

# Κεφάλαιο 1

## Στατιστική - Πιθανότητες

### 1.1 Αριθμητικές Μέθοδοι Σύνοψης Δεδομένων

Μη Ομαλοποιημένα Δεδομένα

Ομαλοποιημένα Δεδομένα

Μέτρα θέσης - Κεντρικής Τάσης

Αριθμητικός Μέσος

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$$

$$\bar{X} \cong \frac{\sum_{i=1}^k f_i m_i}{n}, \quad n = \sum_{i=1}^k f_i$$

Σταθμικός Αριθμητικός Μέσος

$$\bar{X}_w = \frac{\sum_{i=1}^n w_i X_i}{\sum_{i=1}^n w_i}$$

Διάμεσος

- Αν  $n$  περιττός:  $M$  η τιμή της παρατήρησης στη θέση  $\frac{n}{2} + \frac{1}{2}$

$$M \cong L_M + \frac{\delta}{f_M} \left( \frac{n}{2} - F_{M-1} \right)$$

$$M = X_{(\frac{n}{2} + \frac{1}{2})}$$

- Αν  $n$  άρτιος:

$$M = \frac{1}{2} \left( X_{(\frac{n}{2} + 1)} + X_{(\frac{n}{2})} \right)$$

Επικρατούσα Τιμή

$T_0$ : Η τιμή με τη μεγαλύτερη συχνότητα εμφάνισης

$$T_0 = L_{T_0} + \delta \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2}$$

$i$ -Τεταρτημόριο

Το  $i = 1, 2, 3$  τεταρτημόριο ( $Q_i$ ) βρίσκεται στην  $[\frac{i(n+1)}{4}]$  θέση. Η τιμή του  $i = 1, 2, 3$  τεταρτημορίου ( $Q_i$ ) είναι

$$Q_i = X_{(A_Q)} + \Delta_Q [X_{(A_Q+1)} - X_{(A_Q)}]$$

όπου  $A_Q$  είναι το ακέραιο μέρος του ηλίγκου  $[\frac{i(n+1)}{4}]$  και  $\Delta_Q$  είναι το δεκαδικό μέρος του ηλίγκου  $[\frac{i(n+1)}{4}]$ .

## Μέτρα Διασποράς

### Εύρος

$$R = X_{max} - X_{min}$$

### Ενδοτεταρτημοριακό Εύρος

$$IR = Q_3 - Q_1$$

$$IR = Q_3 - Q_1$$

### Τεταρτημοριακή Απόκλιση

$$Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

$$Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

### Διακύμανση

$$S_{op}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n}$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1}$$

$$S^2 \cong \frac{\sum_{i=1}^k f_i (m_i - \bar{X})^2}{n-1}, \quad n = \sum_{i=1}^k f_i$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n-1} - \frac{(\sum_{i=1}^n X_i)^2}{n(n-1)}$$

$$S^2 \cong \frac{\sum_{i=1}^k f_i m_i^2 - n\bar{X}^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^k f_i m_i^2}{n-1} - \frac{(\sum_{i=1}^k f_i m_i)^2}{(n-1)n}$$

### Τυπική Απόκλιση

$$S_{op} = +\sqrt{S_{op}^2} \quad \text{ή} \quad S = +\sqrt{S^2}$$

$$S = +\sqrt{S^2}$$

## Μέτρα Σχετικής Μεταβλητότητας

### Συντελεστής Μεταβλητότητας

$$CV = \frac{S}{\bar{X}}$$

$$CV = \frac{S}{\bar{X}}$$

Μέτρα Ασυμμετρίας  
Συντελεστές Ασυμμετρίας

$$S_P = \frac{\bar{X} - T_0}{S}$$

$$\beta_3 = \frac{\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^3}{n}}{S^3}$$

$$S_P = \frac{\bar{X} - T_0}{S}$$

$$\beta_3 = \frac{\frac{\sum_{i=1}^k f_i (m_i - \bar{X})^3}{n}}{S^3}$$

## Μέτρα Κύρτωσης

### Συντελεστής Κύρτωσης

$$\beta_4 = \frac{\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^4}{n}}{S^4}$$

$$\beta_4 = \frac{\frac{\sum_{i=1}^k f_i (m_i - \bar{X})^4}{n}}{S^4}$$

## 1.2 Πιθανότητες

### Αξιώματα του Kolmogorov

Έστω  $S$  ένας δειγματικός χώρος και έστω  $\mathbf{B}$  το σύνολο όλων των ενδεχομένων του  $S$ . Ορίζουμε ως συνάρτηση πιθανότητας μια συνάρτηση  $P: \mathbf{B} \rightarrow \mathbb{R}$ , η οποία σε κάθε ενδεχόμενο  $A$  αντιστοιχεί έναν πραγματικό αριθμό  $P(A)$  έτσι ώστε να ικανοποιούνται τα παρακάτω αξιώματα:

- i)  $P(A) \geq 0$
- ii)  $P(S) = 1$
- iii)  $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$

### Βασικά Θεωρήματα Πιθανοτήτων

**Θεώρημα 1.2.1.** Για κάθε ενδεχόμενο  $A$  ισχύει  $P(A') = 1 - P(A)$

**Θεώρημα 1.2.2.** Ισχύει ότι  $P(\emptyset) = 0$

**Θεώρημα 1.2.3.** Για κάθε ενδεχόμενο  $A$  ισχύει  $P(A) \leq 1$

**Θεώρημα 1.2.4.** Για οποιαδήποτε ενδεχόμενα  $A_1$  και  $A_2$  ισχύει:

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$$

Παρατηρήσεις 1.2.1.

- Το θεώρημα 1.2.4 γενικεύεται για την περίπτωση  $n$  ενδεχομένων. Στην περίπτωση όπου  $n = 3$  γίνεται:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

- Για δύο ενδεχόμενα τα οποία είναι ασυμβίβαστα το θεώρημα 1.2.4 οδηγεί στο συμπέρασμα:

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2), \quad A_1 \cap A_2 = \emptyset$$

το οποίο είναι ειδική περίπτωση του 3ου αξιώματος.

## Δεσμευμένη Πιθανότητα

$$P(A_1 | A_2) = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_2)}, \quad P(A_2) \geq 0$$

$$P(A_2 | A_1) = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)}, \quad P(A_1) \geq 0$$

## Ανεξάρτητα Ενδεχόμενα

- 2 ενδεχόμενα  $A_1, A_2$  είναι *ανεξάρτητα* αν  $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2)$ .
- 3 ενδεχόμενα  $A_1, A_2, A_3$  είναι *ανεξάρτητα* αν

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2)$$

$$P(A_1 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_3)$$

$$P(A_2 \cap A_3) = P(A_2) \cdot P(A_3)$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3).$$

- $n$  ενδεχόμενα  $A_1, A_2, \dots, A_n$  είναι *ανεξάρτητα* αν για κάθε συνδυασμό δύο ή περισσότερων από αυτά ισχύει

$$P\left(\bigcap_{j=1}^k A_{i_j}\right) = P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdots P(A_{i_k}),$$

$$\text{με } 1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k \leq n.$$

## Ενδεχόμενα Ανεξάρτητα κατά Ζεύγη

Τα ενδεχόμενα  $A_1, A_2, \dots, A_n$  λέγονται *ανεξάρτητα κατά ζεύγη* αν

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2), \quad \text{για κάθε } i, j = 1, 2, \dots, n, \quad i \neq j.$$

Προφανώς,  $n$  ενδεχόμενα μπορεί να είναι ανεξάρτητα κατά ζεύγη χωρίς να είναι ανεξάρτητα.

## Κανόνας Πολλαπλασιασμού Πιθανοτήτων

- Για 2 ενδεχόμενα

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1) = P(A_2) \cdot P(A_1 | A_2)$$

- Για 3 ενδεχόμενα

$$P[A_1 \cap A_2 \cap A_3] = P[A_1] \cdot P[A_2 | A_1] \cdot P[A_3 | A_1 \cap A_2]$$

- Για  $n$  ενδεχόμενα

$$P[A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n] = P[A_1] \cdot P[A_2 | A_1] \cdot P[A_3 | A_1 \cap A_2] \cdots P\left[A_n \left| \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i \right.\right]$$

## Θεώρημα της Ολικής Πιθανότητας

Έστω ότι  $A_1, A_2, \dots, A_n$  είναι μια διαμέριση του δειγματικού χώρου  $S$  τέτοια ώστε  $P(A_i) \neq 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Τότε για κάθε ενδεχόμενο  $E$  έχουμε ότι

$$P(E) = \sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P(E | A_i)$$

## Θεώρημα του Bayes

Έστω ότι  $A_1, A_2, \dots, A_n$  είναι μια διαμέριση του δειγματικού χώρου  $S$  τέτοια ώστε  $P(A_i) \neq 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Τότε για κάθε ενδεχόμενο  $E$  με  $P(E) > 0$  έχουμε ότι

$$P(A_k | E) = \frac{P(A_k) \cdot P(E | A_k)}{\sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P(E | A_i)} = \frac{P(A_k) \cdot P(E | A_k)}{P(E)}$$

## 1.3 Αρχές Απαρίθμησης

Μεταθέσεις

$$P_n = n!$$

Επαναληπτικές Μεταθέσεις

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdots n_k!}$$

Διατάξεις

$$P(n, x) = \frac{n!}{(n-x)!}$$

Επαναληπτικές Διατάξεις

$$n^x$$

Συνδυασμοί

$$C(n, x) = \binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$

## 1.4 Κατανομές Πιθανότητας

### Διακριτή Τυχαία Μεταβλητή

Η **συνάρτηση πιθανότητας**  $P(X = x)$  μιας διακριτής τυχαίας μεταβλητής  $X$  ικανοποιεί τις συνθήκες:

i)  $P(X = x) \geq 0, \forall x$  στο Πεδίο Ορισμού

ii)  $\sum_x P(X = x) = 1$

Η **αθροιστική συνάρτηση κατανομής**  $F(a)$  μιας διακριτής τυχαίας μεταβλητής  $X$  υπολογίζεται με βάση τη σχέση:

$$F(a) = P(X \leq a) = \sum_{x \leq a} (P(X = x)), \forall a \in \mathbb{R}$$

Η **μέση (αναμενόμενη) τιμή**  $\mu = E(X)$  μιας διακριτής τυχαίας μεταβλητής  $X$  υπολογίζεται με βάση τον τύπο:

$$E(X) = \sum_x xP(X = x) < +\infty$$

Αν  $X$  διακριτή τυχαία μεταβλητή και  $g(\cdot)$  μια πραγματική συνάρτηση, τότε η μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής  $g(X)$  δίνεται από τη σχέση:

$$E[g(X)] = \sum_x g(x)P(X = x) < +\infty$$

### Συνεχής Τυχαία Μεταβλητή

Η **συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας**  $f(x)$  μιας συνεχούς τυχαίας μεταβλητής  $X$  ικανοποιεί τις συνθήκες:

i)  $f(x) \geq 0, -\infty < x < +\infty$

ii)  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$

Η **αθροιστική συνάρτηση κατανομής**  $F(a)$  μιας συνεχούς τυχαίας μεταβλητής  $X$  υπολογίζεται με βάση τη σχέση:

$$F(a) = P(X \leq a) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt, \forall a \in \mathbb{R}$$

Η **μέση (αναμενόμενη) τιμή**  $E(X)$  μιας συνεχούς τυχαίας μεταβλητής  $X$  υπολογίζεται με βάση τον τύπο:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx < +\infty$$

Αν  $X$  συνεχής τυχαία μεταβλητή και  $g(\cdot)$  μια πραγματική συνάρτηση, τότε η μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής  $g(X)$  δίνεται από τη σχέση:

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x) dx < +\infty$$

### Ιδιότητες της Μέσης Τιμής

1.  $E[ag(X) + b] = aE[g(X)] + b$ , όπου  $a, b$  σταθερές.
2.  $E[a_1g_1(x) + a_2g_2(x)] = a_1E[g_1(x)] + a_2E[g_2(x)]$ , όπου  $a_1, a_2$  σταθερές.

### Διακύμανση

Έστω  $X$  τυχαία μεταβλητή (διακριτή ή συνεχής) με μέση τιμή  $\mu = E(X)$ . Η **διακύμανση** της  $X$  συμβολίζεται με  $V(X)$  ή  $\sigma^2$  και δίνεται από τη σχέση:

$$V(X) = \sigma^2 E[X - E(X)]^2 = E(X - \mu)^2 = E(X^2) - \mu^2$$

### Ιδιότητα της Διακύμανσης

1.  $V(aX + b) = a^2V(X)$ , όπου  $a, b$  σταθερές

## Ειδικές Κατανομές

### Διακριτές Κατανομές

Όνομα Κατανομής	Παράμετροι	Συνάρτηση πιθανότητας	Σύνολο τιμών	Μέση τιμή	Διασπορά
Διωνυμική $B(n, p)$	$n \in \mathbb{Z}_+$ $0 < p < 1$	$\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$	$x = 0, 1, \dots, n$	$np$	$np(1-p)$
Poisson $P(\lambda)$	$\lambda > 0$	$e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$	$x = 0, 1, \dots$	$\lambda$	$\lambda$
Γεωμετρική $G(p)$	$0 < p < 1$	$p(1-p)^{x-1}$	$x = 0, 1, \dots$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
Υπεργεωμετρική $H(n, a, b)$	$a, b \in \mathbb{Z}_+$ $n \leq a+b$	$\frac{\binom{a}{x} \binom{b}{n-x}}{\binom{a+b}{n}}$	$x = 0, 1, \dots, n$	$\frac{a}{a+b}$	$\frac{nab}{(a+b)^2}$

### Συνεχείς Κατανομές

Όνομα Κατανομής	Παράμετροι	Συνάρτηση πιθανότητας	Σύνολο τιμών	Μέση τιμή	Διασπορά
Κανονική $N(\mu, \sigma^2)$	$-\infty < \mu < +\infty$ $\sigma > 0$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$	$-\infty < x < +\infty$	$\mu$	$\sigma^2$
Εκθετική $E(\lambda)$	$\lambda > 0$	$\lambda e^{-\lambda x}$	$0 < x < +\infty$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Ομοιόμορφη $U(a, b)$	$-\infty < a, b < +\infty$	$\frac{1}{b-a}$	$a < x < b$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Τυποποιημένη Κανονική $N(0, 1)$	$-\infty < Z = \frac{X-\mu}{\sigma} < +\infty$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}$	$-\infty < z < +\infty$	0	1

## 1.5 Συντελεστές Ευθείας Παλινδρόμησης

$$\hat{Y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum[(Y_i - \bar{Y})(X_i - \bar{X})]}{\sum[(X_i - \bar{X})^2]} = \frac{\sum X_i Y_i - \frac{\sum X_i \sum Y_i}{n}}{\sum X_i^2 - \frac{(\sum X_i)^2}{n}}$$

$$\hat{\beta}_0 = \frac{\sum Y_i}{n} - \hat{\beta}_1 \frac{\sum X_i}{n} = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}$$



## 1.6 Συντελεστής Συσχέτισης

$$r = \frac{\sum[(Y_i - \bar{Y})(X_i - \bar{X})]}{\sqrt{\sum(Y_i - \bar{Y})^2 \sum(X_i - \bar{X})^2}} = \frac{\sum X_i Y_i - \frac{\sum X_i \sum Y_i}{n}}{\sqrt{[\sum X_i^2 - \frac{(\sum X_i)^2}{n}][\sum Y_i^2 - \frac{(\sum Y_i)^2}{n}]}}, r \in [-1, 1]$$

## 1.7 Συντελεστής Προσδιορισμού

$$R^2 = \frac{(\sum[(Y_i - \bar{Y})(X_i - \bar{X})])^2}{\sum(Y_i - \bar{Y})^2 \sum(X_i - \bar{X})^2} = \frac{(\sum X_i Y_i - \frac{\sum X_i \sum Y_i}{n})^2}{[\sum X_i^2 - \frac{(\sum X_i)^2}{n}][\sum Y_i^2 - \frac{(\sum Y_i)^2}{n}]}, R^2 \in [0, 1]$$

## Κεφάλαιο 2

# Μιγαδικοί Αριθμοί

### 2.1 Μιγαδικοί Αριθμοί

#### Ορισμός

Έστω  $a, b \in \mathbb{R}$  και  $i = \sqrt{-1}$  η φανταστική μονάδα. Κάθε παράσταση της μορφής  $a + bi$  παριστάνει έναν μιγαδικό αριθμό. Με  $\operatorname{Re} z$  και  $\operatorname{Im} z$  συμβολίζουμε το πραγματικό και το φανταστικό μέρος αντίστοιχα, του μιγαδικού αριθμού  $z = a + bi$ . Ισχύει,  $\operatorname{Re} z = a$  και  $\operatorname{Im} z = b$ . Το σύνολο των μιγαδικών αριθμών το συμβολίζουμε με  $\mathbb{C}$ .

#### Ισότητα

Έστω  $z_1 = a + bi$  και  $z_2 = c + di$  μιγαδικοί αριθμοί.

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow a = c \quad \text{και} \quad b = d$$

#### Γεωμετρική Αναπαράσταση των Μιγαδικών Αριθμών

Έστω  $xOy$  καρτεσιανό σύστημα αξόνων και  $z = a + bi$  μιγαδικός αριθμός. Στον μιγαδικό αριθμό  $z$  αντιστοιχίζουμε το ζεύγος  $(a, b)$  και επομένως το σημείο  $M(a, b)$  με συντεταγμένες  $a, b$  το οποίο ονομάζουμε γεωμετρική εικόνα του μιγαδικού  $z$ .

Επίσης στο σημείο  $M(a, b)$  και άρα και στον μιγαδικό αριθμό  $z$  αντιστοιχίζουμε το διάνυσμα θέσης  $\vec{OM}$ .

#### Μέτρο

Το μέτρο του μιγαδικού αριθμού  $z = a + bi$  το συμβολίζουμε με  $|z|$  και ισχύει

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

- $OM = \sqrt{(a^2 + b^2)} = |z|$
- $|a| = |\operatorname{Re} z| \leq |z|$
- $|b| = |\operatorname{Im} z| \leq |z|$

#### Πράξεις

Έστω  $z_1 = a + bi$  και  $z_2 = c + di$  μιγαδικοί αριθμοί.

### Πρόσθεση

$$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

### Πολλαπλασιασμός

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (a + bi) \cdot (c + di) \\ &= ac + adi + bci + bdi^2 \\ &= ac - bd + (ad + bc)i \end{aligned}$$

### Αφαίρεση

$$z_1 - z_2 = (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

### Διαίρεση

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{(a + bi)}{(c + di)} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} \\ &= \frac{ac + bd + (-ad + bc)}{b^2 + d^2} \\ &= \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i \end{aligned}$$

### Συνοπτικά

- $z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$
- $z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d)i$
- $z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$
- $\frac{z_1}{z_2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i$

### Ιδιότητες των Πράξεων

Έστω  $z_1, z_2, z_3$  και  $z$  μιγαδικοί αριθμοί.

Πρόσθεση	Πολλαπλασιασμός
$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$	$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$
$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$	$z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3$
$z + 0 = 0 + z = z$	$z \cdot 1 = 1 \cdot z = z$
$z + (-z) = (-z) + z = 0$	$z \cdot z^{-1} = z^{-1} \cdot z = 1$
$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$	

$$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$$

### Δυνάμεις

Έστω  $z \in \mathbb{C}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

- $z^n = \underbrace{z \cdot z \cdots z}_{n \text{ φορές}}, n > 0$
- $z^0 = 1$
- $z^n = (z^{-1})^{-n}, n < 0$

### Ιδιότητες των Δυνάμεων

Έστω  $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

- $z^m \cdot z^n = z^{m+n}$

- $\frac{z^m}{z^n} = z^{m-n}$
- $(z^m)^n = z^{m \cdot n}$
- $(z_1 \cdot z_2)^n = z_1^n \cdot z_2^n$
- $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n = \frac{z_1^n}{z_2^n}$
- $z = 0 \Rightarrow 0^n = 0, n > 0$

### Δυνάμεις της Φανταστικής Μονάδας

- $i^0 = 1$
- $i^1 = i$
- $i^2 = -1$
- $i^3 = i^2 \cdot i = -i$
- $i^4 = i^3 \cdot i = 1$
- $i^5 = i^4 \cdot i = i$
- $i^6 = i^5 \cdot i = -1$
- $i^7 = i^6 \cdot i = -i$

Αποδεικνύεται με επαγωγή ότι για κάθε  $n > 0$

- $i^{4n} = 1$
- $i^{4n+1} = i$
- $i^{4n+2} = -1$
- $i^{4n+3} = -i$
- $i^n = (i^{-1})^{-n} = \left(\frac{1}{i}\right)^{-n} = (-i)^{-n}, n < 0$

### Συζυγής

Έστω  $z = a + bi$  μιγαδικός αριθμός. Με  $\bar{z}$  συμβολίζουμε τον **συζυγή** μιγαδικό αριθμό του  $z$  και ισχύει  $\bar{\bar{z}} = z$ .

### Ιδιότητες Συζυγών

- $\bar{\bar{z}} = z$
- $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$  και
- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$  και
- $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}, z_2 \neq 0$
- $\overline{z^n} = \bar{z}^n$
- $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$
- $z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$
- $\overline{\left(\sum_{k=1}^n z_k\right)} = \sum_{k=1}^n \bar{z}_k \Leftrightarrow \overline{z_1 + z_2 + \dots + z_n} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \dots + \bar{z}_n$
- $\overline{\left(\prod_{k=1}^n z_k\right)} = \prod_{k=1}^n \bar{z}_k \Leftrightarrow \overline{z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_n} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 \cdot \dots \cdot \bar{z}_n$

- $\operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}$
- $\operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}$

## Ιδιότητες Μέτρου

- $|z| \geq 0$  και  $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
- $-|z| \leq \operatorname{Re} z \leq |z|$
- $-\bar{z} \leq \operatorname{Re} z \leq |\operatorname{Re} z| \leq \bar{z}$
- $-\bar{z} \leq \operatorname{Im} z \leq |\operatorname{Im} z| \leq \bar{z}$
- $|z| = |-z| = |\bar{z}| = |-\bar{z}|$
- $z \cdot \bar{z} = |z|^2 \in \mathbb{R}$
- $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
- $|z_1 - z_2| \leq |z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
- $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, z_2 \neq 0$
- $\left| \prod_{k=1}^n z_k \right| = \prod_{k=1}^n |z_k|$
- $\left| \sum_{k=1}^n z_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |z_k|$
- $|z^k| = |z|^k, k \in \mathbb{Z}$ , άρα  $|z^{-1}| = |z|^{-1}, z \neq 0$
- $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$
- $|z + 1| \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$  και  $|z^2 + 1| \geq 1$
- $|z_1 + z_2|^2 + |z_2 + z_3|^2 + |z_3 + z_1|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + |z_1 + z_2 + z_3|^2$
- $|1 + z_1 \bar{z}_2|^2 \pm |z_1 - z_2|^2 = (1 \pm |z_1|^2)(1 \pm |z_2|^2)$
- $|z_1 + z_2 + z_3|^2 + |-z_1 + z_2 + z_3|^2 + |z_1 - z_2 + z_3|^2 + |z_1 + z_2 - z_3|^2 = 4(|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2)$

## Πολική μορφή Μιγαδικού αριθμού

Έστω  $z = a + bi$  μιγαδικός αριθμός. Έστω  $r = |z|$  και  $\theta$  η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα θέσης του  $z$  με τον θετικό ημιάξονα  $x$  και η οποία μετρείται σε ακτίνια. Τότε  $x = r \cos \theta$  και  $y = r \sin \theta$  και επομένως ο μιγαδικός  $z$  μπορεί να γραφεί σε **τριγωνομετρική** ή **πολική** μορφή ως:

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

και χρησιμοποιώντας την ταυτότητα Euler  $e^{ix} = \cos x + i \sin x, x \in \mathbb{R}$  σε **εκθετική** μορφή ως:

$$z = re^{i\theta}$$

Οι τιμές των  $r, \theta$  λέγονται **πολικές συντεταγμένες** του  $z$ . Κάθε τιμή του  $\theta$  λέγεται **όρισμα** του  $z$ , και με  $\arg z$  συμβολίζουμε το σύνολο των ορισμάτων του  $z$ , που είναι άπειρα και διαφέρουν μεταξύ τους κατά  $2\pi$ . Αν  $z = 0$  τότε δεν ορίζεται το όρισμα του. Ισχύει:

$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$

Το **Πρωτεύον όρισμα** του  $\arg z$  το συμβολίζουμε με  $\text{Arg } z$  και είναι η μοναδική εκείνη τιμή του  $\theta \in \arg z$  ώστε  $0 \leq \theta < 2\pi$ . Ισχύει:

$$\arg z = \text{Arg } z + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Από τον ορισμό του  $\text{Arg } z$  προκύπτει ότι αν  $z = a + bi$ , τότε:

1. Αν  $a \neq 0$  τότε από τη σχέση  $\tan \theta = \frac{y}{x}$  έχουμε:

$$\text{Arg } z = \arctan \frac{b}{a} + k\pi, \quad \text{όπου } k = \begin{cases} 0, & \text{για } a > 0, b \geq 0 \\ 1, & \text{για } a < 0 \\ 2, & \text{για } a > 0, b < 0 \end{cases}$$

2. Αν  $a = 0$  και  $b \neq 0$  τότε

$$\text{Arg } z = \begin{cases} \pi/2, & \text{για } b > 0 \\ 3\pi/2, & \text{για } b < 0 \end{cases}$$

Έστω  $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$ ,  $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$  και  $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$

### Ισότητα σε Πολική μορφή

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow r_1 = r_2 \quad \text{και} \quad \text{Arg } z_1 = \text{Arg } z_2 \quad \text{ή} \quad \theta_1 = \theta_2 + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

### Πράξεις σε Πολική μορφή

Τριγωνομετρική μορφή	Εκθετική μορφή
$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i(\sin \theta_1 + \theta_2)]$	$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$
$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i(\sin \theta_1 - \theta_2))]$	$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$
$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{r}(\cos \theta - i \sin \theta)$	$z^{-1} = \frac{1}{r} e^{-i\theta}$
$\bar{z} = r(\cos \theta - i \sin \theta)$	$\bar{z} = r e^{-i\theta}$

### Θεώρημα De Moivre

Αν  $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$  και  $n \in \mathbb{N}$  τότε

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

### Ρίζες Μιγαδικού αριθμού

Κάθε μιγαδικός αριθμός της μορφής  $a = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ ,  $a \neq 0$  έχει  $n$  ακριβώς διαφορετικές  $n$ -οστές ρίζες, που δίνονται από τον τύπο:

$$z_k = \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

## Κεφάλαιο 3

# Αλγεβρικές Ταυτότητες

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$

$$(x + y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

$$(x - y)^4 = x^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 + y^4$$

$$(x + y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$$

$$(x - y)^5 = x^5 - 5x^4y + 10x^3y^2 - 10x^2y^3 + 5xy^4 - y^5$$

$$(x + y)^6 = x^6 + 6x^5y + 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^4 + 6xy^5 + y^6$$

$$(x - y)^6 = x^6 - 6x^5y + 15x^4y^2 - 20x^3y^3 + 15x^2y^4 - 6xy^5 + y^6$$

$$\begin{aligned}
x^2 - y^2 &= (x - y)(x + y) \\
x^3 - y^3 &= (x - y)(x^2 + xy + y^2) \\
x^3 + y^3 &= (x + y)(x^2 - xy + y^2) \\
x^4 - y^4 &= (x - y)(x^3 + x^2y + xy^2 + y^3) \\
&= (x^2 - y^2)(x^2 + y^2) = (x - y)(x + y)(x^2 + y^2) \\
x^4 + y^4 &= (x^2 - \sqrt{2}xy + y^2)(x^2 + \sqrt{2}xy + y^2) \\
x^5 - y^5 &= (x - y)(x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4) \\
x^5 + y^5 &= (x + y)(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4) \\
x^6 - x^6 &= (x^2 - y^2)(x^4 + x^2y^2 + y^4) = (x - y)(x + y)(x^4 + x^2y^2 + y^4) \\
&= (x - y)(x + y)(x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2) \\
x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 &= (x + y)(x^2 + y^2) \\
x^4 + x^2y^2 + y^4 &= (x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2) \\
x^5 + x^4y + x^3y^2 + x^2y^3 + xy^4 + y^5 &= (x + y)(x^2 - xy + y^2)(x^2 + xy + y^2) \\
(x + y + z)^2 &= x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx \\
(x + y + z)^3 &= x^3 + y^3 + z^3 + 3x^2y + 3xy^2 + 3y^2z + 3yz^2 + 3z^2x + 3zx^2 + 6xyz \\
(x + y + z + w)^2 &= x^2 + y^2 + z^2 + w^2 + 2xy + 2xz + 2xw + 2yz + 2yw + 2zw
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x^{2n+1} - y^{2n+1} &= (x - y)(x^{2n} + x^{2n-1}y + x^{2n-2}y^2 + \dots + y^{2n}) \\
&= (x - y) \left( x^2 - 2xy \cos \frac{2\pi}{2n+1} + y^2 \right) \left( x^2 - 2xy \cos \frac{4\pi}{2n+1} + y^2 \right) \dots \left( x^2 - 2xy \cos \frac{2n\pi}{2n+1} + y^2 \right) \\
&= (x - y) \prod_{k=1}^n \left( x^2 - 2xy \cos \frac{2k\pi}{2n+1} + y^2 \right) \\
x^{2n+1} + y^{2n+1} &= (x + y)(x^{2n} - x^{2n-1}y + x^{2n-2}y^2 - \dots + y^{2n}) \\
&= (x + y) \left( x^2 + 2xy \cos \frac{2\pi}{2n+1} + y^2 \right) \left( x^2 + 2xy \cos \frac{4\pi}{2n+1} + y^2 \right) \dots \left( x^2 + 2xy \cos \frac{2n\pi}{2n+1} + y^2 \right) \\
&= (x + y) \prod_{k=1}^n \left( x^2 + 2xy \cos \frac{2k\pi}{2n+1} + y^2 \right) \\
x^{2n} - y^{2n} &= (x - y)(x + y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \dots)(x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \dots) \\
&= (x - y)(x + y) \left( x^2 - 2xy \cos \frac{\pi}{n} + y^2 \right) \left( x^2 - 2xy \cos \frac{2\pi}{n} + y^2 \right) \dots \left( x^2 - 2xy \cos \frac{(n-1)\pi}{n} + y^2 \right) \\
&= (x - y)(x + y) \prod_{k=1}^{n-1} \left( x^2 - 2xy \cos \frac{k\pi}{n} + y^2 \right) \\
x^{2n} + y^{2n} &= \left( x^2 + 2xy \cos \frac{\pi}{2n} + y^2 \right) \left( x^2 + 2xy \cos \frac{3\pi}{2n} + y^2 \right) \dots \left( x^2 + 2xy \cos \frac{(2n-1)\pi}{2n} + y^2 \right) \\
&= \prod_{k=0}^{n-1} \left( x^2 + 2xy \cos \frac{(2k+1)\pi}{2n} + y^2 \right)
\end{aligned}$$



## 3.1 Παραγοντικό

Αν  $n = 1, 2, 3, \dots$  τότε το  $n$  παραγοντικό ορίζεται ως:

$$n = n(n-1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Ορίζουμε επίσης:

$$0! = 1$$

## 3.2 Διωνυμικό Ανάπτυγμα

### 3.2.1 Τύπος του Διωνύμου

Αν  $n = 1, 2, 3, \dots$  τότε:

$$(x+y)^n = x^n + nx^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}y^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^{n-3}y^3 + \dots + y^n$$

### 3.2.2 Διωνυμικοί Συντελεστές

Αν  $0 \leq k \leq n$  με  $n = 1, 2, 3, \dots$  τότε ο παραπάνω τύπος μπορεί να ξαναγραφεί ως:

$$(x+y)^n = x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \binom{n}{3}x^{n-3}y^3 + \dots + \binom{n}{n}y^n$$

όπου οι συντελεστές λέγονται **διωνυμικοί συντελεστές** και δίνονται από τη σχέση:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k}$$

### 3.2.3 Ιδιότητες Διωνυμικών Συντελεστών

1. Οι διωνυμικοί συντελεστές δίνονται και από το **τρίγωνο του Pascal**, το οποίο έχεις τις εξής 2 ιδιότητες:

- Ο πρώτος και ο τελευταίος αριθμός κάθε γραμμής είναι 1.
- Οποιοσδήποτε άλλος αριθμός σε κάθε γραμμή, είναι το άθροισμα των 2 αριθμών που βρίσκονται ακριβώς από πάνω του στην αμέσως προηγούμενη γραμμή.

Η ιδιότητα 1ii αποτελεί την παρακάτω ιδιότητα των διωνυμικών συντελεστών:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

$$(a+b)^0 = 1$$

$$(a+b)^1 = 1a + b1$$

$$(a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + b^21$$

$$(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^31$$

$$(a+b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^41$$

$$(a+b)^5 = 1a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^51$$

$$(a+b)^6 = 1a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^61$$

2.  $\binom{n}{n} = 1$
3.  $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$
4.  $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$
5.  $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0$
6.  $\binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \binom{n+2}{n} + \cdots + \binom{n+m}{n} = \binom{n+m+1}{n+1}$
7.  $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots = 2^{n-1}$
8.  $\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \cdots = 2^{n-1}$
9.  $(\binom{n}{0})^2 + (\binom{n}{1})^2 + (\binom{n}{2})^2 + \cdots + (\binom{n}{n})^2 = \binom{2n}{n}$
10.  $\binom{m}{0} \binom{n}{p} + \binom{m}{1} \binom{n}{p-1} + \cdots + \binom{m}{p} \binom{n}{0} = \binom{m+n}{p}$
11.  $1 \cdot \binom{n}{1} + 2 \cdot \binom{n}{2} + 3 \cdot \binom{n}{3} + \cdots + n \cdot \binom{n}{n} = n2^{n-1}$
12.  $1 \cdot \binom{n}{1} - 2 \cdot \binom{n}{2} + 3 \cdot \binom{n}{3} - \cdots + (-1)^n n \cdot \binom{n}{n} = 0$

### 3.3 Πολυωνυμικό Ανάπτυγμα

Αν  $n_1, n_2, \dots, n_r$  είναι μη-αρνητικοί ακέραιοι τέτοιοι ώστε  $n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n$ , τότε η παράσταση

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_r} = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_r!}$$

λέγεται **πολυωνυμικός συντελεστής** και προκύπτει από τον τύπο του πολυωνυμικού αναπτύγματος

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_r)^n = \sum \binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_r} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_r^{n_r}$$

όπου το άθροισμα υπολογίζεται πάνω σε όλους τους δυνατούς πολυωνυμικούς συντελεστές.

### 3.4 Εκθετικές και Λογαριθμικές Συναρτήσεις

#### 3.4.1 Ιδιότητες των Δυνάμεων

Αν  $p, q$  είναι πραγματικοί αριθμοί,  $a, b$  θετικοί πραγματικοί αριθμοί και  $m, n$  θετικοί ακέραιοι, τότε:

$$\begin{array}{ll}
a^0 = 1 & a^1 = a \\
a^p \cdot a^q = a^{p+q} & \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q} \\
(a^p)^q = a^{p \cdot q} & a^{-p} = \frac{1}{a^p} \\
(a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p & \left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p} \\
\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} & \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} \\
\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} & \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}
\end{array}$$

Η συνάρτηση  $y = a^x$ , λέγεται **εκθετική** συνάρτηση.

### 3.4.2 Λογάριθμοι

Αν  $a^p = b$  με  $a > 0$ ,  $a \neq 1$  και  $b > 0$  τότε με  $p = \log_a b$  συμβολίζουμε τον **λογάριθμο** του  $b$  με βάση το  $a$ .

Η συνάρτηση  $y = \log_a x$ , λέγεται **λογαριθμική** συνάρτηση και είναι η αντίστροφη της εκθετικής. Δηλαδή ισχύει:

$$y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a y$$

$$\begin{array}{ll}
\log_a 1 = 0 & \log_a a = 1 \\
\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y & \log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y \\
\log_a x^k = k \cdot \log_a x & (\log_a b) \cdot (\log_b a) = 1
\end{array}$$

### 3.4.3 Αλλαγή Βάσης

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} = \log_a c \cdot \log_c b$$

Πιο συγκεκριμένα, ισχύει:

$$\begin{aligned}
\log_e b = \ln b &= \frac{\log_{10} b}{\log_{10} e} = \ln 10 \cdot \log_{10} b = 2.30258509294 \dots \cdot \log_{10} b \\
\log_{10} b = \log b &= \frac{\log_e b}{\log_{10} e} = \log_{10} e \cdot \ln b = 0.434294 \dots \cdot \ln b
\end{aligned}$$

## Κεφάλαιο 4

# Υπερβολικές Συναρτήσεις

### 4.0.1 Ορισμοί

Υπερβολικό Ημίτονο:	$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$
Υπερβολικό Συνημίτονο:	$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$
Υπερβολική Εφαπτομένη:	$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$
Υπερβολική Συνεφαπτομένη:	$\coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$
Υπερβολική Τέμνουσα:	$\operatorname{sech} x = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$
Υπερβολική Συντέμνουσα:	$\operatorname{csch} x = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$

### 4.0.2 Ταυτότητες μεταξύ Υπερβολικών συναρτήσεων

$$\begin{aligned}\cosh^2 x - \sinh^2 x &= 1 & \sinh x + \cosh x &= \frac{1}{\cosh x - \sinh x} \\ \tanh x &= \frac{\sinh x}{\cosh x} & \coth x &= \frac{1}{\tanh x} = \frac{\cosh x}{\sinh x} \\ \operatorname{sech} x &= \frac{1}{\cosh x} & \operatorname{csch} x &= \frac{1}{\sinh x} \\ \coth^2 x - \operatorname{csch}^2 x &= 1 & \operatorname{sech}^2 x + \tanh^2 x &= 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sinh(-x) &= -\sinh x \\ \cosh(-x) &= \cosh x \\ \tanh(-x) &= -\tanh x \\ \coth(-x) &= -\coth x \\ \operatorname{sech}(-x) &= \operatorname{sech} x \\ \operatorname{csch}(-x) &= -\operatorname{csch} x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sinh(x \pm y) &= \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y \\
\cosh(x \pm y) &= \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y \\
\tanh(x \pm y) &= \frac{\tanh x \pm \tanh y}{1 \pm \tanh x \tanh y} \\
\coth(x \pm y) &= \frac{\coth x \coth y \pm 1}{\coth y \pm \coth x}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sinh 2x &= 2 \sinh x \cosh x \\
\cosh 2x &= \cosh^2 x + \sinh^2 x \\
&= 2 \cosh^2 x - 1 \\
&= 1 + 2 \sinh^2 x \\
\tanh 2x &= \frac{2 \tanh x}{1 + \tanh^2 x}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sinh \frac{x}{2} &= \sqrt{\frac{\cosh x - 1}{2}}, \quad x > 0 & \sinh \frac{x}{2} &= -\sqrt{\frac{\cosh x - 1}{2}}, \quad x < 0 \\
\cosh \frac{x}{2} &= \sqrt{\frac{\cosh x + 1}{2}} \\
\tanh \frac{x}{2} &= \sqrt{\frac{\cosh x - 1}{\cosh x + 1}}, \quad x > 0 & \tanh \frac{x}{2} &= -\sqrt{\frac{\cosh x - 1}{\cosh x + 1}}, \quad x < 0 \\
&= \frac{\sinh x}{\cosh x + 1} \\
&= \frac{\cosh x - 1}{\sinh x}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sinh 3x &= 3 \sinh x + 4 \sinh^3 x \\
\cosh 3x &= 4 \cosh^3 x - 3 \cosh x \\
\tanh 3x &= \frac{3 \tanh x + \tanh^3 x}{1 + 3 \tanh^2 x} \\
\sinh 4x &= 8 \sinh^3 x \cosh x + 4 \sinh x \cosh^3 x \\
\cosh 4x &= 8 \cosh^4 x - 8 \cosh^2 x + 1 \\
\tanh 4x &= \frac{4 \tanh x + 4 \tanh^3 x}{1 + 6 \tanh^2 x + \tanh^4 x}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sinh^2 x &= \frac{1}{2} \cosh 2x - \frac{1}{2} \\
\cosh^2 x &= \frac{1}{2} \cosh 2x + \frac{1}{2} \\
\sinh^3 x &= \frac{1}{4} \sinh 3x - \frac{3}{4} \sinh x \\
\cosh^3 x &= \frac{1}{4} \cosh 3x + \frac{3}{4} \cosh x \\
\sinh^4 x &= \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cosh 2x + \frac{1}{8} \cosh 4x \\
\cosh^4 x &= \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cosh 2x + \frac{1}{8} \cosh 4x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sinh x + \sinh y &= 2 \sinh \frac{1}{2}(x+y) \cosh \frac{1}{2}(x-y) \\
\sinh x - \sinh y &= 2 \cosh \frac{1}{2}(x+y) \sinh \frac{1}{2}(x-y) \\
\cosh x + \cosh y &= 2 \cosh \frac{1}{2}(x+y) \cosh \frac{1}{2}(x-y) \\
\cosh x - \cosh y &= 2 \sinh \frac{1}{2}(x+y) \sinh \frac{1}{2}(x-y) \\
\sinh x \sinh y &= \frac{1}{2} \{ \cosh(x+y) - \cosh(x-y) \} \\
\cosh x \cosh y &= \frac{1}{2} \{ \cosh(x+y) + \cosh(x-y) \} \\
\sinh x \cosh y &= \frac{1}{2} \{ \sinh(x+y) + \sinh(x-y) \}
\end{aligned}$$

Αν θεωρήσουμε  $x > 0$  τότε ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις μεταξύ των υπερβολικών τριγωνομετρικών συναρτήσεων

	$\sinh x = u$	$\cosh x = u$	$\tanh x = u$	$\coth x = u$	$\operatorname{sech} x = u$	$\operatorname{csch} x = u$
$\sinh x$	$u$	$\sqrt{u^2 - 1}$	$u/\sqrt{1 - u^2}$	$1/\sqrt{u^2 - 1}$	$\sqrt{1 - u^2}/u$	$1/u$
$\cosh x$	$\sqrt{1 + u^2}$	$u$	$1/\sqrt{1 - u^2}$	$u/\sqrt{u^2 - 1}$	$1/u$	$\sqrt{1 + u^2}/u$
$\tanh x$	$u/\sqrt{1 + u^2}$	$\sqrt{u^2 - 1}/u$	$u$	$1/u$	$\sqrt{1 - u^2}$	$1/\sqrt{1 + u^2}$
$\coth x$	$\sqrt{u^2 + 1}/u$	$u/\sqrt{u^2 - 1}$	$1/u$	$u$	$1/\sqrt{1 - u^2}$	$\sqrt{1 + u^2}$
$\operatorname{sech} x$	$1/\sqrt{1 + u^2}$	$1/u$	$\sqrt{1 - u^2}$	$\sqrt{u^2 - 1}/u$	$u$	$u/\sqrt{1 + u^2}$
$\operatorname{csch} x$	$1/u$	$1/\sqrt{u^2 - 1}$	$\sqrt{1 - u^2}/u$	$\sqrt{u^2 - 1}$	$u/\sqrt{1 - u^2}$	$u$

### 4.0.3 Γραφικές παραστάσεις

### 4.0.4 Αντίστροφες Υπερβολικές Συναρτήσεις

$$\begin{aligned}\sinh^{-1} x &= \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) & -\infty < x < +\infty \\ \cosh^{-1} x &= \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) & x \geq 1 \\ \tanh^{-1} x &= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) & -1 < x < 1 \\ \coth^{-1} x &= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) & x > 1 \quad \text{ή} \quad x < -1 \\ \operatorname{sech}^{-1} x &= \ln\left(\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2} - 1}\right) & 0 < x \leq 1 \\ \operatorname{csch}^{-1} x &= \ln\left(\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1}\right) & x \neq 0\end{aligned}$$

### 4.0.5 Σχέσεις μεταξύ Υπερβολικών Συναρτήσεων

$$\begin{aligned}\operatorname{csch}^{-1} x &= \sinh^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) \\ \operatorname{sech}^{-1} x &= \cosh^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) \\ \coth^{-1} x &= \tanh^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) \\ \sinh^{-1}(-x) &= -\sinh^{-1} x \\ \tanh^{-1}(-x) &= -\tanh^{-1} x \\ \coth^{-1}(-x) &= -\coth^{-1} x \\ \operatorname{csch}^{-1}(-x) &= -\operatorname{csch}^{-1} x\end{aligned}$$

### 4.0.6 Γραφικές Παραστάσεις Αντίστροφων Υπερβολικών Συναρτήσεων

### 4.0.7 Σχέσεις μεταξύ Υπερβολικών Τριγωνομετρικών και Τριγωνομετρικών Συναρτήσεων

$$\begin{aligned}\sin(ix) &= i \sinh x & \sinh(ix) &= i \sin x \\ \cos(ix) &= \cosh x & \cosh(ix) &= \cos x \\ \tan(ix) &= i \tanh x & \tanh(ix) &= i \tan x \\ \cot(ix) &= -i \coth x & \coth(ix) &= -i \cot x \\ \sec(ix) &= \operatorname{sech} x & \operatorname{sech}(ix) &= \sec x \\ \csc(ix) &= -i \operatorname{csch} x & \operatorname{csch}(ix) &= -i \csc x\end{aligned}$$

### 4.0.8 Περιοδικότητα Υπερβολικών Συναρτήσεων

$$\begin{aligned}\sinh(x + 2k\pi i) &= \sinh x \\ \cosh(x + 2k\pi i) &= \cosh x \\ \tanh(x + 2k\pi i) &= \tanh x \\ \coth(x + 2k\pi i) &= \coth x \\ \operatorname{sech}(x + 2k\pi i) &= \operatorname{sech} x \\ \operatorname{csch}(x + 2k\pi i) &= \operatorname{csch} x\end{aligned}$$

#### 4.0.9 Σχέσεις μεταξύ αντίστροφων υπερβολικών και αντίστροφων τριγωνομετρικών συναρτήσεων

$$\begin{array}{ll} \sin^{-1}(ix) = i \sin^{-1} x & \sinh^{-1}(ix) = i \sin^{-1} x \\ \cos^{-1} x = \pm i \cosh^{-1} x & \cosh^{-1} x = \pm i \cos^{-1} x \\ \tan^{-1}(ix) = i \tanh^{-1} x & \tanh^{-1}(ix) = i \tan^{-1} x \\ \cot^{-1}(ix) = i \coth^{-1} x & \coth^{-1}(ix) = -i \cot^{-1} x \\ \sec^{-1} x = \pm i \operatorname{sech}^{-1} x & \operatorname{sech}^{-1} x = \pm i \sec^{-1} x \\ \csc^{-1}(ix) = -i \operatorname{csch}^{-1} x & \operatorname{csch}^{-1}(ix) = -i \csc^{-1} x \end{array}$$



## Κεφάλαιο 5

# Διαφορικός Λογισμός

### 5.1 Παράγωγοι

#### 5.1.1 Ορισμός

Η **παράγωγος** της συνάρτησης  $y = f(x)$  ως προς  $x$  ορίζεται να είναι το όριο

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

όταν αυτό υπάρχει για κάθε σημείο στο πεδίο ορισμού της, όπου  $h = \Delta x$ . Η παράγωγος συνάρτηση συμβολίζεται με  $\frac{df}{dx} = f'(x) = y'$ .

#### 5.1.2 Παράγωγοι Βασικών Συναρτήσεων

$$\frac{d}{dx}(c) = 0$$

$$\frac{d}{dx}(x) = 1$$

$$\frac{d}{dx}(x^a) = ax^{a-1}, \quad a \in \mathbb{R}$$

$$\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}$$

$$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a, \quad a > 0$$

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

$$\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x} \cdot \log_a e, \quad a > 0, a \neq 1$$

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$$

### 5.1.3 Παραγωγοί Τριγωνομετρικών και Αντίστροφων Τριγωνομετρικών Συναρτήσεων

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx}(\sin x) &= \cos x & \frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, & -\frac{\pi}{2} < \sin^{-1} x < \frac{\pi}{2} \\
 \frac{d}{dx}(\cos x) &= -\sin x & \frac{d}{dx}(\cos^{-1} x) &= \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, & 0 < \cos^{-1} x < \pi \\
 \frac{d}{dx}(\tan x) &= \frac{1}{\cos^2 x} & \frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) &= \frac{1}{1+x^2}, & -\frac{\pi}{2} < \tan^{-1} x < \frac{\pi}{2} \\
 \frac{d}{dx}(\cot x) &= -\frac{1}{\sin^2 x} & \frac{d}{dx}(\cot^{-1} x) &= \frac{-1}{1+x^2}, & 0 < \cot^{-1} x < \pi \\
 \frac{d}{dx}(\sec x) &= \sec x \cdot \tan x & \frac{d}{dx}(\sec^{-1} x) &= \begin{cases} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}, & \text{αν } 0 < \sec^{-1} x < \frac{\pi}{2} \\ \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}, & \text{αν } \frac{\pi}{2} < \sec^{-1} x < \pi \end{cases} \\
 \frac{d}{dx}(\csc x) &= -\csc x \cdot \cot x & \frac{d}{dx}(\csc^{-1} x) &= \begin{cases} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}, & \text{αν } 0 < \csc^{-1} x < \frac{\pi}{2} \\ \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}, & \text{αν } -\frac{\pi}{2} < \csc^{-1} x < 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

### 5.1.4 Παραγωγοί Υπερβολικών και Αντίστροφων Υπερβολικών Συναρτήσεων

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx}(\sinh x) &= \cosh x & \frac{d}{dx}(\sinh^{-1} x) &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \\
 \frac{d}{dx}(\cosh x) &= \sinh x & \frac{d}{dx}(\cosh^{-1} x) &= \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, & \text{αν } \cosh^{-1} x > 0, x > 1 \\ \frac{-1}{\sqrt{x^2-1}}, & \text{αν } \cosh^{-1} x < 0, x > 1 \end{cases} \\
 \frac{d}{dx}(\tanh x) &= \operatorname{sech}^2 x & \frac{d}{dx}(\tanh^{-1} x) &= \frac{1}{1-x^2}, & \text{αν } -1 < x < 1 \\
 \frac{d}{dx}(\coth x) &= -\operatorname{csch}^2 x & \frac{d}{dx}(\coth^{-1} x) &= \frac{1}{1-x^2}, & \text{αν } x > 1 \text{ ή } x < -1 \\
 \frac{d}{dx}(\operatorname{sech} x) &= -\operatorname{sech} x \cdot \tanh x & \frac{d}{dx}(\operatorname{sech}^{-1} x) &= \begin{cases} \frac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}, & \text{αν } \operatorname{sech}^{-1} x > 0, 0 < x < 1 \\ \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}, & \text{αν } \operatorname{sech}^{-1} x < 0, 0 < x < 1 \end{cases} \\
 \frac{d}{dx}(\operatorname{csch} x) &= -\operatorname{csch} x \cdot \coth x & \frac{d}{dx}(\operatorname{csch}^{-1} x) &= \begin{cases} \frac{-1}{x\sqrt{1+x^2}}, & \text{αν } x > 0 \\ \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}, & \text{αν } x < 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

### 5.1.5 Κανόνες Παραγωγίσης

Εστω  $f = f(x)$ ,  $g = g(x)$  και  $h = h(x)$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $c$  και  $n$  σταθερές.

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx}(cf) &= c \frac{df}{dx} \\
 \frac{d}{dx}(f \pm g) &= \frac{df}{dx} \pm \frac{dg}{dx} \\
 \frac{d}{dx}(fg) &= f \frac{dg}{dx} + g \frac{df}{dx} \\
 \frac{d}{dx}\left(\frac{f}{g}\right) &= \frac{f \frac{dg}{dx} - g \frac{df}{dx}}{g^2} \\
 \frac{d}{dx}(fgh) &= fg \frac{dh}{dx} + fh \frac{dg}{dx} + gh \frac{df}{dx}
 \end{aligned}$$

### 5.1.6 Σύνθετη Παραγώγιση

Έστω  $y = f(u)$  και  $u = g(x)$ . Τότε

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \quad (\text{Κανόνας Αλυσίδας})$$

Ο παραπάνω τύπος γενικεύεται και για συναρτήσεις που είναι σύνθεση περισσότερων των δύο συναρτήσεων, όπως για παράδειγμα, αν  $y = f(u)$ ,  $u = g(v)$  και  $v = h(x)$ , τότε

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$$

### 5.1.7 Παράγωγος Αντίστροφης Συνάρτησης

Έστω  $y = f(x)$ , συνεχής και γνησίως μονότονη συνάρτηση. Τότε ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση  $x = f^{-1}(y)$  και ισχύει:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

### 5.1.8 Παράγωγοι Ανώτερης Τάξης

$$\text{Δεύτερη Παράγωγος} \quad \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) = \frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) = y''$$

$$\text{Τρίτη Παράγωγος} \quad \frac{d}{dx} \left( \frac{d^2y}{dx^2} \right) = \frac{d^3y}{dx^3} = f'''(x) = y'''$$

$$\text{Παράγωγος τάξης } n \quad \frac{d}{dx} \left( \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} \right) = \frac{d^ny}{dx^n} = f^{(n)}(x) = y^{(n)}$$