

Θέματα Απειροστικός Ι

2019

1. i) Έστω A, B δύο μη κενά και άνω φραγμένα υποσύνολα των πραγματικών αριθμών. Να αποδείξετε ότι

$$\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$$

- ii) Να αποδείξετε ότι

$$\sum_{n=2}^{N-2} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{3} - \frac{1}{N}, \quad N \in \mathbb{N}, N \geq 4$$

2. i) Έστω $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ και $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ δυο συγκλίνουσες ακολουθίες πραγματικών αριθμών, τέτοιες ώστε $a_n < b_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Να δείξετε με τη χρήση του ορισμού της σύγκλισης ακολουθίας ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

- ii) Να δώσετε παράδειγμα συγκλινουσών ακολουθιών $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ και $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ για τις οποίες ισχύουν οι ανισώσεις

$$a_n < b_n, \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{και} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

3. i) Να υπολογιστούν τα όρια των ακολουθιών: i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}}$ ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{3^n}$

- ii) Να εξεταστούν οι παρακάτω σειρές ως προς τη σύγκλιση. i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n - n}{6^n + n}$ ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n^2)}{n^2}$

4. Να υπολογιστούν τα όρια, αν υπάρχουν. i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2018x} - 1}{x^{2018}}$ ii) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\cos x + \sin x)$

5. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} e^{x-1} + 1, & x \leq 1 \\ x^2 + 1, & x > 1 \end{cases}$$

Να εξετάσετε αν η f είναι μονότονη και να βρείτε την f^{-1} , αν υπάρχει.

2019

1. i) Έστω $A = \mathbb{Q} \cup (0, 3) \subseteq \mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι $\sup A = 3$ και $\inf A = 0$

- ii) Να βρεθεί φυσικός αριθμός $N \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{2^n} > \frac{2018}{2019}$$

2. Να υπολογιστούν τα όρια των ακολουθιών

$$\text{i) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n}} \quad \text{ii) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 + 5n - 6}{2^n}$$

3. Να εξετάσετε τις σειρές ως προς τη σύγκλιση i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n} + 1}{4^n}$ ii) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^3 + 8}{n^5 - 6}$

4. i) Αν μια ακολουθία έχει δυο υπακολουθίες που συγκλίνουν σε διαφορετικά όρια μπορεί η ίδια να συγκλίνει;

- ii) Αν μια ακολουθία έχει δυο υπακολουθίες που συγκλίνουν στο ίδιο όριο είναι αλήθεια ότι η ίδια συγκλίνει;

- iii) Αν για μια ακολουθία ισχύει $a_n = a_{n+3}$ και η $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει, να αποδείξετε ότι είναι σταθερή.

5. i) Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής με $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$. Να αποδείξετε ότι η f είναι επί.

- ii) Έστω ότι $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\frac{1}{n}) = (-1)^n$. Να δείξετε ότι η f δεν είναι συνεχής στο 0.

6. Να εξετάσετε ως προς την παραγωγισιμότητα τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in \mathbb{Q} \\ x^4, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$