1 Εισαγωγικές Έννοιες

Ορισμός 1.1. Μια **συνήθης διαφορική εξίσωση** (για συντομία σ.δ.ε.) είναι μια εξίσωση της μορφής:

$$F(t, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0 \tag{1}$$

όπου

- t είναι μια ανεξάρτητη μεταβλητή, την οποία συνήθως αντιλαμβανόμαστε ως *χρόνο.*
- y είναι μια εξαρτημένη μεταβλητή, άγνωστη συνάρτηση της ανεξάρτητης μεταβλητής t, δηλαδή: $y = y(t)$
- F είναι μια γνωστή συνάρτηση, πολλών μεταβλητών, η οποία μοντελοποιεί (μαθηματικοποιεί) τη σχέση μεταξύ των παραγώγων της εξαρτημένης μεταβλητής, όπως υποδεικνύεται συνήθως από τη μελέτη κάποιου φυσικού φαινομένου.

Ορισμοί 1.2.

1. Ο αριθμός n καλείται **τάξη** της σ.δ.ε. και αντιστοιχεί στην τάξη της μεγαλύτερης παραγώγου που εμφανίζεται στην διαφορικη εξίσωση.
2. **Βαθμός** της σ.δ.ε. όταν η F είναι πολυωνυμική συνάρτηση ως προς τις μεταβλητές $y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$, λέγεται ο εκθέτης στον οποίο είναι υψωμένη η μεγαλύτερης τάξης παράγωγος.
3. Αν από τη σ.δ.ε. λείπει η ανεξάρτητη μεταβλητή t, τότε η σ.δ.ε. λέγεται **αυτόνομη**.
4. Αν η (1) μπορεί να επιλυθεί ως προς $y^{(n)}$, δηλαδή

$$y^{(n)}(x) = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \tag{2}$$

   όπου f γνωστή συνάρτηση, τότε η (2) λέγεται **λυμένη** ή **κανονική** μορφή της (1).

Ορισμός 1.3. Η (1) λέγεται **γραμμική** αν η F είναι γραμμική συνάρτηση ως προς τις μεταβλητές $y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$. Δηλαδή, η γενική μορφή που έχει μια γραμμική διαφορική εξίσωση, n-οστής τάξης είναι:

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_0(x)y = g(x) \tag{3}$$

Παρατήρηση 1.1. Κάθε γραμμική σ.δ.ε. είναι 1ου βαθμού. Το αντίστροφο δεν ισχύει εν γενει.

Ορισμοί 1.4.

1. Αν $a_0(x), \ldots, a_n(x)$ είναι όλες σταθερές συναρτήσεις, η (3) λέγεται σ.δ.ε. με **σταθερούς συντελεστές**.
2. Αν $g(x) = 0$, η (3) λέγεται **ομογενής**.

Ορισμοί 1.5.

1. Οποιαδήποτε συνάρτηση $y(x)$, ικανοποιεί ταυτοτικά την (1), λέγεται **λύση** της.

2. Ειδικότερα, αν η λύση, δίνεται στη μορφή $\phi(t, y, c_1, \ldots, c_n) = 0$ λέγεται **γενικό ολοκλήρωμα** ή γενική λύση σε **πλεγμένη μορφή**. Ενώ, αν δίνεται στη μορφή $y = y(t, c_1, \ldots, c_n)$ λέγεται **κανονική** λύση ή γενική λύση σε **λυμένη μορφή**.

3. **Ιδιάζουσες λύσεις**, είναι αυτές που δεν προκύπτουν από τη γενική λύση, για καμία τιμή των παραμέτρων $c_1, \cdots c_n$.

4. Η γενική λύση και οι ιδιάζουσες λύσεις, λεγεται **πλήρης** λύση.

Παρατηρήσεις 1.2. 1. Η γενική λύση της (1) είναι μια n-παραμετρική οικογένεια συναρτήσεων $y = y(t, c_1, \ldots, c_n)$, όπου $c_1, \ldots, c_n$ είναι αυθαίρετες σταθερές.

2. Όση είναι η τάξη της σ.δ.ε. τόσες πρέπει να είναι και οι αυθαίρετες σταθερές που περιέχονται στη γενική λύση της.

3. Οι γραμμικές διαφορικές εξισώσεις, δεν έχουν ιδιάζουσες λύσεις.

Ορισμοί 1.6. 1. Ένα **πρόβλημα αρχικών τιμών (ΠΑΤ)** είναι μια σ.δ.ε. μαζί με κάποιες συνθήκες, που η γενική λύση της και οι παράγωγοί της θα πρέπει να ικανοποιούν, για κάποια *αρχική* τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής.

2. Ένα **πρόβλημα συνοριακών τιμών (ΠΣΤ)** είναι μια σ.δ.ε. μαζί με κάποιες συνθήκες, που η γενική λύση της θα πρέπει να ικανοποιεί, για κάποιες τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής, συνήθως συνοριακές του διαστηματος στο οποίο ορίζεται η γενική λύση.