

1.1 Φραγμένες Ακολουθίες

1. Να δείξετε ότι η ακολουθία $a_n = (-1)^n \frac{1}{2n}$ είναι φραγμένη. Απ: $|a_n| \leq \frac{1}{2}$
2. Να δείξετε ότι η ακολουθία $a_n = \frac{5 \cos^3 n}{n+2}$ είναι φραγμένη. Απ: $|a_n| < \frac{5}{2}$
3. Να δείξετε ότι η ακολουθία $a_n = \frac{\cos n + n \sin n}{n^2}$ είναι φραγμένη. Απ: $|a_n| \leq 2$
4. Να δείξετε ότι η ακολουθία $a_n = \frac{n}{3^n}$ είναι φραγμένη. Απ: $0 < a_n < \frac{1}{2}$
5. Να δείξετε ότι η ακολουθία $a_n = \frac{n!}{n^n}$ είναι φραγμένη. Απ: $0 \leq a_n \leq 1$
6. Να δείξετε ότι η ακολουθία $a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$ είναι άνω φραγμένη. Απ: $a_n < 3$
7. Να δείξετε ότι η ακολουθία $a_1 = 3, a_{n+1} = \frac{a_n + 4}{2}, \forall n \in \mathbb{N}$ είναι άνω φραγμένη. Απ: $a_n < 4$
8. Να δείξετε ότι η ακολουθία $a_1 = \sqrt{2}, a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}, \forall n \in \mathbb{N}$ είναι φραγμένη. Απ: $0 < a_n < 2$
9. Να δείξετε ότι η ακολουθία $a_n = 3 - 2n$ δεν είναι κάτω φραγμένη.
10. Να δείξετε ότι η ακολουθία $a_n = 2^n$ δεν είναι άνω φραγμένη.

1.2 Μονότονες Ακολουθίες

1. Να δείξετε ότι ακολουθία $a_n = \frac{n}{5n-1}$ είναι γνησίως φθίνουσα.
2. Να δείξετε ότι ακολουθία $a_n = \frac{2n^2-1}{n}$ είναι γνησίως αύξουσα.
3. Να δείξετε ότι ακολουθία $a_n = \frac{n}{3^n}$ είναι γνησίως φθίνουσα.
4. Να δείξετε ότι ακολουθία $a_n = \frac{2^n}{n!}$ είναι γνησίως φθίνουσα.
5. Να δείξετε ότι η ακολουθία $a_1 = 0, a_{n+1} = \frac{2a_n + 4}{3}, \forall n \in \mathbb{N}$ είναι γνησίως αύξουσα.
6. Να δείξετε ότι ακολουθία $a_1 = 1, a_n = \sqrt{a_{n-1} + 1}, \forall n \in \mathbb{N}$ είναι γνησίως αύξουσα.
7. Να δείξετε ότι ακολουθία $a_n = \frac{(-1)^n}{n^2 + 2}$ δεν είναι μονότονη.