Κεφάλαιο 1

Στατιστική - Πιθανότητες

1.1 Αριθμητικές Μέθοδοι Σύνοψης Δεδομένων

Μη Ομαλοποιημένα Δεδομένα	Ομαλοποιημένα Δεδομένα

Μέτρα θέσης - Κεντρικής Τάσης

Αριθμητικός Μέσος

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$$

$$\overline{X} \cong \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i m_i}{n},\ n = \sum_{i=1}^{k} f_i$$

Σταθμικός Αριθμητικός Μέσος

$$\overline{X}_w = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i X_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i}$$

Διάμεσος

- Αν n περιττός: M η τιμή της παρατήρησης στη θέση $\dfrac{n}{2} + \dfrac{1}{2}$

$$M = X_{\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right)}$$

- Αν n άρτιος:

$$M = \frac{1}{2}\left(X_{\left(\frac{n}{2}+1\right)} + X_{\left(\frac{n}{2}\right)}\right)$$

$$M \cong L_M + \frac{\delta}{f_M}\left(\frac{n}{2} - F_{M-1}\right)$$

Επικρατούσα Τιμή

T_0: Η τιμή με τη μεγαλύτερη συχνότητα εμφάνισης

$$T_0 = L_{T_0} + \delta\frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2}$$

i-Τεταρτημόριο

Το $i = 1,2,3$ τεταρτημόριο (Q_i) βρίσκεται στην $[\dfrac{i(n+1)}{4}]$ θέση. Η τιμή του $i = 1,2,3$ τεταρτημορίου (Q_i) είναι

$$Q_i = X_{(A_Q)} + \Delta_Q [X_{(A_Q+1)} - X_{(A_Q)}]$$

όπου A_Q είναι το ακέραιο μέρος του πηλίκου $[\dfrac{i(n+1)}{4}]$ και Δ_Q είναι το δεκαδικό μέρος του πηλίκου $[\dfrac{i(n+1)}{4}]$.

$$Q_i = L_{Q_i} + \frac{\delta}{f_{Q_i}} \left(\frac{n \cdot i}{4} - F_{Q_i - 1} \right)$$

Μέτρα Διασποράς

Εύρος

$$R = X_{max} - X_{min}$$

Ενδοτεταρτημοριακό Εύρος

$$IR = Q_3 - Q_1$$

$$IR = Q_3 - Q_1$$

Τεταρτημοριακή Απόκλιση

$$Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

$$Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

Διακύμανση

$$S^2_{\text{ορ}} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2}{n}$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2}{n-1}$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\overline{X}^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n-1} - \frac{(\sum_{i=1}^n X_i)^2}{n(n-1)}$$

$$S^2 \cong \frac{\sum_{i=1}^k f_i (m_i - \overline{X})^2}{n-1}, \; n = \sum_{i=1}^k f_i$$

$$S^2 \cong \frac{\sum_{i=1}^k f_i m_i^2 - n\overline{X}^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^k f_i m_i^2}{n-1} - \frac{(\sum_{i=1}^k f_i m_i)^2}{(n-1)n}$$

Τυπική Απόκλιση

$$S_{\text{ορ}} = +\sqrt{S^2_{\text{ορ}}} \quad \text{ή} \quad S = +\sqrt{S^2}$$

$$S = +\sqrt{S^2}$$

Μέτρα Σχετικής Μεταβλητότητας

Συντελεστής Μεταβλητότητας

$$CV = \frac{S}{X}$$

$$CV = \frac{S}{X}$$

Μέτρα Ασυμμετρίας

Συντελεστές Ασυμμετρίας

$$S_P = \frac{\overline{X} - T_0}{S}$$

$$S_P = \frac{\overline{X} - T_0}{S}$$

$$\beta_3 = \frac{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^3}{n}}{S^3}$$

$$\beta_3 \frac{\frac{\sum_{i=1}^{k} f_i(m_i - \overline{X})^3}{n}}{S^3}$$

Μέτρα Κύρτωσης

Συντελεστής Κύρτωσης

$$\beta_4 = \frac{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^4}{n}}{S^4}$$

$$\beta_4 = \frac{\frac{\sum_{i=1}^{k} f_i(m_i - \overline{X})^4}{n}}{S^4}$$

1.2 Πιθανότητες

Αξιώματα του Kolmogorov

Έστω S ένας δειγματικός χώρος και έστω $\boldsymbol{B}$ το σύνολο όλων των ενδεχομένων του S. Ορίζουμε ως συνάρτηση πιθανότητας μια συνάρτηση $P\colon \boldsymbol{B} \to \mathbb{R}$, η οποία σε κάθε ενδεχόμενο A αντιστοιχεί έναν πραγματικό αριθμό $P(A)$ έτσι ώστε να ικανοποιούνται τα παρακάτω αξιώματα:

i) $P(A) \geq 0$

ii) $P(S) = 1$

iii) $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$

Βασικά Θεωρήματα Πιθανοτήτων

Θεώρημα 1.2.1. *Για κάθε ενδεχόμενο A ισχύει $P(A') = 1 - P(A)$*

Θεώρημα 1.2.2. *Ισχύει ότι $P(\emptyset) = 0$*

Θεώρημα 1.2.3. *Για κάθε ενδεχόμενο A ισχύει $P(A) \leq 1$*

Θεώρημα 1.2.4. *Για οποιαδήποτε ενδεχόμενα A_1 και A_2 ισχύει:*

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$$

Παρατηρήσεις 1.2.1.

- Το θεώρημα 1.2.4 γενικεύεται για την περίπτωση n ενδεχομένων. Στην περίπτωση όπου $n = 3$ γίνεται:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - \\ - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

- Για δύο ενδεχόμενα τα οποία είναι ασυμβίβαστα το θεώρημα 1.2.4 οδηγεί στο συμπέρασμα:

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2), \quad A_1 \cup A_2 = \emptyset$$

το οποίο είναι ειδική περίπτωση του 3ου αξιώματος.

Δεσμευμένη Πιθανότητα

$$P(A_1 \mid A_2) = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_2)}, \quad P(A_2) \geq 0$$
$$P(A_2 \mid A_1) = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)}, \quad P(A_1) \geq 0$$

Ανεξάρτητα Ενδεχόμενα

- 2 ενδεχόμενα A_1, A_2 είναι *ανεξάρτητα* αν $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2)$.
- 3 ενδεχόμενα A_1, A_2, A_3 είναι *ανεξάρτητα* αν

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2) &= P(A_1) \cdot P(A_2) \\ P(A_1 \cap A_3) &= P(A_1) \cdot P(A_3) \\ P(A_2 \cap A_3) &= P(A_2) \cdot P(A_3) \\ P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) &= P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3). \end{aligned}$$

- n ενδεχόμενα $A_1, A_2, \ldots, A_n$ είναι *ανεξάρτητα* αν για κάθε συνδυασμό δύο ή περισσοτέρων από αυτά ισχύει

$$P\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right) = P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdots P(A_{i_k}),$$

με $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_k \leq n$.

Ενδεχόμενα Ανεξάρτητα κατά Ζεύγη

Τα ενδεχόμενα $A_1, A_2, \ldots, A_n$ λέγονται ανεξάρτητα κατά ζεύγη αν

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2), \quad \text{για κάθε} \quad i, j = 1, 2, \ldots, n, \quad i \neq j.$$

Προφανώς, n ενδεχόμενα μπορεί να είναι ανεξάρτητα κατά ζεύγη χωρίς να είναι ανεξάρτητα.

Κανόνας Πολλαπλασιασμού Πιθανοτήτων

- Για 2 ενδεχόμενα

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2 \mid A_1) = P(A_2) \cdot P(A_1 \mid A_2)$$

- Για 3 ενδεχόμενα

$$P[A_1 \cap A_2 \cap A_3] = P[A_1] \cdot P[A_2 \mid A_1] \cdot P[A_3 \mid A_1 \cap A_2]$$

- Για n ενδεχόμενα

$$P[A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n] = P[A_1] \cdot P[A_2 \mid A_1] \cdot P[A_3 \mid A_1 \cap A_2] \cdots P\left[A_n \,\middle|\, \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right]$$

Θεώρημα της Ολικής Πιθανότητας

Έστω ότι $A_1, A_2, \ldots, A_n$ είναι μια διαμέριση του δειγματικού χώρου S τέτοια ώστε $P(A_i) \neq 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Τότε για κάθε ενδεχόμενο E έχουμε ότι

$$P(E) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(E \mid A_i)$$

Θεώρημα του Bayes

Έστω ότι $A_1, A_2, \ldots, A_n$ είναι μια διαμέριση του δειγματικού χώρου S τέτοια ώστε $P(A_i) \neq 0,\ i = 1, 2, \ldots, n$. Τότε για κάθε ενδεχόμενο E με $P(E) > 0$ έχουμε ότι

$$P(A_k \mid E) = \frac{P(A_k) \cdot P(E \mid A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(E \mid A_i)} = \frac{P(A_k) \cdot P(E \mid A_k)}{P(E)}$$

1.3 Αρχές Απαρίθμησης

Μεταθέσεις

$$P_n = n!$$

Επαναληπτικές Μεταθέσεις

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdots n_k!}$$

Διατάξεις

$$P(n, x) = \frac{n!}{(n-x)!}$$

Επαναληπτικές Διατάξεις

$$n^x$$

Συνδυασμοί

$$C(n, x) = \binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$

1.4 Κατανομές Πιθανότητας

Διακριτή Τυχαία Μεταβλητή

Η **συνάρτηση πιθανότητας** $P(X = x)$ μιας διακριτής τυχαίας μεταβλητής X ικανοποιεί τις συνθήκες:

i) $P(X = x) \geq 0$, $\forall x$ στο Πεδίο Ορισμού

ii) $\sum_x P(X = x) = 1$

Η **αθροιστική συνάρτηση κατανομής** $F(a)$ μιας διακριτής τυχαίας μεταβλητής X υπολογίζεται με βάση τη σχέση:

$$F(a) = P(X \leq a) = \sum_{x \leq a} (P(X = x)), \forall a \in \mathbb{R}$$

Η **μέση (αναμενόμενη) τιμή** $\mu = E(X)$ μιας διακριτής τυχαίας μεταβλητής X υπολογίζεται με βάση τον τύπο:

$$E(X) = \sum_x xP(X = x) < +\infty$$

Αν X διακριτή τυχαία μεταβλητή και $g(\cdot)$ μια πραγματική συνάρτηση, τότε η μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής $g(X)$ δίνεται από τη σχέση:

$$E[g(X)] = \sum_x g(x)P(X = x) < +\infty$$

Συνεχής Τυχαία Μεταβλητή

Η **συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας** $f(x)$ μιας συνεχούς τυχαίας μεταβλητής X ικανοποιεί τις συνθήκες:

i) $f(x) \geq 0, -\infty < x < +\infty$

ii) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1$

Η **αθροιστική συνάρτηση κατανομής** $F(a)$ μιας συνεχούς τυχαίας μεταβλητής X υπολογίζεται με βάση τη σχέση:

$$F(a) = P(X \leq a) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt, \forall a \in \mathbb{R}$$

Η **μέση (αναμενόμενη) τιμή** $E(X)$ μιας συνεχούς τυχαίας μεταβλητής X υπολογίζεται με βάση τον τύπο:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\, dx < +\infty$$

Αν X συνεχής τυχαία μεταβλητή και $g(\cdot)$ μια πραγματική συνάρτηση, τότε η μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής $g(X)$ δίνεται από τη σχέση:

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)\, dx < +\infty$$

Ιδιότητες της Μέσης Τιμής

1. $E[ag(X) + b] = aE[g(X)] + b$, όπου a, b σταθερές.
2. $E[a_1 g_1(x) + a_2 g_2(x)] = a_1 E[g_1(x)] + a_2 E[g_2(x)]$, όπου a_1, a_2 σταθερές.

Διακύμανση

Έστω X τυχαία μεταβλητή (διακριτή ή συνεχής) με μέση τιμή $\mu = E(X)$. Η **διακύμανση** της X συμβολίζεται με $V(X)$ η σ^2 και δίνεται από τη σχέση:

$$V(X) = \sigma^2 E[X - E(X)]^2 = E(X - \mu)^2 = E(X^2) - \mu^2$$

Ιδιότητα της Διακύμανσης

1. $V(aX + b) = a^2 V(X)$, όπου a, b σταθερές

Ειδικές Κατανομές

Διακριτές Κατανομές

Όνομα Κατανομής	Παράμετροι	Συνάρτηση πιθανότητας	Σύνολο τιμών	Μέση τιμή	Διασπορά
Διωνυμική $B(n,p)$	$n \in \mathbb{Z}_+$ $0<p<1$	$\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$	$x = 0, 1, \ldots, n$	np	$np(1-p)$
Poisson $P(\lambda)$	$\lambda > 0$	$e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}$	$x = 0, 1, \ldots$	λ	λ
Γεωμετρική $G(p)$	$0<p<1$	$p(1-p)^{x-1}$	$x = 0, 1, \ldots$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
Υπεργεωμετρική $H(n,a,b)$	$a, b \in \mathbb{Z}_+$ $n \leq a+b$	$\frac{\binom{a}{x}\binom{b}{n-x}}{\binom{a+b}{n}}$	$x = 0, 1, \ldots, n$	$\frac{a}{a+b}$	$\frac{nab}{(a+b)^2}$

Συνεχείς Κατανομές

Όνομα Κατανομής	Παράμετροι	Συνάρτηση πιθανότητας	Σύνολο τιμών	Μέση τιμή	Διασπορά
Κανονική $N(\mu, \sigma^2)$	$-\infty < \mu < +\infty$ $\sigma > 0$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$	$-\infty < x < +\infty$	μ	σ^2
Εκθετική $E(\lambda)$	$\lambda > 0$	$\lambda e^{-\lambda x}$	$0 < x < +\infty$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Ομοιόμορφη $U(a,b)$	$-\infty < a, b < +\infty$	$\frac{1}{b-a}$	$a < x < b$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Τυποποιημένη Κανονική $N(0,1)$	$-\infty < Z = \frac{X-\mu}{\sigma} < +\infty$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{1}{2}z^2}$	$-\infty < z < +\infty$	0	1

1.5 Συντελεστές Ευθείας Παλινδρόμησης

$$\hat{Y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum[(Y_i - \overline{Y})(X_i - \overline{X})]}{\sum[(X_i - \overline{X})^2]} = \frac{\sum X_i Y_i - \frac{\sum X_i \sum Y_i}{n}}{\sum X_i^2 - \frac{(\sum X_i^2)}{n}}$$

$$\hat{\beta}_0 = \frac{\sum Y_i}{n} - \hat{\beta}_1 \frac{\sum X_i}{n} = \overline{Y} - \hat{\beta}_1 \overline{X}$$

1.6 Συντελεστής Συσχέτισης

$$r = \frac{\sum[(Y_i - \overline{Y})(X_i - \overline{X})]}{\sqrt{\sum(Y_i - \overline{Y})^2 \sum(X_i - \overline{X})^2}} = \frac{\sum X_i Y_i - \frac{\sum X_i \sum Y_i}{n}}{\sqrt{[\sum X_i^2 - \frac{(\sum X_i)^2}{n}][\sum Y_i^2 - \frac{(\sum Y_i)^2}{n}]}}, r \in [-1, 1]$$

1.7 Συντελεστής Προσδιορισμού

$$R^2 = \frac{(\sum[(Y_i - \overline{Y})(X_i - \overline{X})])^2}{\sum(Y_i - \overline{Y})^2 \sum(X_i - \overline{X})^2} = \frac{(\sum X_i Y_i - \frac{\sum X_i \sum Y_i}{n})^2}{[\sum X_i^2 - \frac{(\sum X_i)^2}{n}][\sum Y_i^2 - \frac{(\sum Y_i)^2}{n}]}, R^2 \in [0, 1]$$

Κεφάλαιο 2

Μιγαδικοί Αριθμοί

2.1 Μιγαδικοί Αριθμοί

Ορισμός

Έστω $a, b \in \mathbb{R}$ και $i = \sqrt{-1}$ η **φανταστική μονάδα**. Κάθε παράσταση της μορφής $a + bi$ παριστάνει έναν μιγαδικό αριθμό. Με $\operatorname{Re} z$ και $\operatorname{Im} z$ συμβολίζουμε το πραγματικό και το φανταστικό μέρος αντίστοιχα, του μιγαδικού αριθμού $z = a + bi$. Ισχύει, $\operatorname{Re} z = a$ και $\operatorname{Im} z = b$. Το σύνολο των μιγαδικών αριθμών το συμβολίζουμε με $\mathbb{C}$.

Ισότητα

Έστω $z_1 = a + bi$ και $z_2 = c + di$ μιγαδικοί αριθμοί.

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow a = c \quad \text{και} \quad b = d$$

Γεωμετρική Αναπαράσταση των Μιγαδικών Αριθμών

Έστω xOy καρτεσιανό σύστημα αξόνων και $z = a + bi$ μιγαδικός αριθμός. Στον μιγαδικό αριθμό z αντιστοιχίζουμε το ζεύγος (a, b) και επομένως το σημείο $M(a, b)$ με συντεταγμένες a, b το οποίο ονομάζουμε γεωμετρική εικόνα του μιγαδικού z.

Επίσης στο σημείο $M(a, b)$ και άρα και στον μιγαδικό αριθμό z αντιστοιχίζουμε το διάνυσμα θέσης $\vec{OM}$.

Μέτρο

Το μέτρο του μιγαδικού αριθμού $z = a + bi$ το συμβολίζουμε με $|z|$ και ισχύει

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

- $OM = \sqrt{(a^2 + b^2)} = |z|$
- $|a| = |\operatorname{Re} z| \leq |z|$
- $|b| = |\operatorname{Im} z| \leq |z|$

Πράξεις

Έστω $z_1 = a + bi$ και $z_2 = c + di$ μιγαδικοί αριθμοί.

Πρόσθεση

$z_1 + z_2 = (a+bi) + (c+di) = (a+c) + (b+d)i$

Αφαίρεση

$z_1 - z_2 = (a+bi) - (c+di) = (a-c) + (b-d)i$

Πολλαπλασιασμός

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (a+bi)\cdot(c+di) \\ &= ac + adi + bci + bdi^2 \\ &= ac - bd + (ad+bc)i \end{aligned}$$

Διαίρεση

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{(a+bi)}{(c+di)} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} \\ &= \frac{ac+bd+(-ad+bc)}{b^2+d^2} \\ &= \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2} \end{aligned}$$

Συνοπτικά

- $z_1 + z_2 = (a+c) + (b+d)i$
- $z_1 - z_2 = (a-c) + (b-d)i$
- $z_1 \cdot z_2 = (ac-bd) + (ad+bc)i$
- $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{ac+bd}{c^2+d^2} + \dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}i$

Ιδιότητες των Πράξεων

Έστω z_1, z_2, z_3 και z μιγαδικοί αριθμοί.

Πρόσθεση	Πολλαπλασιασμός
$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$	$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$
$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$	$z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3$
$z + 0 = 0 + z = z$	$z \cdot 1 = 1 \cdot z = z$
$z + (-z) = (-z) + z = 0$	$z \cdot z^{-1} = z^{-1} \cdot z = 1$
$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$	

$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$

Δυνάμεις

Έστω $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$.

- $z^n = \underbrace{z \cdot z \cdots z}_{n \text{ φορές}}$, $n > 0$
- $z^0 = 1$
- $z^n = (z^{-1})^{-n}$, $n < 0$

Ιδιότητες των Δυνάμεων

Έστω $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$.

- $z^m \cdot z^n = z^{m+n}$

- $\dfrac{z^m}{z^n} = z^{m-n}$
- $(z^m)^n = z^{m \cdot n}$
- $(z_1 \cdot z_2)^n = z_1^n \cdot z_2^n$
- $(\dfrac{z_1}{z_2})^n = \dfrac{z_1^n}{z_2^n}$
- $z = 0 \Rightarrow 0^n = 0,\ n > 0$

Δυνάμεις της Φανταστικής Μονάδας

- $i^0 = 1$
- $i^1 = i$
- $i^2 = -1$
- $i^3 = i^2 \cdot i = -i$
- $i^4 = i^3 \cdot i = 1$
- $i^5 = i^4 \cdot i = i$
- $i^6 = i^5 \cdot i = -1$
- $i^7 = i^6 \cdot i = -i$

Αποδεικνύεται με επαγωγή ότι για κάθε $n > 0$

- $i^{4n} = 1$
- $i^{4n+1} = i$
- $i^{4n+2} = -1$
- $i^{4n+3} = -i$
- $i^n = (i^{-1})^{-n} = \left(\dfrac{1}{i}\right)^{-n} = (-i)^{-n},\ n < 0$

Συζυγής

Έστω $z = a + bi$ μιγαδικός αριθμός. Με $\overline{z}$ συμβολίζουμε τον συζυγή μιγαδικό αριθμό του z και ισχύει $\overline{z} = a - bi$.

Ιδιότητες Συζυγών

- $\overline{\overline{z}} = z$
- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ και
- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ και
- $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}},\ z_2 \neq 0$
- $\overline{z^n} = \overline{z}^n$
- $z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2$
- $z = \overline{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$
- $\overline{\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} z_k\right)} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \overline{z}_k \Leftrightarrow \overline{z_1 + z_2 + \cdots + z_n} = \overline{z_1} + \overline{z_2} + \cdots \overline{z_n}$
- $\overline{\left(\displaystyle\prod_{k=1}^{n} z_k\right)} = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \overline{z}_k \Leftrightarrow \overline{z_1 \cdot z_2 \cdots z_n} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} \cdots \overline{z_n}$

- $\operatorname{Re} z = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$
- $\operatorname{Im} z = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$

Ιδιότητες Μέτρου

- $|z| \geq 0$ και $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
- $-|z| \leq \operatorname{Re} z \leq |z|$
- $-\overline{z} \leq \operatorname{Re} z \leq |\operatorname{Re} z| \leq \overline{z}$
- $-\overline{z} \leq \operatorname{Im} z \leq |\operatorname{Im} z| \leq \overline{z}$
- $|z| = |-z| = |\overline{z}| = |-\overline{z}|$
- $z \cdot \overline{z} = |z|^2 \in \mathbb{R}$
- $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
- $|z_1 - z_2| \leq |z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
- $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$, $z_2 \neq 0$
- $\left|\prod_{k=1}^{n} z_k\right| = \prod_{k=1}^{n} |z_k|$
- $\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |z_k|$
- $\left|z^k\right| = |z|^k$, $k \in \mathbb{Z}$, άρα $\left|z^{-1}\right| = |z|^{-1}$, $z \neq 0$
- $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$
- $|z + 1| \geq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ και $\left|z^2 + 1\right| \geq 1$
- $|z_1 + z_2|^2 + |z_2 + z_3|^2 + |z_3 + z_1|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + |z_1 + z_2 + z_3|^2$
- $|1 + z_1\overline{z_2}|^2 \pm |z_1 - z_2|^2 = (1 \pm |z_1|^2)(1 \pm |z_2|^2)$
- $|z_1 + z_2 + z_3|^2 + |-z_1 + z_2 + z_3|^2 + |z_1 - z_2 + z_3|^2 + |z_1 + z_2 - z_3|^2 = 4(|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2)$

Πολική μορφή Μιγαδικού αριθμού

Έστω $z = a + bi$ μιγαδικός αριθμός. Έστω $r = |z|$ και θ η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα θέσης του z με τον θετικό ημιάξονα x και η οποία μετριέται σε ακτίνια. Τότε $x = r\cos\theta$ και $y = r\sin\theta$ και επομένως ο μιγαδικός z μπορεί να γραφεί σε τριγωνομετρική ή πολική μορφή ως:

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

και χρησιμοποιώντας την ταυτότητα Euler $e^{ix} = \cos x + i\sin x$, $x \in \mathbb{R}$ σε εκθετική μορφή ως:

$$z = re^{i\theta}$$

Οι τιμές των r, θ λέγονται πολικές συντεταγμένες του z. Κάθε τιμή του θ λέγεται όρισμα του z, και με $\arg z$ συμβολίζουμε το σύνολο των ορισμάτων του z, που είναι άπειρα και διαφέρουν μεταξύ τους κατά 2π. Αν $z = 0$ τότε δεν ορίζεται το όρισμα του. Ισχύει:

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

Το Πρωτεύον όρισμα του $\arg z$ το συμβολίζουμε με $\operatorname{Arg} z$ και είναι η μοναδική εκείνη τιμή του $\theta \in \arg z$ ώστε $0 \leq \theta < 2\pi$. Ισχύει:

$$\arg z = \operatorname{Arg} z + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Από τον ορισμό του $\operatorname{Arg} z$ προκύπτει ότι αν $z = a + bi$, τότε:

1. Αν $a \neq 0$ τότε από τη σχέση $\tan\theta = \dfrac{y}{x}$ έχουμε:

$$\operatorname{Arg} z = \arctan\frac{b}{a} + k\pi, \quad \text{όπου} \quad k = \begin{cases} 0, & \text{για} \quad a > 0, b \geq 0 \\ 1, & \text{για} \quad a < 0 \\ 2, & \text{για} \quad a > 0, b < 0 \end{cases}$$

2. Αν $a = 0$ και $b \neq 0$ τότε

$$\operatorname{Arg} = \begin{cases} \pi/2, & \text{για} \quad b > 0 \\ 3\pi/2, & \text{για} \quad b < 0 \end{cases}$$

Έστω $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1), z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ και $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

Ισότητα σε Πολική μορφή

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow r_1 = r_2 \quad \text{και} \quad \operatorname{Arg} z_1 = \operatorname{Arg} z_2 \quad \text{ή} \quad \theta_1 = \theta_2 + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Πράξεις σε Πολική μορφή

Τριγωνομετρική μορφή	Εκθετική μορφή
$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i(\sin\theta_1 + \theta_2)]$	$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$
$\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}[(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i(\sin\theta_1 - \theta_2))]$	$\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$
$z^{-1} = \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{r}(\cos\theta - i\sin\theta)$	$z^{-1} = \dfrac{1}{r} e^{-i\theta}$
$\overline{z} = r(\cos\theta - i\sin\theta)$	$\overline{z} = re^{-i\theta}$

Θεώρημα De Moivre

Αν $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ και $n \in \mathbb{N}$ τότε

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

Ρίζες Μιγαδικού αριθμού

Κάθε μιγαδικός αριθμός της μορφής $a = r(\cos\theta + i\sin\theta), a \neq 0$ έχει n ακριβώς διαφορετικές n-οστές ρίζες, που δίνονται από τον τύπο:

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

Κεφάλαιο 3

Αλγεβρικές Ταυτότητες

$$
\begin{aligned}
&(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2\\
&(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2\\
&(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3\\
&(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3\\
&(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4\\
&(x-y)^4 = x^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 + y^4\\
&(x+y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5\\
&(x-y)^5 = x^5 - 5x^4y + 10x^3y^2 - 10x^2y^3 + 5xy^4 - y^5\\
&(x+y)^6 = x^6 + 6x^5y + 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^4 + 6xy^5 + y^6\\
&(x-y)^6 = x^6 - 6x^5y + 15x^4y^2 - 20x^3y^3 + 15x^2y^4 - 6xy^5 + y^6
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x^2 - y^2 &= (x-y)(x+y) \\
x^3 - y^3 &= (x-y)(x^2+xy+y^2) \\
x^3 + y^3 &= (x+y)(x^2-xy+y^2) \\
x^4 - y^4 &= (x-y)(x^3+x^2y+xy^2+y^3) \\
&= (x^2-y^2)(x^2+y^2) = (x-y)(x+y)(x^2+y^2) \\
x^4 + y^4 &= (x^2-\sqrt{2}xy+y^2)(x^2+\sqrt{2}xy+y^2) \\
x^5 - y^5 &= (x-y)(x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4) \\
x^5 + y^5 &= (x+y)(x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4) \\
x^6 - x^6 &= (x^2-y^2)(x^4+x^2y^2+y^4) = (x-y)(x+y)(x^4+x^2y^2+y^4) \\
&= (x-y)(x+y)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2) \\
x^3+x^2y+xy^2+y^3 &= (x+y)(x^2+y^2) \\
x^4+x^2y^2+y^4 &= (x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2) \\
x^5+x^4y+x^3y^2+x^2y^3+xy^4+y^5 &= (x+y)(x^2-xy+y^2)(x^2+xy+y^2) \\
(x+y+z)^2 &= x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx \\
(x+y+z)^3 &= x^3+y^3+z^3+3x^2y+3xy^2+3y^2z+3yz^2+3z^2x+3zx^2+6xyz \\
(x+y+z+w)^2 &= x^2+y^2+z^2+w^2+2xy+2xz+2xw+2yz+2yw+2zw
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x^{2n+1} - y^{2n+1} &= (x-y)(x^{2n}+x^{2n-1}y+x^{2n-2}y^2+\cdots+y^{2n}) \\
&= (x-y)\left(x^2-2xy\cos\frac{2\pi}{2n+1}+y^2\right)\left(x^2-2xy\cos\frac{4\pi}{2n+1}+y^2\right)\cdots\left(x^2-2xy\cos\frac{2n\pi}{2n+1}+y^2\right) \\
&= (x-y)\prod_{k=1}^{n}\left(x^2-2xy\cos\frac{2k\pi}{2n+1}+y^2\right) \\
x^{2n+1} + y^{2n+1} &= (x+y)(x^{2n}-x^{2n-1}y+x^{2n-2}y^2-\cdots+y^{2n}) \\
&= (x+y)\left(x^2+2xy\cos\frac{2\pi}{2n+1}+y^2\right)\left(x^2+2xy\cos\frac{4\pi}{2n+1}+y^2\right)\cdots\left(x^2+2xy\cos\frac{2n\pi}{2n+1}+y^2\right) \\
&= (x+y)\prod_{k=1}^{n}\left(x^2+2xy\cos\frac{2k\pi}{2n+1}+y^2\right) \\
x^{2n} - y^{2n} &= (x-y)(x+y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+x^{n-3}y^2+\cdots)(x^{n-1}-x^{nn-2}y+x^{n-3}y^2-\cdots) \\
&= (x-y)(x+y)\left(x^2-2xy\cos\frac{\pi}{n}+y^2\right)\left(x^2-2xy\cos\frac{2\pi}{n}+y^2\right)\cdots\left(x^2-2xy\cos\frac{(n-1)\pi}{n}+y^2\right) \\
&= (x-y)(x+y)\prod_{k=1}^{n-1}\left(x^2-2xy\cos\frac{k\pi}{n}+y^2\right) \\
x^{2n} + y^{2n} &= \left(x^2+2xy\cos\frac{\pi}{2n}+y^2\right)\left(x^2+2xy\cos\frac{3\pi}{2n}+y^2\right)\cdots\left(x^2+2xy\cos\frac{(2n-1)\pi}{2n}+y^2\right) \\
&= \prod_{k=0}^{n-1}\left(x^2+2xy\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}+y^2\right)
\end{aligned}
$$

3.1 Παραγοντικό

Αν $n = 1, 2, 3, \ldots$ τότε το ***n*** **παραγοντικό** ορίζεται ως:

$$n \quad = n(n-1)\cdot\dots\cdot 3\cdot 2\cdot 1$$

Ορίζουμε επίσης:

$$0! = 1$$

3.2 Διωνυμικό Ανάπτυγμα

3.2.1 Τύπος του Διωνύμου

Αν $n = 1, 2, 3, \ldots$ τότε:

$$(x+y)^n = x^n + nx^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}y^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^{n-3}y^3 + \cdots + y^n$$

3.2.2 Διωνυμικοί Συντελεστές

Αν $0 \leq k \leq n$ με $n = 1, 2, 3, \ldots$ τότε ο παραπάνω τύπος μπορεί να ξαναγραφεί ως:

$$(x+y)^n = x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \binom{n}{3}x^{n-3}y^3 + \cdots + \binom{n}{n}y^n$$

όπου οι συντελεστές λέγονται **διωνυμικοί συντελεστές** και δίνονται από τη σχέση:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k}$$

3.2.3 Ιδιότητες Διωνυμικών Συντελεστών

1. Οι διωνυμικοί συντελεστές δίνονται και από το **τρίγωνο του Pascal**, το οποίο έχεις τις εξής 2 ιδιότητες:

   i) Ο πρώτος και ο τελευταίος αριθμός κάθε γραμμής είναι 1.

   ii) Οποιοσδήποτε άλλος αριθμός σε κάθε γραμμή, είναι το άθροισμα των 2 αριθμών που βρίσκονται ακριβώς από πάνω του στην αμέσως προηγούμενη γραμμή.

   Η ιδιότητα 1ii αποτελεί την παρακάτω ιδιότητα των διωνυμικών συντελεστών:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

$$(a+b)^0 = 1$$
$$(a+b)^1 = 1a + b1$$
$$(a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + b^2 1$$
$$(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 1$$
$$(a+b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 1$$
$$(a+b)^5 = 1a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5 1$$
$$(a+b)^6 = 1a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6 1$$

2. $\binom{n}{n} = 1$

3. $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$

4. $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots \binom{n}{n} = 2^n$

5. $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots (-1)^n \binom{n}{n} = 0$

6. $\binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \binom{n+2}{n} + \cdots + \binom{n+m}{n} = \binom{n+m+1}{n+1}$

7. $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots = 2^{n-1}$

8. $\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \cdots = 2^{n-1}$

9. $(\binom{n}{0})^2 + (\binom{n}{1})^2 + (\binom{n}{2})^2 + \cdots + (\binom{n}{n})^2 = \binom{2n}{n}$

10. $\binom{m}{0}\binom{n}{p} + \binom{m}{1}\binom{n}{p-1} + \cdots + \binom{m}{p}\binom{n}{0} = \binom{m+n}{p}$

11. $1 \cdot \binom{n}{1} + 2 \cdot \binom{n}{2} + 3 \cdot \binom{n}{3} + \cdots + n \cdot \binom{n}{n} = n2^{n-1}$

12. $1 \cdot \binom{n}{1} - 2 \cdot \binom{n}{2} + 3 \cdot \binom{n}{3} - \cdots + (-1)^n n \cdot \binom{n}{n} = 0$

3.3 Πολυωνυμικό Ανάπτυγμα

Αν $n_1, n_2, \ldots, n_r$ είναι μη-αρνητικοί ακέραιοι τέτοιοι ώστε $n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n$, τότε η παράσταση

$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_r} = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_r!}$$

λέγεται **πολυωνυμικός συντελεστής** και προκύπτει από τον τύπο του πολυωνυμικού αναπτύγματος

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_p)^n = \sum \binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_r} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_r^{n_r}$$

όπου το άθροισμα υπολογίζεται πάνω σε όλους τους δυνατούς πολυωνυμικούς συντελεστές.

3.4 Εκθετικές και Λογαριθμικές Συναρτήσεις

3.4.1 Ιδιότητες των Δυνάμεων

Αν p, q είναι πραγματικοί αριθμοί, a, b θετικοί πραγματικοί αριθμοί και m, n θετικοί ακέραιοι, τότε:

$$a^0 = 1 \qquad a^1 = a$$

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q} \qquad \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$$

$$(a^p)^q = a^{p \cdot q} \qquad a^{-p} = \frac{1}{a^p}$$

$$(a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \qquad \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \qquad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

Η συνάρτηση $y = a^x$, λέγεται **εκθετική** συνάρτηση.

3.4.2 Λογάριθμοι

Αν $a^p = b$ με $a > 0$, $a \neq 1$ και $b > 0$ τότε με $p = \log_a b$ συμβολίζουμε τον **λογάριθμο** του b με βάση το a.

Η συνάρτηση $y = \log_a x$, λέγεται **λογαριθμική** συνάρτηση και είναι η αντίστροφη της εκθετικής. Δηλαδή ισχύει:

$$y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a y$$

$$\log_a 1 = 0 \qquad \log_a a = 1$$

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y \qquad \log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a x^k = k \cdot \log_a x \qquad (\log_a b) \cdot (\log_b a) = 1$$

3.4.3 Αλλαγή Βάσης

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} = \log_a c \cdot \log_c b$$

Πιο συγκεριμένα, ισχύει:

$$\log_e b = \ln b = \frac{\log_{10} b}{\log 10e} = \ln 10 \cdot \log_{10} b = 2.30258509294 \ldots \cdot \log_{10} b$$

$$\log_{10} b = \log b = \frac{\log_e b}{\log_{10} e} = \log_{10} e \cdot \ln b = 0.434294 \ldots \cdot \ln b$$

Κεφάλαιο 4

Υπερβολικές Συναρτήσεις

4.0.1 Ορισμοί

Υπερβολικό Ημίτονο: $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

Υπερβολικό Συνημίτονο: $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

Υπερβολική Εφαπτομένη: $\tanh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

Υπερβολική Συνεφαπτομένη: $\coth x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

Υπερβολική Τέμνουσα: $\operatorname{sech} x = \dfrac{2}{e^x + e^{-x}}$

Υπερβολική Συντέμνουσα: $\operatorname{csch} x = \dfrac{2}{e^x - e^{-x}}$

4.0.2 Ταυτότητες μεταξύ Υπερβολικών συναρτήσεων

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \qquad \sinh x + \cosh x = \frac{1}{\cosh x - \sinh x}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} \qquad \coth x = \frac{1}{\tanh x} = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} \qquad \operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x}$$

$$\coth^2 x - \operatorname{csch}^2 x = 1 \qquad \operatorname{sech}^2 x + \tanh^2 x = 1$$

$$\begin{aligned}
\sinh(-x) &= -\sinh x \\
\cosh(-x) &= \cosh x \\
\tanh(-x) &= -\tanh x \\
\coth(-x) &= -\coth x \\
\operatorname{sech}(-x) &= \operatorname{sech} x \\
\operatorname{csch}(-x) &= -\operatorname{csch} x
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\sinh(x \pm y) &= \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y \\
\cosh(x \pm y) &= \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y \\
\tanh(x \pm y) &= \frac{\tanh x \pm \tanh y}{1 \pm \tanh x \tanh y} \\
\coth(x \pm y) &= \frac{\coth x \coth y \pm 1}{\coth y \pm \coth x}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sinh 2x &= 2 \sinh x \cosh x \\
\cosh 2x &= \cosh^2 x + \sinh^2 x \\
&= 2\cosh^2 x - 1 \\
&= 1 + 2\sinh^2 x \\
\tanh 2x &= \frac{2\tanh x}{1 + \tanh^2 x}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sinh \frac{x}{2} &= \sqrt{\frac{\cosh x - 1}{2}}, \quad x > 0 & \qquad \sinh \frac{x}{2} &= -\sqrt{\frac{\cosh x - 1}{2}}, \quad x < 0 \\
\cosh \frac{x}{2} &= \sqrt{\frac{\cosh x + 1}{2}} \\
\tanh \frac{x}{2} &= \sqrt{\frac{\cosh x - 1}{\cosh x + 1}}, \quad x > 0 & \qquad \tanh \frac{x}{2} &= -\sqrt{\frac{\cosh x - 1}{\cosh x + 1}}, \quad x < 0 \\
&= \frac{\sinh x}{\cosh x + 1} \\
&= \frac{\cosh x - 1}{\sinh x}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sinh 3x &= 3\sinh x + 4\sinh^3 x \\
\cosh 3x &= 4\cosh^3 x - 3\cosh x \\
\tanh 3x &= \frac{3\tanh x + \tanh^3 x}{1 + 3\tanh^2 x} \\
\sinh 4x &= 8\sinh^3 x \cosh x + 4 \sinh x \cosh x \\
\cosh 4x &= 8\cosh^4 x - 8\cosh^2 x + 1 \\
\tanh 4x &= \frac{4\tanh x + 4\tanh^3 x}{1 + 6\tanh^2 x + \tanh^4 x}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sinh^2 x &= \frac{1}{2}\cosh 2x - \frac{1}{2}\\
\cosh^2 x &= \frac{1}{2}\cosh 2x + \frac{1}{2}\\
\sinh^3 x &= \frac{1}{4}\sinh 3x - \frac{3}{4}\sinh x\\
\cosh^3 x &= \frac{1}{4}\cosh 3x + \frac{3}{4}\cosh x\\
\sinh^4 x &= \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cosh 2x + \frac{1}{8}\cosh 4x\\
\cosh^4 x &= \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cosh 2x + \frac{1}{8}\cosh 4x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sinh x + \sinh y &= 2\sinh\frac{1}{2}(x+y)\cosh\frac{1}{2}(x-y)\\
\sinh x - \sinh y &= 2\cosh\frac{1}{2}(x+y)\sinh\frac{1}{2}(x-y)\\
\cosh x + \cosh y &= 2\cosh\frac{1}{2}(x+y)\cosh\frac{1}{2}(x-y)\\
\cosh x - \cosh y &= 2\sinh\frac{1}{2}(x+y)\sinh\frac{1}{2}(x-y)\\
\sinh x\sinh y &= \frac{1}{2}\left\{\cosh(x+y) - \cosh(x-y)\right\}\\
\cosh x\cosh y &= \frac{1}{2}\left\{\cosh(x+y) + \cosh(x-y)\right\}\\
\sinh x\cosh y &= \frac{1}{2}\left\{\sinh(x+y) + \sinh(x-y)\right\}
\end{aligned}
$$

Αν θεωρήσουμε $x > 0$ τότε ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις μεταξύ των υπερβολικών τριγωνομετρικών συναρτήσεων

	$\sinh x = u$	$\cosh x = u$	$\tanh x = u$	$\coth x = u$	$\operatorname{sech} x = u$	$\operatorname{csch} x = u$
$\sinh x$	u	$\sqrt{u^2-1}$	$u/\sqrt{1-u^2}$	$1/\sqrt{u^2-1}$	$\sqrt{1}-u^2/u$	$1/u$
$\cosh x$	$\sqrt{1+u^2}$	u	$1/\sqrt{1-u^2}$	$u/\sqrt{u^2-1}$	$1/u$	$\sqrt{1+u^2}/u$
$\tanh x$	$u/\sqrt{1+u^2}$	$\sqrt{u^2-1}/u$	u	$1/u$	$\sqrt{1-u^2}$	$1/\sqrt{1+u^2}$
$\coth x$	$\sqrt{u^2+1}/u$	$u/\sqrt{u^2-1}$	$1/u$	u	$1/\sqrt{1-u^2}$	$\sqrt{1+u^2}$
$\operatorname{sech} x$	$1/\sqrt{1+u^2}$	$1/u$	$\sqrt{1-u^2}$	$\sqrt{u^2-1}/u$	u	$u/\sqrt{1+u^2}$
$\operatorname{csch} x$	$1/u$	$1/\sqrt{u^2-1}$	$\sqrt{1-u^2}/u$	$\sqrt{u^2-1}$	$u/\sqrt{1-u^2}$	u

4.0.3 Γραφικές παραστάσεις

4.0.4 Αντίστροφες Υπερβολικές Συναρτήσεις

$$\sinh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \qquad -\infty < x < +\infty$$
$$\cosh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) \qquad x \geq 1$$
$$\tanh^{-1} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \qquad -1 < x < 1$$
$$\coth^{-1} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \qquad x > 1 \quad \text{ή} \quad x < -1$$
$$\operatorname{sech}^{-1} x = \ln\left(\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2}-1}\right) \qquad 0 < x \leq 1$$
$$\operatorname{csch}^{-1} x = \ln\left(\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\right) \qquad x \neq 0$$

4.0.5 Σχέσεις μεταξύ Υπερβολικών Συναρτήσεων

$$\operatorname{csch}^{-1} x = \sinh^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$$
$$\operatorname{sech}^{-1} x = \cosh^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$$
$$\coth^{-1} x = \tanh^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$$
$$\sinh^{-1}(-x) = -\sinh^{-1} x$$
$$\tanh^{-1}(-x) = -\tanh^{-1} x$$
$$\coth^{-1}(-x) = -\coth^{-1} x$$
$$\operatorname{csch}^{-1}(-x) = -\operatorname{csch}^{-1} x$$

4.0.6 Γραφικές Παραστάσεις Αντίστροφων Υπερβολικών Συναρτήσεων

4.0.7 Σχέσεις μεταξύ Υπερβολικών Τριγωνομετρικών και Τριγωνομετρικών Συναρτήσεων

$$\sin(ix) = i\sinh x \qquad \sinh(ix) = i\sin x$$
$$\cos(ix) = \cosh x \qquad \cosh(ix) = \cos x$$
$$\tan(ix) = i\tanh x \qquad \tanh(ix) = i\tan x$$
$$\cot(ix) = -i\coth x \qquad \coth(ix) = -i\cot x$$
$$\sec(ix) = \operatorname{sech} x \qquad \operatorname{sech}(ix) = \sec x$$
$$\csc(ix) = -i\operatorname{csch} x \qquad \operatorname{csch}(ix) = -i\csc x$$

4.0.8 Περιοδικότητα Υπερβολικών Συναρτήσεων

$$\sinh(x + 2k\pi i) = \sinh x$$
$$\cosh(x + 2k\pi i) = \cosh x$$
$$\tanh(x + 2k\pi i) = \tanh x$$
$$\coth(x + 2k\pi i) = \coth x$$
$$\operatorname{sech}(x + 2k\pi i) = \operatorname{sech} x$$
$$\operatorname{csch}(x + 2k\pi i) = \operatorname{csch} x$$

4.0.9 Σχέσεις μεταξύ αντίστροφων υπερβολικών και αντίστροφων τριγωνομετρικών συναρτήσεων

$\sin^{-1}(ix) = i\sinh^{-1} x$	$\sinh^{-1}(ix) = i\sin^{-1} x$
$\cos^{-1} x = \pm i\cosh^{-1} x$	$\cosh^{-1} x = \pm i\cos^{-1} x$
$\tan^{-1}(ix) = i\tanh^{-1} x$	$\tanh^{-1}(ix) = i\tan^{-1} x$
$\cot^{-1}(ix) = i\coth^{-1} x$	$\coth^{-1}(ix) = -i\cot^{-1} x$
$\sec^{-1} x = \pm i\,\mathrm{sech}^{-1} x$	$\mathrm{sech}^{-1} x = \pm i\sec^{-1} x$
$\csc^{-1}(ix) = -i\,\mathrm{csch}^{-1} x$	$\mathrm{csch}^{-1}(ix) = -i\csc^{-1} x$

Κεφάλαιο 5

Διαφορικός Λογισμός

5.1 Παράγωγοι

5.1.1 Ορισμός

Η παράγωγος της συνάρτησης $y = f(x)$ ως προς x ορίζεται να είναι το όριο

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

όταν αυτό υπάρχει για κάθε σημείο στο πεδίο ορισμού της, όπου $h = \Delta x$. Η παράγωγος συνάρτηση συμβολίζεται με $\dfrac{df}{dx} = f'(x) = y'$.

5.1.2 Παράγωγοι Βασικών Συναρτήσεων

$\dfrac{d}{dx}(c) = 0$

$\dfrac{d}{dx}(x) = 1$

$\dfrac{d}{dx}(x^a) = ax^{a-1}, \quad a \in \mathbb{R}$

$\dfrac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\dfrac{1}{x^2}$

$\dfrac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a, \quad a > 0$

$\dfrac{d}{dx}(e^x) = e^x$

$\dfrac{d}{dx}(\log_a x) = \dfrac{1}{x} \cdot \log_a e, \quad a > 0,\, a \neq 1$

$\dfrac{d}{dx}(\ln x) = \dfrac{1}{x}$

5.1.3 Παραγωγοι Τριγωνομετρικών και Αντίστροφων Τριγωνομετρικών Συναρτήσεων

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x \qquad \frac{d}{dx}\left(\sin^{-1} x\right) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -\frac{\pi}{2} < \sin^{-1} x < \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x \qquad \frac{d}{dx}\left(\cos^{-1} x\right) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad 0 < \cos^{-1} x < \pi$$

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad \frac{d}{dx}\left(\tan^{-1} x\right) = \frac{1}{1+x^2}, \quad -\frac{\pi}{2} < \tan^{-1} x < \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{d}{dx}(\cot x) = -\frac{1}{\sin^2 x} \qquad \frac{d}{dx}\left(\cot^{-1} x\right) = \frac{-1}{1+x^2}, \quad 0 < \cot^{-1} x < \pi$$

$$\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \cdot \tan x \qquad \frac{d}{dx}\left(\sec^{-1} x\right) = \begin{cases} \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}, & \text{αν } 0 < \sec^{-1} x < \dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}, & \text{αν } \dfrac{\pi}{2} < \sec^{-1} x < \pi \end{cases}$$

$$\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cdot \cot x \qquad \frac{d}{dx}\left(\csc^{-1} x\right) = \begin{cases} \dfrac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}, & \text{αν } 0 < \csc^{-1} x < \dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}, & \text{αν } -\dfrac{\pi}{2} < \csc^{-1} x < 0 \end{cases}$$

5.1.4 Παραγωγοι Υπερβολικών και Αντίστροφων Υπερβολικών Συναρτήσεων

$$\frac{d}{dx}(\sinh x) = \cosh x \qquad \frac{d}{dx}\left(\sinh^{-1} x\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\frac{d}{dx}(\cosh x) = \sinh x \qquad \frac{d}{dx}\left(\cosh^{-1} x\right) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}, & \text{αν } \cosh^{-1} x > 0,\ x > 1 \\ \dfrac{-1}{\sqrt{x^2-1}}, & \text{αν } \cosh^{-1} x < 0,\ x > 1 \end{cases}$$

$$\frac{d}{dx}(\tanh x) = \operatorname{sech}^2 x \qquad \frac{d}{dx}\left(\tanh^{-1} x\right) = \frac{1}{1-x^2}, \quad \text{αν } -1 < x < 1$$

$$\frac{d}{dx}(\coth x) = -\operatorname{csch}^2 x \qquad \frac{d}{dx}\left(\coth^{-1} x\right) = \frac{1}{1-x^2}, \quad \text{αν } x > 1 \text{ ή } x < -1$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sech} x) = -\operatorname{sech} x \cdot \tanh x \qquad \frac{d}{dx}\left(\operatorname{sech}^{-1} x\right) = \begin{cases} \dfrac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}, & \text{αν } \operatorname{sech}^{-1} x > 0,\ 0 < x < 1 \\ \dfrac{1}{x\sqrt{1-x^2}}, & \text{αν } \operatorname{sech}^{-1} x < 0,\ 0 < x < 1 \end{cases}$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{csch} x) = -\operatorname{csch} x \cdot \coth x \qquad \frac{d}{dx}\left(\operatorname{csch}^{-1} x\right) = \begin{cases} \dfrac{-1}{x\sqrt{1+x^2}}, & \text{αν } x > 0 \\ \dfrac{1}{x\sqrt{1+x^2}}, & \text{αν } x < 0 \end{cases}$$

5.1.5 Κανόνες Παραγώγισης

Έστω $f = f(x)$, $g = g(x)$ και $h = h(x)$, a, b, c και n σταθερές.

$$\frac{d}{dx}(cf) = c\frac{df}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(f \pm g) = \frac{df}{dx} \pm \frac{dg}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(fg) = f\frac{dg}{dx} + g\frac{df}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f\, dg/dx - g\, df/dx}{g^2}$$

$$\frac{d}{dx}(fgh) = fg\frac{dh}{dx} + fh\frac{dg}{dx} + gh\frac{df}{dx}$$

5.1.6 Σύνθετη Παραγώγιση

Έστω $y = f(u)$ και $u = g(x)$. Τότε

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \quad \text{(Κανόνας Αλυσίδας)}$$

Ο παραπάνω τύπος γενικεύεται και για συναρτήσεις που είναι σύνθεση περισσότερων των δύο συναρτήσεων, όπως για παράδειγμα, αν $y = f(u)$, $u = g(v)$ και $v = h(x)$, τότε

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$$

5.1.7 Παράγωγος Αντίστροφης Συνάρτησης

Έστω $y = f(x)$, συνεχής και γνησίως μονότονη συνάρτηση. Τότε ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση $x = f^{-1}(y)$ και ισχύει:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

5.1.8 Παράγωγοι Ανώτερης Τάξης

Δεύτερη Παράγωγος	$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) = y''$
Τρίτη Παράγωγος	$\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{d^3y}{dx^3} = f'''(x) = y'''$
Παράγωγος τάξης n	$\frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right) = \frac{d^ny}{dx^n} = f^{(n)}(x) = y^{(n)}$

5.1.9 Τύπος Leibniz

Έστω f, g συναρτήσεις. Τότε

$$\begin{aligned}\frac{d^nf}{dx^n} &= f\frac{d^n}{dx^n}(g) + \binom{n}{1}\frac{d}{dx}(f)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(g) + \binom{n}{2}\frac{d^2}{dx^2}(f)\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}(g) + \cdots + g\frac{d^n}{dg^n}(f) \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f^{(n-k)}g^{(k)}\end{aligned}$$

όπου $\binom{n}{1}$, $\binom{n}{2}$, … είναι οι δυωνυμικοί συντελεστές.

Ειδικές Περιπτώσεις:

- $\frac{d^2}{dx^2}(fg) = f\frac{d^2g}{dx^2} + 2\frac{df}{dx}\frac{dg}{dx} + g\frac{d^2f}{dg^2}$
- $\frac{d^3}{dx^3}(fg) = f\frac{d^3g}{dx^3} + 3\frac{df}{dx}\frac{d^2g}{dx^2} + 3dv[2]fx\frac{dg}{dx} + g\frac{d^3f}{dx^3}$

5.1.10 Διαφορικό

Έστω $y = f(x)$ και $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$. Τότε

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x) + \epsilon = \frac{dy}{dx} + \epsilon$$

όπου $epsilon \to 0$ καθώς $\Delta x \to 0$. Άρα

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \epsilon \Delta x$$

Αν θέσουμε $\Delta x = dx$ το διαφορικό του x, τότε ορίζουμε το διαφορικό του y να είναι

$$dy = f'(x)\, dx$$

5.1.11 Ιδιότητες Διαφορικών

Οι ιδιότητες των διαφορικών είναι εντελώς ανάλογες με αυτές των παραγώγων.

- $d(f \pm g \pm h \pm \cdots) = df \pm dg \pm \pm dh \pm \cdots$
- $d(fg) = f\, dg + g\, df$
- $d(\frac{f}{g}) = \dfrac{g\, df - f\, dg}{g^2}$
- $d(f^n) = nf^{n-1}\, df$

5.2 Μερικές Παράγωγοι

Έστω $z = f(x, y)$ μια συνάρτηση δύο μεταβλητών x και y. Τότε ορίζουμε ως μερική παράγωγο της z ή $f(x, y)$ ως προς x, θεωρώντας ότι η μεταβλητή y είνα σταθερή,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

Αυτή η παράγωγος συμβολίζεται επίσης και με $\partial z/\partial x$, f_x και z_x.

Ομοίως η μερική παράγωγος της z ή $f(x, y)$ ως προς y, θεωρώντας ότι η μεταβλητή x είνα σταθερή, ορίζεται ως

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

Αυτή η παράγωγος συμβολίζεται επίσης και με $\partial z/\partial y$, f_y και z_y.

Οι μερικές παράγωγοι ανώτερης τάξης ορίζονται ως εξής:

- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)$
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)$

5.2.1 Διαφορικά Συναρτήσεων Πολλών Μεταβλητών

Το διαφορικό της συνάρτησης $z = f(x, y)$ ορίζεται ως

$$dz = df = \frac{\partial f}{\partial x}\, dx + \frac{\partial f}{\partial y}\, dy$$

όπου $dx = \Delta x$ και $dy = \Delta y$. Το διαφορικό df είναι συνάρτηση τεσσαρων μεταβλητών, των x, y, Δx και Δy.

Κεφάλαιο 6

Ολοκληρώματα

6.1 Ολοκληρώματα

6.1.1 Ορισμός Αόριστου Ολοκληρώματος

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$$

6.1.2 Ολοκληρώματα Βασικών Συναρτήσεων

$$\int 0\,dx = c$$
$$\int 1\,dx = \int dx = x$$
$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad n \neq -1$$
$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|$$
$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a}, \quad a > 0,\, a \neq 1$$
$$\int e^x\,dx = e^x$$
$$\int \sqrt[n]{x^m}\,dx = \int x^{\frac{m}{n}}\,dx = \frac{x^{\frac{m}{n}+1}}{\frac{m}{n}+1}$$
$$\int \sin x\,dx = -\cos x$$
$$\int \cos x\,dx = \sin x$$
$$\int \tan x\,dx = \ln\sec x = -\ln\cos x$$
$$\int \cot x\,dx = \ln\sin x$$
$$\int \sec x\,dx = \ln(\sec x + \tan x) = \ln\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$$
$$\int \csc x\,dx = \ln(\csc x - \cot x) = \ln\tan\frac{x}{2}$$
$$\int \sec^2 x\,dx = \tan x$$
$$\int \csc^2 x\,dx = -\cot x$$
$$\int \tan^2 x\,dx = \tan x - x$$
$$\int \cot^2 x\,dx = -\cot x - x$$
$$\int \sin^2 x\,dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}$$
$$\int \cos^2 x\,dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4}$$
$$\int \sec x\tan x\,dx = \sec x$$
$$\int \csc x\cot x\,dx = -\csc x$$
$$\int \sinh x\,dx = \cosh x$$
$$\int \cosh x\,dx = \sinh x$$
$$\int \tanh x\,dx = \ln\cosh x$$
$$\int \coth x\,dx = \ln\sinh x$$
$$\int \operatorname{sech} x\,dx = \sin^{-1}(\tanh x)$$
$$\int \operatorname{csch} x\,dx = \ln\tanh\frac{x}{2}$$
$$\int \operatorname{sech}^2 x\,dx = \tanh x$$
$$\int \operatorname{csch}^2 x\,dx = -\coth x$$
$$\int \tanh^2 x\,dx = x - \tanh x$$
$$\int \coth^2 x\,dx = x - \coth x$$
$$\int \sinh^2 x\,dx = \frac{\sinh 2x}{4} - \frac{x}{2}$$
$$\int \cosh^2 x\,dx = \frac{\sinh 2x}{4} + \frac{x}{2}$$
$$\int \operatorname{sech} x\tanh x\,dx = -\operatorname{sech} x$$
$$\int \operatorname{csch} x\coth x\,dx = -\operatorname{csch} x$$

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}$$
$$\int \frac{1}{x^2-a^2}\,dx = \frac{1}{2a}\ln\left(\frac{x-a}{x+a}\right) = -\frac{1}{a}\cot^{-1}\frac{x}{a}$$
$$\int \frac{1}{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2a}\ln\left(\frac{a+x}{a-x}\right) = \frac{1}{a}\tanh^{-1}\frac{x}{a}$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \sin^{-1}\frac{x}{a}$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) = \sin^{-1}\frac{x}{a}$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx = \ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)$$
$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-a^2}}\,dx = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left|\frac{x}{a}\right|$$
$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+a^2}}\,dx = -\frac{1}{a}\ln\left(\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x}\right)$$
$$\int \frac{1}{x\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = -\frac{1}{a}\ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right)$$

6.1.3 $ax+b$

$$\int \frac{dx}{ax+b}\,dx = \frac{1}{a}\ln(ax+b)$$
$$\int \frac{x}{ax+b}\,dx = \frac{x}{a} - \frac{b}{a^2}\ln(ax+b)$$
$$\int \frac{dx}{x(ax+b)}\,dx = \frac{1}{b}\ln\left(\frac{x}{ax+b}\right)$$
$$\int \frac{1}{(ax+b)^2}\,dx = \frac{-1}{a(ax+b)}$$
$$\int \frac{x}{(ax+b)^2}\,dx = \frac{b}{a^2(ax+b)} + \frac{1}{a^2}\ln(ax+b)$$
$$\int \frac{1}{x(ax+b)^2}\,dx = \frac{1}{b^2}\ln\left(\frac{x}{ax+b}\right)$$
$$\int (ax+b)^n\,dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)}, n \neq -1$$
$$\int x(ax+b)^n\,dx = \frac{(ax+b)^{n+2}}{a^2(n+2)} - \frac{b(ax+b)^{n+1}}{a^2(n+1)}, n \neq -1, -2$$
$$\int x^m(ax+b)^n\,dx = \begin{cases} \dfrac{x^{m+1}(ax+b)^n}{m+n+1} + \dfrac{nb}{m+n+1}\displaystyle\int x^m(ax+b)^{n-1}\,dx \\ \dfrac{x^m(ax+b)^{n+1}}{a(m+n+1)} - \dfrac{mb}{a(m+n+1)}\displaystyle\int x^{m-1}(ax+b)^n\,dx \\ \dfrac{-x^{m+1}(ax+b)^{n+1}}{b(n+1)} + \dfrac{m+n+2}{b(n+1)}\displaystyle\int x^m(ax+b)^{n+1}\,dx \end{cases}$$

6.1.4 $\sqrt{ax+b}$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax+b}}\,dx = \frac{2\sqrt{ax+b}}{a}$$
$$\int \frac{xdx}{\sqrt{ax+b}}\,dx = \frac{2(ax-2b)}{3a^2}\sqrt{ax+b}$$
$$\int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}}\,dx = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{b}}\ln\left(\frac{\sqrt{ax+b}-\sqrt{b}}{\sqrt{ax+b}+\sqrt{b}}\right) \\ \frac{2}{\sqrt{-b}}\tan^{-1}\sqrt{\frac{ax+b}{-b}} \end{cases}$$
$$\int \sqrt{ax+b}\,dx = \frac{2\sqrt{(ax+b)^3}}{3a}$$
$$\int x\sqrt{ax+b}\,dx = \frac{2(3ax-2b)}{15a^2}\sqrt{(ax+b)^3}$$
$$\int \frac{\sqrt{ax+b}}{x}\,dx = 2\sqrt{ax+b} + b\int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}}$$
$$\int \frac{x^m}{\sqrt{ax+b}}\,dx = \frac{2x^m\sqrt{ax+b}}{a(2m+1)} - \frac{2mb}{a(2m+1)}\int \frac{x^{m-1}}{\sqrt{ax+b}}\,dx$$
$$\int \frac{dx}{x^m\sqrt{ax+b}}\,dx = -\frac{\sqrt{ax+b}}{b(m-1)x^{m-1}} - \frac{a(2m-3)}{b(2m-2)}\int \frac{dx}{x^{m-1}\sqrt{ax+b}}$$
$$\int x^m\sqrt{ax+b}\,dx = \frac{2x^m}{a(2m+3)}(ax+b)^{frac32} - \frac{2mb}{a(2m+3)}\int x^{m-1}\sqrt{ax+b}\,dx$$
$$\int \frac{\sqrt{ax+b}}{x^m}\,dx = -\frac{\sqrt{ax+b}}{(m-1)x^{m-1}} + \frac{a}{2(m-1)}\int \frac{dx}{x^{m-1}\sqrt{ax+b}}\,dx$$
$$\int \frac{\sqrt{ax+b}}{x^m}\,dx = -\frac{(ax+b)^{\frac{3}{2}}}{b(m-1)x^{m-1}} - \frac{a(2m-5)}{b(2m-2)}\int \frac{\sqrt{ax+b}}{x^{m-1}}\,dx$$
$$\int (ax+b)^{\frac{3}{2}}\,dx = \frac{2(ax+b)^{\frac{(m+2)}{2}}}{a^2(m+2)}\,dx$$
$$\int x(ax+b)^{\frac{m}{2}}\,dx = \frac{2(ax+b)^{\frac{m+4}{2}}}{a^2(m+4)} - \frac{2b(ax+b)^{\frac{m+2}{2}}}{a^2(m+2)}$$
$$\int \frac{(ax+b)^{\frac{m}{2}}}{x}\,dx = \frac{2(ax+b)^{\frac{m}{2}}}{m} + b\int \frac{(ax+b)^{\frac{m-2}{2}}}{x}\,dx$$
$$\int \frac{dx}{x(ax+b)^{\frac{m}{2}}}\,dx = \frac{2}{b(m-2)(ax+b)^{\frac{m-2}{2}}} + \frac{1}{b}\int \frac{dx}{x(ax+b)^{\frac{m-2}{2}}}\,dx$$

6.1.5 $(ax+b), (px+q)$

$$\int \frac{dx}{(ax+b)(px+q)} = \frac{1}{bp-aq}\ln\left(\frac{px+q}{ax+b}\right)$$
$$\int \frac{x}{(ax+b)(px+q)}\,dx = \frac{1}{bp-aq}\{\frac{b}{a}\ln(ax+b) - \frac{q}{p}\ln(px+q)\}$$
$$\int \frac{1}{(ax+b)^2(px+q)}\,dx = \frac{1}{bp-aq}\{\frac{1}{ax+b} + \frac{p}{bp-aq}\ln\left(\frac{px+q}{ax+b}\right)\}$$
$$\int \frac{x}{(ax+b)^2(px+q)}\,dx = \frac{1}{bp-aq}\{\frac{q}{bp-aq}\ln\left(\frac{ax+b}{px+q}\right) - \frac{b}{a(ax+b)}\}$$
$$\int \frac{1}{(ax+b)^m(px+q)^n}\,dx = \frac{-1}{(n-1)(bp-aq)}\{\frac{1}{(ax+b)^{m-1}(px+q)^{n-1}} + a(m+n-2)\int \frac{(ax+b)^m}{(px+q)^{n-1}}\,dx\}$$
$$\int \frac{ax+b}{px+q}\,dx = \frac{ax}{p} + \frac{bp-aq}{p^2}\ln(px+q)$$
$$\int \frac{(ax+b)^m}{(px+q)^n}\,dx = \begin{cases} \dfrac{-1}{(n-1)(bp-aq)}\{\dfrac{(ax+b)^{m+1}}{(px+q)^{n-1}} + a(n-m-2)\displaystyle\int \frac{(ax+b)^m}{(px+q)^{n-1}}\,dx\} \\ \dfrac{-1}{p(n-m-1)}\{\dfrac{(ax+b)^m}{(px+q)^{n-1}} + m(bp-aq)\displaystyle\int \frac{(ax+b)^{m-1}}{(px+q)^n}\,dx\} \\ \dfrac{-1}{p(n-1)}\{\dfrac{(ax+b)^m}{(px+q)^{n-1}} - ma\displaystyle\int \frac{(ax+b)^{m-1}}{(px+q)^{n-1}}\,dx\} \end{cases}$$

6.1.6 $\sqrt{ax+b}, px+q$

$$\int \frac{px+q}{\sqrt{ax+b}}\,dx = \frac{2(apx+3aq-2bp)}{3a^2}\sqrt{ax+b}$$
$$\int \frac{1}{(px+q)\sqrt{ax+b}} = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{bp-aq}\sqrt{p}}\ln\left(\dfrac{\sqrt{p(ax+b)}-\sqrt{bp-aq}}{\sqrt{p(ax+b)}+\sqrt{bp-aq}}\right) \\ \dfrac{2}{\sqrt{bp-aq}\sqrt{p}}\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{p(ax+b)}{aq-bp}} \end{cases}$$
$$\int \frac{\sqrt{ax+b}}{px+q}\,dx = \begin{cases} \dfrac{2\sqrt{ax+b}}{p} + \dfrac{\sqrt{bp-aq}}{p\sqrt{p}}\ln\left(\dfrac{\sqrt{p(ax+b)}-\sqrt{bp-aq}}{\sqrt{p(ax+b)}+\sqrt{bp-aq}}\right) \\ \dfrac{2\sqrt{ax+b}}{p} - \dfrac{2\sqrt{bp-aq}}{p\sqrt{p}}\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{p(ax+b)}{aq-bp}} \end{cases}$$
$$\int (px+q)^n\sqrt{ax+b}\,dx = \frac{2(px+q)^{n+1}\sqrt{ax+b}}{p(2n+3)} + \frac{bp-aq}{p(2n+3)}\int \frac{dx}{(px+q)\sqrt{ax+b}}\,dx$$
$$\int \frac{(px+q)^n}{\sqrt{ax+b}}\,dx = \frac{2(px+q)^n\sqrt{ax+b}}{a(2n+1)} + \frac{2n(aq-bp)}{a(2n+1)}\int \frac{(px+q)^{n-1}}{\sqrt{ax+b}}\,dx$$
$$\int \frac{\sqrt{ax+b}}{(px+q)^n}\,dx = \frac{-\sqrt{ax+b}}{p(n-1)(px+q)^{n-1}} + \frac{a}{2p(n-1)}\int \frac{1}{(px+q)^{n-1}\sqrt{ax+b}}\,dx$$

6.1.7 $\sqrt{ax+b}, \sqrt{px+q}$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(ax+b)(px+q)}}\,dx = \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{ap}} \ln\left(\sqrt{a(px+q)} + \sqrt{p(ax+b)}\right) \\ \dfrac{2}{\sqrt{-ap}} \tan^{-1} \sqrt{\dfrac{-p(ax+b)}{a(px+q)}} \end{cases}$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{(ax+b)(px+q)}}\,dx = \frac{\sqrt{(ax+b)(px+q)}}{ap} - \frac{bp+aq}{2ap} \int \frac{dx}{\sqrt{(ax+b)(px+q)}}$$

$$\int \sqrt{(ax+b)(px+q)}\,dx = \frac{2apx+bp+aq}{4ap} \sqrt{(ax+b)(px+q)} - \frac{(bp-aq)^2}{8ap} \int \frac{dx}{\sqrt{(ax+b)(px+q)}}$$

$$\int \sqrt{\frac{px+q}{ax+b}}\,dx = \frac{\sqrt{(ax+b)(px+q)}}{a} + \frac{aq-bp}{2a} \int \frac{dx}{\sqrt{(ax+b)(px+q)}}$$

$$\int \frac{dx}{(px+q)\sqrt{(ax+b)(px+q)}} = \frac{2\sqrt{ax+b}}{(aq-bp)\sqrt{px+q}}$$

6.1.8 x^2+a^2

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a}$$

$$\int \frac{x}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{2} \ln\left(x^2+a^2\right)$$

$$\int \frac{dx}{x(x^2+a^2)} = \frac{1}{2a^2} \ln\left(\frac{x^2}{x^2+a^2}\right)$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{x}{2a^2(x^2+a^2)} + \frac{1}{2a^3} \tan^{-1} \frac{x}{a}$$

$$\int \frac{x}{(x^2+a^2)^2}\,dx = \frac{-1}{2(x^2+a^2)^2}$$

$$\int \frac{1}{x(x^2+a^2)^2}\,dx = \frac{1}{2a^2(x^2+a^2)} + \frac{1}{2a^4} \ln\left(\frac{x^2}{x^2+a^2}\right)$$

$$\int \frac{1}{(x^2+a^2)^n} = \frac{x}{2(n-1)a^2(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{a^2(2n-2)} \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}}$$

$$\int \frac{x}{(x^2+a^2)^n}\,dx = \frac{-1}{2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}}$$

$$\int \frac{dx}{x(x^2+a^2)^n}\,dx = \frac{1}{2(n-1)a^2(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{x(x^2+a^2)^{n-1}}$$

$$\int x^m(x^2+a^2)^n = \int \frac{x^{m-2}}{(x^2+a^2)^{n-1}} - a^2 \int \frac{x^{m-2}}{(x^2+a^2)^n}$$

$$\int \frac{1}{x^m(x^2+a^2)^n}\,dx = \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{x^m(x^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{x^{m-2}(x^2+a^2)^n}$$

6.1.9 $x^2 - a^2$

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left(\frac{x-a}{x+a}\right) = -\frac{1}{a}\coth^{-1}\frac{x}{a}$$
$$\int \frac{x}{x^2-a^2} = \frac{1}{2}\ln\left(x^2-a^2\right)$$
$$\int \frac{1}{x(x^2-a^2)}\,dx = \frac{1}{2a^2}\ln\left(\frac{x^2-a^2}{x^2}\right)$$
$$\int \frac{dx}{(x^2-a^2)^2}\,dx = \frac{-x}{2a^2(x^2-a^2)} - \frac{1}{4a^3}\ln\left(\frac{x-a}{x+a}\right)$$
$$\int \frac{x}{(x^2-a^2)^2}\,dx = \frac{-1}{2(x^2-a^2)}$$
$$\int \frac{1}{x(x^2-a^2)^2}\,dx = \frac{-1}{2a^2(x^2-a^2)} + \frac{1}{2a^4}\ln\left(\frac{x^2}{x^2-a^2}\right)$$
$$\int \frac{dx}{(x^2-a^2)^n} = \frac{-x}{2a^2(n-1)(x^2-a^2)^{n-1}} - \frac{2n-3}{a^2(2n-2)}\int \frac{dx}{(x^2-a^2)^{n-1}}$$
$$\int \frac{x}{(x^2-a^2)^n}\,dx = \frac{-1}{2(n-1)(x^2-a^2)^{n-1}}$$
$$\int \frac{1}{x(x^2-a^2)^n}\,dx = \frac{-1}{2a^2(n-1)(x^2-a^2)^{n-1}} - \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{x(x^2-a^2)^{n-1}}$$
$$\int \frac{x^m}{(x^2-a^2)^n}\,dx = \frac{x^{m-2}}{(x^2-a^2)^{n-1}}\,dx + a^2\int \frac{x^{m-2}}{x(x^2-a^2)^{n-1}}$$
$$\int \frac{dx}{x^m(x^2-a^2)^n} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{x^{m-2}(x^2-a^2)^n} - \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{x^m(x^2-a^2)^{n-1}}$$

6.1.10 $a^2 - x^2$

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left(\frac{a+x}{a-x}\right) = \frac{1}{a}\tanh^{-1}\frac{x}{a}$$
$$\int \frac{x}{a^2-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\ln\left(a^2-x^2\right)$$
$$\int \frac{dx}{x(a^2-x^2)} = \frac{1}{2a^2}\ln\left(\frac{x^2}{a^2-x^2}\right)$$
$$\int \frac{dx}{(a^2-x^2)^2} = \frac{x}{2a^2(a^2-x^2)} + \frac{1}{4a^3}\ln\left(\frac{a+x}{a-x}\right)$$
$$\int \frac{x}{(a^2-x^2)^2}\,dx = \frac{1}{2(a^2-x^2)}$$
$$\int \frac{1}{x(a^2-x^2)^2}\,dx = \frac{1}{2a^2(a^2-x^2)} + \frac{1}{2a^4}\ln\left(\frac{x^2}{a^2-x^2}\right)$$
$$\int \frac{dx}{(a^2-x^2)^n} = \frac{x}{2a^2(n-1)(a^2-x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{a^2(2n-2)}\int \frac{dx}{(a^2-x^2)^{n-1}}$$
$$\int \frac{x}{(a^2-x^2)^n}\,dx = \frac{1}{2(n-1)(a^2-x^2)^{n-1}}$$
$$\int \frac{dx}{x(a^2-x^2)^n} = \frac{1}{2a^2(n-1)(a^2-x^2)^{n-1}} + \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{x(a^2-x^2)^{n-1}}$$
$$\int \frac{x^m}{(a^2-x^2)^n}\,dx = a^2\int \frac{x^{m-2}}{(a^2-x^2)^n}\,dx - \int \frac{x^{m-2}}{(a^2-x^2)^{n-1}}$$
$$\int \frac{dx}{x^m(a^2-x^2)^n} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{x^m(a^2-x^2)^{n-1}} + \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{x^{m-2}(a^2-x^2)^n}$$

6.1.11 $\sqrt{x^2+a^2}$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx = \ln\Big(x+\sqrt{x^2+a^2}\Big) = \sin^{-1}\frac{x}{a}$$
$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx = \sqrt{x^2+a^2}$$
$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+a^2}}\,dx = -\frac{1}{a}\ln\left(\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x}\right)$$
$$\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{x\sqrt{x^2+a^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\ln\Big(x+\sqrt{x^2+a^2}\Big)$$
$$\int x\sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}{3}$$
$$\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x}\,dx = \sqrt{x^2+a^2} - a\ln\left(\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x}\right)$$

6.1.12 $\sqrt{x^2-a^2}$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx = \ln\Big(x+\sqrt{x^2-a^2}\Big)$$
$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx = \frac{x\sqrt{x^2-a^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\ln\Big(x+\sqrt{x^2-a^2}\Big)$$
$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-a^2}}\,dx = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left|\frac{x}{a}\right|$$
$$\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{x\sqrt{x^2-a^2}}{2} - \frac{a^2}{2}\ln\Big(x+\sqrt{x^2-a^2}\Big)$$
$$\int x\sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{(x^2-a^2)^{\frac{3}{2}}}{3}$$
$$\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\,dx = \sqrt{x^2-a^2} - a\sec^{-1}\left|\frac{x}{a}\right|$$

6.1.13 $\sqrt{a^2-x^2}$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = sin^{-1}\frac{x}{a}$$
$$\int \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = -\sqrt{a^2-x^2}$$
$$\int \frac{1}{x\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = -\frac{1}{a}\ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right)$$
$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}$$
$$\int x\sqrt{a^2-x^2}\,dx = -\frac{x(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}{3}$$
$$\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}\,dx = \sqrt{a^2-x^2} - a\ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right)$$

6.1.14 $ax^2 + bx + c$

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,dx = \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{4ac-b^2}} \tan^{-1} \dfrac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{b^2-4ac}} \ln\left(\dfrac{2ax+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2ax+b+\sqrt{b^2-4ac}}\right) \end{cases}$$

$$\int \frac{x}{ax^2+bx+c}\,dx = \frac{1}{2a}\ln\bigl(ax^2+bx+c\bigr) - \frac{b}{2a}\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,dx$$

$$\int \frac{x^m}{ax^2+bx+c}\,dx = \frac{x^{m-1}}{a(m-1)} - \frac{c}{a}\int \frac{x^{m-2}}{ax^2+bx+c}\,dx - \frac{b}{a}\int \frac{x^{m-1}}{ax^2+bx+c}\,dx$$

$$\int \frac{1}{x(ax^2+bx+c)}\,dx = \frac{1}{2c}\ln\left(\frac{x^2}{ax^2+bx+c}\right) - \frac{b}{2c}\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,dx$$

$$\int \frac{1}{x^n(ax^2+bx+c)}\,dx = -\frac{1}{c(n-1)x^{n-1}} - \frac{b}{c}\int \frac{1}{x^{n-1}(ax^2+bx+c)}\,dx - \frac{a}{c}\int 1x^{n-2}(ax^2+bx+c)\,dx$$

$$\int \frac{x^m}{(ax^2+bx+c)^n}\,dx = -\frac{x^{m-1}}{a(2n-m-1)(ax^2+bx+c)^{n-1}} + \frac{c(m-1)}{a(2n-m-1)}\int \frac{x^{m-2}}{(ax^2+bx+c)^n} - \frac{b(n-m)}{a(2n-m-1)}\int \frac{}{(ax}$$

$$\int \frac{1}{x^m(ax^2+bx+c)^n} = -\frac{1}{c(m-1)x^{n-1}(ax^2+bx+c)^{n-1}} - \frac{a(m+2n-3)}{c(m-1)}\int \frac{1}{x^{m-2}(ax^2+bx+c)^n}\,dx - \frac{b(m+n-2)}{c(m-1)}$$

6.1.15 $\sqrt{ax^2 + bx + c}$

$$\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{a}}\ln\Bigl(2\sqrt{a}\sqrt{ax^2+bx+c}+2ax+b\Bigr) \\ -\dfrac{1}{\sqrt{-a}}\sin^{-1}\Bigl(\dfrac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}}\Bigr) = \dfrac{1}{\sqrt{a}}\sinh^{-1}\Bigl(\dfrac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}\Bigr) \end{cases}$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx = \frac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{a} - \frac{b}{2a}\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx = \begin{cases} -\dfrac{1}{\sqrt{c}}\ln\left(\dfrac{2\sqrt{c}\sqrt{ax^2+bx+c}+bx+2c}{x}\right) \\ \dfrac{1}{\sqrt{-c}}\sin^{-1}\Bigl(\dfrac{bx+2c}{|x|\sqrt{b^2-4ac}}\Bigr) = -\dfrac{1}{\sqrt{c}}\sinh^{-1}\Bigl(\dfrac{bx+2c}{|x|\sqrt{4ac-b^2}}\Bigr) \end{cases}$$

$$\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx = \frac{(2ax+b)\sqrt{ax^2+bx+c}}{4a} + \frac{4ac-b^2}{8a}\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$$

$$\int x\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx = \frac{\sqrt{ax^2+bx+c})^{\frac{3}{2}}}{3a} - \frac{b(2ax+b)}{8a^2}\sqrt{ax^2+bx+c} - \frac{b(4ac-b^2)}{16a^2}\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$$

$$\int \frac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{x}\,dx = \sqrt{ax^2+bx+c} + \frac{b}{2}\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx + c\int \frac{1}{x\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$$

$$\int (ax^2+bx+c)^{n+\frac{1}{2}}\,dx = \frac{(2ax+b)(ax^2+bx+c)^{n+\frac{1}{2}}}{4a(n+1)} + \frac{(2n+1)(4ac-b^2)}{8a(n+1)}\int (ax^2+bx+c)^{n-\frac{1}{2}}\,dx$$

$$\int x(ax^2+bx+c)^{n+\frac{1}{2}}\,dx = \frac{(ax^2+bx+c)^{n+\frac{3}{2}}}{a(2n+3)} - \frac{b}{2a}\int (ax^2+bx+c)^{n+\frac{1}{2}}\,dx$$

$$\int \frac{1}{(ax^2+bx+c)^{n+\frac{1}{2}}}\,dx = \frac{2(2ax+b)}{(2n-1)(4ac-b^2)(ax^2+bx+c)^{n-\frac{1}{2}}} + \frac{8a(n-1)}{(2n-1)(4ac-b^2)}\int \frac{1}{(ax^2+bx+c)^{n-\frac{1}{2}}}$$

$$\int \frac{1}{x(ax^2+bx+c)^{n+\frac{1}{2}}}\,dx = \frac{1}{c(2n-1)(ax^2+bx+c)^{n-\frac{1}{2}}} + \frac{1}{c}\int \frac{1}{x(ax^2+bx+c)^{n-\frac{1}{2}}}\,dx - \frac{b}{2c}\int \frac{1}{(ax^2+bx+c)^{n+\frac{1}{2}}}\,dx$$

6.1.16 e^{ax}

$\int e^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a}$

$\int xe^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a}(x - frac1a)$

$\int x^n e^{ax}\,dx = \frac{x^n e^{ax}}{a} - \frac{n}{a}\int x^{n-1}e^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a}(x^n - \frac{nx^{n-1}}{a} + \frac{n(n-1)x^{n-2}}{a^2} - \cdots \frac{(-1)^n n!}{a^n})$

$\int \frac{e^{ax}}{x}\,dx = \ln x + \frac{ax}{1\cdot 1!} + \frac{(ax)^2}{2\cdot 2!} + \frac{(ax)^3}{3\cdot 3!} + \cdots$

Κεφάλαιο 7

Αναλυτική Γεωμετρία Επιπέδου

7.1 Απόσταση μεταξύ 2 σημείων

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2}$$

7.2 Κλίση m ευθείας που διέρχεται από $P_1(x_1, y_1)$ και $P_2(x_2, y_2)$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \tan\theta$$

7.3 Εξίσωση ευθείας που διέρχεται από σημεία $P_1(x_1, y_1)$ και $P_2(x_2, y_2)$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad \text{ή} \quad \frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$y = mx + b$$

όπου $b = y_1 - mx_1 = \dfrac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2 - x_1}$ είναι το σημείο τομής της ευθείας με τον άξονα y.

7.4 Εξίσωση ευθείας που τέμνει τους άξονες x και y στα σημεία $a \neq 0$ και $b \neq 0$ αντίστοιχα

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

7.5 Κανονική μορφή εξίσωσης ευθείας

$$x \cos a + y \sin a = p$$

όπου p είναι η απόσταση της αρχής των αξόνων O από την ευθεία και p η γωνία που σχηματίζει η κάθετη απόσταση με τον θετικό ημιάξονα x.

7.6 Γενική εξίσωση ευθεία

$$Ax + By + C = 0$$

7.7 Απόσταση σημείου $P(x_1, y_1)$ από ευθεία $Ax + By + C = 0$

$$\frac{Ax_1 + By_1 + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$$

όπου επιλέγεται το κατάλληλο πρόσημο ώστε η απόσταση να είναι μη αρνητική.

7.8 Γωνία ϕ μεταξύ ευθειών με κλίσεις m_1, m_2

$$\tan\phi = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

Οι ευθείες είναι παράλληλες αν και μόνον αν $m_1 = m_2$. Οι ευθείες είναι κάθετες αν και μόνον αν $m_1 m_2 = -1$.

7.9 Εμβαδόν Τριγώνου με κορυφές τα σημεία (x_1, y_1), (x_2, y_2) και (x_3, y_3)

$$E = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \pm\frac{1}{2}(x_1y_2 + y_1x_3 - y_2x_3 - y_1x_2 - x_1y_3)$$

όπου επιλέγεται το κατάλληλο πρόσημο ώστε το εμβαδό να είναι μη αρνητικό. Αν το εμβαδό είναι μηδέν, τότε όλα τα σημεία βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία.

7.10 Μετασχηματισμοί συντεταγμένων

7.10.1 Μεταφορά

$$\begin{cases} x = x' + x_0 \\ y = y' + y_0 \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} x' = x - x_0 \\ y' = y - y_0 \end{cases}$$

όπου (x, y) και (x', y') οι συντεταγμένες ως προς τα συστήματα xy και $x'y'$ αντίστοιχα και (x_0, y_0) οι συντεταγμένες της αρχής O' ως προς τη σύστημα xy.

7.10.2 Περιστροφή

$$\begin{cases} x = x'\cos a - y'\sin a \\ y = x'\sin a + y'\cos a \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} x' = x\cos a + y\sin a \\ y' = y\cos a - x\sin a \end{cases}$$

όπου οι αρχές των δύο συστημάτων xy και $x'y'$ ταυτίζονται, αλλά ο άξονας x' σχηματίζει γωνία a με τον θετικό ημιάξονα x.

7.10.3 Μεταφορά και Περιστροφή

$$\begin{cases} x = x'\cos a - y'\sin a + x_0 \\ y = x'\sin a + y'\cos a + y_0 \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} x' = (x - x_0)\cos a + (y - y_0)\sin a \\ y' - (y - y_0)\cos a - (x - x_0)\sin a \end{cases}$$

όπου η αρχή O' του συστήματος $x'y'$ έχει συντεταγμένες (x_0, y_0) ως προς το σύστημα xy και ο άξονας x' σχηματίζει γωνία a με τον θετιό ημιάξονα.

7.10.4 Πολικές Συντεταγμένες (r, θ)

Ένα σημείο του επιπέδου μπορεί να προσδιορισθεί είτε με Καρτεσιανές (x, y) είτε με Πολικές συντεταγμένες (r, θ). Οι σχέσεις μετασχηματισμού μεταξύ αυτών των συντεταγμένων είναι

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \qquad \text{ή} \qquad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \tan^{-1}\dfrac{y}{x} \end{cases}$$

Κεφάλαιο 8

Αριθμητικές Σειρές

8.1 Αριθμητικές Σειρές

8.1.1 Αριθμητική Πρόοδος

$a+(a+d)+(a+2d)+\cdots+(a+(n-1)d)=\frac{1}{2}n[2a+(n-1)d]=\frac{1}{2}n(a+1)$ όπου $l=a+(n-1)d$ είναι ο τελευταίος όρος.

Μερικές ειδικές περιπτώσεις είναι $1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$ $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$

8.1.2 Γεωμετρική Σειρά

$a+ar+ar^2+ar^3+\cdots+ar^{n-1}=\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{a-rl}{1-r}$ όπου $l=ar^{n-1}$ είναι ο τελευταίος όρος και $r\neq 1$.

Αν $-1<r<1$, τότε $a+ar+ar^2+ar^3+\cdots=\frac{a}{1-r}$.

8.1.3 Αριθμητικο-Γεωμετρική Σειρά

$a+(a+d)r+(a+2d)r^2+\cdots+[a+(n-1)r^{n-1}]=\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{a-rl}{1-r}$ όπου $r\neq 1$, τότε $a+(a+d)r+(a+2d)r^2+\cdots=\frac{a}{1-r}+\frac{rd}{(1-r)^2}$.

8.1.4 Αθροίσματα Δυνάμεων θετικών ακεραίων

$1^p+2^p+3^p+\cdots+n^p=\frac{n^{p+1}}{p+1}+\frac{1}{2}n^p+\frac{B_1pn^{p-1}}{2!}-\frac{B_2p(p-1)(p-2)n^{p-3}}{4!}+\cdots$ όπου η σειρά τερματίζει στο n^2 ή στο n αναλόγως αν ο p είναι περιττός ή άρτιος, και B_k είναι οι αριθμοί Bernoulli.

Μερικές ειδικές περιπτώσεις είναι

$$\begin{aligned}
1+2+3+\cdots+n &= \frac{n(n+1)}{2}\\
1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\\
1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3 &= \frac{n^2(n+1)^2}{4}=(1+2+3+\cdots+n)^2\\
1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4 &= \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}
\end{aligned}$$

Αν $S_k=1^k+2^k+3^k+\cdots+n^k$ όπου k και n είναι θετικοί ακέραιοι, τότε

$$\binom{k+1}{1}S_1+\binom{k+1}{2}S_2+\cdots+\binom{k+1}{k}S_k=(n+1)^{k+1}-(n+1).$$

8.1.5 Σειρές αντίστροφων δυνάμεων θετικών ακεραίων

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\cdots=\ln 2$$
$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\cdots=\frac{\pi}{4}$$
$$1-\frac{1}{4}+\frac{1}{7}-\frac{1}{10}+\frac{1}{13}-\cdots=\frac{\pi\sqrt{3}}{9}+\frac{1}{3}\ln 2$$
$$1-\frac{1}{5}+\frac{1}{9}-\frac{1}{13}+\frac{1}{17}-\cdots=\frac{\pi\sqrt{2}}{8}+\frac{\sqrt{2}\ln(1+\sqrt{2}))}{4}$$
$$\frac{1}{2}-\frac{1}{5}+\frac{1}{8}-\frac{1}{11}+\frac{1}{14}-\cdots=\frac{\pi\sqrt{3}}{9}+\frac{1}{3}\ln 2$$
$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$$
$$\frac{1}{1^4}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\cdots=\frac{\pi^4}{90}$$
$$\frac{1}{1^6}+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{4^6}+\cdots=\frac{\pi^6}{945}$$
$$\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{12}$$
$$\frac{1}{1^4}-\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}-\frac{1}{4^4}+\cdots=\frac{7\pi^4}{720}$$
$$\frac{1}{1^6}-\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}-\frac{1}{4^6}+\cdots=\frac{31\pi^6}{30240}$$
$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{8}$$
$$\frac{1}{1^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{7^4}+\cdots=\frac{\pi^4}{96}$$
$$\frac{1}{1^6}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{5^6}+\frac{1}{7^6}+\cdots=\frac{\pi^6}{960}$$
$$\frac{1}{1^3}-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+\cdots=\frac{\pi^3}{32}$$
$$\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^3}-\frac{1}{5^3}+\frac{1}{7^3}+\cdots=\frac{3\pi^3\sqrt{2}}{128}$$
$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 9}+\cdots=\frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{4\cdot 6}+\cdots=\frac{3}{4}$$
$$\frac{1}{1^2\cdot 3^2}+\frac{1}{3^2\cdot 5^2}+\frac{1}{5^2\cdot 7^2}+\frac{1}{7^2\cdot 9^2}=\frac{\pi^2-8}{16}$$
$$\frac{1}{1^2\cdot 2^2\cdot 3^2}+\frac{1}{2^2\cdot 3^2\cdot 4^2}+\frac{1}{3^2\cdot 4^2\cdot 5^2}+\cdots=\frac{4\pi^2-39}{16}$$

8.1.6 Αλλες Σειρές

$$\frac{1}{2}+\cos a+\cos 2a+\cdots+\cos na=\frac{\sin(n+\frac{1}{2})a}{2\sin(\frac{a}{2})}$$
$$\sin a+\sin 2a+\sin 3a+\cdots+\sin na=\frac{\sin[\frac{1}{2}(n+1)]a\sin\frac{1}{2}na}{\sin\frac{a}{2}}$$
$$1+r\cos a+r^2\cos 2a+r^3\cos 3a+\cdots=\frac{1-r\cos a}{1-2r\cos a+r^2}, |r|<1$$
$$r\sin a+r^2\sin 2a+r^3\sin 3a+\cdots=\frac{r\sin a}{1-2r\cos a+r^2}, |r|<1$$
$$1+r\cos a+r^2\cos 2a+\cdots+r^n\cos na=\frac{r^{n+2}\cos na-r^{n+1}\cos(n+1)a-r\cos a+1}{1-2a\cos a+r^2}$$
$$r\sin a+r^2\sin 2a+\cdots r^n\sin na=\frac{r\sin a-r^{n+1}\sin(n+1)a+r^{n+2}\sin na}{1-2r\cos a+r^2}$$

Κεφάλαιο 9

Δυναμοσειρές

9.1 Σειρές Taylor

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(x)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + R_n$$

όπου R_n το υπόλοιπο μετά από n όρους, δίνεται από έναν από τους δύο παρακάτω τύπους:

Lagrange's Form: $R_n = \dfrac{f^{n(\xi)}}{n!}(x-a)^n$

Cauchy's Form: $R_n = \dfrac{f^n(\xi)}{(n-1)!}(x-\xi)^{n-1}(x-a)$

Η τιμή ξ η οποία μπορεί να είναι διαφορετική στους 2 τύπους, βρίσκεται μεταξύ των a και x. Ο παραπάνω τύπος ισχύει αν η $f(x)$ έχει συνεχείς παραγώγους, τουλάχιστον n-οστής τάξης.

Αν $\lim\limits_{x\to\infty} R_n = 0$, η άπειρη σειρά η οποία προκύπτει ονομάζεται σειρά Taylor της $f(x)$ για $x = a$. Αν $a = 0$, τότε η σειρά ονομάζεται σειρά Maclaurin. Αυτές οι σειρές, γνωστές και ως δυναμοσειρές, συγκλίνουν για κάθε τιμή του x σε κάποιο διάστημα, το οποίο ονομάζεται διάστημα σύγκλισης και αποκλίνουν για κάθε τιμή του x εκτός αυτού του διαστήματος.

9.2 Διωνυμικές Σειρές

$$\begin{aligned}(a+x)^n &= a^n + na^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}x^2 + \frac{n(n-3)(n-2)}{3!}a^{n-3}x^3 + \cdots \\ &= a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}x + \binom{n}{2}a^{n-2}x^2 + \binom{n}{3}a^{n-3}x^3 + \cdots\end{aligned}$$

Ειδικές περιπτώσεις:

$$\begin{array}{ll}
(a+x)^2 = a^2 + 2ax + x^2 & \\
(a+x)^3 = a^3 + 3a^2x + 3ax^2 + x^3 & \\
(a+x)^4 = a^4 + 4a^3x + 6a^2x^2 + 4ax^3 + x^4 & \\
(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \cdots & -1 < x < 1 \\
(1+x)^{-2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 - \cdots & -1 < x < 1 \\
(1+x)^{-3} = 1 - 3x + 6x^2 - 10x^3 + 15x^4 - \cdots & -1 < x < 1 \\
(1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \cdots & -1 < x \le 1 \\
(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2\cdot 4}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 - \cdots & -1 < x \le 1 \\
(1+x)^{-\frac{1}{3}} = 1 - \frac{1}{3}x + \frac{1\cdot 4}{3\cdot 6}x^2 - \frac{1\cdot 4\cdot 7}{3\cdot 6\cdot 9}x^3 + \cdots & -1 < x \le 1
\end{array}$$

9.3 Σειρές Εκθετικών και Λογαριθμικών Συναρτήσεων

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \qquad -\infty < x < \infty$$

$$a^x = e^{x \ln a} = 1 + x \ln a + \frac{(x \ln a)^2}{2!} + \frac{(x \ln a)^3}{3!} + \cdots \qquad -\infty < x < \infty$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \qquad -1 < x \leq 1$$

$$\frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \cdots \qquad -1 < x < 1$$

$$\ln x = 2\left\{ \left(\frac{x-1}{x+1}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5 + \cdots \right\} \qquad x > 0$$

$$\ln x = \left(\frac{x-1}{x}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{x-1}{x}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x}\right)^3 + \cdots \qquad x \geq \frac{1}{2}$$

9.4 Σειρές Τριγωνομετρικών Συναρτήσεων

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \qquad -\infty < x < \infty$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \qquad -\infty < x < \infty$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \cdots + \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)B_n x^{2n-1}}{(2n)!} + \cdots \qquad |x| < \frac{\pi}{2}$$

$$\cot x = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} - \frac{2x^5}{945} - \cdots - \frac{2^{2n} B_n x^{2n-1}}{(2n)!} - \cdots \qquad 0 < x < \pi$$

$$\sec x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + \frac{61x^6}{720} + \cdots + \frac{E_{nx^{2n}}}{(2n)!} + \cdots \qquad |x| < \frac{\pi}{2}$$

$$\csc x = \frac{1}{x} + \frac{x}{6} + \frac{7x^3}{360} + \frac{31x^5}{15120} + \cdots + \frac{2(2^{2n-1}-1)B_n x^{2n-1}}{(2n)!} + \cdots \qquad 0 < x < \pi$$

$$\sin^{-1} x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\frac{x^7}{7} + \cdots \qquad |x| < 1$$

$$\cos^{-1} x = \frac{\pi}{2} - \sin^{-1} x = \frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\frac{x^5}{5}\right) + \cdots \qquad |x| < 1$$

$$\tan^{-1} x = \begin{cases} x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots, & \text{αν } |x| < 1 \\ \pm\frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \cdots, & + \text{ αν } |x| \geq 1,\ - \text{ αν } |x| \leq 1 \end{cases}$$

$$\cot^{-1} x = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} x = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots\right), & \text{αν } |x| < 1 \\ p\pi + \frac{1}{x} - \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} - \cdots & p = 0 \text{ αν } x > 1,\ p = 1 \text{ αν } x < -1 \end{cases}$$

$$\sec^{-1} x = \cos^{-1}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x}\frac{1}{2 \cdot 3x63} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5x^5} + \cdots\right) \qquad |x| > 1$$

$$\csc^{-1} x = \sin^{-1}\frac{1}{x} = \frac{1}{x} + \frac{1}{2 \cdot 3x^3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5x^5} + \cdots \qquad |x| > 1$$

9.5 Σειρές Υπερβολικών Τριγωνομετρικών Συναρτήσεων

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots \qquad +\infty < x < \infty$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots \qquad +\infty < x < \infty$$

$$\tanh x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \frac{17x^7}{315} + \cdots + \frac{(-1)^n 2^{2n}(2^{2n}-1)B_n x^{2n-1}}{(2n)!} + \cdots \qquad |x| < \frac{\pi}{2}$$

$$\coth x = \frac{1}{x} + \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + \frac{2x^5}{945} - \cdots - \frac{(-1)^n 2^{2n} B_n x^{2n-1}}{(2n)!} - \cdots \qquad 0 < x < \pi$$

$$\operatorname{sech} x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} - \frac{61x^6}{720} + \cdots + \frac{(-1)^n E_{nx^{2n}}}{(2n)!} + \cdots \qquad |x| < \frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{csch} x = \frac{1}{x} - \frac{x}{6} + \frac{7x^3}{360} - \frac{31x^5}{15120} + \cdots + \frac{(-1)^n 2(2^{2n-1}-1)B_n x^{2n-1}}{(2n)!} + \cdots \qquad 0 < x < \pi$$

$$\sinh^{-1} x = \begin{cases} x - \dfrac{x^3}{2\cdot 3} + \dfrac{1\cdot 3x^5}{2\cdot 4\cdot 5} - \dfrac{1\cdot 3\cdot 5x^7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7} + \cdots, & \text{αν } |x| < 1 \\ \pm(\ln|2x| + \dfrac{1}{2\cdot 2x^2} - \dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 4x^4} + \dfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 6x^6} - \cdots), & + \text{αν } x \geq 1 \text{ , } - \text{αν } x \leq 1 \end{cases}$$

$$\cosh^{-1} x = \pm\left\{\ln(2x) - \left(\frac{1}{2\cdot 2x^2} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 4x^4} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 6x^6} + \cdots\right)\right\}, \quad + \text{αν } \cosh^{-1} x > 0,\ x \geq 1,\ - \text{αν } \cosh^{-1} x$$

$$\tanh^{-1} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \cdots \qquad |x| < 1$$

$$\coth^{-1} x = \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} + \frac{1}{7x^7} + \cdots \qquad |x| > 1$$

$$e^{\sin x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + \frac{3x^4}{8} + \cdots \qquad |x| < \frac{\pi}{2}$$

$$e^{\cos x} = e(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6} - \frac{31x^6}{720} + \cdots) \qquad -\infty < x < \infty$$

$$e^{\tan x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + \frac{3x^4}{8} + \cdots \qquad |x| < \frac{\pi}{2}$$

9.6 Σειρές Taylor για συναρτήσεις δύο μεταβλητών

$$f(x,y) = f(a,b) + (x-a)f_x(a,b) + (y-b)f_y(a,b) + \frac{1}{2}\{(x-a)^2 f_{xx}(a,b) + 2(x-a)(y-b)f_{xy}(a,b) + (y-b)^2 f_{yy}(a,b) + \cdots\}$$

όπου $f_x(a,b), f_y(a,b), \ldots$ είναι οι μερικές παράγωγοι ως προς x, y, $\ldots$ υπολογισμένες στο $x = a$, $y = b$.

Κεφάλαιο 10

Αριθμοί Bernoulli - Euler

10.1 Ορισμός των αριθμών Bernoulli

Οι αριθμοί Bernoulli B_1, B_2, $B_3, \ldots$ ορίζονται από τις σειρές

$$\frac{x}{e^x - 1} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{B_1 x^2}{2!} - \frac{B_2 x^4}{4!} + \frac{B_3 x^6}{6!} - \cdots \qquad |x| < 2\pi$$

$$1 - \frac{x}{2}\cot\frac{x}{2} = \frac{B_1 x^2}{2!} + \frac{B_2 x^4}{4!} + \frac{B_3 x^6}{6!} + \cdots \qquad |x| < \pi$$

10.2 Ορισμός των αριθμών Euler

Οι αριθμοί Euler E_1, E_2, $E_3, \ldots$ ορίζονται από τις σειρές

$$\operatorname{sech} x = 1 - \frac{E_1 x^2}{2!} + \frac{E_2 x^4}{4!} - \frac{E_3 x^6}{6!} + \cdots \qquad |x| < \frac{\pi}{2}$$

$$\sec x = 1 + \frac{E_1 x^2}{2!} + \frac{E_2 x^4}{4!} - \frac{E_3 x^6}{6!} + \cdots \qquad |x| < \frac{\pi}{2}$$

10.3 Πίνακας μερικών αριθμών Bernoulli και Euler

Bernoulli	Euler
$B_1 = \frac{1}{6}$	$E_1 = 1$
$B_2 = \frac{1}{30}$	$E_2 = 5$
$B_3 = \frac{1}{42}$	$E_3 = 61$
$B_4 = \frac{1}{30}$	$E_4 = 1385$
$B_5 = \frac{5}{66}$	$E_5 = 50521$
$B_6 = \frac{691}{2730}$	$E_6 = 2702765$
$B_7 = \frac{7}{6}$	$E_7 = 199360981$
$B_8 = \frac{3617}{510}$	$E_8 = 19391512145$
$B_9 = \frac{43867}{798}$	$E_9 = 2404879675441$
$B_{10} = \frac{174611}{330}$	$E_{10} = 370371188237525$

10.4 Σχέσεις μεταξύ των αριθμών Bernoulli και Euler

$$\binom{2n+1}{2}2^2B_1 - \binom{2n+1}{4}2^4B_2 + \binom{2n+1}{6}2^6B_3 - \cdots (-1)^{n-1}(2n+1)^{2n}B_n = 2n$$

$$E_n = \binom{2n}{2}E_{n-1} - \binom{2n}{4}E_{n-2} + \binom{2n}{6}E_{n-3} - \cdots (-1)^n$$

$$B_n = \frac{2n}{2^{2n}(2^{2n}-1)}\left\{\binom{2n-1}{1}E_{n-1} - \binom{2n-1}{3}E_{n-2} + \binom{2n-1}{5}E_{n-3} - \cdots (-1)^{n-1}\right\}$$

$$B_n = \frac{(2n)!}{2^{2n-1}\pi^{2n}}\left\{1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \cdots\right\}$$

$$B_n = \frac{2(2n)!}{(2^{2n}\pi^{2n})}\left\{1 + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{5^{2n}} + \cdots\right\}$$

$$B_n = \frac{2(2n)!}{(2^{2n-1}-1)\pi^{2n}}\left\{1 - \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} - \cdots\right\}$$

$$E_n = \frac{2^{2n+2}(2n)!}{\pi^{2n+1}}\left\{1 - \frac{1}{3^{2n+1}} + \frac{1}{5^{2n+1}} - \cdots\right\}$$

10.5 Ασυμπτωτική προσέγγιση για τους αριθμούς Bernoulli

$$B_n \sim 4n^{2n}(\pi e)^{-2n}\sqrt{\pi n}$$

Κεφάλαιο 11

Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις

11.1 Ορισμός Τριγωνομετρικών αριθμών οξείας γωνίας

Ημίτονο	$\sin A = \frac{a}{c} = \frac{\text{απέναντι}}{\text{υποτείνουσα}}$
Συνημίτονο	$\cos A = \frac{b}{c} = \frac{\text{προσκείμενη}}{\text{υποτείνουσα}}$
Εφαπτομένη	$\tan A = \frac{a}{b} = \frac{\text{απέναντι}}{\text{προσκείμενη}}$
Συνεφαπτομένη	$\cot A = \frac{b}{a} = \frac{\text{προσκείμενη}}{\text{απέναντι}}$
Τέμνουσα	$\sec A = \frac{c}{b} = \frac{\text{υποτείνουσα}}{\text{προσκείμενη}}$
Συντέμνουσα	$\csc a = \frac{c}{a} = \frac{\text{υποτείνουσα}}{\text{απέναντι}}$

11.2 Ορισμός Τριγωνομετρικών συναρτήσεων

$\sin A = \frac{y}{r}$

$\cos A = \frac{x}{r}$

$\tan A = \frac{y}{x}$

$\cot A = \frac{x}{y}$

$\sec A = \frac{r}{x}$

$\csc A = \frac{r}{y}$

11.3 Σχέση μεταξύ μοιρών και ακτινίων

Η γωνία θ σε ακτίνια ορίζεται ως

$$\theta = \frac{\text{μήκος τόξου AB}}{\text{ακτίνα}} = \frac{l}{r}$$

Η σχέση η οποία συνδέει μοίρες και ακτίνια είναι

$$\frac{\mu^\circ}{\theta} = \frac{\pi}{180^\circ}$$

- $1\,\text{radian} = \frac{180^\circ}{\pi} = 57.295\,779\,513\,082\,32\,\ldots^\circ$

- $1^\circ = \pi/180\,\text{radians} = 0.017\,453\,292\,519\,943\,295\,769\,2\ldots\text{radians}$

11.4 Σχέσεις μεταξύ Τριγωνομετρικών συναρτήσεων

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} \qquad \sin^2 A + \cos^2 A = 1$$
$$\cot A = \frac{1}{\tan A} = \frac{\cos A}{\sin A} \qquad \sec^2 A - \tan^2 A = 1$$
$$\sec A = \frac{1}{\cos A} \qquad \csc^2 A - \cot^2 A = 1$$
$$\csc A = \frac{1}{\sin A}$$

11.5 Γραφικές Παραστάσεις των τριγωγωνομετρικών συναρτήσεων

11.6 Συναρτήσεις Αρνητικών γωνιών

$$\sin(-A) = -\sin A$$
$$\cos(-A) = \cos A$$
$$\tan(-A) = -\tan A$$
$$\cot(-A) = -\cot A$$
$$\sec(-A) = \sec A$$
$$\csc(-A) = -\csc A$$

11.7 Τριγωνομετρικοί αριθμοί Αθροίσματος

$$\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$$
$$\sin(A-B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B$$
$$\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$$
$$\cos(A-B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B$$
$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A\tan B}$$
$$\tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A\tan B}$$
$$\cot(A+B) = \frac{\cot A\cot B - 1}{\cot B + \cot A}$$
$$\cot(A-B) = \frac{\cot A\cot B + 1}{\cot B - \cot A}$$

11.8 Αναγωγή στο Πρώτο Τεταρτημόριο

	$-A$	$\frac{\pi}{2} \pm A$	$\pi \pm A$	$\frac{3\pi}{2} \pm A$	$2k\pi \pm A$
sin	$-\sin A$	$\cos A$	$\sin A$	$-\cos A$	$\pm\sin A\alpha$
cos	$\cos A$	$\mp\sin A$	$-\cos A$	$\mp\sin A$	$\cos A$
tan	$-\tan A$	$\mp\cot A$	$\pm\tan A$	$\mp\cot A$	$\pm\tan A$
$\sec A$	$\sec A$	$\mp\csc A$	$-\sec A$	$\pm\csc$	$\sec A$
csc	$-\csc A$	$\sec A$	$\mp\csc A$	$-\sec A$	$\pm\csc A$
cot	$-\cot A$	$\mp\tan A$	$\pm\cot A$	$\mp\tan A$	$\pm\cot A$

Γωνία A (μοίρες)	Γωνία A (ακτίνια)	$\sin A$	$\cos A$	$\tan A$	$\cot A$	$\sec A$	$\csc A$
0°	0	0	1	0	∞	1	∞
15°	$\pi/12$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$2-\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$	$\sqrt{6}-\sqrt{2}$	$\sqrt{6}+\sqrt{2}$
30°	$\pi/6$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2
45°	$\pi/4$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
60°	$\pi/3$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$
75°	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$2+\sqrt{3}$	$2-\sqrt{3}$	$\sqrt{6}+\sqrt{2}$	$\sqrt{6}-\sqrt{2}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	1
105°	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$-(2+\sqrt{3})$	$-2(2-\sqrt{3})$	$-(\sqrt{6}+\sqrt{2})$	$\sqrt{6}-\sqrt{2}$
120°	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$
135°	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	-1	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
150°	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2
165°	$\frac{11\pi}{12}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$-(2-\sqrt{3})$	$-2(2+\sqrt{3})$	$-(\sqrt{6}-\sqrt{2})$	$\sqrt{6}+\sqrt{2}$
180°	π	0	-1	0	$\mp\infty$	-1	$\pm\infty$
195°	$\frac{13\pi}{12}$	$-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$2-\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$	$-(\sqrt{6}-\sqrt{2})$	$-(\sqrt{6}+\sqrt{2})$
210°	$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	-2
225°	$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$
240°	$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	-2	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$
255°	$\frac{17\pi}{12}$	$-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$2+\sqrt{3}$	$2-\sqrt{3}$	$-(\sqrt{6}+\sqrt{2})$	$-(\sqrt{6}-\sqrt{2})$
270°	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	$\pm\infty$	0	$\mp\infty$	-1
285°	$\frac{19\pi}{12}$	$-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$-(2+\sqrt{3})$	$-(2-\sqrt{3})$	$\sqrt{6}+\sqrt{2}$	$-(\sqrt{6}-\sqrt{2})$
300°	$\frac{5\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	- $\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$
315°	$\frac{7\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-1\ \sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	
330°	$\frac{11\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	-2
345°	$\frac{23\pi}{12}$	$-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{4}$	$-(2-\sqrt{3})$	$-2(2+\sqrt{3})$	$\sqrt{6}-\sqrt{2}$	$-(\sqrt{6}+\sqrt{2})$
360°	2π	0	1	0	$\mp\infty$	1	$\mp\infty$

11.9 Σχέσεις μεταξύ τριγωνομετρικών συναρτήσεων

	$\sin A = u$	$\cos A = u$	$\tan A = u$	$\sec A = u$	$\csc A = u$	
$\sin A$	u	$\sqrt{1-u^2}$	$\dfrac{u}{\sqrt{1+u^2}}$	$\dfrac{\sqrt{u^2-1}}{u}$	$\dfrac{1}{u}$	
$\cos A$	$\sqrt{1-u^2}$	u	$\dfrac{1}{\sqrt{1+u^2}}$	$\dfrac{u}{\sqrt{1+u^2}}$	$\dfrac{1}{u}$	$\dfrac{\sqrt{u^2-1}}{u}$
$\tan A$	$\dfrac{u}{\sqrt{1-u^2}}$	$\dfrac{\sqrt{1-u^2}}{u}$	u	$\dfrac{1}{u}$	$\sqrt{u^2-1}$	$\dfrac{1}{\sqrt{u^2-1}}$
$\cot A$	$\dfrac{\sqrt{1-u^2}}{u}$	$\dfrac{u}{\sqrt{1-u^2}}$	$\dfrac{1}{u}$	u	$\dfrac{1}{\sqrt{u^2-1}}$	$\sqrt{u^2-1}$
$\sec A$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}$	$\dfrac{1}{u}$	$\sqrt{1+u^2}$	$\dfrac{\sqrt{1+u^2}}{u}$	u	$\dfrac{u}{\sqrt{u^2-1}}$
$\csc A$	$\dfrac{1}{u}$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}$	$\dfrac{\sqrt{1+u^2}}{u}$	$\sqrt{1+u^2}$	$\dfrac{u}{\sqrt{u^2-1}}$	u

11.10 Γωνίες Διπλασίου Τόξου

$\sin 2A = 2\sin A \cos A$
$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 1 - 2\sin^2 A = 2\cos^2 A - 1$
$\tan 2A = \dfrac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$

11.11 Γωνίες Υποδιπλάσιου Τόξου

$$\sin\frac{A}{2} = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{1-\cos A}{2}} & \text{αν } \dfrac{A}{2} \text{ είναι στο 1ο ή 2ο Τεταρτημόριο} \\ -\sqrt{\dfrac{1-\cos A}{2}} & \text{αν } \dfrac{A}{2} \text{ είναι στο 3ο ή 4ο Τεταρτημόριο} \end{cases}$$

$$\cos\frac{A}{2} = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{1+\cos A}{2}} & \text{αν } \dfrac{A}{2} \text{ είναι στο 1ο ή 4ο Τεταρτημόριο} \\ -\sqrt{\dfrac{1+\cos A}{2}} & \text{αν } \dfrac{A}{2} \text{ είναι στο 2ο ή 3ο Τεταρτημόριο} \end{cases}$$

$$\tan\frac{A}{2} = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{1-\cos A}{1+\cos A}} & \text{αν } \dfrac{A}{2} \text{ είναι στο 1ο ή 3ο Τεταρτημόριο} \\ -\sqrt{\dfrac{1-\cos A}{1+\cos A}} & \text{αν } \dfrac{A}{2} \text{ είναι στο 2ο ή 4ο Τεταρτημόριο} \end{cases}$$

$$= \frac{\sin A}{1+\cos A} = \frac{1-\cos A}{\sin A} = \csc A - \cot A$$

11.12 Γωνίες Πολλαπλάσιου Τόξου

$$\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$$
$$\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$$
$$\tan 3A = \frac{3\tan A - \tan^3 A}{1 - 3\tan^2 A}$$
$$\sin 4A = 4\sin A\cos A - 8\sin^3 A\cos A$$
$$\cos 4A = 8\cos^4 A - 8\cos^2 A + 1$$
$$\tan 4A = \frac{4\tan A - 4\tan^3 A}{1 - 6\tan^2 A + \tan^4 A}$$

11.13 Δυνάμεις Τριγωνομετρικών Συναρτήσεων

$$\sin^2 A = \frac{1 - \cos 2A}{2}$$
$$\cos^2 A = \frac{1 + \cos 2A}{2}$$
$$\sin^3 A = \frac{3\sin A - \sin 3A}{4}$$
$$\cos^3 A = \frac{3\cos A + \cos 3A}{4}$$
$$\sin^4 A = \frac{3 - 4\cos 2A + \cos 4A}{8}$$
$$\cos^4 A = \frac{3 + 4\cos 2A + \cos 4A}{8}$$

11.14 Αθροίσματα Διαφορές και Γινόμενα Τριγωνομετρικών Συναρτήσεων

$$\sin A + \sin B = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A+B}{2}$$
$$\sin A - \sin B = 2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$
$$\cos A + \cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$
$$\cos A - \cos B = 2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{B-A}{2}$$
$$\sin A\sin B = \frac{1}{2}\{\cos(A-B) - \cos(A-B)\}$$
$$\cos A\cos B = \frac{1}{2}\{\cos(A-B) + \cos(A+B)\}$$
$$\sin A\cos B = \frac{1}{2}\{\sin(A-B) + \sin(A+B)\}$$

11.15 Αντίστροφες Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις

11.16 Σχέσεις μεταξύ αντίστροφων Τριγωνομετρικών Συναρτήσεων

$\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}$
$\tan^{-1} x + \cot^{-1} x = \frac{\pi}{2}$
$\sec^{-1} x + \csc^{-1} x = \frac{\pi}{2}$
$\sec^{-1} x = \cos^{-1} \frac{1}{x}$
$\csc^{-1} x = \sin^{-1} \frac{1}{x}$
$\cot^{-1} x = \tan^{-1} \frac{1}{x}$
$\sin^{-1} (-x) = -\sin^{-1} x$
$\cos^{-1} (-x) = \pi - \cos^{-1} x$
$\tan^{-1} (-x) = -\tan^{-1} x$
$\cot^{-1} (-x) = \pi - \cot^{-1} x$
$\sec^{-1} (-x) = \pi - \sec^{-1} x$
$\csc^{-1} (-x) = -\csc^{-1} x$

11.17 Γραφικές Παραστάσεις Αντίστροφων Τριγωνομετρικών Συναρτήσεων

11.18 Σχέσεις μεταξύ πλευρών και γωνιών τριγώνου

11.18.1 Νόμος των Ημιτόνων

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

11.18.2 Νόμος των Συνημιτόνων

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

11.18.3 Νόμος των Εφαπτομένων

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan\left(\frac{A+B}{2}\right)}{\tan\left(\frac{A-B}{2}\right.}$$

$$\sin A = \frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

όπου $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ είναι η ημιπερίμετρος του τριγώνου.

¨ΤΟΔΟ παρόμοιες σχέσεις όπου χρειάζεται