forall n \geq n_0 \quad a_n + b_n > \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

ii) Έστω $\varepsilon > 0$. Αρκεί να βρούμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\forall n \geq n_0 \quad a_n \cdot b_n > \varepsilon$. Πράγματι:

- $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \Rightarrow$ για $\varepsilon = 1 > 0,\ \exists n_1 \in \mathbb{N}\ :\ \forall n \geq n_1 \quad a_n > 1$
- $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty \Rightarrow$ για $\varepsilon > 0,\ \exists n_2 \in \mathbb{N}\ :\ \forall n \geq n_2 \quad b_n > \varepsilon$

Επομένως για $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, έχουμε ότι $\forall n \geq n_0 \quad a_n \cdot b_n > 1 \cdot \varepsilon = \varepsilon$.

iii) Έστω $\varepsilon > 0$. Αρκεί να βρούμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\forall n \geq n_0 \quad a_n \cdot b_n < -\varepsilon$. Πράγματι:

- $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \Rightarrow$ για $\varepsilon = 1 > 0,\ \exists n_1 \in \mathbb{N}\ :\ \forall n \geq n_1 \quad a_n > 1$
- $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty \Rightarrow$ για $\varepsilon > 0,\ \exists n_2 \in \mathbb{N}\ :\ \forall n \geq n_2 \quad b_n < -\varepsilon \Leftrightarrow -b_n > \varepsilon$

Επομένως για $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, έχουμε ότι $\forall n \geq n_0 \quad a_n \cdot (-b_n) > 1 \cdot \varepsilon = \varepsilon \Leftrightarrow a_n \cdot b_n < -\varepsilon$

iv) Έστω $\varepsilon > 0$. Αρκεί να βρούμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\forall n \geq n_0 \quad a_n + b_n > \varepsilon$. Πράγματι:

- b_n κάτω φραγμένη, άρα $\exists m \in \mathbb{R}\ :\ b_n \geq m,\ \forall n \in \mathbb{N}$
- $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \Rightarrow$ για $\varepsilon + |m| > 0,\ \exists n_1 \in \mathbb{N}\ :\ \forall n \geq n_1 \quad a_n > \varepsilon + |m|$.

Επομένως για το n_0, έχουμε ότι $\forall n \geq n_0 \quad a_n + b_n > \varepsilon + |m| + m \geq \varepsilon$.

v) Επειδή $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, έχουμε ότι η $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη, άρα και κάτω φραγμένη, οπότε απο το προηγούμενο ερώτημα, έχουμε ότι $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = +\infty$

vi) Έστω $b > 0$. Θα δείξουμε ότι $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = +\infty$. Έστω $\varepsilon > 0$. Αρκεί να βρούμε $n_0 \in \mathbb{N}\ :\ \forall n \geq n_0 \quad a_n + b_n > \varepsilon$. Πράγματι:

- $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ για $\varepsilon = \frac{b}{2}$ $\exists n_1 \in \mathbb{N}\ :\ \forall n \geq n_1 \quad |b_n - b| < \frac{b}{2} \Leftrightarrow \underbrace{-\frac{b}{2} < b_n - b}< \frac{b}{2} \Rightarrow b_n > b - \frac{b}{2} = \frac{b}{2}$
- $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \Rightarrow$ για $\varepsilon = \frac{2\varepsilon}{b} > 0$ $\exists n_2 \in \mathbb{N}\ :\ \forall n \geq n_2 \quad a_n > \frac{2\varepsilon}{b}$

Επομένως για το $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, έχουμε ότι $\forall n \geq n_0 \quad a_n \cdot b_n > \frac{2\varepsilon}{b} \cdot \frac{b}{2} = \varepsilon$. Ομοίως για $b < 0$.

Πρόταση 1.3.8. Έστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθίες πραγματικών αριθμών, με $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$. Τότε:

i) $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}(a_n + b_n) = -\infty$

ii) $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}(a_n \cdot b_n) = +\infty$

ΠΡΟΣΗΜΟ

iii) $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}(a_n \cdot b_n) = -\infty$

iv) Αν $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι άνω φραγμένη τότε $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = -\infty$

v) $\lim_{n\to\infty} b_n = b \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = -\infty$

vi) $\lim_{n\to\infty} b_n = b \neq 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}(a_n \cdot b_n) = \begin{cases} +\infty, & b < 0 \\ -\infty, & b > 0 \end{cases}$

Απόδειξη. 1. Έστω $\varepsilon > 0$. Αρκεί να βρούμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\forall n \geq n_0 \quad a_n + b_n < -\varepsilon$. Πράγματι:

- $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \Rightarrow$ για $\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2}$ $\exists n_1 \in \mathbb{N} \ : \ \forall n \geq n_1 \quad a_n < -\frac{\varepsilon}{2}$
- $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty \Rightarrow$ για $\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2}$ $\exists n_2 \in \mathbb{N} \ : \ \forall n \geq n_2 \quad b_n < -\frac{\varepsilon}{2}$

Επομένως για $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, έχουμε ότι $\forall n \geq n_0 \quad a_n + b_n < -\frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

2. Έστω $\varepsilon > 0$. Αρκεί να βρούμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\forall n \geq n_0 \quad a_n \cdot b_n > \varepsilon$. Πράγματι:

- $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \Rightarrow$ για $\varepsilon = 1 > 0$ $\exists n_1 \in \mathbb{N} \ : \ \forall n \geq n_1 \quad a_n < -1 \Leftrightarrow -a_n > 1$
- $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty \Rightarrow$ για $\varepsilon > 0$ $\exists n_2 \in \mathbb{N} \ : \ \forall n \geq n_2 \quad b_n < -\varepsilon \Leftrightarrow -b_n > \varepsilon$

Επομένως για $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, έχουμε ότι $\forall n \geq n_0 \quad (-a_n)\cdot(-b_n) > 1 \cdot \varepsilon = \varepsilon \Leftrightarrow a_n \cdot b_n > \varepsilon$.

3. Έστω $\varepsilon > 0$. Αρκεί να βρούμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\forall n \geq n_0 \quad a_n \cdot b_n < -\varepsilon$. Πράγματι:

- $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \Rightarrow$ για $\varepsilon = 1 > 0$ $\exists n_1 \in \mathbb{N} \ : \ \forall n \geq n_1 \quad a_n < -1 \Leftrightarrow -a_n > 1$
- $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty \Rightarrow$ για $\varepsilon > 0$ $\exists n_2 \in \mathbb{N} \ : \ \forall n \geq n_2 \quad b_n > \varepsilon$

Επομένως για $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, έχουμε ότι $\forall n \geq n_0 \quad - a_n \cdot b_n > 1 \cdot \varepsilon = \varepsilon \Leftrightarrow a_n \cdot b_n < -\varepsilon$

4. Έστω $\varepsilon > 0$. Αρκεί να βρούμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\forall n \geq n_0 \quad a_n + b_n < -\varepsilon$. Πράγματι:

- b_n άνω φραγμένη, άρα $\exists M \in \mathbb{R} \ : \ b_n \leq M, \ \forall n \in \mathbb{N}$
- $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \Rightarrow$ για $\varepsilon = \varepsilon + |M| > 0$ $\exists n_1 \in \mathbb{N} \ : \ \forall n \geq n_1 \quad a_n < -(\varepsilon + |M|)$.

Επομένως για το n_0, έχουμε ότι $\forall n \geq n_0 \quad a_n + b_n < -\varepsilon - |M| + M \leq -\varepsilon$.

5. Επειδή $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, έχουμε ότι η $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη, άρα και άνω φραγμένη, οπότε απο το προηγούμενο ερώτημα, έχουμε ότι $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = -\infty$

6. Έστω $b > 0$. Θα δείξουμε ότι $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = -\infty$. Έστω $\varepsilon > 0$. Αρκεί να βρούμε $n_0 \in \mathbb{N} \ : \ \forall n \geq n_0 \quad a_n + b_n < -\varepsilon$. Πράγματι:

- $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ για $\varepsilon = \frac{b}{2} > 0$ $\exists n_1 \in \mathbb{N} \ : \ \forall n \geq n_1 \quad |b_n - b| < \frac{b}{2} \Leftrightarrow \underbrace{-\frac{b}{2} < b_n - b}_{} < \frac{b}{2} \Rightarrow b_n > b - \frac{b}{2} = \frac{b}{2}$
- $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \Rightarrow$ για $\varepsilon = \frac{2\varepsilon}{b} > 0$ $\exists n_2 \in \mathbb{N} \ : \ \forall n \geq n_2 \quad a_n < -\frac{2\varepsilon}{b} \Leftrightarrow -a_n > \frac{2\varepsilon}{b}$

Επομένως για το $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, έχουμε ότι $\forall n \geq n_0 \quad - a_n \cdot b_n > \frac{2\varepsilon}{b} \cdot \frac{b}{2} = \varepsilon \Leftrightarrow a_n \cdot b_n < -\varepsilon$. Ομοίως για $b < 0$.

Πρόταση 1.3.9. Έστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία **θετικών** πραγματικών αριθμών. Τότε

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$$

Απόδειξη.

($\Rightarrow$) Έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$, για το $\frac{1}{\varepsilon} > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N} \ : \ \forall n \geq n_0 \quad a_n > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow \frac{1}{a_n} < \varepsilon$. Άρα έχουμε, ότι $\exists n_0 \in \mathbb{N} \ : \ \forall n \geq n_0 \quad \left|\frac{1}{a_n} - 0\right| = \left|\frac{1}{a_n}\right| = \frac{1}{|a_n|} \overset{a_n > 0}{=} \frac{1}{a_n} < \varepsilon$. Δηλαδή $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{a_n} = 0$.

ΠΡΟΣΗΜΟ

($\Leftarrow$) Έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$, έχουμε για το $\frac{1}{\varepsilon} > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N} \ : \ \forall n \geq n_0 \quad \left|\frac{1}{a_n} - 0\right| < \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow \left|\frac{1}{a_n}\right| < \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow \frac{1}{|a_n|} < \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow \frac{1}{a_n} < \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow a_n > \varepsilon$. Δηλαδή, $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

Παράδειγμα 1.3.10. Έχουμε ότι $\lim_{n\to\infty}(n^2+1) = +\infty$. Άρα $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2+1} = 0$

Πρόταση 1.3.11. $\lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0, & |x| < 1 \\ 1, & x = 1 \\ +\infty, & x > 1 \end{cases}$

Απόδειξη.

- Αν $x > 1$ τότε $x - 1 > 0$. Θέτουμε $a = x - 1 > 0$, άρα $x = 1 + a \Rightarrow x^n = (1+a)^n \geq 1 + na, \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Επομένως

$$\lim_{n\to+\infty} x^n = \lim_{n\to+\infty}(1+na) \overset{a\geq 0}{=} +\infty$$

- Αν $x = 1$ τότε $\lim_{n\to\infty} x^n = \lim_{n\to\infty} 1^n = 1$
- Αν $|x| < 1$ τότε:
  i) Αν $x = 0$ τότε $\lim_{n\to\infty} x^n = \lim_{n\to\infty} 0^n = 0$
  ii) Αν $x \neq 0$ τότε $|x| < 1 \Rightarrow \frac{1}{|x|} > 1$. Επομένως, από την 1η περίπτωση

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{|x|}\right)^n = +\infty$$

  και άρα, από την πρόταση refprop:infzero $\lim_{n\to\infty} |x|^n = 0$. Όμως, ισχύει ότι

$$-|x|^n \leq x^n \leq |x^n|$$

  και επειδή προφανώς και $\lim_{n\to\infty} -|x|^n = 0$, από το κριτήριο Παρεμβολής, έπεται ότι $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$.

Πρόταση 1.3.12. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1, \ \forall n \in \mathbb{N}$

Απόδειξη. Έστω $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n \geq 1, \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow n^{\frac{1}{2n}} \geq 1^{\frac{1}{2n}}, \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \sqrt[2n]{n} \geq 1, \ \forall n \in \mathbb{N}$
Θέτουμε $a = \sqrt[2n]{n} - 1 \geq 0$. Τότε $\sqrt[2n]{n} = 1 + a \Rightarrow \sqrt{n} = (1+a)^n \overset{\text{Bernoulli}}{\geq} 1 + na \Rightarrow na \leq \sqrt{n} - 1$. Οπότε

$$0 \leq a \leq \frac{\sqrt{n}-1}{n}, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Όμως

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}-1}{n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n}}{n} - \frac{1}{n}\right) = 0 - 0 = 0$$

και άρα από το Κριτήριο Παρεμβολής, έχουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty} a = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{n} = 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1^2 = 1$$

Πρόταση 1.3.13. Έστω $a > 0$. Τότε $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1, \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη.

ΠΡΟΣΗΜΟ

- $a > 1 \Rightarrow a^{\frac{1}{n}} > 1^{\frac{1}{n}},\ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \sqrt[n]{a} > 1,\ \forall n \in \mathbb{N}$
  Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε $b_n = \sqrt[n]{a} - 1 > 0 \Rightarrow \sqrt[n]{a} = b_n + 1 \Rightarrow a = (b_n + 1)^n \geq 1 + nb_n \Rightarrow nb_n \leq a - 1 \Rightarrow 0 \leq b_n \leq \frac{a-1}{n},\ \forall n \in \mathbb{N}$
  Επειδή $\lim_{n\to\infty} \frac{a-1}{n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a}{n} - \frac{1}{n}\right) = 0 - 0 = 0$, άρα από το Κριτήριο Παρεμβολής, έχουμε ότι $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}(\sqrt[n]{a} - 1) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

- $a < 1 \Rightarrow \frac{1}{a} > 1$. Τότε από την προηγούμενη πρόταση έχουμε $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{a}} = 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}} = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

Πρόταση 1.3.14. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$

Απόδειξη. Χωρίς Απόδειξη

1.4 Ασκήσεις

1. Να δείξετε ότι $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^3}{2n^3+3}} = 1$

   Απόδειξη.
   $$\frac{1}{3} = \frac{n^3}{3n^3} = \frac{n^3}{2n^3 + n^3} \leq \frac{n^3}{2n^3 + 3} \leq \frac{n^3}{2n^3} = \frac{1}{2},\ \forall n \in \mathbb{N}$$
   Επομένως
   $$\sqrt[n]{\frac{1}{3}} \leq \sqrt[n]{\frac{n^3}{2n^3 + 3}} \leq \sqrt[n]{\frac{1}{2}},\ \forall n \in \mathbb{N}$$
   Όμως $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{3}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2}} = 1$, άρα από Κριτήριο Παρεμβολής, έχουμε ότι $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^3}{2n^3+3}} = 1$

2. Να δείξετε ότι $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2 + 6n + 5} = 1$

   Απόδειξη.
   $$5 \leq n^2 + 6n + 5 \leq n^2 + 6n^2 + 5n^2 = 12n^2,\ \forall n \in \mathbb{N}$$
   επομένως
   $$\sqrt[n]{5} \leq \sqrt[n]{n^2 + 6n + 5} \leq \sqrt[n]{12n^2},\ \forall n \in \mathbb{N}$$
   Όμως, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{5} = 1$ και $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{12n^2} = \lim_{n\to\infty}(\sqrt[n]{12} \cdot \sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{n}) = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$, άρα από Κριτήριο Παρεμβολής και $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2 + 6n + 5} = 1$.

3. Να δείξετε ότι $\lim_{n\to\infty} \sqrt{5n^3 + n^2 - 7} = 1$

   Απόδειξη.
   $$1 < 5n^3 + n^2 - 7 < 5n^3 + n^2 \leq 5n^3 + n^3 = 6n^3,\ \forall n \geq 2$$
   Επομένως
   $$\sqrt[n]{1} \leq \sqrt[n]{5n^3 + n^2 - 7} \leq \sqrt[n]{6n^3},\ \forall n \geq 2$$
   Όμως, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1} = 1$ και $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{6n^3} = \lim_{n\to\infty}(\sqrt[n]{6} \cdot \sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{n}) = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$, άρα από Κριτήριο Παρεμβολής και $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{5n^3 + n^2 - 7} = 1$.

4. Να δείξετε ότι $\lim_{n\to\infty} \sqrt{1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n} = 2$

Απόδειξη.

$$2^n < 1+2+2^2+\cdots+2^n < \underbrace{2^n+2^n+2^n+\cdots+2^n}_{n+1 \text{ φορές}} = (n+1)\cdot 2^n,\ \forall n\in\mathbb{N}$$

επομένως

$$2 < \sqrt[n]{1+2+2^2+\cdots+2^n} < 2\sqrt[n]{n+1},\ \forall n\in\mathbb{N}$$

Όμως $\lim_{n\to\infty} 2 = 2$ και $\lim_{n\to\infty} 2\sqrt[n]{n+1} = 2\cdot 1 = 2$ άρα από Κριτήριο Παρεμβολής έχουμε ότι και το όριο $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+2+2^2+\cdots+2^n} = 1$.

5. Να δείξετε ότι $\lim_{n\to\infty}\sqrt{3^n+5^n} = 5$

   Απόδειξη.

$$5^n < 3^n+5^n < 5^n+5^n = 2\cdot 5^n,\ \forall n\in\mathbb{N}$$

   επομένως

$$5 < \sqrt[n]{3^n+5^n} < 5\cdot\sqrt[n]{2},\ \forall n\in\mathbb{N}$$

   Όμως $\lim_{n\to\infty} 5 = 5$ και $\lim_{n\to\infty} 5\sqrt[n]{2} = 5\cdot 1 = 5$ άρα από Κριτήριο Παρεμβολής το όριο $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3^n+5^n} = 5$.

6. Να δείξετε ότι το όριο $\lim_{n\to\infty}\left[(\frac{1}{2})^n + (-\frac{1}{3})^n\right] = 0$.

   Απόδειξη. Έχουμε ότι

   - $\left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(\frac{1}{2})^n = 0$
   - $\left|-\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3} < 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(-\frac{1}{3})^n = 0$

   Άρα $\lim_{n\to\infty}\left[(\frac{1}{2})^n + (-\frac{1}{3})^n\right] = 0$.

7. Να δείξετε ότι $\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot 3^n - 5\cdot 2^n+3}{5^n+3\cdot 2^n+1} = 0$.

   Απόδειξη.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot 3^n - 5\cdot 2^n + 3}{5^n+3\cdot 2^n+1} &= \lim_{n\to\infty}\frac{3^n\left(2-5(\frac{2}{3})^n+3(\frac{1}{3})^n\right)}{5^n\left(1+3(\frac{2}{5})^n+(\frac{1}{5})^n\right)} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{3}{5}\right)^n\cdot\frac{2-5(\frac{2}{3})^n+3(\frac{1}{3})^n}{\left(1+3(\frac{2}{5})^n+(\frac{1}{5})^n\right)}\right]\\ &= 0\cdot\frac{2-5\cdot 0+3\cdot 0}{1+3\cdot 0+0} = 0\end{aligned}$$

1.5 Υπακολουθίες

Ορισμός 1.5.1. Έστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία, και έστω $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **γνησίως αύξουσα** ακολουθία φυσικών αριθμών ($k_1 < k_2 < k_3 < \cdots$). Τότε η ακολουθία $b_n = (a_{k_n}),\ n\in\mathbb{N}$ ονομάζεται υπακολουθία της $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Πρόταση 1.5.1. Αν μια ακολουθία είναι φραγμένη τότε και **κάθε** υπακολουθία της είναι φραγμένη.

Παρατήρηση 1.5.2.

i) Ανάλογες προτάσεις ισχύουν και για την περίπτωση όπου η ακολουθία είναι άνω, ή κάτω φραγμένη.

ii) Ενδιαφέρον παρουσιάζει το αντιθετοαντίστροφο της παραπάνω πρότασης, όπου λέει ότι αν τουλάχιστον μία υπακολουθία μιας ακολουθίας δεν είναι φραγμένη, τότε κ η ίδια η ακολουθία δεν θα είναι φραγμένη.

Πρόταση 1.5.3. Αν μια ακολουθία είναι γνησίως αύξουσα (αντίστοιχα γνησίως φθίνουσα) τότε και **κάθε** υπακολουθία της θα είναι γνησίως αύξουσα (αντίστοιχα γνησίως φθίνουσα).

ΠΡΟΣΗΜΟ

Λήμμα 1.5.4. Έστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία και $(a_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ υπακολουθία της. Τότε $k_n \geq n,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη.

- Για $n = 1$, έχω: Προφανώς $k_n \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow k_n \geq 1$, ισχύει:
- Έστω ότι ισχύει για n, δηλ. $k_n \geq n \quad$ (1.40).
- θ.δ.ο. ισχύει για $n+1$. Πράγματι,

$$k_{n+1} \overset{k_n \text{ γν.αυξ.}}{>} k_n \overset{(1.40)}{\geq} n \Rightarrow k_{n+1} > n \Rightarrow k_{n+1} \geq n+1$$

Πρόταση 1.5.5. Αν μια ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στο $a \in \mathbb{R}$, τότε και **κάθε** υπακολουθία της συγκλίνει επίσης στο $a \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη.
Έστω $(a_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ υπακολουθία της $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε, επειδή $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, έχουμε ότι

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \ : \ \forall n \geq n_0 \quad |a_n - a| < \varepsilon \tag{1.41}$$

Δηλαδή, $\exists n_0 \in \mathbb{N} \ : \ k_n \overset{1.5.4}{\geq} n \geq n_0$ και άρα από τη σχέση (1.41), έχουμε $|a_{k_n} - a| < \varepsilon$, δηλαδή $\lim_{n\to+\infty} a_{k_n} = a$.

Παρατήρηση 1.5.6. Το αντιθετοαντίστροφο της παραπάνω πρότασης, μας λέει, ότι αν δυο υπακολουθίες μιας ακολουθίας $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνουν σε διαφορετικά όρια, τότε δεν υπάρχει το όριο της ακολουθίας $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Παράδειγμα 1.5.7. Να δείξετε ότι η ακολουθία $a_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}$ δεν συγκλίνει.

Απόδειξη.
Θεωρούμε τις υπακολουθίες:

- $a_{2n} = (-1)^{2n} \frac{2n}{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} = \frac{2n}{n(2+\frac{1}{n})} = \frac{2}{2+\frac{1}{n}} \xrightarrow{n\to\infty} 1$
- $a_{2n-1} = (-1)^{2n-1} \frac{2n-1}{2n-1+1} = -\frac{2n-1}{2n} = -\left(1 - \frac{1}{2n}\right) \xrightarrow{n\to\infty} -1$

Άρα, η ακολουθία $a_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}$ δεν συγκλίνει.

Πρόταση 1.5.8. Κάθε ακολουθία έχει **μονότονη** (αύξουσα ή φθίνουσα) υπακολουθία.

Απόδειξη. Χωρίς απόδειξη.

Θεώρημα 1.5.9 (Bolzano-Weierstrass)**.** Κάθε φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών έχει **συγκλίνουσα** υπακολουθία

Απόδειξη. Έστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ φραγμένη ακολουθία. Τότε

$$\exists M > 0 \ : \ |a_n| \leq,\ \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow -M \leq a_n \leq M,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Από την πρόταση 1.5.8 $\exists (a_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ η οποία είναι γνησίως μονότονη, αύξουσα ή φθίνουσα. Έστω ότι $(a_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ είναι γνησίως αύξουσα. Τότε για την $(a_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ ισχύουν:

- $|a_{k_n}| < M,\ \forall n \in \mathbb{N}$, δηλαδή η $(a_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη.
- $|a_{k_n}|$, είναι γνησίως αύξουσα $(a_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη.

Επομένως, σύμωνα με την πρόταση 1.3.5 η $(a_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό.

1.6 Ακολουθίες Cauchy

ΠΡΟΣΗΜΟ

Ορισμός 1.6.1. Μια ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ πραγματικών αριθμών καλείται ακολουθία Cauchy, αν $\forall\varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ :\ \forall n, m \geq n_0 \quad |a_n - a_m| < \varepsilon$

Πρόταση 1.6.1. Κάθε ακολουθία Cauchy είναι φραγμένη.

Απόδειξη. Έστω η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία Cauchy. Τότε για $\varepsilon = 1 > 0$

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}\ :\ \forall n, m \geq n_0 \quad |a_n - a_m| < 1$$

Συνεπώς, για $m = n_0$ και $\forall n \geq n_0$, έχουμε $|a_n - a_{n_0}| < 1 \quad$ (1.42). Άρα, $\forall n \geq n_0$, έχουμε

$$|a_n| = |a_n + a_{n_0} - a_{n_0}| \leq |a_n - a_{n_0}| + |a_{n_0}| < 1 + |a_{n_0}|$$

Θέτουμε $M = \max\{1+|a_{n_0}|, |a_1|, |a_2|, \dots, |a_{n_0-1}|\}$. Τότε, $\forall n \geq n_0$, έχουμε ότι $|a_n| \leq M$, δηλαδή, η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη.

Πρόταση 1.6.2. Μια ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Cauchy $\Leftrightarrow$ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό.

Απόδειξη.

($\Leftarrow$) Έστω $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$. Θα δείξουμε ότι η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Cauchy.
Έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, για $\frac{\varepsilon}{2} > 0$,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}\ :\ \forall n, m \geq n_0 \quad |a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| \leq |a_n - a| + |a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

($\Rightarrow$) Έστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία Cauchy. Θα δείξουμε ότι η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό.Πράγματι, Επειδή η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Cauchy, από την πρόταση 1.6.1, είναι φραγμένη. Επομένως, από το θεώρημα Bolzano-Weierstrass υπάρχει ακολουθία $(a_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ που συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό, έστω $a \in \mathbb{R}$. Θα δείξουμε ότι $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.
Έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή $\lim_{n\to\infty} a_{k_n} = a$, για $\frac{\varepsilon}{2} > 0$,

$$\exists n_1 \in \mathbb{N}\ :\ \forall n \geq n_1 \quad |a_{k_n} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Επειδή η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Cauchy, για $\frac{\varepsilon}{2} > 0$,

$$\exists n_2 \in \mathbb{N}\ :\ \forall n, m \geq n_2 \quad |a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Αν θέσουμε $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, έχουμε ότι $\forall n \geq n_0$,

$$|a_n - a| = |a_n - a_{k_n} + a_{k_n} - a| \leq |a_n - a_{k_n}| + |a_{k_n} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

ΠΡΟΣΗΜΟ