

Conjuntos
Matemática Discreta
Sistemas de Informação
Moésio M. de Sales¹

1 PROBLEMAS CONJUNTOS

Estude[2, 1, 3]

1. Se um conjunto A tem 1024 subconjuntos, então o cardinal de A , ou número de elementos de A , é:

(a) 5 (b) 6 (c) 7 (d) 9 (e) 10

Solução 1.1

$$\begin{aligned}2^n &= 1024 \\2^n &= 2^{10} \Rightarrow n = 10\end{aligned}$$

□

2. 35 estudantes estrangeiros vieram ao Brasil. 16 visitaram Manaus; 16, S. Paulo e 11, Salvador. Desses estudantes, 5 visitaram Manaus e Salvador e , desses 5, 3 visitaram também São Paulo. O número de estudantes que visitaram Manaus ou São Paulo foi:

(a) 29 (b) 24 (c) 11 (d) 8 (e) 5

3. Seja $E = \{\Delta\}$. Determine $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$.

Solução 1.2 Temos que:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(E) &= \{\emptyset, \{\Delta\}\} \\ \mathcal{P}(\mathcal{P}(E)) &= \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\Delta\}\}, \{\emptyset, \{\Delta\}\}\}\end{aligned}$$

□

4. Determine $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$.
5. Prove que $A \subset B \Leftrightarrow \mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$.
6. Sejam dois conjuntos, X e Y , e a operação Δ , definida por $X \Delta Y = (X - Y) \cup (Y - X)$. Justifique todos os itens.
- (a) $(X \Delta Y) \cap (X \cap Y) = \emptyset$
- (b) $(X \Delta Y) \cap (X - Y) = \emptyset$
- (c) $(X \Delta Y) \cap (Y - X) = \emptyset$
- (d) $(X \Delta Y) \cup (X - Y) = X$
- (e) $(X \Delta Y) \cup (Y - X) = X$

¹moesio@ifce.edu.br

Solução 1.3 (a)

$$\begin{aligned}(X \Delta Y) \cap (X \cap Y) &= [(X - Y) \cup (Y - X)] \cap (X \cap Y) \\ &= [(X - Y) \cap (X \cap Y)] \cup [(Y - X) \cap (X \cap Y)] \\ &= \emptyset \cup \emptyset \\ &= \emptyset\end{aligned}$$

□

7. Dados os conjuntos A e B , seja X um conjunto com as seguintes propriedades:

- I. $X \supset A$ e $X \supset B$,
- II. Se $Y \supset A$ e $Y \supset B$ então $Y \supset X$

Prove que: $X = A \cup B$.

Solução 1.4 Provaremos primeiro $(A \cup B \subset X)$:

Seja

$$\begin{aligned}x \in A \cup B &\Rightarrow x \in A \text{ ou } x \in B \\ \text{Como, por (I),} &\quad A \subset X \text{ e } B \subset X \\ \text{Em qualquer caso:} &\Rightarrow x \in X\end{aligned}$$

Portanto, $A \cup B \subset X$.

Provaremos, agora: $(X \subset A \cup B)$: Note que:

$$A \cup B \supset A \text{ e } A \cup B \supset B \text{ Pela propriedade (II)} \Rightarrow A \cup B \supset X$$

Portanto, $X \subset A \cup B$.

Assim, dado que $X \subset A \cup B$ e $X \supset A \cup B$, então $X = A \cup B$.

□

8. Sejam $A, B \subset E$.

- (a) Prove que $A \cap B = \emptyset$ se, somente se, $A \subset B^c$.
- (b) Prove que $A \cup B = E$ se, somente se, $A^c \subset B$.

Solução 1.5 (a) $A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \subset B^c$

Seja $x \in A$, dado que $A \cap B = \emptyset$ temos que $x \notin B$ logo $x \in B^c$.

Agora, $A \subset B^c \Rightarrow A \cap B = \emptyset$ Suponha, por absurdo que $x \in A \cap B$. Assim, $x \in A$ e $x \in B$, dado que $A \subset B^c$ temos que, como $x \in A \Rightarrow x \in B^c \Rightarrow x \notin B$ absurdo.

□

9. Dados os intervalos $A = [-1, 3)$, $B = [1, 4]$, $C = [2, 3)$, $D = (1, 2]$ e $E = (0, 2]$ dizer se 0 pertence a $((A - B) - (C \cap D)) - E$.

10. Dados $A, B \subset E$, prove que $A \subset B$ se, somente se, $A \cap B^c = \emptyset$.

11. Se $A, X \subset E$ são tais que $A \cap X = \emptyset$ e $A \cup X = E$, prove que $X = A^c$.

12. Seja $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$. Prove que $A \Delta B = A \Delta C$ implica $B = C$.

Solução 1.6 Primeiro:

$$A \Delta B = A \Delta C \Rightarrow B \subset C$$

Note que se $x \in A \Delta B$, significa que $x \in A - B$ ou $x \in B - A$, ou seja, x pertence apenas a A ou apenas a B .

Seja $x \in B$. Temos dois casos:

- Se x pertence apenas a B , então $x \in (A - B) \cup (B - A)$. Como $A \Delta B = A \Delta C$ neste caso $x \in A \Delta C$, logo $x \in (A - C) \cup (C - A)$ e como $x \notin A$ temos que $x \in C$.
- Se x pertence a B e a A , então $x \notin (A - B) \cup (B - A)$. Como $A \Delta B = A \Delta C$ neste caso $x \notin A \Delta C$, logo $x \notin (A - C) \cup (C - A)$ e como $x \in A$ temos que $x \in C$.

Analogamente:

$$A \Delta B = A \Delta C \Rightarrow B \supset C$$

□

13. Uma urna contém três bolas vermelhas, duas azuis e uma amarela. Duas bolas são selecionadas aleatoriamente sem reposição. Sejam os eventos:

$$A = \{\text{pelo menos uma bola é vermelha}\} \quad B = \{\text{pelo menos uma bola é azul}\}$$

Descreva usando a notação de conjuntos os seguintes eventos:

- Ambas as bolas são amarelas.
- Há uma bola vermelha e uma azul.

Solução 1.7 (a) O evento em questão é que não ocorre A e não ocorre B , ou seja, $A^c \cap B^c$

(b) Há uma bola vermelha e uma azul na amostra, se e somente se, os eventos A e B ocorrem, ou seja, $A \cap B$

□

14. Nas mesmas condições do exercício anterior, descreva os seguintes eventos:

- $A \cap B^c$
- $A \cup B$
- $A \cup B^c$

Solução 1.8 (a) $A \cap B^c = \{\text{Significa que há pelo menos uma bola vermelha e não há bolas azuis.}\}$

(b) $A \cup B = \{\text{Representa que há pelo menos uma bola que não é amarela.}\}$

(c) $A \cup B^c = \{\text{Há duas bolas azuis na amostra, ou uma vermelha e uma azul ou uma vermelha e uma amarela. Note que isto é precisamente o evento } A, \text{ pois o evento } B^c, \text{ implica que o evento } A \text{ ocorre, pois se não há bolas azuis na amostra, necessariamente uma delas será vermelha.}\}$

□

Referências

- [1] Edgard de Alencar Filho. *Teoria Elementar dos Conjuntos*. Nobel, 1976.
- [2] Judith L. Gersting. *Fundamentos Matemáticos para a Ciência da Computação: um tratamento moderno de Matemática Discreta*. Livros Técnicos e Científicos, 2004.
- [3] Edward R. Scheinerman. *Matemática Discreta - Uma Introdução*. THOMSON PIONEIRA, 2003.