Συναρτήσεις (Ερωτήσεις)

Σωστό | Λάθος

1. Αν f είναι 1-1, τότε f' είναι 1-1. □ ■

   Απ: $f(x) = x^3$ είναι 1-1. Όμως η $f'(x) = 3x^2$ δεν είναι 1-1

2. Η συνάρτηση $f(x) = x^3,\ \forall x \in [-1, 0]$ είναι περιττή. □ ■

   Απ: $\frac{1}{2} \notin [-1, 0]$. Θυμάμαι ότι f περιττή $\Leftrightarrow \forall x \in A, -x \in A$ και $f(-x) = f(x),\ \forall x \in A$

3. Αν f είναι περιττή, τότε η f' είναι άρτια. ■ □

   Απ: $f(-x) = -f(x) \Rightarrow f'(-x) \cdot (-1) = -f'(x) \Rightarrow f'(-x) = f'(x)$, άρα άρτια.

4. Αν το σημείο $(1, 2) \in C_f$ και f αντιστρέψιμη, τότε το $(2, 1) \in C_{f^{-1}}$. ■ □

   Απ: Η f και η αντίστροφή της είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$.

5. Αν $f(x) = x + 1,\ \forall x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = \ln(x - 2),\ \forall x \in (1, +\infty)$, τότε το $D_{g\circ f} = (2, +\infty)$. □ ■

   Απ: $D_{g\circ f} = \{x \in A\ :\ x + 1 \in (2, \infty)\} = \{x \in A\ :\ x + 1 > 2\} = \{x \in A\ :\ x > 1\} = (1, \infty)$

6. Κάθε γνησίως αύξουσα συνάρτηση είναι "1-1". ■ □

   Απ: Είναι πρόταση

7. Αν μιά συνάρτηση είναι περιοδική, τότε η περίοδος της είναι μοναδική. □ ■

   Απ: Το $2p$ είναι επίσης περίοδος.

8. Αν f είναι περιοδική, τότε και f' είναι περιοδική. ■ □

   Απ: $f(x + p) = f(x) \Rightarrow f'(x + p) \cdot 1 = f'(x) \Rightarrow f'(x + p) = f'(x)$

9. Η συνάρτηση Dirichlet είναι περιοδική. ■ □

   Απ: $p \in \mathbb{Q} \Rightarrow x \in \mathbb{Q} \Rightarrow f(x + p) = 1 = f(x),\ x \notin \mathbb{Q} \Rightarrow f(x + p) = 0 = f(x)$

10. $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = |l| \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$. □ ■

    Απ: π.χ. $\lim\limits_{x\to\infty} |(-1)^n| = 1$, όμως $\nexists \lim\limits_{x\to\infty} (-1)^n$ (ισχύει, μόνο αν $l = 0$).

11. Αν f συνεχής στο A, τότε η $|f|$ με $|f|(x) = |f(x)|,\ \forall x \in A$ είναι συνεχής στο A. ■ □

    Απ: είναι πρόταση.

12. $f\colon [0, 1] \cup \{2\} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο 2. ■ □

    Απ: Κάθε συνάρτηση, είναι συνεχής σε όλα τα **μεμονωμένα** σημεία του πεδίου ορισμού της.

13. Αν $a_n \in A$ με $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, αλλά $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) \neq f(a)$ τότε $f\colon A \to \mathbb{R}$ όχι συνεχής στο $a \in A$. ■ □

    Απ: είναι το αντιθετοαντίστροφο της Αρχής Μεταφοράς.

14. Αν f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A, τότε f είναι συνεχής στο A. ■ □

    Απ: είναι πρόταση. Το αντίστροφο δεν ισχύει.

15. Αν f είναι συνεχής σε φραγμένο διάστημα, τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής σε αυτό. □ ■

    Απ: πρέπει να είναι **κλειστό** και φραγμένο διάστημα για να ισχύει η πρόταση.

16. Η $f(x) = x^2$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $(2, 4)$. ■ □

    Απ: $\exists \delta = \frac{\varepsilon}{8} > 0\ :\ $ αν $x \in (2, 4)$ με $|x - x_0| < \delta \Rightarrow \left|x^2 - x_0^2\right| = |x - x_0||x + x_0| < \frac{\varepsilon}{8}(4 + 4) = \varepsilon$

17. Η $f(x) = \ln x$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο [1,2]. ■ □

Απ: είναι συνεχής σε κλειστό και φραγμένο διάστημα, άρα ομοιόμορφα συνεχής.

18. Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής στο x_0 τότε είναι και παραγωγίσιμη στο x_0. □ ■

Απ: Αν f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε είναι και συνεχής στο x_0.

19. Αν $f'(x_0) = 0$, τότε $f(x_0)$ είναι ακρότατη τιμή της f. □ ■

Απ: $f(x) = x^3 \Rightarrow f'(0) = 0$ όμως $f(0)$ όχι ακρότατο της f.

20. Αν $f(x_0)$ ακρότατο της f, τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0. □ ■

Απ: Η $f(x) = |x|$ έχει ακρότατο για $x = 0$, όμως $f'(0)$, δεν υπάρχει.

21. Αν f συνεχής και γν. αύξουσα στο $[a, b]$, τότε $f'(x) > 0,\ \forall x \in [a, b]$. □ ■

Απ: Η $f(x) = x^3$ συνεχής και γν. αύξουσα στο $[-2, 2]$, όμως $f'(0) = 0$

22. Αν $f''(x_0) = 0$, τότε $f(x_0)$ είναι σημείο καμπής της f. □ ■

Απ: Για την $f(x) = x^4$ ισχύει, $f''(0) = 0$, όμως $f(0)$ είναι τοπικό ελάχιστο.

23. Αν $f\colon [1, 3] \to (2, 6)$ είναι επί, τότε η f είναι συνεχής. □ ■

Απ: f επί $\Rightarrow f([1, 3]) = (2, 6)$. Άρα f όχι συνεχής, γιατί συνεχής εικόνα κλειστού διαστ. είναι κλειστό διάστ.

24. Αν $f, g\colon A \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχείς τότε $f + g$ είναι ομοιόμορφα συνεχείς. ■ □

Απ: Είναι πρόταση.

25. Αν $f, g\colon A \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχείς τότε $f \cdot g$ είναι ομοιόμορφα συνεχείς. □ ■

Απ: $f = g = x$ ομοιόμορφα συνεχείς στο $\mathbb{R}$, όμως $f \cdot g = x^2$ δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$.