Princípio de Indução e Função
Matemática Discreta
Sistemas de Informação

Moésio M. de Sales[1]

1 Axioma de Indução[3]

Teorema 1.1 (Princípio de Indução Matemática) . *Seja $a \in \mathbb{N}$ e seja $p(n)$ uma sentença aberta em n. Suponha que[3]*

(i) $p(a)$ é verdade, e que

(ii) $\forall n \geqslant a,\ p(n) \Longrightarrow p(n+1)$ é verdade,

então $p(n)$ é verdade para todo $n \geqslant a$.

2 Segundo Princípio de Indução

Teorema 2.1 (Segundo P.I.M.) . *Seja $P(n)$ uma sentença aberta em n e $n_0 \in \mathbb{N}$. Suponha que*

(i) $P(n_0)$ é verdadeira, e

(ii) para todo $k \in \mathbb{N}$, com $k \geqslant n_0$ se $P(j)$ é verdadeira para $n_0 \leqslant j \leqslant k$, segue que $P(k+1)$ é verdadeira.

Então $P(n)$ é verdadeira para todo número natural $n \geqslant n_0$.

Exemplo 2.1 *Mostre as seguintes fórmulas por Indução[2, 1]*

1. $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$
2. $2^n > n$, *para todo natural* n.

3 Funções

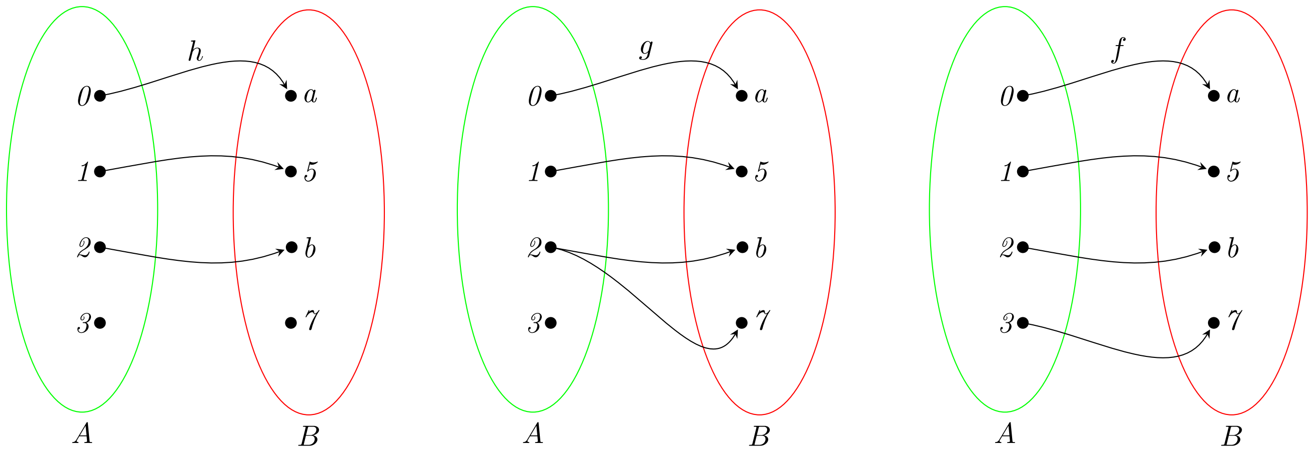
Definição 3.1 *Dados os conjuntos A, B, uma função $f : A \to B$ (lê-se "uma função de A em B") é uma regra ou conjunto de regras que diz como associar a cada elemento $x \in A$ um elemento $y = f(x) \in B$. O conjunto A chama-se domínio e B contradomínio da função f. Para cada $x \in A$ o elemento $f(x) \in B$ chama-se imagem de x pela função f.*

A natureza da regra que ensina como obter o valor $f(x) \in B$ quando é dado $x \in A$ é arbitrária e esta sujeita apenas a duas condições[3]:

1. Não deve haver exceções;
2. Não deve haver ambiguidades.

Exemplo 3.1 *Uma formar eficiente de visualizar os conceitos dessa definição é através de diagramas, observe:*

[1] moesio@ifce.edu.br



Nos diagramas acima h e g não são funções e f é função.

Exemplo 3.2 *A fórmula definida por $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \sqrt{x}$ não é função.*
Note que dado $x = -1 \in \mathbb{R}$ sua imagem $f(-1) = \sqrt{-1}$ não está definido em $\mathbb{R}$.

4 Funções: Injetivas, Sobrejetivas e Bijetivas

4.1 Função Injetiva

Definição 4.1 *Uma função $f : A \to B$ chama-se injetiva quando elementos diferentes de A são transformados por f em elementos diferentes em B. Ou seja,*

$$x \neq x' \text{ em } A \Rightarrow f(x) \neq f(x').$$

ou

$$f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'.$$

4.2 Função Sobrejetiva

Definição 4.2 *Diz-se que uma função $f : A \to B$ é sobrejetiva quando, para qualquer elemento $y \in B$, pode-se encontrar (pelo menos) um elemento $x \in A$ tal que $f(x) = y$.*

4.3 Função Bijetiva

Definição 4.3 *Uma função $f : A \to B$ chama-se uma bijeção, ou uma correspondência biunívoca entre A e B quando é ao mesmo tempo injetiva e sobrejetiva.*

4.4 Função Par e Função Ímpar

Definição 4.4 *Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é PAR quando se tem $f(-t) = f(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.*

Definição 4.5 *Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é ÍMPAR quando se tem $f(-t) = -f(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.*

Exemplo 4.1 *Dadas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*

1. $f(x) = 2x$

$$f(-x) = 2(-x) = -2x \Rightarrow f(-x) = -f(x),$$

portanto f é ímpar.

2. $f(x) = x^2 - 1$

$$f(-x) = (-x)^2 - 1 = x^2 - 1 \Rightarrow f(x) = f(-x),$$

portanto f é par.

3. $f(x) = x^2 - 5x + 6$

$$f(-x) = (-x)^2 - 5(-x) + 6 = x^2 + 5x + 6$$

Como $f(x) \neq f(-x)$, então f não é par. Temos também que $-f(x) \neq f(-x)$, logo f não é ímpar.

4.5 Função Composta

Definição 4.6 *Sejam $f : A \to B$ e $g : B \to C$ funções tais que o domínio de g é igula ao contradomínio de f. Neste daso, podemos definir a* FUNÇÃO COMPOSTA

$$g \circ f : A \to C$$

que consiste em aplicar primeiro f e depois g. Mais precisamente,

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \text{ para todo } x \in A$$

Definição 4.7 *Diz-se que a função $g : B \to A$ é a inversa da função $f : A \to B$ quando se tem*

$$g(f(x)) = x \text{ e } f(g(y)) = y \ \forall\ x \in A,\ \forall\ y \in B$$

Dois fatos importante que devemos destacar:
Se $g(f(x)) = x$ para todo $x \in A$ então a função f é injetiva, pois

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

O segundo fato é que:
Se vale igualdade $f(g(y)) = y$, para todo $y \in B$, então f é sobrejetiva. De fato, dado $y \in B$ arbitrário, tomamos $x = g(y) \in A \Rightarrow f(x) = f(g(y)) = y$.
Podemos concluir, portanto:

Se a função $f : A \to B$ possui inversa então f é INJETIVA E SOBREJETIVA, OU SEJA, É UMA BIJEÇÃO *entre A e B.*

4.6 Função Bijetiva e Cardinalidade

Definição 4.8 *Diz-se que dois conjuntos A e B têm o mesmo* NÚMERO CARDINAL *quando se pode definir uma correspondência biunívoca $f : A \to B$.*

Exemplo 4.2 *Existe uma bijeção $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ definida pela função $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ dada por*

$$f(z) = \begin{cases} 2z, & \text{se } z \geq 0 \\ 2(-z) - 1, & \text{se } z < 0. \end{cases}$$

5 Conjuntos Finitos e Infinitos

Dados $n \in \mathbb{N}$, indiquemos com a notação I_n o conjuntos dos números naturais de 1 até n, ou seja,

$$I_n = \{k \in \mathbb{N}; 1 \leqslant k \leqslant n\}$$

Definição 5.1 *Seja X um conjunto. Diz que X é* FINITO, *e que X tem n elementos quando se pode estabelecer uma correspondência biunívoca $f : I_n \to X$. O número n chama-se o número cardinal do conjunto X.*

Definição 5.2 *Diz-se que X é* INFINITO *quando ele não é finito, ou seja, que X não é vazio e que, não importa qual seja $n \in \mathbb{N}$, não existe uma correspondência biunívoca $f : I_n \to X$.*

O número cardinal de um conjunto finito A $(n(A))$, goza das seguintes propriedades básicas:

5.1 Propriedades

1. *Todo subconjunto B de um conjuto finito A é finito e $n(B) \leqslant n(A)$. Tem-se $n(B) = n(A) \Leftrightarrow A = B$.*
2. *(Princípio da Inclusão Exclusão) Se A e B são finitos então $A \cup B$ é finito e tem-se $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$.*
3. *(Princípio das Gavetas) Sejam A, B conjuntos finitos. Se $n(A) > n(B)$, nenhuma função $f : A \to B$ é injetiva e nenhuma função $g : B \to A$ é sobrejetiva.*

6 Exercícios

1. *Uma função f de variável real satisfaz a condição $f(x+1) = f(x) + f(1)$, qualquer que seja o valor da variável x. Sabendo-se que $f(2) = 1$, podemos concluir que $f(5)$ é igual a:*

2. *A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x+y) = f(x) + f(y)$, para todo x e y. Calcule $f(0) + 1$.*

3. *Se f uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = (x-3)/(x^2+3)$, então a expressão $\frac{f(x)-f(1)}{(x-1)}$, para $x \leq 1$, equivalente a*

(a) $(x+3)/2(x^2+3)$
(b) $(x-3)/2(x^2+3)$
(c) $(x+1)/2(x^2+3)$
(d) $(x-1)/2(x^2+3)$
(e) $-1/x$

4. *Considere $g : \{a, b, c\} \to \{a, b, c\}$ uma função tal que $g(a) = b$ e $g(b) = a$. Então, temos:*

(a) *a equação $g(x) = x$ tem solução se, e somente se, g é injetora.*
(b) *g é injetora, mas não é sobrejetora.*
(c) *gé sobrejetora, mas não é injetora.*
(d) *se g não é sobrejetora, então $g(g(x)) = x$ para todo x em $\{a, b, c\}$*
(e) *n.d.r.a.*

5. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} - \{0\}$ uma função satisfazendo às condições:*

$$\begin{cases} f(x+y) = f(x) \cdot f(y)\ \forall x, y \in \mathbb{R} \\ f(x) \neq 1, \forall x \in \mathbb{R} - \{0\} \end{cases}$$

Podemos afirmar:

(a) *f pode ser ímpar.*
(b) $f(0) = 1$
(c) *f é injetiva.*
(d) *f não é sobrejetiva, pois $f(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.*

6. *Definimos a função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ da seguinte forma*

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(1) = 1 \\ f(2n) = f(n), \ \ n \geq 1 \\ f(2n+1) = n^2, \ \ n \geq 1 \end{cases}$$

Definimos a função $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ da seguinte forma:

$$g(n) = f(n) \cdot f(n+1).$$

Podemos afirmar que:

(a) g *é uma função sobrejetora.*

(b) g *é uma função injetora.*

(c) f *é uma função sobrejetora.*

(d) f *é uma função injetora.*

(e) $g(2018)$ *tem mais do que* 4 *divisores positivos.*

7. *Denotemos por* $n(X)$ *o número de elementos de um conjunto finito* X. *Sejam* A, B *e* C *conjuntos tais que* $n(A \cup B) = 8$, $n(A \cup C) = 9$, $n(B \cup C) = 10$, $n(A \cup B \cup C) = 11$ *e* $n(A \cap B \cap C) = 2$. *Então,* $n(A) + n(B) + n(C)$ *é igual a*

(a) 11 *(b)* 14 *(c)* 15 *(d)* 18 *(e)* 25

8. *Seja* $S = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$. *Suponha que seis inteiros sejam escolhidos de* S. *Existem dois inteiros cuja a soma é* 15*?*

9. *Mostre que para qualquer conjunto de* 13 *números escolhidos no intervalo* $[2, 40]$, *existem pelo menos dois inteiros com um divisor comum maior que* 1.

10. *Prove por indução*

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1) \cdot (2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$$

11. *Uma progressão aritmética (P.A.) é uma sequência de números reais* (a_n) *tal que* a_1 *é dado e, para todo* $n \in \mathbb{N}^*$, *tem-se que*

$$a_{n+1} = a_n + r$$

onde r *é um número real fixo chamamdo razão.*

Mostre por Indução que $a_n = a_1 + (n-1)r$.

12. *Uma progressão aritmética (P.A.) é uma sequência de números reais* (a_n) *tal que* a_1 *é dado e, para todo* $n \in \mathbb{N}^*$, *tem-se que*

$$a_{n+1} = a_n + r$$

onde r *é um número real fixo chamamdo razão.*

Mostre por Indução que $a_n = a_1 + (n-1)r$.

13. *Prove, por indução que* $[\frac{(n+1)}{n}]^n < n$, *para todo* $n \geq 3$. *(Sugestão: Observe que* $(n+2)/(n+1) < (n+1)/n$ *e eleve ambos os membros desta desigualdade à potência* $n+1$.*)*

Referências

[1] B.P. Demidovitch e G.S. Baranenkov. *Problems in mathematical analysis*. Peace Publishers, 1965.

[2] Judith L. Gersting. *Fundamentos Matemáticos para a Ciência da Computação: um tratamento moderno de Matemática Discreta*. Livros Técnicos e Cientıficos, 2004.

[3] Elon Lages Lima et al. *A Matemática do Ensino Médio*. Coleção do Professor de Matemática v. 1. SBM, 2004.