Πραγματικοί Αριθμοί
Ασκήσεις

1. Να υπολογιστούν τα sup, inf, max και min των παρακάτω συνόλων.

   i) $A = \left\{\frac{1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N}\right\}$ Απ: $\begin{cases} \sup A = \max A = 1 \\ \inf A = 0 \end{cases}$

   ii) $A = \left\{\frac{1}{n} \ : \ n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0\right\}$ Απ: $\begin{cases} \sup A = \max A = 1 \\ \inf A = \min A = -1 \end{cases}$

   iii) $A = \left\{x \ : \ x = 0 \text{ ή } x = \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}\right\}$ Απ: $\begin{cases} \sup A = \max A = 1 \\ \inf A = \min A = 0 \end{cases}$

   iv) $A = \left\{x \in \mathbb{R} \ : \ 0 \leq x \leq \sqrt{2},\ x \in \mathbb{Q}\right\}$ Απ: $\begin{cases} \sup A = \sqrt{2} \\ \inf A = \min A = 0 \end{cases}$

   v) $A = \left\{x \in \mathbb{R} \ : \ x^2 + x + 1 \geq 0\right\}$ Απ: δεν υπάρχουν

   vi) $A = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x^2 + x - 1 < 0\}$ Απ: $\begin{cases} \sup A = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ \inf A = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$

   vii) $A = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x < 0,\ x^2 + x - 1 < 0\}$ Απ: $\begin{cases} \sup A = 0 \\ \inf A = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$

   viii) $A = \left\{1 - \frac{(-1)^n}{n} \ : \ n \in \mathbb{N}\right\}$ Απ: $\begin{cases} \sup A = \max A = 2 \\ \inf A = \min A = \frac{1}{2} \end{cases}$

2. Για τα παρακάτω υποσύνολα να υπολογιστούν και να αποδειχθούν τα supremum και infimum.

   i) $A = (0, 2)$ Απ: $\begin{cases} \sup A = 2 \\ \inf A = 0 \end{cases}$

   ii) $A = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x < 0\}$ Απ: $\begin{cases} \sup A = 0 \\ \inf A = -\infty \end{cases}$

3. Έστω A φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\sup A = \inf A$. Να δείξετε ότι το A είναι μονοσύνολο.

4. Έστω A, B μη-κενά υποσύνολα του $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $a \leq b,\ \forall a \in A$ και $\forall b \in B$. Να δείξετε ότι: i) $\sup A \leq b,\ \forall b \in B$ ii) $\sup A \leq \inf B$

5. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ μη-κενό, και κάτω φραγμένο και έστω B το σύνολο των κάτω φραγμάτων του A. Να δείξετε ότι: i) $B \neq \emptyset$ ii) B άνω φραγμένο. iii) $\sup B = \inf A$

6. Να αποδείξετε ότι το σύνολο $\mathbb{Z}$ δεν είναι φραγμένο.

7. Να αποδείξετε ότι το σύνολο $A = \{3k \ : \ k \in \mathbb{Z}\}$ δεν είναι άνω φραγμένο.

8. Να αποδείξετε με χρήση της Μαθηματικής Επαγωγής τους παρακάτω τύπους.

   i) $\sum_{n=1}^{N} n = \frac{N(N+1)}{2},\ \forall N \in \mathbb{N}$

ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} n^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}, \ \forall N \in \mathbb{N}$

iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} n^3 = (1+2+\cdots+N)^2, \ \forall N \in \mathbb{N}$

iv) $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} a^n = \frac{a^{N+1}-1}{a-1}, \ \forall N \in \mathbb{N}$

9. Βρείτε ένα κλειστό τύπο για τα παρακάτω αθροίσματα:

   i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = 1+3+5+\cdots+(2n-1)$ Απ: n^2

   ii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 = 1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2$ Απ: $\dfrac{n(2n+1)(2n-1)}{3}$

10. (**Θέμα: 2018**) Να αποδείξετε ότι $\displaystyle\sum_{n=2}^{N-2} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{3} - \frac{1}{N}$

11. Να αποδείξετε ότι $n^5 - n$ είναι πολλαπλάσιο του 5, $\forall n \in \mathbb{N}$.

12. Να αποδείξετε ότι $n! > 2^n, \forall n \geq 4$

13. Έστω $a \in \mathbb{R}$ και $n \in \mathbb{N}$. Να δείξετε με τη βοήθεια της μαθηματικής επαγωγής της παρακάτω ανισότητες.

   i) Αν $0 < a < \dfrac{1}{n}$ τότε $(1+a)^n < \dfrac{1}{1-na}$

   ii) Αν $0 \leq a \leq 1$ τότε $1 - na \leq (1-a)^n \leq \dfrac{1}{1+na}$

14. Αν $a > 0$ τότε να αποδείξετε ότι $(1+a)^n \geq 1 + na + \dfrac{n(n-1)a^2}{2}, \ \forall n \in \mathbb{N}$

15. Να δείξετε ότι οι παρακάτω αριθμοί είναι άρρητοι. i) $\sqrt{3}$ και $\sqrt{5}$ ii) $\sqrt[3]{2}$ και $\sqrt[3]{3}$ iii) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ και $\sqrt{2}+\sqrt{6}$

Υποδείξεις

Άθροισμα n πρώτων όρων αριθμητικής προόδου

Έστω αριθμητική πρόοδος $a_n = a_1 + (n-1)\omega, \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Τότε το άθροισμα των n πρώτων όρων της ακολουθίας είναι

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = \frac{2a_1 + (n-1)\omega}{2}$$

Άθροισμα n πρώτων όρων γεωμετρικής προόδου

Έστω γεωμετρική πρόοδος $a_n = ar^{n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Τότε το άθροισμα των n πρώτων όρων της ακολουθίας είναι

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} ar^{k-1} = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} = a_1 \frac{1-r^n}{1-r}, \quad r \neq 1$$

Άσκηση 3. Υποθέστε ότι $\sup A = \inf A = c$. Ποιές ανισότητες ισχύουν για το c και τα στοιχεία του A; Τι συμπέρασμα βγάζουμε;

Άσκηση 9. Προσθαφαιρέστε τους κατάλληλους κάθε φορά άρτιους όρους που λείπουν από το άθροισμα και ομαδοποιήστε έτσι ώστε να μπορέσετε να χρησιμοποιήσετε τους τύπους αθροίσματος αριθμητικής προόδου καθώς και τα αθροίσματα της άσκησης 8..

Άσκηση 10. Κάντε ανάλυση σε απλά κλάσματα του όρου που βρίσκεται μέσα στο άθροισμα κ στη συνέχεια, γράψτε αναλυτικά τους όρους του αθροίσματος του 1ου μέλους. Τι παρατηρείτε?