Σειρές (Ερωτήσεις)

Σωστό **Λάθος**

1. Αν μια σειρά είναι συγκλίνουσα, τότε η ακολουθία των μερ. αθροισμάτων της είναι φραγμένη. ■ □
   Απ: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει $\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = S \in \mathbb{R}$, άρα αφού είναι συγκλίνουσα, είναι και φραγμένη.
2. Αν η ακολουθία των μερ. αθροισμάτων μιας σειράς, δεν είναι φραγμένη, τότε η σειρά αποκλίνει. ■ □
   Απ: είναι το αντιθετοαντίστροφο της παραπάνω πρότασης.
3. Αν $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, τότε $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη. ■ □
   Απ: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$, δηλ. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει, άρα φραγμένη
4. Αν η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μηδενική, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει. □ ■
   Απ: π.χ. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ όμως $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ αποκλίνει
5. Αν $a_n \geq 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ απειρίζεται θετικά. □ ■
   Απ: θεώρημα: αν $a_n \geq 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **συγκλίνει** ή απειρίζεται θετικά.
6. Αν $a_n > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$ και $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ φραγμένη, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει. ■ □
   Απ: είναι το παραπάνω θεώρημα, (ενώ αν **δεν** είναι φραγμένη, απειρίζεται θετικά).
7. Οι $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+n_0},\ n_0 \in \mathbb{N}$ παρουσιάζουν ίδια συμπεριφορά ως προς τη σύγκλιση. ■ □
   Απ: πρόταση: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει $\Leftrightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ συγκλίνει (είναι αν και μόνον αν πρόταση).
8. Αν $a_n < 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$, τότε $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = -\infty$. □ ■
   Απ: αν $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη, θα συγκλίνει, αλλιώς, θα απειρίζεται αρνητικά
9. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a$ και $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b, \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(\kappa a_n + \lambda b_n) = ka + \lambda b$. ■ □
   Απ: είναι πρόταση.
10. αν $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ σειρές, με $a_n = b_n,\ \forall n \geq n_0$, τότε ίδια συμπεριφορά ως προς τη σύγκλιση. ■ □
    Απ: η σύγκλιση της σειράς δεν επηρεάζεται από την προσθήκη πεπερασμένου πλήθους αρχικών όρων.
11. Αν $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει και $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ αποκλίνει, τότε η $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ αποκλίνει. ■ □
    Απ: είναι πρόταση
12. Αν $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, τότε $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ αποκλίνει. ■ □
    Απ: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλ. $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \infty \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ αποκλίνει.
13. Αν $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει τότε $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ συγκλίνει απολύτως. □ ■
    Απ: θεώρημα: $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ συγκλίνει $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει απολύτως.
14. Αν μια σειρά έχει θετικούς όρους, τότε **σύγκλιση** και **απόλυτη σύγκλιση** είναι το ίδιο. ■ □
    Απ: προφανώς, γιατί $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$
15. η $\sum_{n=1}^{\infty} a^n$ αποκλίνει $\Leftrightarrow |a| \geq 1$. ■ □
    Απ: η γεωμετρική σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a^n$ συγκλίνει $\Leftrightarrow |a| < 1$ και αποκλίνει αν $|a| \geq 1$
16. η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ συγκλίνει. □ ■
    Απ: είναι **γενικ. αρμονική** σειρά, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/3}}$ αποκλίνει, γιατί $p = 1/3 < 1$.
17. Το άθροισμα της σειράς $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1+\mathrm{e})^n} = \mathrm{e}$. □ ■
    Απ: είναι **γεωμετρική** με $\lambda = \frac{1}{1+\mathrm{e}} < 1$, άρα $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+\mathrm{e})^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+\mathrm{e}}\right)^n = \frac{1+\mathrm{e}}{\mathrm{e}}$