Funções
Matemática Discreta
Sistemas de Informação

Moésio M. de Sales[1]

1 Problemas Funções

Estude[2, 1, 3]

1. Uma função f de variável real satisfaz a condição $f(x+1) = f(x) + f(1)$, qualquer que seja o valor da variável x. Sabendo-se que $f(2) = 1$, podemos concluir que $f(5)$ é igual a:

Solução 1.1 *Tomando $x = 1$:*

$$\begin{aligned} f(1+1) &= f(1) + f(1) \\ f(2) &= 2f(1) \\ 1 &= 2f(1) \Rightarrow f(1) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Tomando $x = 2$:

$$\begin{aligned} f(2+1) &= f(2) + f(1) \\ f(3) &= 1 + \frac{1}{2} \Rightarrow f(3) = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Tomando $x = 3$:

$$\begin{aligned} f(3+1) &= f(3) + f(1) \\ f(4) &= \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \Rightarrow f(4) = \frac{4}{2} = 2 \end{aligned}$$

Tomando $x = 4$:

$$\begin{aligned} f(4+1) &= f(4) + f(1) \\ f(5) &= 2 + \frac{1}{2} \Rightarrow f(5) = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

2. Considere $g : \{a, b, c\} \to \{a, b, c\}$ uma função tal que $g(a) = b$ e $g(b) = a$. Então, temos:

- **(a)** a equação $g(x) = x$ tem solução se, e somente se, g é injetora.
- **(b)** g é injetora, mas não é sobrejetora.
- **(c)** g é sobrejetora, mas não é injetora.
- **(d)** se g não é sobrejetora, então $g(g(x)) = x$ para todo x em $\{a, b, c\}$
- **(e)** n.d.r.a.

[1] moesio@ifce.edu.br

Solução 1.2 ***(a)*** *Como $g(a) = b$ e $g(b) = a$ e se a função é injetiva, então necessariamente $g(c) = c$, logo $g(x) = x$ tem solução.*

(b) *Se g é injetiva, $g(c) = c$ e então $Img = CD$, logo também será sobrejetiva.*

(c) *Se g é sobrejetiva, devemos ter $g(c) = c$ pois $g(a) = b$ e $g(b) = a$, logo também será injetiva.*

(d) *Se g não é sobrejetiva $g(c) = b$ ou $g(c) = a$. Temos que:*

$$\begin{aligned} Se\ g(a) = b \Rightarrow g(g(a)) = g(b) = a\ \ Verdadeiro \\ Se\ g(b) = a \Rightarrow g(g(b)) = g(a) = b\ \ Verdadeiro \\ Se\ g(c) = b \Rightarrow g(g(c)) = g(b) = a\ \ Falso \\ Se\ g(c) = a \Rightarrow g(g(c)) = g(a) = b\ \ Falso \end{aligned}$$

3. Definimos a função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ da seguinte forma

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(1) = 1 \\ f(2n) = f(n),\ \ n \geq 1 \\ f(2n+1) = n^2,\ \ n \geq 1 \end{cases}$$

Definimos a função $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ da seguinte forma:

$$g(n) = f(n) \cdot f(n+1).$$

Podemos afirmar que:

(a) g é uma função sobrejetora.
(b) g é uma função injetora.
(c) f é uma função sobrejetora.
(d) f é uma função injetora.
(e) $g(2018)$ tem mais do que 4 divisores positivos.

Solução 1.3 ***(a)*** *Da igualdade $f(2n) = f(n), n \geq 1$ tem-se*

$$f(2^k) = f(2^{2k-1}) = f(2^{2k-2}) = \cdots = f(2) = f(1) = 1$$

Assim, todas as potências de 2 tem imagem igual a 1.

(b) *Da igualdade $f(2n+1) = n^2, n \geq 1$ tem-se $f(3) = f(2 \cdot 1 + 1) = 1$. As imagens de todos os demais números ímpares é um quadrado perfeito diferente de 1, portanto diferente de 3.*

(c) *A imagem de qualquer outro número par que não é potência de 2, e igual a imagem de um número ímpar e, portanto, diferente de 3.*

(d) *Como $3 \in CD(f)$, $3 \in CD(g)$, $3 \in Im(f)$ e $3 \in Im(g)$, nem f, nem g são sobrejetoras.*

(e) *$f(2) = f(1) = 1$, portanto f não é injetora.*

$$\begin{aligned} g(1) = f(1) \cdot f(2) = 1 \cdot 1 = 1\ \ e \\ g(2) = f(2) \cdot f(3) = 1 \cdot 1 = 1 \end{aligned}$$

g não é injetora, pois $g(1) = g(2)$

(f)

$$\begin{aligned} g(2018) &= f(2018) \cdot f(2019) = f(1009) \cdot f(2019) \\ &= 5042 \cdot 10092 \end{aligned}$$

que possui mais do que 4 divisores positivos

4. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x + y) = f(x) + f(y)$, para todo x e y. Calcule $f(0) + 1$.

Solução 1.4 *Se $x = y = 0$:*

$$f(0 + 0) = f(0) + f(0) \Rightarrow f(0) = f(0) + f(0) \Rightarrow f(0) = 0$$

Potanto,

$$f(0) + 1 = 0 + 1 = 1$$

5. Se f uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = (x - 3)/(x^2 + 3)$, então a expressão $\frac{f(x)-f(1)}{(x-1)}$, para $x \leq 1$, equivalente a

(a) $(x + 3)/2(x^2 + 3)$

(b) $(x - 3)/2(x^2 + 3)$

(c) $(x + 1)/2(x^2 + 3)$

(d) $(x - 1)/2(x^2 + 3)$

(e) $-1/x$

6. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} - \{0\}$ uma função satisfazendo às condições:

$$\begin{cases} f(x + y) = f(x) \cdot f(y) \ \forall x, y \in \mathbb{R} \\ f(x) \neq 1, \forall x \in \mathbb{R} - \{0\} \end{cases}$$

Podemos afirmar:

(a) f pode ser ímpar.

(b) $f(0) = 1$

(c) f é injetiva.

(d) f não é sobrejetiva, pois $f(x) > 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Solução 1.5 *(a)* *(**Falso**) Uma função é impar se para todo x, $f(-x) = -f(x)$.*

Tomando $x = y = \frac{x}{2}$, obtemos:

$$\begin{aligned} f(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}) &= f(\frac{x}{2}) \cdot f(\frac{x}{2}) \\ f(x) &= [f(\frac{x}{2})]^2 \end{aligned}$$

Ou seja, para todo $x \in \mathbb{R}$, f é sempre positivo e portanto não pode ser ímpar.

(b) *(**Verdadeiro**) Tome $x = y = 0$*

$$\begin{aligned} f(0 + 0) &= f(0) \cdot f(0) \\ f(0) &= f(0) \cdot f(0) \end{aligned}$$

Como $f(0) \neq 0$ para todo x, obtemos $f(0) = \frac{f(0)}{f(0)} = 1$

(c) *(**Verdadeiro**) Seja*

$$\begin{aligned} x \neq y \Rightarrow x - y &\neq 0 \\ f(x - y) &\neq 1 \text{ pois } f(x) \neq 1, \forall x \neq 0 \\ f(x)f(-y) &\neq 1 \\ f(x) &\neq \frac{1}{f(-y)} \end{aligned}$$

Agora, note que $f(y - y) = f(y)f(-y) \Rightarrow f(0) = f(y)f(-y) \Rightarrow f(y) = \frac{1}{f(-y)}$. Portanto, $f(x) \neq \frac{1}{f(-y)} = f(y)$. Logo, f é injetiva.

(d) *(**Verdadeiro**) Pelo item (a), f é sempre positivo, mas o domínio de f pelo enunciado é $\mathbb{R} - \{0\}$ portanto f não é sobrejetiva pois não assume valores negativos.*

7. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função tal que $f(1) = 2$, $f(\sqrt{2}) = 4$ e $f(x+y) = f(x) + f(y)$, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$. Calcule o valor de $f(3+\sqrt{2})$.

8. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função tal que $f(10+x) = f(10-x)$ e $f(20+x) = -f(20-x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Mostre que f é uma função ímpar.

9. Seja $f : \mathbb{R} - \{2\} \to \mathbb{R} - \{3\}$ a função definida por $f(x) = \frac{3x-5}{x-2}$. Mostre que f é uma bijeção.

Solução 1.6 *Temos que:*

$$f(x) = \frac{3x-5}{x-2} = \frac{3(x-2)+1}{x-2} = 3 + \frac{1}{x-2}$$

A função $f(x)$ *assume todo valor exceto* 3*, pois*

$$3 + \frac{1}{x-2} = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{x-2} = 0 \tag{1}$$

Ou seja, dado $y \neq 3$ *sempre temos* $x = 2 + \frac{1}{y-3}$*. portando* f *é sobre!*
Por outro, dado $x_1, x_2 \in \mathbb{R} - \{2\}$ *se*

$$\begin{array}{rcl} f(x_1) & = & f(x_2) \\ 3 + \dfrac{1}{x_1-2} & = & 3 + \dfrac{1}{x_2-2} \\ \dfrac{1}{x_1-2} & = & \dfrac{1}{x_2-2} \\ x_1 & = & x_2 \end{array}$$

Portanto, f *é injetiva!*

Referências

[1] Edgard de Alencar Filho. *Teoria Elementar dos Conjuntos*. Nobel, 1976.

[2] Judith L. Gersting. *Fundamentos Matemáticos para a Ciência da Computação: um tratamento moderno de Matemática Discreta*. Livros Técnicos e Científicos, 2004.

[3] Edward R. Scheinerman. *Matemática Discreta - Uma Introdução*. THOMSON PIONEIRA, 2003.