

1.1 Φραγμένες Ακολουθίες

1. Να δείξετε ότι η ακολουθία $a_n = (-1)^n \frac{1}{2n}$ είναι φραγμένη. Απ: $|a_n| \leq \frac{1}{2}$
2. Να δείξετε ότι η ακολουθία $a_n = \frac{5 \cos^3 n}{n+2}$ είναι φραγμένη. Απ: $|a_n| < \frac{5}{2}$
3. Να δείξετε ότι η ακολουθία $a_n = \frac{\cos n + n \sin n}{n^2}$ είναι φραγμένη. Απ: $|a_n| \leq 2$
4. Να δείξετε ότι η ακολουθία $a_n = \frac{n}{3^n}$ είναι φραγμένη. Απ: $|a_n| < \frac{1}{2}$
5. Να δείξετε ότι η ακολουθία $a_n = \frac{n!}{n^n}$ είναι φραγμένη. Απ: $0 \leq a_n \leq 1$
6. Να δείξετε ότι η ακολουθία $a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{n!}$ είναι άνω φραγμένη. Απ: $a_n < 3$
7. Να δείξετε ότι η ακολουθία $a_1 = 3, a_{n+1} = \frac{a_n + 4}{2}, \forall n \in \mathbb{N}$ είναι άνω φραγμένη. Απ: $a_n < 4$
8. Να δείξετε ότι η ακολουθία $a_1 = \sqrt{2}, a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}, \forall n \in \mathbb{N}$ είναι φραγμένη. Απ: $0 < a_n < 2$
9. Να δείξετε ότι η ακολουθία $a_n = 2^n$ δεν είναι άνω φραγμένη.
10. Να δείξετε ότι η ακολουθία $a_n = \frac{n^2}{3n + \sin^2 n}$ δεν είναι άνω φραγμένη.

1.2 Μονότονες Ακολουθίες

1. Να δείξετε ότι ακολουθία $a_n = \frac{n}{5n-1}$ είναι γνησίως φθίνουσα.
2. Να δείξετε ότι ακολουθία $a_n = \frac{n}{3^n}$ είναι γνησίως φθίνουσα.
3. Να δείξετε ότι ακολουθία $a_n = \frac{2^n}{n!}$ είναι γνησίως φθίνουσα.
4. Να δείξετε ότι ακολουθία $a_n = \frac{2n^2-1}{n}$ είναι γνησίως αύξουσα.
5. Να δείξετε ότι η ακολουθία $a_1 = 0, a_{n+1} = \frac{2a_n + 4}{3}, \forall n \in \mathbb{N}$ είναι γνησίως αύξουσα.
6. Να δείξετε ότι ακολουθία $a_1 = 1, a_n = \sqrt{a_n + 1}, \forall n \in \mathbb{N}$ είναι γνησίως αύξουσα.
7. Να δείξετε ότι ακολουθία $a_n = \frac{(-1)^n}{n^2 + 2}$ δεν είναι μονότονη.

1.3 Ορισμός του Ορίου

1. Να δείξετε με τη βοήθεια του ορισμού τα παρακάτω όρια.

i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{3n-1} = \frac{1}{3}$

ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{n^2} = 0$

iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-2}{2n+1} = \frac{3}{2}$

iv) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n-4}{2-3n} = -\frac{5}{3}$

v) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+n}{n^2+3} = 1$

vi) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{n^3}{3}}{n^3}$

vii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n + \cos 3n}{n^2} = 0$

viii) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n}) = 0$

2. Να δείξετε ότι οι παρακάτω ακολουθίες δεν συγκλίνουν.

i) $a_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}$

ii) $a_n = (-1)^n \frac{n+3}{2n}$

iii) $a_n = \lambda n, \lambda > 0$

1.4 Άλγεβρα και θεωρήματα Ορίων

1. Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια.

i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+3n}{n^2+2n+1}$

Απ: 1

ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{\frac{n^3+n}{n^3+2n}}$

Απ: 1

2. Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια με τη βοήθεια του Κριτηρίου Παρεμβολής.

i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n^2+2n}$

Απ: 0

ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n})$

Απ: 0

iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^3+4} - \sqrt{n^3+1})$

Απ: 0

iv) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 \sin^3 n + 3 \cos^2 n}{n^2}$

Απ: 0

v) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos n + 3 \sin 4n}{2\sqrt{n}-1}$

Απ: 0

vi) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3^n + 4^n + n}$

Απ: 4

vii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^2}{3n^2+2}}$

Απ: 1

$$\text{viii)} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^2 + n}$$

Απ: 1

3. Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια με τη βοήθεια του ορίου $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

$$\text{i)} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n-2}\right)^n, n \geq 3$$

Απ: e

$$\text{ii)} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3n}\right)^n$$

Απ: $\sqrt[3]{e}$

$$\text{iii)} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n$$

Απ: e^2

$$\text{iv)} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+3}{2n}\right)^{3n+2}$$

Απ: $e^4 \cdot \sqrt{e}$

$$\text{v)} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n$$

Απ: 1

$$\text{vi)} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^{n^2}$$

Απ: $\frac{1}{e^2}$

Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια.

$$\text{i)} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3^n + 5^n + 7^n}$$

Απ: 7

$$\text{ii)} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{3}{5}\right)^n + \left(\frac{5}{6}\right)^n}$$

Απ: $\frac{5}{6}$

$$\text{iii)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n}$$

Απ: 0

$$\text{iv)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6 \cdot 3^n - 7 \cdot 4^n + 8}{5^n + 3 \cdot 2^n + 1}$$

Απ: 0

$$\text{v)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^{n+3}}{\sqrt{4^{4n-2}}}$$

Απ: 0

$$\text{vi)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{3^n(n^2+2)}$$

Απ: 0

$$\text{vii)} \text{ (Θέμα:2018)} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}}$$

Απ: $\frac{1}{2}$

$$\text{viii)} \text{ (Θέμα:2018)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{3^n}$$

Απ: 0

$$\text{ix)} \text{ (Θέμα:2019)} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n}}$$

Απ: $\frac{1}{3}$

$$\text{x)} \text{ (Θέμα:2019)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 + 5n - 6}{2^n}$$

Απ: 0