3

Σειρές

Ορισμός 1. Έστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία. Τότε ορίζουμε την ακολουθία

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1 \\ S_2 &= a_1 + a_2 \\ &\vdots \\ S_N &= a_1 + a_2 + \cdots + a_N \\ &\vdots \end{aligned}$$

Η ακολουθία $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ της οποίας οι όροι δίνονται από την σχέση

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n, \ \forall N \in \mathbb{N}$$

ονομάζεται σειρά και συμβολίζεται $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Παρατήρηση 1. Οι όροι της ακολουθίας $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ ονομάζονται μερικά αθροίσματα της σειράς.

3.1 Παραδείγματα

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, είναι η ακολουθία $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, όπου $S_1 = 1,\ S_2 = 1 + \frac{1}{2},\ S_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, \ldots$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} n$, είναι η ακολουθία $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, όπου $S_1 = 1,\ S_2 = 1+2,\ S_3 = 1+2+3, \ldots$ η οποία προφανώς απειρίζεται θετικά
3. $\sum_{n=1}^{\infty} 1$, είναι η ακολουθία $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, όπου $S_1 = 1,\ S_2 = 1+1,\ S_3 = 1+1+1, \ldots$ η οποία προφανώς απειρίζεται θετικά.
4. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$, είναι η ακολουθία $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, όπου $S_1 = -1,\ S_2 = 0,\ S_3 = -1, \ldots$, η οποία προφανώς δεν συγκλίνει, γιατί έχει δύο διαφορετικές, σταθερές συγκλίνουσες υπακολουθίες.

Παρατηρήσεις 2.

- Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, λέγεται αρμονική σειρά και αποκλίνει. (απειρίζεται θετικά)
- Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\rho}$, λέγεται γενικευμένη αρμονική σειρά και συγκλίνει αν και μόνον αν $\rho > 1$.

3.2 Σύγκλιση Σειρών

Ορισμός 2. Έστω $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ σειρά και έστω $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της.
Λέμε ότι η σειρά συγκλίνει στον πραγματικό αριθμό $S \in \mathbb{R}$, ο οποίος τότε καλείται άθροισμα της σειράς, αν η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της συγκλίνει στον S. Δηλαδή

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = S$$

Παρατήρηση 3.

- Αν $\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$, τότε λέμε ότι η σειρά απειρίζεται θετικά και γράφουμε $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$.
- Αν $\lim_{n\to\infty} S_n = -\infty$, τότε λέμε ότι η σειρά απειρίζεται αρνητικά και γράφουμε $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = -\infty$.
- Αν δεν υπάρχει το $\lim_{n\to\infty} S_n$, ή $\lim_{n\to\infty} S_n = \pm\infty$, τότε λέμε ότι η σειρά αποκλίνει.

Παράδειγμα 4. Να αποδείξετε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ αποκλίνει.

Απόδειξη. Θεωρούμε την ακολουθία $(S_n)_{n=2}^{\infty}$, όπου $S_n = a_2 + a_3 + \cdots a_n, \ \forall n \in \mathbb{N}$ και έχουμε

$$\begin{aligned} S_2 &= a_2 = (-1)^2 = 1 \\ S_3 &= a_2 + a_3 = 1 + (-1)^3 = 0 \\ S_4 &= a_2 + a_3 + a_4 = 0 + (-1)^4 = 1 \\ &\vdots \\ S_n &= \begin{cases} 1, & n \text{ άρτιος} \\ 0, & n \text{ περιττός} \end{cases} \end{aligned}$$

Οπότε, έχουμε δύο διαφορετικές ακολουθίες, της $(S_n)_{n=2}^{\infty}$ που συγκλίνουν σε διαφορετικό αριθμό, επομένως, δεν υπάρχει το $\lim_{n\to\infty} S_n$, άρα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ αποκλίνει.

Παράδειγμα 5. Να αποδείξετε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ συγκλίνει.

Απόδειξη. Θεωρούμε την ακολουθία $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, όπου $S_n = a_1 + a_2 + \cdots a_n, \ \forall n \in \mathbb{N}$. Παρατηρούμε ότι ο S_n είναι το άθροισμα των n πρώτων όρων της γεωμετρικής προόδου $(\frac{1}{3^n})_{n\in\mathbb{N}}$, άρα όπως είναι γνωστό, έχουμε

$$S_n = a_1 \cdot \frac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{(\frac{1}{3})^n - 1}{\frac{1}{3} - 1} = \frac{1}{\cancel{3}} \cdot \frac{\frac{1}{3^n} - 1}{-\frac{2}{\cancel{3}}} = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{3^n}\right)$$

Άρα

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{3^n}\right) = \frac{1}{2} \cdot \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{3^n}\right) = \frac{1}{2} \cdot (1 - 0) = \frac{1}{2}$$

Επομένως, η σειρά συγκλίνει και μάλιστα $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{2}$

Πρόταση 6.

i) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει $\Leftrightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n, \ \forall n_0 \in \mathbb{N}$ συγκλίνει.

ii) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{n_0-1} a_n$

Απόδειξη.

1. Θέτουμε $S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n, \ \forall N \in \mathbb{N}$ και $T_N = \sum_{n=n_0}^{N}, \ N = n_0, n_0+1, \ldots$. Τότε για $n \geq n_0$ έχουμε:

$$S_N - T_N = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n_0-1}$$

Δηλαδή οι ακολουθίες $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ και $(T_N)_{n\in\mathbb{N}}$ διαφέρουν κατά σταθερά. Σύμφωνα με τις ιδιότητες των ορίων, αν συγκλίνει η μία τότε συγκλίνει και η άλλη.

2. Ας υποθέσουμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει, δηλαδή ότι η ακολουθία $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει.

   Τότε σύμφωνα με το πρώτο ερώτημα και η $(T_N)_{N\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει και μάλιστα $\lim_{N\to\infty} S_N = \lim_{N\to\infty} T_N + a_1 + a_2 + \cdots + a_{n_0-1} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{n_0-1} a_n$

Παρατήρηση 7. Σύμφωνα με την πρόταση 6, η πρόσθεση ή η αφαίρεση πεπερασμένου πλήθους όρων, σε μία συγκλίνουσα σειρά, δεν επηρεάζει τη σύγκλισή της. Προσοχή, όμως, γιατί επηρεάζει το άθροισμά της.

Πρόταση 8. Έστω $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ σειρά πραγματικών αριθμών και έστω $a_n \geq 0, \ \forall n \in \mathbb{N}$. Τότε $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S \in \mathbb{R}$ ή $\sum_{n=1}^{\infty} = +\infty$.

Απόδειξη. Θεωρούμε την ακολουθία των μερικών αθροισμάτων $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, όπου $S_n = a_1 + \cdots + a_n$. Παρατηρούμε ότι

$$S_n = a_1 + \cdots + a_n \leq a_1 + \cdots + a_n + a_{n+1} = S_{n+1}, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Άρα η ακολουθία $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι αύξουσα. Υπάρχουν δύο περιπτώσεις:

1η Περίπτωση: $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μη φραγμένη, οπότε $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$

2η Περίπτωση: $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ φραγμένη, οπότε $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n = S \in \mathbb{R}$, όπου $S = \sup\{S_n\} \in \mathbb{R}$.

Παρατήρηση 9. Μια σειρά στην οποία δεν γνωρίζουμε τα πρόσημα των όρων της, μπορεί:

i) να συγκλίνει

ii) να αποκλίνει στο $+\infty$ ή στο $-\infty$

iii) τίποτε από τα παραπάνω.

3.3 Τηλεσκοπικές Σειρές

Ορισμός 3. Οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ των οποίων οι όροι γράφονται στη μορφή $a_n = b_n - b_{n+1}, \ \forall n \in \mathbb{N}$ όπου για την ακολουθία $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, μπορεί να υπολογιστεί το όριο της, λέγονται τηλεσκοπικές.

Παραδείγματα 10.

1. Να υπολογιστεί το άθροισμα της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

   Απόδειξη.

   Έχουμε

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

   επομένως η σειρά γράφεται

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

Υπολογίζουμε την ακολουθία των μερικών αθροισμάτων και έχουμε

$$\begin{aligned}
S_1 &= 1 - \frac{1}{2} \\
S_2 &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = 1 - \frac{1}{3} \\
S_3 &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{4} \\
&\vdots \\
S_n &= 1 - \frac{1}{n+1} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Επομένως $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - 0 = 1$

2. Να υπολογιστεί το άθροισμα της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$

Απόδειξη.

Έχουμε

$$a_n = \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \ln n - \ln(n+1)$$

επομένως η σειρά γράφεται

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} [\ln n - \ln(n+1)]$$

Υπολογίζουμε την ακολουθία των μερικών αθροισμάτων και έχουμε

$$\begin{aligned}
S_1 &= \ln 1 - \ln 2 = -\ln 2 \\
S_2 &= \ln 1 - \cancel{\ln 2} + \cancel{\ln 2} - \ln 3 = -\ln 3 \\
S_3 &= \ln 1 - \cancel{\ln 2} + \cancel{\ln 2} - \cancel{\ln 3} + \cancel{\ln 3} - \ln 4 = -\ln 4 \\
&\vdots \\
S_n &= -\ln(n+1) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

επομένως $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(-\ln(n+1)) = -\infty$ οπότε η σειρά αποκλίνει.

Παράδειγμα 11. Να υπολογιστεί το άθροισμα της σειράς $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

Απόδειξη. Σύμφωνα με την πρόταση 6, έχουμε:

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} - \sum_{n=1}^{2} \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

3.4 Γεωμετρική Σειρά

Η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ λέγεται Γεωμετρική και ο αριθμός x λέγεται λόγος της.

Πρόταση 12. Η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ συγκλίνει $\Leftrightarrow |x| < 1$ και ισχύει ότι $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$

Απόδειξη.
Ισχύει ότι $S_N = \sum_{n=0}^{N} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots x^N = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$.
Όμως $\lim_{n\to\infty} x^n = 0 \Leftrightarrow |x| < 1$, οπότε $\lim_{n\to\infty} S_N = \frac{1}{1-x}$.

Πόρισμα 13. Η σειρά $\sum_{n=n_0}^{\infty} x^n$ συγκλίνει $\Leftrightarrow |x| < 1$ και ισχύει ότι $\sum_{n=n_0}^{\infty} x^n = \frac{x^{n_0}}{1-x}$.

Απόδειξη.
Αν $|x| < 1$ τότε η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ συγκλίνει ως γεωμετρική και ισχύει $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$.
Οπότε έχουμε

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n - \sum_{n=n_0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{n_0-1} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n_0-1} \Rightarrow$$

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n - (1 + x + x^2 + \cdots + x^{n_0-1}) = \frac{1}{1-x} - \frac{1-x^{n_0}}{1-x} = \frac{x^{n_0}}{1-x}$$

Παραδείγματα 14.
Η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ είναι Γεωμετρική με λόγο $x = \frac{1}{2}$ και επειδή $|x| = \left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} < 1$, ισχύει ότι η σειρά συγκλίνει. Έχουμε

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1$$

Η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{9^n}{10^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{9^n}{10\cdot 10^n} = \frac{1}{10} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{9}{10}\right)^n$ είναι Γεωμετρική με λόγο $x = \frac{9}{10}$ και επειδή $|x| = \left|\frac{9}{10}\right| = \frac{9}{10} < 1$, ισχύει ότι η σειρά συγκλίνει. Έχουμε

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{9^n}{10^{n+1}} = \frac{1}{10} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{9}{10}\right)^n = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{1-\frac{9}{10}} = \frac{1}{10} \cdot 10 = 1$$

Πρόταση 15. Έστω $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a$ και $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b$ συγκλίνουσες σειρές. Τότε:

i) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = a + b$

ii) $\sum_{n=1}^{\infty} (k \cdot a_n) = k \cdot a$

Παράδειγμα 16. 1. Να βρεθεί το άθροισμα της σειράς $\sum_{n=5}^{\infty} \frac{2^{2n}+5^n}{3^{3n}}$

Απόδειξη.

Έχουμε

$$\sum_{n=5}^{\infty} \frac{2^{2n}+5^n}{3^{3n}} = \sum_{n=5}^{\infty} \left(\frac{2^{2n}}{3^{3n}} + \frac{5^n}{3^{3n}}\right) = \sum_{n=5}^{\infty} \left[\left(\frac{4}{27}\right)^n + \left(\frac{5}{27}\right)^n\right]$$

Όμως

$$\sum_{n=5}^{\infty} \left(\frac{4}{27}\right)^n = \frac{4^5}{27^5} \cdot \frac{1}{1-\frac{4}{27}} = \frac{4^5}{27^5} \cdot \frac{1}{27-4} = \frac{4^5}{27^4 \cdot 23}$$

και

$$\sum_{n=5}^{\infty} \left(\frac{5}{27}\right)^n = \frac{5^5}{27^5} \cdot \frac{1}{1-\frac{5}{27}} = \frac{5^5}{27^4} \cdot \frac{1}{27-5} = \frac{5^5}{27^4 \cdot 22}$$

Επειδή και οι δύο σειρές συγκλίνουν τότε από την προηγούμενη πρόταση έχουμε ότι

$$\sum_{n=5}^{\infty} \frac{2^{2n}+5^n}{3^{3n}} = \frac{4^5}{27^4 \cdot 23} + \frac{5^5}{27^4 \cdot 22}$$

2. Να υπολογιστεί το άθροισμα της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}-1}{6^{n-1}}$.

Απόδειξη.

Έχουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}-1}{6^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3^{n-1}}{6^{n-1}} - \frac{1}{6^{n-1}} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{3}{6}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} \right] = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \right]$$

Όμως

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2 \quad \text{και} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} = \frac{1}{1-\frac{1}{6}} = \frac{6}{5}$$

Επειδή και οι δύο σειρές συγκλίνουν τότε από την προηγούμενη πρόταση έχουμε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n_1}-1}{6^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n_1} - \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} \right] = 2 - \frac{6}{5} = \frac{4}{5}$$

Πρόταση 17. Αν $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει και $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ αποκλίνει, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ αποκλίνει.

Απόδειξη. (Με άτοπο)
Έστω ότι η $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ συγκλίνει. Τότε, επειδή $\sum_{n=1}^{\infty} -a_n$ επίσης συγκλίνει, θα έχουμε, από την πρόταση 15, ότι $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n - a_n) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει, άτοπο.

Παρατήρηση 18. Έστω ότι $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a$ και $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b$, με $b_n \neq 0, \ \forall n \in \mathbb{N}$ και $b \neq 0$. Τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n}$ μπορεί

i) Να αποκλίνει

ii) Να συγκλίνει, και μάλιστα $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n} \neq \frac{a}{b}$

Παράδειγματα.

i) Έστω η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{n(n+1)}}_{a_n} = 1$ και $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{(n+1)(n+2)}}_{b_n} = \frac{1}{2}$. Τότε η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{n(n+1)}}{\frac{1}{(n+1)(n+2)}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n}$$

αποκλίνει γιατί $\lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n} = 1 \neq 0$

ii) Έστω οι σειρές

- $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{2^{2n-1}}}_{a_n} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} = 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{2}{3} = a$

- $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{3}{2^{n-1}}}_{b_n} = 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 3 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 3 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 3 \cdot 2 = 6 = b$

$\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{\frac{2}{3}}{6} = \frac{1}{9}$

Όμως

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2^{2n-1}}}{\frac{3}{2^{n-1}}} = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{2^{2n-1}} = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^{2n}} = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} \neq \frac{1}{9} = \frac{a}{b}$$

Πρόταση 19. Έστω ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει. Τότε $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \quad \left|\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n\right| < \varepsilon$

Απόδειξη.
Έστω ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει. Τότε υπάρχει $S \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $\lim_{n\to\infty} (S_n)_{n\in\mathbb{N}} = S \in \mathbb{R}$. Δηλαδή

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ :\ \forall N \geq n_0 \quad |S_N - S| < \varepsilon$$

Από την πρόταση 6 ii) έχουμε ότι αφού $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνουσα ισχύει

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{n_0} a_n \Rightarrow$$
$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{n_0} a_n = S - S_n \Rightarrow$$
$$\left|\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n\right| = |S - S_n| < \varepsilon$$

Πρόταση 20. Η αρμονική σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ δεν συγκλίνει.

Απόδειξη. (Με άτοπο)
Έστω ότι η σειρά συγκλίνει στο $S \in \mathbb{R}$. Τότε $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = S \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} (S_n)_{n\in\mathbb{N}} = S$, δηλαδή για $\varepsilon = \frac{1}{4}$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ :\ \forall n \geq n_0 \quad |S_n - S| < \frac{1}{4}$, άρα και $|S_{2n_0} - S| < \frac{1}{4}$ επειδή και κάθε υπακολουθία της $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ θα συγκλίνει στο ίδιο όριο. Επομένως

$$|S_{2n_0} - S_{n_0}| = |S_{2n_0} - S + S - S_{n_0}| \leq |S_{2n_0} - S| + |S_{n_0} - S| < \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

Από την άλλη μεριά

$$|S_{2n_0} - S_{n_0}| = \left|\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2n_0}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n_0}\right)\right| = \frac{1}{n_0+1} + \cdots + \frac{1}{2n_0} \geq \underbrace{\frac{1}{2n_0} + \cdots + \frac{1}{2n_0}}_{n_0 \text{ φορές}} =$$
$$= n_0 \cdot \frac{1}{2n_0} = \frac{1}{2} \quad \text{άτοπο, άρα η σειρά δεν συγκλίνει.}$$

3.5 Κριτήρια Σύγκλισης

3.5.1 Κριτήριο Σύγκρισης

Έστω ότι $0 \leq a_n \leq b_n,\ \forall n \geq n_0$.

i) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

ii) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ αποκλίνει.

Πρόταση 21. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει.

Απόδειξη.
Θέτουμε $a_n = \frac{1}{(n+1)^2},\ \forall n \in \mathbb{N}$ και $b_n = \frac{1}{n(n+1)},\ \forall n \in \mathbb{N}$. Ισχύει, προφανώς ότι $0 \leq a_n \leq b_n,\ \forall n \in \mathbb{N}$. Επιπλέον έχουμε αποδείξει ότι $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$, συγκλίνει, οπότε από κριτήριο σύγκρισης και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει. Όμως ισχύει ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

δηλαδή η σειρά $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει και από γνωστή πρόταση και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει.

Παραδείγματα 22.

1. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ συγκλίνει. Πράγματι

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n^2+n} \leq \frac{1}{n^2} = b_n, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

και η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει, οπότε από το κριτήριο σύγκρισης και η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ συγκλίνει.

2. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n+1}{n^3}$ αποκλίνει.

$$a_n = \frac{n^2+n+1}{n^3} \geq \frac{n^2}{n^3} = \frac{1}{n} = b_n, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

και η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{1}{n}$ αποκλίνει, οπότε από το κριτήριο σύγκρισης και η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n+1}{n^3}$ αποκλίνει.

3.5.2 Κριτήριο Ορίου

Θεώρημα 23. Έστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δύο ακολουθίες θετικών αριθμών, τέτοιες ώστε $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \in \mathbb{R}$, τότε:

i) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

ii) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει (στο $+\infty$) $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ αποκλίνει (στο $+\infty$).

Απόδειξη.

Έστω η ακολουθία $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει. Τότε θα είναι και φραγμένη, επομένως

$$\exists M > 0 \ : \ \frac{a_n}{b_n} \leq M, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Οπότε $0 \leq a_n \leq M \cdot b_n, \ \forall n \in \mathbb{N}$.

i) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει, άρα και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} M \cdot b_n$ συγκλίνει, οπότε από το κριτήριο σύγκρισης συγκλίνει και η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

ii) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει στο $+\infty$, οπότε από το κριτήριο σύγκρισης η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} M \cdot b_n$ αποκλίνει στο $+\infty$. Τελικά και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ αποκλίνει στο $+\infty$.

Πόρισμα 24. Έστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δύο ακολουθίες θετικών αριθμών, τέτοιες ώστε $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει αν και μόνον αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

Απόδειξη. Επειδή $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \neq 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} \in \mathbb{R}$, οπότε από την προηγούμενη πρόταση έχουμε το ζητούμενο.

Παραδείγματα 25.

1. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5+8n}{n^6+6}$ αποκλίνει.

Απόδειξη.

$$\left.\begin{array}{l} \blacksquare \ a_n = \frac{n^5+8n}{n^6+6}, \ \forall n \in \mathbb{N} \\ \blacksquare \ b_n = \frac{1}{n}, \ \forall n \in \mathbb{N} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} = \frac{\frac{n^5+8n}{n^6+6}}{\frac{1}{n}} = \frac{n^6+8n^2}{n^6+6} \to 1$$

και επειδή η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ αποκλίνει, τότε και η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5+8n}{n^6+6}$ αποκλίνει.

2. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^4+1}}$ συγκλίνει.

Απόδειξη.

- $a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n^4+1}},\ \forall n \in \mathbb{N}$
- $b_n = \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}},\ \forall n \in \mathbb{N}$

$$\left.\begin{array}{l} a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n^4+1}},\ \forall n \in \mathbb{N} \\ b_n = \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}},\ \forall n \in \mathbb{N} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} = \frac{\frac{1}{\sqrt[3]{n^4+1}}}{\frac{1}{\sqrt[3]{n^4}}} = \sqrt[3]{\frac{n^4}{n^4+1}} \to 1$$

και επειδή η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$ συγκλίνει, τότε και η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^4+1}}$ συγκλίνει.

Πρόταση 26. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Απόδειξη.
Έστω ότι $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει. Τότε η ακολουθία $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει, και έστω ότι $\lim_{n\to\infty} S_n = S$. Θα δείξουμε ότι $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, έχουμε ότι για $\frac{\varepsilon}{2} > 0,\ \exists n_1 \in \mathbb{N}\ :\ \forall n \geq n_1 \quad |S_n - S| < \frac{\varepsilon}{2}$. Άρα για το $\varepsilon > 0,\ \exists n_0 = n_1 + 1 \in \mathbb{N}\ :\ \forall n \geq n_0$ να έχουμε:

$$\begin{aligned} |a_n - 0| = |a_n| = |a_1 + a_2 + \cdots + a_n - (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1})| = |S_n - S_{n-1}| &= |S_n - S + S - S_{n-1}| \\ &\leq |S_n - S| + |S_{n-1} - S| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Πόρισμα 27 (Αντιθετοαντίστροφο). $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, ή $\nexists \lim_{n\to\infty} a_n \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.

Παραδείγματα 28.
1. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} n^2$ δεν συγκλίνει, γιατί $\lim_{n\to\infty} n^2 = \infty \neq 0$
2. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n}$ δεν συγκλίνει, γιατί $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1 \neq 0$
3. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{1}{n})^n$ δεν συγκλίνει, γιατί $\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e \neq 0$
4. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ δεν συγκλίνει, γιατί

$$\left.\begin{array}{l} a_{2n} = \sin(n\pi) = 0,\ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow a_{2n} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \\ a_{4n+1} = \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right),\ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow a_{4n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 1 \end{array}\right\} \Rightarrow (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ δεν συγκλίνει}$$

   επομένως η $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ αποκλίνει.

3.6 Απόλυτη Σύγκλιση

Πρόταση 29. $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ συγκλίνει $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει

Απόδειξη. $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ συγκλίνει $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} 2|a_n|$ συγκλίνει. Ισχύει

$$0 \leq a_n + |a_n| \leq 2|a_n|,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

οπότε από το κριτήριο σύγκρισης, έπεται ότι $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n|)$ συγκλίνει. Τότε

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n = \sum_{n=1}^{N} (a_n + |a_n|) - \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

Από άλγεβρα των ορίων η $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει και άρα έχουμε το ζητούμενο.

Παραδείγματα 30.
1. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει, γιατί

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^n \frac{1}{n^2}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} |(-1)^n| \cdot \left|\frac{1}{n^2}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} |-1|^n \cdot \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

   η οποία συγκλίνει.

3.7 Κριτήριο Λόγου

Πρόταση 31. Έστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία αριθμών ώστε να υπάρχει το $\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$. Τότε

i) $\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει

ii) $\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει

Παραδείγματα 32.

1. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$ συγκλίνει.

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1\cdot 2\cdots n}{1\cdot 2\cdots n\cdot(n+1)} = \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0 < 1$$

   επομένως από Κριτήριο Λόγου η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$ συγκλίνει.

2. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{10^n}$ συγκλίνει.

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\frac{(n+1)!}{10^{n+1}}}{\frac{n!}{10^n}} = \frac{10^n}{10^{n+1}}\cdot\frac{(n+1)!}{n!} = \frac{10^n}{10^n\cdot 10}\cdot\frac{1\cdot 2\cdots n\cdot(n+1)}{1\cdot 2\cdots n}\frac{1}{10}\cdot(n+1) \xrightarrow{n\to\infty} +\infty > 1$$

   επομένως από Κριτήριο Λόγου η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{10^n}$ αποκλίνει.

3. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{(\sqrt{3})^n}$ συγκλίνει.

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\frac{2(n+1)-1}{(\sqrt{3})^{n+1}}}{\frac{2n-1}{(\sqrt{3})^n}} = \frac{2n+2-1}{2n-1}\cdot\frac{(\sqrt{3})^n}{(\sqrt{3})^n\cdot\sqrt{3}} = \frac{1}{(\sqrt{3})}\cdot\frac{2n+1}{2n-1} \xrightarrow{n\to\infty} = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot 1 = \frac{1}{\sqrt{3}} < 1$$

   επομένως από Κριτήριο Λόγου η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{(\sqrt{3})^n}$ συγκλίνει.

3.8 *Κριτήριο Ρίζας*

Πρόταση 33. Έστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία αριθμών ώστε να υπάρχει το $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$. Τότε

i) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει

ii) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει

Παραδείγματα 34.

1. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ συγκλίνει

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{e} < 1$$

   επομένως από Κριτήριο Ρίζας η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ συγκλίνει.

3.9 *Κριτήριο Dirichlet*

Έστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθίες πραγματικών αριθμών τέτοιες ώστε:

i) Η $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ έχει θετικούς όρους, είναι φθίνουσα και συγκλίνει στο 0.

ii) Η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ έχει φραγμένα μερικά αθροίσματα, δηλ.

$$\exists M > 0 \ : \ \left|\sum_{n=1}^{N} a_n\right| \leq M, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \mathbb{N}$ συγκλίνει.

Παραδείγματα 35.

1. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ συγκλίνει. Θέτουμε $a_n = (-1)^n, \ \forall n \in \mathbb{N}$ και $b_n = \frac{1}{n}, \ \forall n \in \mathbb{N}$ και έχουμε: Η $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ έχει προφανώς θετικούς όρους, είναι φθίνουσα και $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

   Για την $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ισχύει:

   $$\left|\sum_{n=1}^{N}(-1)^n\right| = 0 \text{ ή } 1, \ \forall N \in \mathbb{N}$$

   δηλαδή σε κάθε περίπτωση

   $$\left|\sum_{n=1}^{N}(-1)^n\right| \leq 1 = M, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

   Επομένως από Κριτήριο Dirichlet η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ συγκλίνει.

2. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ συγκλίνει.

   Θέτουμε $a_n = (-1)^n, \ \forall n \in \mathbb{N}$ και $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}, \ \forall n \in \mathbb{N}$ και έχουμε: Η $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ έχει προφανώς θετικούς όρους, είναι φθίνουσα και $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$.

   Για την $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ισχύει όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα ότι έχει φραγμένα μερικά αθροίσματα.

   Επομένως από Κριτήριο Dirichlet η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ συγκλίνει.