Ακολουθίες
Ασκήσεις

1.1 Φραγμένες Ακολουθίες

1. Να δείξετε ότι η ακολουθία $a_n = \dfrac{n}{3^n}$ είναι φραγμένη.

Απόδειξη.

Από ανισότητα Bernoulli, έχουμε $3^n = (1+2)^n \geq 1 + 2n \quad (1.1),\ \forall n \in \mathbb{N}$. Άρα

$$|a_n| = \left|\frac{n}{3^n}\right| = \frac{n}{3^n} \overset{(1.1)}{\leq} \frac{n}{1+2n} < \frac{n}{2n} = \frac{1}{2},\ \forall n \in \mathbb{N}$$

2. Να δείξετε ότι η ακολουθία $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$ είναι φραγμένη.

Απόδειξη.

$$|a_n| = \left|\frac{n!}{n^n}\right| = \frac{n!}{n^n} = \frac{1 \cdot 2 \cdots n}{n^n} \leq \frac{\overbrace{n \cdot n \cdots n}^{n-\text{φορές}}}{n^n} = \frac{n^n}{n^n} = 1,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

3. Να δείξετε ότι η ακολουθία $a_n = \dfrac{\cos n + n \sin n}{n^2}$ είναι φραγμένη.

Απόδειξη.

$$\left|\frac{\cos n + n\sin n}{n^2}\right| = \frac{|\cos n + n \sin n|}{n^2} \leq \frac{|\cos n| + |n \sin n|}{n^2} = \frac{|\cos n| + n|\sin n|}{n^2} \leq \frac{1 + n \cdot 1}{n^2} =$$
$$= \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n} \leq 1 + 1 = 2,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

4. Να δείξετε ότι η ακολουθία $a_n = \dfrac{5\cos^3 n}{n+2}$ είναι φραγμένη.

Απόδειξη.

$$|a_n| = \left|\frac{5\cos^3 n}{n+2}\right| = \frac{5 \cdot \left|\cos^3 n\right|}{n+2} = \frac{5 \cdot |\cos n|^3}{n+2} \leq \frac{5 \cdot 1^3}{n+2} < \frac{5}{2},\ \forall n \in \mathbb{N}$$

5. Να δείξετε ότι η ακολουθία $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ είναι φραγμένη.

Απόδειξη.

$$\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{|(-1)^n|}{n} = \frac{|-1|^n}{n} = \frac{1}{n} \leq 1,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

6. Να δείξετε ότι η ακολουθία $a_1 = 3,\ a_{n+1} = \dfrac{a_n + 4}{2},\ \forall n \in \mathbb{N}$ είναι άνω φραγμένη.

Απόδειξη.

Προφανώς, $a_n > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$

Παρατηρούμε ότι, $a_2 = 3.5,\ a_3 = 3.75,\ a_4 = 3.875,\ \ldots$

Θ.δ.ο. $a_n < 4,\ \forall n \in \mathbb{N}$

- Για $n = 1$, έχουμε: $a_1 = 3 < 4$, ισχύει.
- Έστω ότι ισχύει για n, δηλαδή $a_n < 4$
- Θ.δ.ο. ισχύει για $n+1$. Πράγματι

$$a_n < 4 \Leftrightarrow a_n + 4 < 8 \Leftrightarrow \frac{a_n + 4}{2} < 4 \Leftrightarrow a_{n+1} < 4$$

7. Να δείξετε ότι η ακολουθία $a_1 = \sqrt{2},\ a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n},\ \forall n \in \mathbb{N}$ είναι άνω φραγμένη.

   Απόδειξη.

   Προφανώς, $a_n > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$

   Παρατηρούμε ότι, $a_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}} < \sqrt{2+2} = 2,\ a_3 = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}} < \sqrt{2 + \sqrt{2+2}} = 2, \ldots$
   Θ.δ.ο. $a_n < 2,\ \forall n \in \mathbb{N}$

   - Για $n = 1$, έχουμε: $a_1 = \sqrt{2} < 2$, ισχύει.
   - Έστω ότι ισχύει για n, δηλαδή $a_n < 2$
   - Θ.δ.ο. ισχύει για $n+1$. Πράγματι

$$a_n < 2 \Leftrightarrow 2 + a_n < 4 \Leftrightarrow \sqrt{2 + a_n} < 2 \Leftrightarrow a_{n+1} < 2$$

8. Να δείξετε ότι η ακολουθία $a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$ είναι άνω φραγμένη.

   Απόδειξη.

   Ισχύει ότι $n! > 2^{n-1},\ \forall n \in \mathbb{N}$, άρα

$$a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots \frac{1}{n!} < 1 + \underbrace{\frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots \frac{1}{2^{n-1}}}_{\text{γεωμ. πρόοδος}} = 1 + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\frac{1}{2} - 1} =$$

$$= 1 + 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 1 + 2 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3$$

9. Να δείξετε ότι η ακολουθία $a_n = 2^n$ δεν είναι άνω φραγμένη.

   Απόδειξη.

   Έστω ότι η $a_n = 2^n$ είναι άνω φραγμένη. Τότε

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \exists M \in \mathbb{R}\ :\ 2^n \le M,\ \forall n \in \mathbb{N} \\ \bullet\ 2^n = (1+1)^n \ge 1 + n,\ \forall n \in \mathbb{N} \end{array}\right\} \Rightarrow M \ge 1 + n \Leftrightarrow n \le M - 1,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

   άτοπο, γιατί $\mathbb{N}$ δεν είναι άνω φραγμένο.

10. Να δείξετε ότι η ακολουθία $a_n = \frac{n^2}{3n + \sin^2 n}$ δεν είναι άνω φραγμένη.

    Απόδειξη.

    Έστω ότι η $a_n = \frac{n^2}{3n + \sin^2 n}$ είναι άνω φραγμένη. Τότε, θα είναι φραγμένη, γιατί προφανώς $0 \le a_n,\ \forall n \in \mathbb{N}$, άρα

$$\exists M > 0\ :\ \left|\frac{n^2}{3n + \sin^2 n}\right| \le M \Leftrightarrow n^2 \le M(3n + \sin^2 n) \le M(3n+1) \Leftrightarrow n^2 - 3Mn - M \le 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

    Το οποίο ισχύει ανν $r_1 < n < r_2$, όπου r_1, r_2 οι ρίζες του τριωνύμου, το οποίο έχει $\Delta = 9M^2 + 4M > 0$. Όμως αυτό είναι άτοπο, γιατί $\mathbb{N}$ δεν είναι άνω φραγμένο.

1.2 Μονότονες Ακολουθίες

1. Να δείξετε ότι ακολουθία $a_n = \dfrac{n}{5n-1}$ είναι γνησίως φθίνουσα.

Απόδειξη.

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{5(n+1)-1} - \frac{n}{5n-1} = \frac{n+1}{5n+4} - \frac{n}{5n-1} = \frac{5n^2+5n-n-1-5n^2-4n}{(5n+4)(5n-1)}$$
$$= -\frac{1}{(5n+4)(5n-1)} < 0$$

2. Να δείξετε ότι ακολουθία $a_n = \dfrac{n}{3^n}$ είναι γνησίως φθίνουσα.

Απόδειξη.

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{3^{n+1}} - \frac{n}{3^n} = \frac{n+1-3n}{3^{n+1}} = \frac{1-2n}{3^{n+1}} < 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

3. Να δείξετε ότι η ακολουθία $a_n = \dfrac{2^n}{n!}$ είναι γνησίως φθίνουσα.

Απόδειξη.

Είναι $a_n > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$, επομένως η ακολουθία διατηρεί πρόσημο, όποτε

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \frac{2^{n+1}}{2^n} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{2}{n+1} \leq 1,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

4. Να δείξετε ότι ακολουθία $a_n = \dfrac{2n^2-1}{n}$ είναι γνησίως αύξουσα.

Απόδειξη.

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2(n+1)^2-1}{n+1} - \frac{2n^2-1}{n} = \cdots = \frac{2n^2+2n+1}{n(n+1)} > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

5. Να δείξετε ότι η ακολουθία $a_1 = 0, a_{n+1} = \dfrac{2a_n+4}{3},\ \forall n \in \mathbb{N}$ είναι γνησίως αύξουσα.

Απόδειξη.

Θα δέιξουμε ότι $a_{n+1} > a_n,\ \forall n \in \mathbb{N}$. Πράγματι,

- Για $n = 1$, έχουμε $a_2 = \dfrac{4}{3} > 0 = a_1$, ισχύει.
- Έστω ότι ισχύει για n, δηλ. $a_{n+1} > a_n$.
- Θ.δ.ο. ισχύει για $n+1$. Πράγματι,

$$a_n < a_{n+1} \Leftrightarrow 2a_n < 2a_{n+1} \Leftrightarrow 2a_n + 4 < 2a_{n+1} + 4 \Leftrightarrow \underbrace{\frac{2a_n+4}{3}}_{a_{n+1}} < \underbrace{\frac{2a_{n+1}+4}{3}}_{a_{n+2}},\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Β' Τρόπος:

$$a_{n+1} - a_n > 0 \Leftrightarrow \frac{2a_n+4}{3} - a_n > 0 \Leftrightarrow \frac{4-a_n}{3} > 0 \Leftrightarrow a_n < 4,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Θα δείξουμε ότι $a_n < 4,\ \forall n \in \mathbb{N}$. Πράγματι,

- Για $n = 1$, έχουμε $a_1 = 0 < 4$, ισχύει.
- Έστω ότι ισχύει για n, δηλ. $a_n < 4$

- Θ.δ.ο. ισχύει για $n+1$. Πράγματι,

$$a_{n+1} = \frac{2a_n + 4}{3} < \frac{2 \cdot 4 + 4}{3} = \frac{12}{3} = 4$$

6. Να δείξετε ότι ακολουθία $a_1 = 1, a_n = \sqrt{a_n + 1},\ \forall n \in \mathbb{N}$ είναι γνησίως αύξουσα.

Απόδειξη.

- Για $n = 1$, έχω $a_1 = 1 < \sqrt{2} = a_2$, ισχύει.
- Έστω ότι ισχύει για n, δηλ. $a_n < a_{n+1}$
- Θ.δ.ο. ισχύει για $n+1$. Πράγματι,

$$a_n < a_{n+1} \Leftrightarrow a_n + 1 < a_{n+1} + 1 \Leftrightarrow \sqrt{a_n + 1} < \sqrt{a_{n+1} + 1} \Leftrightarrow a_{n+1} < a_{n+2}$$

7. Να δείξετε ότι ακολουθία $a_n = (-1)^n \dfrac{1}{n^2 + 2}$ δεν είναι μονότονη.

Απόδειξη.

Θα δείξουμε ότι η ακολουθία δεν διατηρεί πρόσημο. Πράγματι, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^2 + 2} - \frac{(-1)^n}{n^2 + 2} = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^2 + 2} + \frac{(-1)^{n+1}}{n^2 + 2} =$$

$$= (-1)^{n+1} \underbrace{\left[\frac{1}{(n+1)^2 + 2} + \frac{1}{n^2 + 2} \right]}_{b_n > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}} = \begin{cases} -b_n, & n \text{ περιττός} \\ b_n, & n \text{ άρτιος} \end{cases}$$