Ακολουθίες

1.1 Ορισμός Ακολουθίας

Ορισμός 1.1.1. Ακολουθία πραγματικών αριθμών ονομάζεται κάθε συνάρτηση με πεδίο ορισμού τους φυσικούς αριθμούς.

$$a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$
$$n \mapsto a(n) = a_n \quad \text{(ν-οστός όρος)}$$

Οι ακολουθίες συμβολίζονται ως $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ή $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ ή $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ή $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$, κλπ.

Ορισμός 1.1.2. Σύνολο Τιμών (Σ.Τ.) της ακολουθίας $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ονομάζουμε το **σύνολο των όρων της**, δηλαδή το σύνολο $\{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\} = \{a_n \;:\; n \in \mathbb{N}\}$ το οποίο μπορεί να είναι πεπερασμένο ή άπειρο.

Παραδείγματα 1.1.1.

i) Η ακολουθία $a_n = n,\ \forall n \in \mathbb{N}$. Έχει Σ.Τ. το σύνολο $\{1, 2, 3, \ldots\}$.

ii) Η ακολουθία $a_n = \left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Έχει Σ.Τ. το σύνολο $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right\}$.

iii) Η ακολουθία $a_n = \{(-1)^n\}_{n=1}^{+\infty}$,. Έχει Σ.Τ. το σύνολο $\{-1, 1\}$.

iv) Η ακολουθία $a_n = c,\ \forall n \in \mathbb{N}, c \in \mathbb{R}$. Έχει Σ.Τ. το σύνολο $\{c\}$ και ονομάζεται σταθερή ακολουθία.

v) Η ακολουθία $a_n = 2n,\ \forall n \in \mathbb{N}$. Έχει Σ.Τ. το σύνολο $\{2, 4, 6, \ldots, 2n, \ldots\}$, δηλαδή όλους τους άρτιους φυσικούς αριθμούς.

vi) Η ακολουθία $a_n = 2n - 1,\ \forall n \in \mathbb{N}$. Έχει Σ.Τ. το σύνολο $\{1, 3, 5, \ldots, 2n-1, \ldots\}$, δηλαδή όλους τους περιττούς φυσικούς αριθμούς.

vii) Η ακολουθία $a_1 = a_2 = 1$ και $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n,\ \forall n \in \mathbb{N}$. Έχει Σ.Τ. το σύνολο $\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots\}$. Πρόκειται για την ακολουθία Fibonacci.

Παρατήρηση 1.1.2.

i) Ουσιαστικά οι ακολουθίες είναι άπειρες **λίστες** πραγματικών αριθμών.

ii) Η ακολουθία vii), όπου κάθε επόμενος όρος, ορίζεται με τη βοήθεια του προηγούμενου, λέγεται αναδρομική ακολουθία. Προτάσεις που αφορούν αναδρομικές ακολουθίες, αποδεικνύονται με **Μαθηματική Επαγωγή**.

Ορισμός 1.1.3. Δυο ακολουθίες, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ονομάζονται ίσες, αν $a_n = b_n,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Ορισμός 1.1.4. Οι πράξεις μεταξύ ακολουθιών, ορίζονται όπως ακριβώς και για τις συναρτήσεις.

Παράδειγμα 1.1.3. Αν $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθίες, τότε ορίζουμε το άθροισμα $(a+b)_n = a_n + b_n,\ \forall n \in \mathbb{N}$

1.2 Φραγμένες Ακολουθίες

Ορισμός 1.2.1. Μια ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ονομάζεται:

i) άνω φραγμένη $\overset{\text{ορ.}}{\Leftrightarrow} \exists M \in \mathbb{R} \ : \ a_n \leq M, \ \forall n \in \mathbb{N}$.

ii) κάτω φραγμένη $\overset{\text{ορ.}}{\Leftrightarrow} \exists m \in \mathbb{R} \ : \ m \leq a_n, \ \forall n \in \mathbb{N}$

iii) φραγμένη $\overset{\text{ορ.}}{\Leftrightarrow}$ είναι άνω και κάτω φραγμένη.

Πρόταση 1.2.1. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ φραγμένη $\Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R}, \ M > 0 \ : \ |a_n| \leq M, \ \forall n \in \mathbb{N}$ (**απολύτως φραγμένη**).

Απόδειξη.

(⇒) Έστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ φραγμένη. Τότε η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι άνω και κάτω φραγμένη, δηλαδή υπάρχουν $m, M \in \mathbb{R}$ ώστε $m \leq a_n \leq M, \ \forall n \in \mathbb{N}$. Θεωρούμε $\mu = \max\{|m|, |M|\}$. Τότε, η παραπάνω διπλή ανισότητα, λαμβάνοντας υπόψιν και τις γνωστές ιδιότητες της απόλυτης τιμής, γίνεται

$$-\mu \leq -|m| \leq m \leq a_n \leq M \leq |M| \leq \mu, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Επομένως $\exists \mu > 0$ ώστε $|a_n| \leq \mu, \ \forall n \in \mathbb{N}$.

(Β' Τρόπος:) Θεωρούμε $\mu > \max\{|m|, |M|\}$. Τότε, η παραπάνω διπλή ανισότητα γίνεται,

$$-\mu < m \leq a_n \leq M < \mu$$

(⇐) Προφανώς, αν $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι απολύτως φραγμένη, τότε $\exists M > 0$ ώστε $-M \leq a_n \leq M, \ \forall n \in \mathbb{N}$, και άρα η ακολουθία είναι φραγμένη.

Παρατήρηση 1.2.2. Πολλές φορές στη βιβλιογραφία, η πρόταση 1.2.1, δίνεται και ως ορισμός της φραγμένης ακολουθίας.

Παραδείγματα 1.2.3.

i) Η ακολουθία $a_n = \frac{1}{n}, \ \forall n \in \mathbb{N}$, είναι φραγμένη. Πράγματι, προφανώς, ισχύει ότι $0 \leq \frac{1}{n} \leq 1, \ \forall n \in \mathbb{N}$.
Επίσης, $\left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} \leq 1, \ \forall n \in \mathbb{N}$, άρα είναι και απολύτως φραγμένη.

ii) Η ακολουθία $a_n = (-1)^n \frac{2}{n}, \ \forall n \in \mathbb{N}$ είναι απολύτως φραγμένη. Πράγματι,

$$|a_n| = \left|(-1)^n \frac{2}{n}\right| = |(-1)^n| \cdot \left|\frac{2}{n}\right| = |-1|^n \cdot \frac{2}{n} = 1 \cdot \frac{2}{n} = \frac{2}{n} \leq 2, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

iii) Η ακολουθία $a_n = \frac{3\sin n + \cos^2 n}{n^2}, \ \forall n \in \mathbb{N}$ είναι φραγμένη. Πράγματι,

$$|a_n| = \left|\frac{3\sin n + \cos^2 n}{n^2}\right| = \frac{|3\sin n + \cos^2 n|}{n^2} \leq \frac{3|\sin n| + |\cos n|^2}{n^2} \leq \frac{3 \cdot 1 + 1^2}{n^2} = \frac{4}{n^2} \leq 4$$

iv) Η ακολουθία $a_n = \frac{n}{2^n}, \ \forall n \in \mathbb{N}$ είναι φραγμένη. Πράγματι, προφανώς, $0 \leq a_n, \ \forall n \in \mathbb{N}$.

$$2^n = (1+1)^n \geq 1 + n > n, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Άρα

$$a_n = \frac{n}{2^n} < \frac{n}{n} = 1, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

v) Η ακολουθία $a_n = \frac{(n-1)!}{n^n},\ \forall n \in \mathbb{N}$ είναι φραγμένη. Πράγματι,

$a_n > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$, άρα 0 κ.φ. της $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Επίσης

$$a_n = \frac{(n-1)!}{n^n} = \frac{1\cdot 2\cdots(n-1)}{n^n} < \frac{\overbrace{n\cdot n\cdots n}^{n-1 \text{ φορές}}}{n^n} = \frac{n^{n-1}}{n^n} = \frac{1}{n} \leq 1,\ \forall n \in \mathbb{N},$$

άρα το 1 είναι α.φ. της $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

vi) Η ακολουθία $a_n = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(-\frac{1}{2}\right)^n,\ \forall n \in \mathbb{N}$ είναι απολύτως φραγμένη. Πράγματι,

Πρόκειται για το άθροισμα των n πρώτων όρων **γεωμετρικής προόδου** με λόγο $-\frac{1}{2}$. Έτσι

$$a_n = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \frac{(-\frac{1}{2})^{n+1} - 1}{-\frac{1}{2} - 1} = \frac{2}{3}\left[1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]$$

Επομένως

$$|a_n| = \left|\frac{2}{3}\left[1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]\right| = \frac{2}{3}\left|1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right| \leq \frac{2}{3}\left(1 + \left|-\frac{1}{2}\right|^n\right) = \frac{2}{3}\left(1 + \frac{1}{2^n}\right) < \frac{2}{3}(1+1) = \frac{4}{3}$$

vii) Η ακολουθία $a_n = 2n+5,\ \forall n \in \mathbb{N}$ είναι κάτω φραγμένη. Πράγματι, $7 \leq 2n+5,\ \forall n \in \mathbb{N}$, άρα το 7 είναι κ.φ. της $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Προσοχή, η ακολουθία $a_n = 2n+5,\ \forall n \in \mathbb{N}$ δεν είναι άνω φραγμένη, γιατί αν υποθέσουμε ότι είναι, τότε $\exists M > 0$ ώστε $a_n \leq M,\ \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow 2n+5 \leq M,\ \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow 2n \leq M-5,\ \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow n \leq \frac{M-5}{2},\ \forall n \in \mathbb{N}$, άτοπο, γιατί το $\mathbb{N}$ δεν είναι άνω φραγμένο.

viii) Η ακολουθία $a_1 = 2,\ a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n}, \forall n \in \mathbb{N}$ είναι φραγμένη. Προφανώς, $a_n \leq 2,\ \forall n \in \mathbb{N}$. Θα δείξουμε ότι $a_n > 1,\ \forall n \in \mathbb{N}$. Επειδή η ακολουθία είναι **αναδρομική**, με επαγωγή, έχουμε:

- Για $n = 1$, $a_1 = 2 > 1$, ισχύει.
- Έστω ότι ισχύει για n, δηλ. $a_n > 1 \quad (1.1)$.
- Θ.δ.ο. ισχύει και για $n+1$. Πράγματι, από τη σχέση (1.1), έχουμε

$$a_n > 1 \Rightarrow \frac{1}{a_n} < 1 \Rightarrow -\frac{1}{a_n} > -1 \Rightarrow 2 - \frac{1}{a_n} > 2 - 1 \Rightarrow a_{n+1} > 1.$$

ix) Να δείξετε ότι η ακολουθία, $a_n = a^n$ με $a > 1$ δεν είναι άνω φραγμένη.

Απόδειξη. (Με άτοπο)

Έστω ότι η a_n είναι άνω φραγμένη. Τότε $\exists M \in \mathbb{R}$ ώστε $a^n \leq M,\ \forall n \in \mathbb{N} \quad (1.2)$. Επειδή $a > 1$, έχουμε $a - 1 > 0$. Θέτουμε $\theta = a - 1 \Rightarrow a = 1 + \theta$, άρα

$$a^n = (1+\theta)^n \geq 1 + n\theta > n\theta,\ \forall n \in \mathbb{N} \tag{1.3}$$

Από τις σχέσεις 1.2 και 1.3, έχουμε

$$n\theta < M,\ \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow n < \frac{M}{\theta},\ \forall n \in \mathbb{N}$$

άτοπο, γιατί το $\mathbb{N}$ δεν είναι άνω φραγμένο.

x) Να δείξετε ότι η ακολουθία $a_n = \frac{n^2+1}{3n+\sin^3 n}$ δεν είναι άνω φραγμένη.

Απόδειξη.

Έστω ότι η $a_n = \frac{n^2+1}{3n+\sin^3 n}$ είναι άνω φραγμένη. Τότε επειδή είναι και κάτω φραγμένη, από το 0, έχουμε ότι $\exists M > 0 \ : \ |a_n| \leq M, \ \forall n \in \mathbb{N}$, δηλαδή

$$\begin{aligned}\left|\frac{n^2+1}{3n+\sin^3 n}\right| \leq M \Leftrightarrow \frac{n^2+1}{|3n+\sin^3 n|} \leq M \Leftrightarrow n^2+1 &\leq M \cdot \left|3n+\sin^3 n\right| \\ &\leq 3nM + M \cdot |\sin n|^3 \\ &\leq 3nM + M, \ \forall n \in \mathbb{N}\end{aligned}$$

Δηλαδή,

$$n^2 - 3nM \leq M - 1 \Rightarrow n^2 - 3nM < M, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

και συμπληρώνοντας το τετράγωνο έχουμε

$$\left(n - \frac{3}{2}M\right)^2 < M + \frac{9}{4}M^2 \Rightarrow \left|n - \frac{3}{2}M\right| < \sqrt{M + \frac{9}{4}M^2}, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

οπότε

$$-\sqrt{M + \frac{9}{4}M^2} < \underbrace{n - \frac{3}{2}M < \sqrt{M + \frac{9}{4}M^2}}, \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow n < \frac{3}{2}M + \sqrt{M + \frac{9}{4}M^2}, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

άτοπο, γιατί $\mathbb{N}$ όχι άνω φραγμένο.

Πρόταση 1.2.4. Η ακολουθία $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \ \forall n \in \mathbb{N}$ είναι φραγμένη.

Απόδειξη.

Έχουμε ότι $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \overset{\text{Bern.}}{>} \left(1 + n\frac{1}{n}\right) = 2, \ \forall n \in \mathbb{N}$, επομένως είναι κάτω φραγμένη.

$$\begin{aligned}a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \cdots + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n} \\ &= 1 + \frac{n}{1!}\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots 2 \cdot 1}{n!}\frac{1}{n^n} \\ &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\frac{n-1}{n} + \cdots + \frac{1}{n!}\frac{(n-1)\cdots 2 \cdot 1}{n^{n-1}} \\ &< 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots \frac{1}{n!} = b_n\end{aligned}$$

Για την ακολουθία b_n, έχουμε:

$$\begin{aligned}b_n &= 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n} \\ &< 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 2} + \cdots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 2 \cdots 2} \\ &= 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) \\ &= 1 + \frac{1 - (\frac{1}{2})^n}{1 - \frac{1}{2}} = 1 + 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3, \ \forall n \in \mathbb{N}\end{aligned}$$

Επομένως

$$2 < a_n < 3, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

1.3 Μονοτονία Ακολουθιών

Ορισμός 1.3.1. Μια ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ονομάζεται:

i) γνησίως αύξουσα $\overset{\text{ορ.}}{\Leftrightarrow} a_n < a_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

ii) γνησίως φθίνουσα $\overset{\text{ορ.}}{\Leftrightarrow} a_n > a_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

iii) αύξουσα $\overset{\text{ορ.}}{\Leftrightarrow} a_n \leq a_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

iv) φθίνουσα $\overset{\text{ορ.}}{\Leftrightarrow} a_n \geq a_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Παρατηρήσεις 1.3.1.

i) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ γνησίως αύξουσα (γνησίως φθίνουσα) $\Rightarrow (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ αύξουσα (φθίνουσα)

ii) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ φθίνουσα $\Rightarrow (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ άνω φραγμένη, με α.φ. το a_1

iii) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ αύξουσα $\Rightarrow (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ κάτω φραγμένη, με κ.φ. το a_1

Παρατήρηση 1.3.2.
Αν μια ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **διατηρεί σταθερό πρόσημο**, τότε έχουμε:

Αν $a_n > 0, \ \forall n \in \mathbb{N}$, τότε:

- $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1, \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι γνησίως αύξουσα
- $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1, \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι γνησίως φθίνουσα
- $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1, \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι αύξουσα
- $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1, \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα

Αν $a_n < 0, \ \forall n \in \mathbb{N}$, τότε:

- $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1, \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι γνησίως φθίνουσα
- $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1, \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι γνησίως αύξουσα
- $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1, \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα
- $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1, \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι αύξουσα

1.4 Μεθοδολογία εύρεσης μονοτονίας μιας ακολουθίας

- Σχηματίζουμε τη διαφορά $a_{n+1} - a_n$ και ελέγχουμε το πρόσημό της. Αν $a_{n+1} - a_n > 0, \ (< 0), \ \forall n \in \mathbb{N}$ τότε $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ γνησίως αύξουσα (γνησίως φθίνουσα). Αν για τουλάχιστον ένα $n \in \mathbb{N}$, στις παραπάνω ανισότητες, έχω ισότητα, τότε $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι αύξουσα (φθίνουσα).
- Αν οι όροι της ακολουθίας διατηρούν πρόσημο, $\forall n \in \mathbb{N}$ τότε συγκρίνουμε το πηλίκο δυο διαδοχικών όρων της ακολουθίας με τη μονάδα, και βγάζουμε τα συμπεράσματά μας σύμφωνα με την παρατήρηση 1.3.2
- Αν η ακολουθία δίνεται με μη-αναδρομικό τύπο, και είναι (αρκετά) σύνθετη, τότε μετατρέπω την ακολουθία στην αντίστοιχη συνάρτηση και μελετάμε τη μονοτονία της αντίστοιχης συνάρτησης, συνήθως με τη βοήθεια της παραγώγου.
- Αν η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δίνεται με αναδρομικό τύπο ($a_{n+1} = f(a_n), \ \forall n \in \mathbb{N}$) τότε συνήθως η απόδειξή της γίνεται με Μαθηματική Επαγωγή.

Παραδείγματα 1.4.1.

i) Η $a_n = 2n - 1, \ \forall n \in \mathbb{N}$ είναι γνησίως αύξουσα. Πράγματι,

Α' τρόπος: (κατασκευαστικός)

$$\begin{aligned} n + 1 &\geq n, \ \forall n \in \mathbb{N} \\ 2(n+1) &\geq 2n, \ \forall n \in \mathbb{N} \\ 2(n+1) - 1 &\geq 2n - 1, \ \forall n \in \mathbb{N} \\ a_{n+1} &\geq a_n, \ \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Β' τρόπος: (με το πρόσημο της διαφοράς)

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= 2(n+1) - 1 - (2n-1) \\ &= 2 > 0, \ \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

ii) Η $a_n = \frac{(n-1)!}{n^n}, \ \forall n \in \mathbb{N}$ είναι γνησίως φθίνουσα. Πράγματι, επειδή όλοι οι όροι της ακολουθίας είναι **θετικοί**, επομένως διατηρεί πρόσημο, έχουμε:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1-1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{(n-1)!}{n^n}} = \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdots (n-1) \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot (n-1)} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} < 1, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

iii) Η $a_n = \frac{4^n}{n^2},\ \forall n \in \mathbb{N}$ είναι αύξουσα. Πράγματι, επειδή όλοι οι όροι της ακολουθίας είναι **θετικοί**, επομένως διατηρεί πρόσημο, έχουμε:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{4^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{4^n}{n^2}} = \frac{4^{n+1}}{4^n} \cdot \frac{n^2}{(n+1)^2} = \frac{4 \cdot \cancel{4^n}}{\cancel{4^n}} \cdot \frac{n^2}{(n+1)^2} = \left(\frac{2n}{n+1}\right)^2 \geq 1,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Πράγματι, η ακολουθία δεν είναι γνησίως αύξουσα, γιατί $a_1 = a_2 = 4$.

iv) Η $a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n},\ \forall n \in \mathbb{N}$ με $a_1 = 2$ είναι γνησίως φθίνουσα. Πράγματι, επειδή η ακολουθία είναι **αναδρομική**, με μαθηματική επαγωγή, έχουμε:

- Για $n = 1$, έχω: $a_1 = 2 > \frac{3}{2} = 2 - \frac{1}{2} = a_2$, ισχύει.
- Έστω ότι ισχύει για n, δηλ. $a_{n+1} < a_n \quad (1.4)$.
- Θ.δ.ο. ισχύει για $n+1$. Πράγματι, από τη σχέση (1.4) έχουμε:

$$a_{n+1} < a_n \Leftrightarrow \frac{1}{a_{n+1}} > \frac{1}{a_n} \Leftrightarrow -\frac{1}{a_{n+1}} < -\frac{1}{a_n} \Leftrightarrow 2 - \frac{1}{a_{n+1}} < 2 - \frac{1}{a_n} \Leftrightarrow a_{(n+1)+1} < a_{n+1}$$

v) Να δείξετε ότι ακολουθία $a_n = (-1)^n \frac{1}{n^2},\ \forall n \in \mathbb{N}$ δεν είναι μονότονη.

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι η ακολουθία δεν διατηρεί πρόσημο. Πράγματι, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^2} - \frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^2} + \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = (-1)^{n+1}\left[\underbrace{\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n^2}}_{b_n > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}}\right] = \begin{cases} b_n, & n \text{ περιττός} \\ -b_n, & n \text{ άρτιος} \end{cases}$$

Πρόταση 1.4.2. Η ακολουθία $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,\ \forall n \in \mathbb{N}$ είναι γνησίως αύξουσα.

Απόδειξη. Έχουμε ότι $a_n > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(\frac{1 + \frac{1}{n+1}}{1 + \frac{1}{n}}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \\
&= \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(\frac{n^2 + 2n + 1 - 1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \\
&\overset{\text{Bern.}}{>} \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 - (n+1)\frac{1}{(n+1)^2}\right) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{n}{n+1} = 1,\ \forall n \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$