Κεφάλαιο 1

Στατιστική - Πιθανότητες

1.1 Αριθμητικές Μέθοδοι Σύνοψης Δεδομένων

Μη Ομαλοποιημένα Δεδομένα | Ομαλοποιημένα Δεδομένα

Μέτρα θέσης - Κεντρικής Τάσης

Αριθμητικός Μέσος

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$$

$$\overline{X} \cong \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i m_i}{n},\ n = \sum_{i=1}^{k} f_i$$

Σταθμικός Αριθμητικός Μέσος

$$\overline{X}_w = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i X_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i}$$

Διάμεσος

- Αν n περιττός: M η τιμή της παρατήρησης στη θέση $\frac{n}{2} + \frac{1}{2}$

$$M = X_{\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right)}$$

- Αν n άρτιος:

$$M = \frac{1}{2}\left(X_{\left(\frac{n}{2}+1\right)} + X_{\left(\frac{n}{2}\right)}\right)$$

$$M \cong L_M + \frac{\delta}{f_M}\left(\frac{n}{2} - F_{M-1}\right)$$

Επικρατούσα Τιμή

T_0: Η τιμή με τη μεγαλύτερη συχνότητα εμφάνισης

$$T_0 = L_{T_0} + \delta \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2}$$

i-Τεταρτημόριο

Το $i = 1,2,3$ τεταρτημόριο (Q_i) βρίσκεται στην $[\frac{i(n+1)}{4}]$ θέση. Η τιμή του $i = 1,2,3$ τεταρτημορίου (Q_i) είναι

$$Q_i = X_{(A_Q)} + \Delta_Q[X_{(A_Q+1)} - X_{(A_Q)}]$$

όπου A_Q είναι το ακέραιο μέρος του πηλίκου $[\frac{i(n+1)}{4}]$ και Δ_Q είναι το δεκαδικό μέρος του πηλίκου $[\frac{i(n+1)}{4}]$.

$$Q_i = L_{Q_i} + \frac{\delta}{f_{Q_i}}\left(\frac{n \cdot i}{4} - F_{Q_i - 1}\right)$$

Μέτρα Διασποράς

Εύρος

$$R = X_{max} - X_{min}$$

Ενδοτεταρτημοριακό Εύρος

$$IR = Q_3 - Q_1$$

$$IR = Q_3 - Q_1$$

Τεταρτημοριακή Απόκλιση

$$Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

$$Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

Διακύμανση

$$S^2_{\text{ορ}} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2}{n}$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2}{n-1}$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\overline{X}^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n-1} - \frac{(\sum_{i=1}^n X_i)^2}{n(n-1)}$$

$$S^2 \cong \frac{\sum_{i=1}^k f_i(m_i - \overline{X})^2}{n-1},\ n = \sum_{i=1}^k f_i$$

$$S^2 \cong \frac{\sum_{i=1}^k f_i m_i^2 - n\overline{X}^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^k f_i m_i^2}{n-1} - \frac{(\sum_{i=1}^k f_i m_i)^2}{(n-1)n}$$

Τυπική Απόκλιση

$$S_{\text{ορ}} = +\sqrt{S^2_{\text{ορ}}} \quad \text{ή} \quad S = +\sqrt{S^2}$$

$$S = +\sqrt{S^2}$$

Μέτρα Σχετικής Μεταβλητότητας

Συντελεστής Μεταβλητότητας

$$CV = \frac{S}{X}$$

$$CV = \frac{S}{X}$$

Μέτρα Ασυμμετρίας

Συντελεστές Ασυμμετρίας

$$S_P = \frac{\overline{X} - T_0}{S} \qquad\qquad S_P = \frac{\overline{X} - T_0}{S}$$

$$\beta_3 = \frac{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^3}{n}}{S^3} \qquad\qquad \beta_3 \frac{\frac{\sum_{i=1}^{k} f_i(m_i - \overline{X})^3}{n}}{S^3}$$

Μέτρα Κύρτωσης

Συντελεστής Κύρτωσης

$$\beta_4 = \frac{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^4}{n}}{S^4} \qquad\qquad \beta_4 = \frac{\frac{\sum_{i=1}^{k} f_i(m_i - \overline{X})^4}{n}}{S^4}$$

1.2 Πιθανότητες

Αξιώματα του Kolmogorov

Έστω S ένας δειγματικός χώρος και έστω $\boldsymbol{B}$ το σύνολο όλων των ενδεχομένων του S. Ορίζουμε ως συνάρτηση πιθανότητας μια συνάρτηση $P\colon \boldsymbol{B} \to \mathbb{R}$, η οποία σε κάθε ενδεχόμενο A αντιστοιχεί έναν πραγματικό αριθμό $P(A)$ έτσι ώστε να ικανοποιούνται τα παρακάτω αξιώματα:

i) $P(A) \geq 0$

ii) $P(S) = 1$

iii) $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$

Βασικά Θεωρήματα Πιθανοτήτων

Θεώρημα 1.2.1. *Για κάθε ενδεχόμενο A ισχύει $P(A') = 1 - P(A)$*

Θεώρημα 1.2.2. *Ισχύει ότι $P(\emptyset) = 0$*

Θεώρημα 1.2.3. *Για κάθε ενδεχόμενο A ισχύει $P(A) \leq 1$*

Θεώρημα 1.2.4. *Για οποιαδήποτε ενδεχόμενα A_1 και A_2 ισχύει:*

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$$

Παρατηρήσεις 1.2.1.

- Το θεώρημα 1.2.4 γενικεύεται για την περίπτωση n ενδεχομένων. Στην περίπτωση όπου $n = 3$ γίνεται:

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - \\ - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \end{aligned}$$

- Για δύο ενδεχόμενα τα οποία είναι ασυμβίβαστα το θεώρημα 1.2.4 οδηγεί στο συμπέρασμα:

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2), \quad A_1 \cup A_2 = \emptyset$$

το οποίο είναι ειδική περίπτωση του 3ου αξιώματος.

Δεσμευμένη Πιθανότητα

$$P(A_1 \mid A_2) = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_2)}, \quad P(A_2) \geq 0$$
$$P(A_2 \mid A_1) = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)}, \quad P(A_1) \geq 0$$

Ανεξάρτητα Ενδεχόμενα

- 2 ενδεχόμενα A_1, A_2 είναι *ανεξάρτητα* αν $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2)$.
- 3 ενδεχόμενα A_1, A_2, A_3 είναι *ανεξάρτητα* αν

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2) &= P(A_1) \cdot P(A_2) \\ P(A_1 \cap A_3) &= P(A_1) \cdot P(A_3) \\ P(A_2 \cap A_3) &= P(A_2) \cdot P(A_3) \\ P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) &= P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3). \end{aligned}$$

- n ενδεχόμενα $A_1, A_2, \ldots, A_n$ είναι *ανεξάρτητα* αν για κάθε συνδυασμό δύο ή περισσοτέρων από αυτά ισχύει

$$P\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right) = P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdots P(A_{i_k}),$$

  με $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_k \leq n$.

Ενδεχόμενα Ανεξάρτητα κατά Ζεύγη

Τα ενδεχόμενα $A_1, A_2, \ldots, A_n$ λέγονται ανεξάρτητα κατά ζεύγη αν

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2), \quad \text{για κάθε} \quad i, j = 1, 2, \ldots, n, \quad i \neq j.$$

Προφανώς, n ενδεχόμενα μπορεί να είναι ανεξάρτητα κατά ζεύγη χωρίς να είναι ανεξάρτητα.

Κανόνας Πολλαπλασιασμού Πιθανοτήτων

- Για 2 ενδεχόμενα

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2 \mid A_1) = P(A_2) \cdot P(A_1 \mid A_2)$$

- Για 3 ενδεχόμενα

$$P[A_1 \cap A_2 \cap A_3] = P[A_1] \cdot P[A_2 \mid A_1] \cdot P[A_3 \mid A_1 \cap A_2]$$

- Για n ενδεχόμενα

$$P[A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n] = P[A_1] \cdot P[A_2 \mid A_1] \cdot P[A_3 \mid A_1 \cap A_2] \cdots P\left[A_n \,\middle|\, \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right]$$

Θεώρημα της Ολικής Πιθανότητας

Έστω ότι $A_1, A_2, \ldots, A_n$ είναι μια διαμέριση του δειγματικού χώρου S τέτοια ώστε $P(A_i) \neq 0,\ i = 1, 2, \ldots, n$. Τότε για κάθε ενδεχόμενο E έχουμε ότι

$$P(E) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(E \mid A_i)$$

Θεώρημα του Bayes

Έστω ότι $A_1, A_2, \ldots, A_n$ είναι μια διαμέριση του δειγματικού χώρου S τέτοια ώστε $P(A_i) \neq 0,\ i = 1, 2, \ldots, n$. Τότε για κάθε ενδεχόμενο E με $P(E) > 0$ έχουμε ότι

$$P(A_k \mid E) = \frac{P(A_k) \cdot P(E \mid A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(E \mid A_i)} = \frac{P(A_k) \cdot P(E \mid A_k)}{P(E)}$$

1.3 Αρχές Απαρίθμησης

Μεταθέσεις

$$P_n = n!$$

Επαναληπτικές Μεταθέσεις

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdots n_k!}$$

Διατάξεις

$$P(n, x) = \frac{n!}{(n-x)!}$$

Επαναληπτικές Διατάξεις

$$n^x$$

Συνδυασμοί

$$C(n, x) = \binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$

1.4 Κατανομές Πιθανότητας

Διακριτή Τυχαία Μεταβλητή

Η **συνάρτηση πιθανότητας** $P(X = x)$ μιας διακριτής τυχαίας μεταβλητής X ικανοποιεί τις συνθήκες:

i) $P(X = x) \geq 0$, $\forall x$ στο Πεδίο Ορισμού

ii) $\sum_{x} P(X = x) = 1$

Η **αθροιστική συνάρτηση κατανομής** $F(a)$ μιας διακριτής τυχαίας μεταβλητής X υπολογίζεται με βάση τη σχέση:

$$F(a) = P(X \leq a) = \sum_{x \leq a} (P(X = x)), \forall a \in \mathbb{R}$$

Η **μέση (αναμενόμενη) τιμή** $\mu = E(X)$ μιας διακριτής τυχαίας μεταβλητής X υπολογίζεται με βάση τον τύπο:

$$E(X) = \sum_{x} xP(X = x) < +\infty$$

Αν X διακριτή τυχαία μεταβλητή και $g(\cdot)$ μια πραγματική συνάρτηση, τότε η μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής $g(X)$ δίνεται από τη σχέση:

$$E[g(X)] = \sum_{x} g(x)P(X = x) < +\infty$$

Συνεχής Τυχαία Μεταβλητή

Η **συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας** $f(x)$ μιας συνεχούς τυχαίας μεταβλητής X ικανοποιεί τις συνθήκες:

i) $f(x) \geq 0, -\infty < x < +\infty$

ii) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1$

Η **αθροιστική συνάρτηση κατανομής** $F(a)$ μιας συνεχούς τυχαίας μεταβλητής X υπολογίζεται με βάση τη σχέση:

$$F(a) = P(X \leq a) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt, \forall a \in \mathbb{R}$$

Η **μέση (αναμενόμενη) τιμή** $E(X)$ μιας συνεχούς τυχαίας μεταβλητής X υπολογίζεται με βάση τον τύπο:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\, dx < +\infty$$

Αν X συνεχής τυχαία μεταβλητή και $g(\cdot)$ μια πραγματική συνάρτηση, τότε η μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής $g(X)$ δίνεται από τη σχέση:

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)\, dx < +\infty$$

Ιδιότητες της Μέσης Τιμής

1. $E[ag(X) + b] = aE[g(X)] + b$, όπου a, b σταθερές.
2. $E[a_1 g_1(x) + a_2 g_2(x)] = a_1 E[g_1(x)] + a_2 E[g_2(x)]$, όπου a_1, a_2 σταθερές.

Διακύμανση

Έστω X τυχαία μεταβλητή (διακριτή ή συνεχής) με μέση τιμή $\mu = E(X)$. Η **διακύμανση** της X συμβολίζεται με $V(X)$ η σ^2 και δίνεται από τη σχέση:

$$V(X) = \sigma^2 E[X - E(X)]^2 = E(X - \mu)^2 = E(X^2) - \mu^2$$

Ιδιότητα της Διακύμανσης

1. $V(aX + b) = a^2 V(X)$, όπου a, b σταθερές

Ειδικές Κατανομές

Διακριτές Κατανομές

Όνομα Κατανομής	Παράμετροι	Συνάρτηση πιθανότητας	Σύνολο τιμών	Μέση τιμή	Διασπορά
Διωνυμική $B(n,p)$	$n \in \mathbb{Z}_+$ $0<p<1$	$\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$	$x=0,1,\ldots,n$	np	$np(1-p)$
Poisson $P(\lambda)$	$\lambda > 0$	$e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}$	$x=0,1,\ldots$	λ	λ
Γεωμετρική $G(p)$	$0<p<1$	$p(1-p)^{x-1}$	$x=0,1,\ldots$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
Υπεργεωμετρική $H(n,a,b)$	$a,b \in \mathbb{Z}_+$ $n \leq a+b$	$\frac{\binom{a}{x}\binom{b}{n-x}}{\binom{a+b}{n}}$	$x=0,1,\ldots,n$	$\frac{a}{a+b}$	$\frac{nab}{(a+b)^2}$

Συνεχείς Κατανομές

Όνομα Κατανομής	Παράμετροι	Συνάρτηση πιθανότητας	Σύνολο τιμών	Μέση τιμή	Διασπορά
Κανονική $N(\mu,\sigma^2)$	$-\infty<\mu<+\infty$ $\sigma>0$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$	$-\infty<x<+\infty$	μ	σ^2
Εκθετική $E(\lambda)$	$\lambda>0$	$\lambda e^{-\lambda x}$	$0<x<+\infty$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Ομοιόμορφη $U(a,b)$	$-\infty<a,b<+\infty$	$\frac{1}{b-a}$	$a<x<b$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Τυποποιημένη Κανονική $N(0,1)$	$-\infty<Z=\frac{X-\mu}{\sigma}<+\infty$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{1}{2}z^2}$	$-\infty<z<+\infty$	0	1

1.5 Συντελεστές Ευθείας Παλινδρόμησης

$$\hat{Y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum[(Y_i-\overline{Y})(X_i-\overline{X})]}{\sum[(X_i-\overline{X})^2]} = \frac{\sum X_iY_i - \frac{\sum X_i \sum Y_i}{n}}{\sum X_i^2 - \frac{(\sum X_i^2)}{n}}$$

$$\hat{\beta}_0 = \frac{\sum Y_i}{n} - \hat{\beta}_1\frac{\sum X_i}{n} = \overline{Y} - \hat{\beta}_1\overline{X}$$

1.6 Συντελεστής Συσχέτισης

$$r = \frac{\sum[(Y_i - \overline{Y})(X_i - \overline{X})]}{\sqrt{\sum(Y_i - \overline{Y})^2 \sum(X_i - \overline{X})^2}} = \frac{\sum X_i Y_i - \frac{\sum X_i \sum Y_i}{n}}{\sqrt{[\sum X_i^2 - \frac{(\sum X_i)^2}{n}][\sum Y_i^2 - \frac{(\sum Y_i)^2}{n}]}}, r \in [-1, 1]$$

1.7 Συντελεστής Προσδιορισμού

$$R^2 = \frac{(\sum[(Y_i - \overline{Y})(X_i - \overline{X})])^2}{\sum(Y_i - \overline{Y})^2 \sum(X_i - \overline{X})^2} = \frac{(\sum X_i Y_i - \frac{\sum X_i \sum Y_i}{n})^2}{[\sum X_i^2 - \frac{(\sum X_i)^2}{n}][\sum Y_i^2 - \frac{(\sum Y_i)^2}{n}]}, R^2 \in [0, 1]$$

Κεφάλαιο 2

Μιγαδικοί Αριθμοί

2.1 Μιγαδικοί Αριθμοί

Ορισμός

Έστω $a, b \in \mathbb{R}$ και $i = \sqrt{-1}$ η **φανταστική μονάδα**. Κάθε παράσταση της μορφής $a + bi$ παριστάνει έναν μιγαδικό αριθμό. Με $\operatorname{Re} z$ και $\operatorname{Im} z$ συμβολίζουμε το πραγματικό και το φανταστικό μέρος αντίστοιχα, του μιγαδικού αριθμού $z = a + bi$. Ισχύει, $\operatorname{Re} z = a$ και $\operatorname{Im} z = b$. Το σύνολο των μιγαδικών αριθμών το συμβολίζουμε με $\mathbb{C}$.

Ισότητα

Έστω $z_1 = a + bi$ και $z_2 = c + di$ μιγαδικοί αριθμοί.

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow a = c \quad \text{και} \quad b = d$$

Γεωμετρική Αναπαράσταση των Μιγαδικών Αριθμών

Έστω xOy καρτεσιανό σύστημα αξόνων και $z = a + bi$ μιγαδικός αριθμός. Στον μιγαδικό αριθμό z αντιστοιχίζουμε το ζεύγος (a, b) και επομένως το σημείο $M(a, b)$ με συντεταγμένες a, b το οποίο ονομάζουμε γεωμετρική εικόνα του μιγαδικού z.

Επίσης στο σημείο $M(a, b)$ και άρα και στον μιγαδικό αριθμό z αντιστοιχίζουμε το διάνυσμα θέσης $\vec{OM}$.

Μέτρο

Το μέτρο του μιγαδικού αριθμού $z = a + bi$ το συμβολίζουμε με $|z|$ και ισχύει

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

- $OM = \sqrt{(a^2 + b^2)} = |z|$
- $|a| = |\operatorname{Re} z| \leq |z|$
- $|b| = |\operatorname{Im} z| \leq |z|$

Πράξεις

Έστω $z_1 = a + bi$ και $z_2 = c + di$ μιγαδικοί αριθμοί.

Πρόσθεση

$z_1 + z_2 = (a+bi) + (c+di) = (a+c) + (b+d)i$

Αφαίρεση

$z_1 - z_2 = (a+bi) - (c+di) = (a-c) + (b-d)i$

Πολλαπλασιασμός

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (a+bi)\cdot(c+di) \\ &= ac + adi + bci + bdi^2 \\ &= ac - bd + (ad+bc)i \end{aligned}$$

Διαίρεση

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{(a+bi)}{(c+di)} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} \\ &= \frac{ac+bd+(-ad+bc)}{b^2+d^2} \\ &= \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2} \end{aligned}$$

Συνοπτικά

- $z_1 + z_2 = (a+c) + (b+d)i$
- $z_1 - z_2 = (a-c) + (b-d)i$
- $z_1 \cdot z_2 = (ac-bd) + (ad+bc)i$
- $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{ac+bd}{c^2+d^2} + \dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}i$

Ιδιότητες των Πράξεων

Έστω z_1, z_2, z_3 και z μιγαδικοί αριθμοί.

Πρόσθεση	Πολλαπλασιασμός
$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$	$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$
$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$	$z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3$
$z + 0 = 0 + z = z$	$z \cdot 1 = 1 \cdot z = z$
$z + (-z) = (-z) + z = 0$	$z \cdot z^{-1} = z^{-1} \cdot z = 1$
$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$	

$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$

Δυνάμεις

Έστω $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$.

- $z^n = \underbrace{z \cdot z \cdots z}_{n \text{ φορές}}$, $n > 0$
- $z^0 = 1$
- $z^n = (z^{-1})^{-n}$, $n < 0$

Ιδιότητες των Δυνάμεων

Έστω $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$.

- $z^m \cdot z^n = z^{m+n}$

- $\frac{z^m}{z^n} = z^{m-n}$
- $(z^m)^n = z^{m \cdot n}$
- $(z_1 \cdot z_2)^n = z_1^n \cdot z_2^n$
- $(\frac{z_1}{z_2})^n = \frac{z_1^n}{z_2^n}$
- $z = 0 \Rightarrow 0^n = 0,\ n > 0$

Δυνάμεις της Φανταστικής Μονάδας

- $i^0 = 1$
- $i^1 = i$
- $i^2 = -1$
- $i^3 = i^2 \cdot i = -i$
- $i^4 = i^3 \cdot i = 1$
- $i^5 = i^4 \cdot i = i$
- $i^6 = i^5 \cdot i = -1$
- $i^7 = i^6 \cdot i = -i$

Αποδεικνύεται με επαγωγή ότι για κάθε $n > 0$

- $i^{4n} = 1$
- $i^{4n+1} = i$
- $i^{4n+2} = -1$
- $i^{4n+3} = -i$
- $i^n = (i^{-1})^{-n} = \left(\frac{1}{i}\right)^{-n} = (-i)^{-n},\ n < 0$

Συζυγής

Έστω $z = a + bi$ μιγαδικός αριθμός. Με $\overline{z}$ συμβολίζουμε τον συζυγή μιγαδικό αριθμό του z και ισχύει $\overline{z} = a - bi$.

Ιδιότητες Συζυγών

- $\overline{\overline{z}} = z$
- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ και
- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ και
- $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}},\ z_2 \neq 0$
- $\overline{z^n} = \overline{z}^n$
- $z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2$
- $z = \overline{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$
- $\overline{\left(\sum_{k=1}^{n} z_k\right)} = \sum_{k=1}^{n} \overline{z}_k \Leftrightarrow \overline{z_1 + z_2 + \cdots + z_n} = \overline{z_1} + \overline{z_2} + \cdots \overline{z_n}$
- $\overline{\left(\prod_{k=1}^{n} z_k\right)} = \prod_{k=1}^{n} \overline{z}_k \Leftrightarrow \overline{z_1 \cdot z_2 \cdots z_n} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} \cdots \overline{z_n}$

- $\operatorname{Re} z = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$
- $\operatorname{Im} z = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$

Ιδιότητες Μέτρου

- $|z| \geq 0$ και $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
- $-|z| \leq \operatorname{Re} z \leq |z|$
- $-\overline{z} \leq \operatorname{Re} z \leq |\operatorname{Re} z| \leq \overline{z}$
- $-\overline{z} \leq \operatorname{Im} z \leq |\operatorname{Im} z| \leq \overline{z}$
- $|z| = |-z| = |\overline{z}| = |-\overline{z}|$
- $z \cdot \overline{z} = |z|^2 \in \mathbb{R}$
- $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
- $|z_1 - z_2| \leq |z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
- $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$, $z_2 \neq 0$
- $\left|\prod_{k=1}^{n} z_k\right| = \prod_{k=1}^{n} |z_k|$
- $\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |z_k|$
- $\left|z^k\right| = |z|^k$, $k \in \mathbb{Z}$, άρα $\left|z^{-1}\right| = |z|^{-1}$, $z \neq 0$
- $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$
- $|z + 1| \geq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ και $\left|z^2 + 1\right| \geq 1$
- $|z_1 + z_2|^2 + |z_2 + z_3|^2 + |z_3 + z_1|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + |z_1 + z_2 + z_3|^2$
- $|1 + z_1\overline{z_2}|^2 \pm |z_1 - z_2|^2 = (1 \pm |z_1|^2)(1 \pm |z_2|^2)$
- $|z_1 + z_2 + z_3|^2 + |-z_1 + z_2 + z_3|^2 + |z_1 - z_2 + z_3|^2 + |z_1 + z_2 - z_3|^2 = 4(|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2)$

Πολική μορφή Μιγαδικού αριθμού

Έστω $z = a + bi$ μιγαδικός αριθμός. Έστω $r = |z|$ και θ η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα θέσης του z με τον θετικό ημιάξονα x και η οποία μετριέται σε ακτίνια. Τότε $x = r\cos\theta$ και $y = r\sin\theta$ και επομένως ο μιγαδικός z μπορεί να γραφεί σε τριγωνομετρική ή πολική μορφή ως:

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

και χρησιμοποιώντας την ταυτότητα Euler $e^{ix} = \cos x + i\sin x$, $x \in \mathbb{R}$ σε εκθετική μορφή ως:

$$z = re^{i\theta}$$

Οι τιμές των r, θ λέγονται πολικές συντεταγμένες του z. Κάθε τιμή του θ λέγεται όρισμα του z, και με $\arg z$ συμβολίζουμε το σύνολο των ορισμάτων του z, που είναι άπειρα και διαφέρουν μεταξύ τους κατά 2π. Αν $z = 0$ τότε δεν ορίζεται το όρισμα του. Ισχύει:

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

Το Πρωτεύον όρισμα του $\arg z$ το συμβολίζουμε με $\operatorname{Arg} z$ και είναι η μοναδική εκείνη τιμή του $\theta \in \arg z$ ώστε $0 \leq \theta < 2\pi$. Ισχύει:

$$\arg z = \operatorname{Arg} z + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Από τον ορισμό του $\operatorname{Arg} z$ προκύπτει ότι αν $z = a + bi$, τότε:

1. Αν $a \neq 0$ τότε από τη σχέση $\tan\theta = \dfrac{y}{x}$ έχουμε:

$$\operatorname{Arg} z = \arctan\frac{b}{a} + k\pi, \quad \text{όπου} \quad k = \begin{cases} 0, & \text{για} \quad a > 0, b \geq 0 \\ 1, & \text{για} \quad a < 0 \\ 2, & \text{για} \quad a > 0, b < 0 \end{cases}$$

2. Αν $a = 0$ και $b \neq 0$ τότε

$$\operatorname{Arg} = \begin{cases} \pi/2, & \text{για} \quad b > 0 \\ 3\pi/2, & \text{για} \quad b < 0 \end{cases}$$

Έστω $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1), z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ και $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

Ισότητα σε Πολική μορφή

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow r_1 = r_2 \quad \text{και} \quad \operatorname{Arg} z_1 = \operatorname{Arg} z_2 \quad \text{ή} \quad \theta_1 = \theta_2 + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Πράξεις σε Πολική μορφή

Τριγωνομετρική μορφή	Εκθετική μορφή
$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i(\sin\theta_1 + \theta_2)]$	$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$
$\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}[(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i(\sin\theta_1 - \theta_2))]$	$\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)}$
$z^{-1} = \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{r}(\cos\theta - i\sin\theta)$	$z^{-1} = \dfrac{1}{r} e^{-i\theta}$
$\overline{z} = r(\cos\theta - i\sin\theta)$	$\overline{z} = re^{-i\theta}$

Θεώρημα De Moivre

Αν $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ και $n \in \mathbb{N}$ τότε

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

Ρίζες Μιγαδικού αριθμού

Κάθε μιγαδικός αριθμός της μορφής $a = r(\cos\theta + i\sin\theta), a \neq 0$ έχει n ακριβώς διαφορετικές n-οστές ρίζες, που δίνονται από τον τύπο:

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

Κεφάλαιο 3

Αλγεβρικές Ταυτότητες

$$
\begin{aligned}
&(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2\\
&(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2\\
&(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3\\
&(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3\\
&(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4\\
&(x-y)^4 = x^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 + y^4\\
&(x+y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5\\
&(x-y)^5 = x^5 - 5x^4y + 10x^3y^2 - 10x^2y^3 + 5xy^4 - y^5\\
&(x+y)^6 = x^6 + 6x^5y + 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^4 + 6xy^5 + y^6\\
&(x-y)^6 = x^6 - 6x^5y + 15x^4y^2 - 20x^3y^3 + 15x^2y^4 - 6xy^5 + y^6
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x^2 - y^2 &= (x-y)(x+y) \\
x^3 - y^3 &= (x-y)(x^2+xy+y^2) \\
x^3 + y^3 &= (x+y)(x^2-xy+y^2) \\
x^4 - y^4 &= (x-y)(x^3+x^2y+xy^2+y^3) \\
&= (x^2-y^2)(x^2+y^2) = (x-y)(x+y)(x^2+y^2) \\
x^4 + y^4 &= (x^2-\sqrt{2}xy+y^2)(x^2+\sqrt{2}xy+y^2) \\
x^5 - y^5 &= (x-y)(x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4) \\
x^5 + y^5 &= (x+y)(x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4) \\
x^6 - x^6 &= (x^2-y^2)(x^4+x^2y^2+y^4) = (x-y)(x+y)(x^4+x^2y^2+y^4) \\
&= (x-y)(x+y)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2) \\
x^3+x^2y+xy^2+y^3 &= (x+y)(x^2+y^2) \\
x^4+x^2y^2+y^4 &= (x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2) \\
x^5+x^4y+x^3y^2+x^2y^3+xy^4+y^5 &= (x+y)(x^2-xy+y^2)(x^2+xy+y^2) \\
(x+y+z)^2 &= x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx \\
(x+y+z)^3 &= x^3+y^3+z^3+3x^2y+3xy^2+3y^2z+3yz^2+3z^2x+3zx^2+6xyz \\
(x+y+z+w)^2 &= x^2+y^2+z^2+w^2+2xy+2xz+2xw+2yz+2yw+2zw
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x^{2n+1} - y^{2n+1} &= (x-y)(x^{2n}+x^{2n-1}y+x^{2n-2}y^2+\cdots+y^{2n}) \\
&= (x-y)\left(x^2-2xy\cos\frac{2\pi}{2n+1}+y^2\right)\left(x^2-2xy\cos\frac{4\pi}{2n+1}+y^2\right)\cdots\left(x^2-2xy\cos\frac{2n\pi}{2n+1}+y^2\right) \\
&= (x-y)\prod_{k=1}^{n}\left(x^2-2xy\cos\frac{2k\pi}{2n+1}+y^2\right) \\
x^{2n+1} + y^{2n+1} &= (x+y)(x^{2n}-x^{2n-1}y+x^{2n-2}y^2-\cdots+y^{2n}) \\
&= (x+y)\left(x^2+2xy\cos\frac{2\pi}{2n+1}+y^2\right)\left(x^2+2xy\cos\frac{4\pi}{2n+1}+y^2\right)\cdots\left(x^2+2xy\cos\frac{2n\pi}{2n+1}+y^2\right) \\
&= (x+y)\prod_{k=1}^{n}\left(x^2+2xy\cos\frac{2k\pi}{2n+1}+y^2\right) \\
x^{2n} - y^{2n} &= (x-y)(x+y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+x^{n-3}y^2+\cdots)(x^{n-1}-x^{nn-2}y+x^{n-3}y^2-\cdots) \\
&= (x-y)(x+y)\left(x^2-2xy\cos\frac{\pi}{n}+y^2\right)\left(x^2-2xy\cos\frac{2\pi}{n}+y^2\right)\cdots\left(x^2-2xy\cos\frac{(n-1)\pi}{n}+y^2\right) \\
&= (x-y)(x+y)\prod_{k=1}^{n-1}\left(x^2-2xy\cos\frac{k\pi}{n}+y^2\right) \\
x^{2n} + y^{2n} &= \left(x^2+2xy\cos\frac{\pi}{2n}+y^2\right)\left(x^2+2xy\cos\frac{3\pi}{2n}+y^2\right)\cdots\left(x^2+2xy\cos\frac{(2n-1)\pi}{2n}+y^2\right) \\
&= \prod_{k=0}^{n-1}\left(x^2+2xy\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}+y^2\right)
\end{aligned}
$$

3.1 Παραγοντικό

Αν $n = 1, 2, 3, \ldots$ τότε το $\boldsymbol{n}$ **παραγοντικό** ορίζεται ως:

$$n \ \ = n(n-1)\cdot \cdots \cdot 3\cdot 2\cdot 1$$

Ορίζουμε επίσης:

$$0! = 1$$

3.2 Διωνυμικό Ανάπτυγμα

3.2.1 Τύπος του Διωνύμου

Αν $n = 1, 2, 3, \ldots$ τότε:

$$(x+y)^n = x^n + nx^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}y^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^{n-3}y^3 + \cdots + y^n$$

3.2.2 Διωνυμικοί Συντελεστές

Αν $0 \le k \le n$ με $n = 1, 2, 3, \ldots$ τότε ο παραπάνω τύπος μπορεί να ξαναγραφεί ως:

$$(x+y)^n = x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \binom{n}{3}x^{n-3}y^3 + \cdots + \binom{n}{n}y^n$$

όπου οι συντελεστές λέγονται **διωνυμικοί συντελεστές** και δίνονται από τη σχέση:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k}$$

3.2.3 Ιδιότητες Διωνυμικών Συντελεστών

1. Οι διωνυμικοί συντελεστές δίνονται και από το **τρίγωνο του Pascal**, το οποίο έχεις τις εξής 2 ιδιότητες:

   i) Ο πρώτος και ο τελευταίος αριθμός κάθε γραμμής είναι 1.

   ii) Οποιοσδήποτε άλλος αριθμός σε κάθε γραμμή, είναι το άθροισμα των 2 αριθμών που βρίσκονται ακριβώς από πάνω του στην αμέσως προηγούμενη γραμμή.

   Η ιδιότητα 1ii αποτελεί την παρακάτω ιδιότητα των διωνυμικών συντελεστών:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

$$\begin{gathered}
(a+b)^0 = 1 \\
(a+b)^1 = 1a + b1 \\
(a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + b^2 1 \\
(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 1 \\
(a+b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 1 \\
(a+b)^5 = 1a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5 1 \\
(a+b)^6 = 1a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6 1
\end{gathered}$$

2. $\binom{n}{n} = 1$

3. $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$

4. $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots \binom{n}{n} = 2^n$

5. $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots (-1)^n \binom{n}{n} = 0$

6. $\binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \binom{n+2}{n} + \cdots + \binom{n+m}{n} = \binom{n+m+1}{n+1}$

7. $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots = 2^{n-1}$

8. $\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \cdots = 2^{n-1}$

9. $(\binom{n}{0})^2 + (\binom{n}{1})^2 + (\binom{n}{2})^2 + \cdots + (\binom{n}{n})^2 = \binom{2n}{n}$

10. $\binom{m}{0}\binom{n}{p} + \binom{m}{1}\binom{n}{p-1} + \cdots + \binom{m}{p}\binom{n}{0} = \binom{m+n}{p}$

11. $1 \cdot \binom{n}{1} + 2 \cdot \binom{n}{2} + 3 \cdot \binom{n}{3} + \cdots + n \cdot \binom{n}{n} = n2^{n-1}$

12. $1 \cdot \binom{n}{1} - 2 \cdot \binom{n}{2} + 3 \cdot \binom{n}{3} - \cdots + (-1)^n n \cdot \binom{n}{n} = 0$

3.3 Πολυωνυμικό Ανάπτυγμα

Αν $n_1, n_2, \ldots, n_r$ είναι μη-αρνητικοί ακέραιοι τέτοιοι ώστε $n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n$, τότε η παράσταση

$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_r} = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_r!}$$

λέγεται **πολυωνυμικός συντελεστής** και προκύπτει από τον τύπο του πολυωνυμικού αναπτύγματος

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_p)^n = \sum \binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_r} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_r^{n_r}$$

όπου το άθροισμα υπολογίζεται πάνω σε όλους τους δυνατούς πολυωνυμικούς συντελεστές.

3.4 Εκθετικές και Λογαριθμικές Συναρτήσεις

3.4.1 Ιδιότητες των Δυνάμεων

Αν p, q είναι πραγματικοί αριθμοί, a, b θετικοί πραγματικοί αριθμοί και m, n θετικοί ακέραιοι, τότε:

$$
\begin{aligned}
a^0 &= 1 & a^1 &= a \\
a^p \cdot a^q &= a^{p+q} & \frac{a^p}{a^q} &= a^{p-q} \\
(a^p)^q &= a^{p\cdot q} & a^{-p} &= \frac{1}{a^p} \\
(a\cdot b)^p &= a^p \cdot b^p & \left(\frac{a}{b}\right)^p &= \frac{a^p}{b^p} \\
\sqrt[n]{a^m} &= a^{\frac{m}{n}} & \sqrt[n]{a} &= a^{\frac{1}{n}} \\
\sqrt[n]{a\cdot b} &= \sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b} & \sqrt[n]{\frac{a}{b}} &= \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}
\end{aligned}
$$

Η συνάρτηση $y = a^x$, λέγεται **εκθετική** συνάρτηση.

3.4.2 Λογάριθμοι

Αν $a^p = b$ με $a > 0$, $a \neq 1$ και $b > 0$ τότε με $p = \log_a b$ συμβολίζουμε τον **λογάριθμο** του b με βάση το a.

Η συνάρτηση $y = \log_a x$, λέγεται **λογαριθμική** συνάρτηση και είναι η αντίστροφη της εκθετικής. Δηλαδή ισχύει:

$$y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a y$$

$$
\begin{aligned}
\log_a 1 &= 0 & \log_a a &= 1 \\
\log_a(x\cdot y) &= \log_a x + \log_a y & \log_a\left(\frac{x}{y}\right) &= \log_a x - \log_a y \\
\log_a x^k &= k\cdot\log_a x & (\log_a b)\cdot(\log_b a) &= 1
\end{aligned}
$$

3.4.3 Αλλαγή Βάσης

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} = \log_a c \cdot \log_c b$$

Πιο συγκεριμένα, ισχύει:

$$\log_e b = \ln b = \frac{\log_{10} b}{\log 10e} = \ln 10 \cdot \log_{10} b = 2.30258509294\ldots \cdot \log_{10} b$$

$$\log_{10} b = \log b = \frac{\log_e b}{\log_{10} e} = \log_{10} e \cdot \ln b = 0.434294\ldots \cdot \ln b$$

Κεφάλαιο 4

Υπερβολικές Συναρτήσεις

4.0.1 Ορισμοί

Υπερβολικό Ημίτονο:	$\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$
Υπερβολικό Συνημίτονο:	$\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$
Υπερβολική Εφαπτομένη:	$\tanh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$
Υπερβολική Συνεφαπτομένη:	$\coth x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$
Υπερβολική Τέμνουσα:	$\operatorname{sech} x = \dfrac{2}{e^x + e^{-x}}$
Υπερβολική Συντέμνουσα:	$\operatorname{csch} x = \dfrac{2}{e^x - e^{-x}}$

4.0.2 Ταυτότητες μεταξύ Υπερβολικών συναρτήσεων

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \qquad \sinh x + \cosh x = \frac{1}{\cosh x - \sinh x}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} \qquad \coth x = \frac{1}{\tanh x} = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} \qquad \operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x}$$

$$\coth^2 x - \operatorname{csch}^2 x = 1 \qquad \operatorname{sech}^2 x + \tanh^2 x = 1$$

$$\begin{aligned}
\sinh(-x) &= -\sinh x \\
\cosh(-x) &= \cosh x \\
\tanh(-x) &= -\tanh x \\
\coth(-x) &= -\coth x \\
\operatorname{sech}(-x) &= \operatorname{sech} x \\
\operatorname{csch}(-x) &= -\operatorname{csch} x
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\sinh(x \pm y) &= \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y \\
\cosh(x \pm y) &= \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y \\
\tanh(x \pm y) &= \frac{\tanh x \pm \tanh y}{1 \pm \tanh x \tanh y} \\
\coth(x \pm y) &= \frac{\coth x \coth y \pm 1}{\coth y \pm \coth x}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sinh 2x &= 2 \sinh x \cosh x \\
\cosh 2x &= \cosh^2 x + \sinh^2 x \\
&= 2\cosh^2 x - 1 \\
&= 1 + 2\sinh^2 x \\
\tanh 2x &= \frac{2 \tanh x}{1 + \tanh^2 x}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sinh \frac{x}{2} &= \sqrt{\frac{\cosh x - 1}{2}}, \quad x > 0 & \sinh \frac{x}{2} &= -\sqrt{\frac{\cosh x - 1}{2}}, \quad x < 0 \\
\cosh \frac{x}{2} &= \sqrt{\frac{\cosh x + 1}{2}} \\
\tanh \frac{x}{2} &= \sqrt{\frac{\cosh x - 1}{\cosh x + 1}}, \quad x > 0 & \tanh \frac{x}{2} &= -\sqrt{\frac{\cosh x - 1}{\cosh x + 1}}, \quad x < 0 \\
&= \frac{\sinh x}{\cosh x + 1} \\
&= \frac{\cosh x - 1}{\sinh x}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sinh 3x &= 3 \sinh x + 4 \sinh^3 x \\
\cosh 3x &= 4 \cosh^3 x - 3 \cosh x \\
\tanh 3x &= \frac{3 \tanh x + \tanh^3 x}{1 + 3 \tanh^2 x} \\
\sinh 4x &= 8 \sinh^3 x \cosh x + 4 \sinh x \cosh x \\
\cosh 4x &= 8 \cosh^4 x - 8 \cosh^2 x + 1 \\
\tanh 4x &= \frac{4 \tanh x + 4 \tanh^3 x}{1 + 6 \tanh^2 x + \tanh^4 x}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sinh^2 x &= \frac{1}{2}\cosh 2x - \frac{1}{2} \\
\cosh^2 x &= \frac{1}{2}\cosh 2x + \frac{1}{2} \\
\sinh^3 x &= \frac{1}{4}\sinh 3x - \frac{3}{4}\sinh x \\
\cosh^3 x &= \frac{1}{4}\cosh 3x + \frac{3}{4}\cosh x \\
\sinh^4 x &= \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cosh 2x + \frac{1}{8}\cosh 4x \\
\cosh^4 x &= \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cosh 2x + \frac{1}{8}\cosh 4x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sinh x + \sinh y &= 2\sinh\frac{1}{2}(x+y)\cosh\frac{1}{2}(x-y) \\
\sinh x - \sinh y &= 2\cosh\frac{1}{2}(x+y)\sinh\frac{1}{2}(x-y) \\
\cosh x + \cosh y &= 2\cosh\frac{1}{2}(x+y)\cosh\frac{1}{2}(x-y) \\
\cosh x - \cosh y &= 2\sinh\frac{1}{2}(x+y)\sinh\frac{1}{2}(x-y) \\
\sinh x \sinh y &= \frac{1}{2}\left\{\cosh(x+y) - \cosh(x-y)\right\} \\
\cosh x \cosh y &= \frac{1}{2}\left\{\cosh(x+y) + \cosh(x-y)\right\} \\
\sinh x \cosh y &= \frac{1}{2}\left\{\sinh(x+y) + \sinh(x-y)\right\}
\end{aligned}
$$

Αν θεωρήσουμε $x > 0$ τότε ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις μεταξύ των υπερβολικών τριγωνομετρικών συναρτήσεων

	$\sinh x = u$	$\cosh x = u$	$\tanh x = u$	$\coth x = u$	$\operatorname{sech} x = u$	$\operatorname{csch} x = u$
$\sinh x$	u	$\sqrt{u^2-1}$	$u/\sqrt{1-u^2}$	$1/\sqrt{u^2-1}$	$\sqrt{1}-u^2/u$	$1/u$
$\cosh x$	$\sqrt{1+u^2}$	u	$1/\sqrt{1-u^2}$	$u/\sqrt{u^2-1}$	$1/u$	$\sqrt{1+u^2}/u$
$\tanh x$	$u/\sqrt{1+u^2}$	$\sqrt{u^2-1}/u$	u	$1/u$	$\sqrt{1-u^2}$	$1/\sqrt{1+u^2}$
$\coth x$	$\sqrt{u^2+1}/u$	$u/\sqrt{u^2-1}$	$1/u$	u	$1/\sqrt{1-u^2}$	$\sqrt{1+u^2}$
$\operatorname{sech} x$	$1/\sqrt{1+u^2}$	$1/u$	$\sqrt{1-u^2}$	$\sqrt{u^2-1}/u$	u	$u/\sqrt{1+u^2}$
$\operatorname{csch} x$	$1/u$	$1/\sqrt{u^2-1}$	$\sqrt{1-u^2}/u$	$\sqrt{u^2-1}$	$u/\sqrt{1-u^2}$	u

4.0.3 Γραφικές παραστάσεις

4.0.4 Αντίστροφες Υπερβολικές Συναρτήσεις

$$
\begin{array}{ll}
\sinh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) & -\infty < x < +\infty \\
\cosh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) & x \geq 1 \\
\tanh^{-1} x = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) & -1 < x < 1 \\
\coth^{-1} x = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right) & x > 1 \quad \text{ή} \quad x < -1 \\
\operatorname{sech}^{-1} x = \ln\left(\dfrac{1}{x} + \sqrt{\dfrac{1}{x^2} - 1}\right) & 0 < x \leq 1 \\
\operatorname{csch}^{-1} x = \ln\left(\dfrac{1}{x} + \sqrt{\dfrac{1}{x^2} + 1}\right) & x \neq 0
\end{array}
$$

4.0.5 Σχέσεις μεταξύ Υπερβολικών Συναρτήσεων

$$
\begin{array}{l}
\operatorname{csch}^{-1} x = \sinh^{-1}\left(\dfrac{1}{x}\right) \\
\operatorname{sech}^{-1} x = \cosh^{-1}\left(\dfrac{1}{x}\right) \\
\coth^{-1} x = \tanh^{-1}\left(\dfrac{1}{x}\right) \\
\sinh^{-1}(-x) = -\sinh^{-1} x \\
\tanh^{-1}(-x) = -\tanh^{-1} x \\
\coth^{-1}(-x) = -\coth^{-1} x \\
\operatorname{csch}^{-1}(-x) = -\operatorname{csch}^{-1} x
\end{array}
$$

4.0.6 Γραφικές Παραστάσεις Αντίστροφων Υπερβολικών Συναρτήσεων

4.0.7 Σχέσεις μεταξύ Υπερβολικών Τριγωνομετρικών και Τριγωνομετρικών Συναρτήσεων

$$
\begin{array}{ll}
\sin(ix) = i\sinh x & \sinh(ix) = i\sin x \\
\cos(ix) = \cosh x & \cosh(ix) = \cos x \\
\tan(ix) = i\tanh x & \tanh(ix) = i\tan x \\
\cot(ix) = -i\coth x & \coth(ix) = -i\cot x \\
\sec(ix) = \operatorname{sech} x & \operatorname{sech}(ix) = \sec x \\
\csc(ix) = -i\operatorname{csch} x & \operatorname{csch}(ix) = -i\csc x
\end{array}
$$

4.0.8 Περιοδικότητα Υπερβολικών Συναρτήσεων

$$
\begin{array}{l}
\sinh(x + 2k\pi i) = \sinh x \\
\cosh(x + 2k\pi i) = \cosh x \\
\tanh(x + 2k\pi i) = \tanh x \\
\coth(x + 2k\pi i) = \coth x \\
\operatorname{sech}(x + 2k\pi i) = \operatorname{sech} x \\
\operatorname{csch}(x + 2k\pi i) = \operatorname{csch} x
\end{array}
$$

4.0.9 Σχέσεις μεταξύ αντίστροφων υπερβολικών και αντίστροφων τριγωνομετρικών συναρτήσεων

$\sin^{-1}(ix) = i\sin^{-1} x$	$\sinh^{-1}(ix) = i\sin^{-1} x$
$\cos^{-1} x = \pm i\cosh^{-1} x$	$\cosh^{-1} x = \pm i\cos^{-1} x$
$\tan^{-1}(ix) = i\tanh^{-1} x$	$\tanh^{-1}(ix) = i\tan^{-1} x$
$\cot^{-1}(ix) = i\coth^{-1} x$	$\coth^{-1}(ix) = -i\cot^{-1} x$
$\sec^{-1} x = \pm i\,\mathrm{sech}^{-1} x$	$\mathrm{sech}^{-1} x = \pm i\sec^{-1} x$
$\csc^{-1}(ix) = -i\,\mathrm{csch}^{-1} x$	$\mathrm{csch}^{-1}(ix) = -i\csc^{-1} x$

Κεφάλαιο 5

Διαφορικός Λογισμός

5.1 Παράγωγοι

5.1.1 Ορισμός

Η παράγωγος της συνάρτησης $y = f(x)$ ως προς x ορίζεται να είναι το όριο

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

όταν αυτό υπάρχει για κάθε σημείο στο πεδίο ορισμού της, όπου $h = \Delta x$. Η παράγωγος συνάρτηση συμβολίζεται με $\dfrac{df}{dx} = f'(x) = y'$.

5.1.2 Παράγωγοι Βασικών Συναρτήσεων

$\dfrac{d}{dx}(c) = 0$

$\dfrac{d}{dx}(x) = 1$

$\dfrac{d}{dx}(x^a) = ax^{a-1}, \quad a \in \mathbb{R}$

$\dfrac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\dfrac{1}{x^2}$

$\dfrac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a, \quad a > 0$

$\dfrac{d}{dx}(e^x) = e^x$

$\dfrac{d}{dx}(\log_a x) = \dfrac{1}{x} \cdot \log_a e, \quad a > 0, a \neq 1$

$\dfrac{d}{dx}(\ln x) = \dfrac{1}{x}$

5.1.3 Παραγωγοι Τριγωνομετρικών και Αντίστροφων Τριγωνομετρικών Συναρτήσεων

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x \qquad \frac{d}{dx}\left(\sin^{-1} x\right) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -\frac{\pi}{2} < \sin^{-1} x < \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x \qquad \frac{d}{dx}\left(\cos^{-1} x\right) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad 0 < \cos^{-1} x < \pi$$

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad \frac{d}{dx}\left(\tan^{-1} x\right) = \frac{1}{1+x^2}, \quad -\frac{\pi}{2} < \tan^{-1} x < \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{d}{dx}(\cot x) = -\frac{1}{\sin^2 x} \qquad \frac{d}{dx}\left(\cot^{-1} x\right) = \frac{-1}{1+x^2}, \quad 0 < \cot^{-1} x < \pi$$

$$\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \cdot \tan x \qquad \frac{d}{dx}\left(\sec^{-1} x\right) = \begin{cases} \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}, & \text{αν } 0 < \sec^{-1} x < \dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}, & \text{αν } \dfrac{\pi}{2} < \sec^{-1} x < \pi \end{cases}$$

$$\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cdot \cot x \qquad \frac{d}{dx}\left(\csc^{-1} x\right) = \begin{cases} \dfrac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}, & \text{αν } 0 < \csc^{-1} x < \dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}, & \text{αν } -\dfrac{\pi}{2} < \csc^{-1} x < 0 \end{cases}$$

5.1.4 Παραγωγοι Υπερβολικών και Αντίστροφων Υπερβολικών Συναρτήσεων

$$\frac{d}{dx}(\sinh x) = \cosh x \qquad \frac{d}{dx}\left(\sinh^{-1} x\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\frac{d}{dx}(\cosh x) = \sinh x \qquad \frac{d}{dx}\left(\cosh^{-1} x\right) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}, & \text{αν } \cosh^{-1} x > 0,\ x > 1 \\ \dfrac{-1}{\sqrt{x^2-1}}, & \text{αν } \cosh^{-1} x < 0,\ x > 1 \end{cases}$$

$$\frac{d}{dx}(\tanh x) = \operatorname{sech}^2 x \qquad \frac{d}{dx}\left(\tanh^{-1} x\right) = \frac{1}{1-x^2}, \quad \text{αν } -1 < x < 1$$

$$\frac{d}{dx}(\coth x) = -\operatorname{csch}^2 x \qquad \frac{d}{dx}\left(\coth^{-1} x\right) = \frac{1}{1-x^2}, \quad \text{αν } x > 1 \text{ ή } x < -1$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sech} x) = -\operatorname{sech} x \cdot \tanh x \qquad \frac{d}{dx}\left(\operatorname{sech}^{-1} x\right) = \begin{cases} \dfrac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}, & \text{αν } \operatorname{sech}^{-1} x > 0,\ 0 < x < 1 \\ \dfrac{1}{x\sqrt{1-x^2}}, & \text{αν } \operatorname{sech}^{-1} x < 0,\ 0 < x < 1 \end{cases}$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{csch} x) = -\operatorname{csch} x \cdot \coth x \qquad \frac{d}{dx}\left(\operatorname{csch}^{-1} x\right) = \begin{cases} \dfrac{-1}{x\sqrt{1+x^2}}, & \text{αν } x > 0 \\ \dfrac{1}{x\sqrt{1+x^2}}, & \text{αν } x < 0 \end{cases}$$

5.1.5 Κανόνες Παραγώγισης

Έστω $f = f(x)$, $g = g(x)$ και $h = h(x)$, a, b, c και n σταθερές.

$$\frac{d}{dx}(cf) = c\frac{df}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(f \pm g) = \frac{df}{dx} \pm \frac{dg}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(fg) = f\frac{dg}{dx} + g\frac{df}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f\frac{dg}{dx} - g\frac{df}{dx}}{g^2}$$

$$\frac{d}{dx}(fgh) = fg\frac{dh}{dx} + fh\frac{dg}{dx} + gh\frac{df}{dx}$$

5.1.6 Σύνθετη Παραγώγιση

Έστω $y = f(u)$ και $u = g(x)$. Τότε

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \quad \text{(Κανόνας Αλυσίδας)}$$

Ο παραπάνω τύπος γενικεύεται και για συναρτήσεις που είναι σύνθεση περισσότερων των δύο συναρτήσεων, όπως για παράδειγμα, αν $y = f(u)$, $u = g(v)$ και $v = h(x)$, τότε

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$$

5.1.7 Παράγωγος Αντίστροφης Συνάρτησης

Έστω $y = f(x)$, συνεχής και γνησίως μονότονη συνάρτηση. Τότε ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση $x = f^{-1}(y)$ και ισχύει:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

5.1.8 Παράγωγοι Ανώτερης Τάξης

Δεύτερη Παράγωγος $\quad \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right) = \dfrac{d^2y}{dx^2} = f''(x) = y''$

Τρίτη Παράγωγος $\quad \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right) = \dfrac{d^3y}{dx^3} = f'''(x) = y'''$

Παράγωγος τάξης n $\quad \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right) = \dfrac{d^ny}{dx^n} = f^{(n)}(x) = y^{(n)}$