Conjuntos
Matemática Discreta
Sistemas de Informação

Moésio M. de Sales[1]

1 Problemas Conjuntos

Estude[2, 1, 3]

1. Se um conjunto A tem 1024 subconjuntos, então o cardinal de A, ou número de elementos de A, é:

(a) 5 **(b)** 6 **(c)** 7 **(d)** 9 **(e)** 10

Solução 1.1

$$\begin{aligned} 2^n &= 1024 \\ 2^n &= 2^{10} \Rightarrow n = 10 \end{aligned}$$

2. 35 estudantes estrangeiros vieram ao Brasil. 16 visitaram Manaus; 16, S. Paulo e 11, Salvador. Desses estudantes, 5 visitaram Manaus e Salvador e , desses 5, 3 visitaram também São Paulo. O número de estudantes que visitaram Manaus ou São Paulo foi:

(a) 29 **(b)** 24 **(c)** 11 **(d)** 8 **(e)** 5

3. Seja $E = \{\Delta\}$. Determine $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$.

Solução 1.2 *Temos que:*

$$\mathcal{P}(E) = \{\varnothing, \{\Delta\}\}$$
$$\mathcal{P}(\mathcal{P}(E)) = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\Delta\}\}, \{\varnothing, \{\Delta\}\}\}$$

4. Determine $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\varnothing)))$.

5. Prove que $A \subset B \Leftrightarrow \mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$.

6. Sejam dois conjuntos, X e Y, e a operação Δ, definida por $X\Delta Y = (X - Y) \cup (Y - X)$. Justifique todos os ítens.

(a) $(X\Delta Y) \cap (X \cap Y) = \varnothing$
(b) $(X\Delta Y) \cap (X - Y) = \varnothing$
(c) $(X\Delta Y) \cap (Y - X) = \varnothing$
(d) $(X\Delta Y) \cup (X - Y) = X$
(e) $(X\Delta Y) \cup (Y - X) = X$

Solução 1.3 *(a)*

$$\begin{aligned} (X\Delta Y) \cap (X \cap Y) &= [(X - Y) \cup (Y - X)] \cap (X \cap Y) \\ &= [(X - Y) \cap (X \cap Y)] \cup [(Y - X) \cap (X \cap Y)] \\ &= \varnothing \cup \varnothing \\ &= \varnothing \end{aligned}$$

7. Dados os conjuntos A e B, seja X um conjunto com as seguintes propriedades:

[1] moesio@ifce.edu.br

I. $X \supset A$ e $X \supset B$,

II. Se $Y \supset A$ e $Y \supset B$ então $Y \supset X$

Prove que: $X = A \cup B$.

Solução 1.4 *Provaremos primeiro* $(A \cup B \subset X)$*:*
Seja

$$\begin{aligned} x \in A \cup B \quad &\Rightarrow \quad x \in A \text{ ou } x \in B \\ \text{Como, por (I),} \quad &\quad\;\; A \subset X \text{ e } B \subset X \\ \text{Em qualquer caso:} \quad &\Rightarrow \quad x \in X \end{aligned}$$

Portanto, $A \cup B \subset X$.
Provaremos, agora: $(X \subset A \cup B)$*: Note que:*

$$A \cup B \supset A \text{ e } A \cup B \supset B \text{ Pela propriedade (II)} \Rightarrow A \cup B \supset X$$

Portanto, $X \subset A \cup B$.
Assim, dado que $X \subset A \cup B$ *e* $X \supset A \cup B$*, então* $X = A \cup B$.

8. Sejam $A, B \subset E$.

(a) Prove que $A \cap B = \varnothing$ se, somente se, $A \subset B^c$.

(b) Prove que $A \cup B = E$ se, somente se, $A^c \subset B$.

Solução 1.5 ***(a)*** $A \cap B = \varnothing \Rightarrow A \subset B^c$

Seja $x \in A$*, dado que* $A \cap B = \varnothing$ *temos que* $x \notin B$ *logo* $x \in B^c$.

Agora, $A \subset B^c \Rightarrow A \cap B = \varnothing$ *Suponha, por absurdo que* $x \in A \cap B$*. Assim,* $x \in A$ *e* $x \in B$*, dado que* $A \subset B^c$ *temos que, como* $x \in A \Rightarrow x \in B^c \Rightarrow x \notin B$ *absurdo.*

9. Dados os intervalos $A = [-1, 3)$, $B = [1, 4]$, $C = [2, 3)$, $D = (1, 2]$ e $E = (0, 2]$ dizer se 0 pertence a $((A - B) - (C \cap D)) - E$.

10. Dados $A, B \subset E$, prove que $A \subset B$ se, somente se, $A \cap B^c = \varnothing$.

11. Se $A, X \subset E$ são tais que $A \cap X = \varnothing$ e $A \cup X = E$, prove que $X = A^c$.

12. Seja $A \vartriangle B = (A - B) \cup (B - A)$. Prove que $A \vartriangle B = A \vartriangle C$ implica $B = C$.

Solução 1.6 Primeiro:
$A \vartriangle B = A \vartriangle C \Rightarrow B \subset C$
Note que se $x \in A \vartriangle B$*, significa que* $x \in A - B$ *ou* $x \in B - A$*, ou seja,* x *pertence apenas a* A *ou apenas a* B.
Seja $x \in B$*. Temos dois casos:*

- *Se* x *pertence apenas a* B*, então* $x \in (A - B) \cup (B - A)$*. Como* $A \vartriangle B = A \vartriangle C$ *neste caso* $x \in A \vartriangle C$*, logo* $x \in (A - C) \cup (C - A)$ *e como* $x \notin A$ *temos que* $x \in C$.

- *Se* x *pertence a* B *e a* A*, então* $x \notin (A - B) \cup (B - A)$*. Como* $A \vartriangle B = A \vartriangle C$ *neste caso* $x \notin A \vartriangle C$*, logo* $x \notin (A - C) \cup (C - A)$ *e como* $x \in A$ *temos que* $x \in C$.

Analogamente:
$A \vartriangle B = A \vartriangle C \Rightarrow B \supset C$

13. Uma urna contém três bolas vermelhas, duas azuis e uma amarela. Duas bolas são selecionadas aleatoriamente sem reposição. Sejam os eventos:

$$A = \{\text{pelo menos uma bola é vermelha}\} \; B = \{\text{pelo menos uma bola é azul}\}$$

Descreva usando a notação de conjuntos os seguintes eventos:

(a) Ambas as bolas são amarelas.

(b) Há uma bola vermelha e uma azul.

Solução 1.7 ***(a)*** *O evento em questão é que não ocorre A e não ocorre B, ou seja, $A^c \cap B^c$*

(b) *Há uma bola vermelha e uma azul na amostra, se e somente se, os eventos A e B ocorrem, ou seja, $A \cap B$*

14. Nas mesmas condições do exercício anterior, descreva os seguintes eventos:

(a) $A \cap B^c$

(b) $A \cup B$

(c) $A \cup B^c$

Solução 1.8 ***(a)*** $A \cap B^c = \{$*Significa que há pelo menos uma bola vermelha e não há bolas azuis.*$\}$

(b) $A \cup B = \{$*Representa que há pelo menos uma bola que não é amarela.*$\}$

(c) $A \cup B^c =$ *Há duas bolas azuis na amostra, ou uma vermelha e uma azul ou uma vermelha e uma amarela. Note que isto é precisamente o evento A, pois o evento B^c, implica que o evento A ocorre, pois se não há bolas azuis na amostra, necessariamente uma delas será vermelha.*

Referências

[1] Edgard de Alencar Filho. *Teoria Elementar dos Conjuntos*. Nobel, 1976.

[2] Judith L. Gersting. *Fundamentos Matemáticos para a Ciência da Computação: um tratamento moderno de Matemática Discreta*. Livros Técnicos e Científicos, 2004.

[3] Edward R. Scheinerman. *Matemática Discreta - Uma Introdução*. THOMSON PIONEIRA, 2003.