Notas de Aula I
Matemática Discreta
Moésio M. de Sales[1]

1 Conjuntos

1.1 Noção de Conjunto

A noção de conjunto é mais fundamental e a mais simples das idéias matemáticas e, hoje toda matemática atual é formulada na linguagem de conjunto [1]. Um conjunto é uma coleção de objetos, por exemplo, o conjunto de matérias que compõem a matriz do curso de sistemas de informação.

Um conjunto é formado por elementos. Um elemento ou objeto é um componente de um conjunto, seguindo o exemplo acima temos o elemento "matemática discreta". Para mostrar que um elemento pertence ou não a um conjunto usamos o símbolo de pertinência: $\in$ pertence, $\notin$ não pertence.

De forma geral os conjuntos substituem as "propriedades" e "condições", desta forma em vez de dizer que "o objeto x tem a propriedade P", podemos escrever $x \in A$, onde A é o conjunto dos objetos que tem a propriedade P[1].

Algumas noções importante são as de: conjunto vazio $\varnothing$,$\{\}$, conjunto sem elemento e o conjunto universo $\mathbb{U}$, conjunto que contém todos os elementos dos conjuntos do contexto que estamos trabalhando.

1.1.1 O conjunto vazio

Axioma 1.1 [2]*: Existe um conjunto que não possui elemento algum.*

Esse conjunto é chamado CONJUNTO VAZIO, denotado por $\emptyset$ e qualquer que seja x, tem-se $x \notin \varnothing$.

1.1.2 Conjuntos Definidos por Propriedades

Um conjunto definido por propriedade é denotado do seguinte modo:

$$\{x \in \ \mathbb{U}; P(x)\}$$

onde $\mathbb{U}$ é o nome do conjunto universo e $P(x)$ é uma especificação da propriedade, envolvendo avariável x

Exemplo 1.1

$$\mathbb{P} = \{x \in \mathbb{N}; x \ \textit{é par}\}$$

[1]moesio@ifce.edu.br

[2]Este axioma é utilizado para garantir a existência do conjunto vazio é conhecido como AXIOMA DE EXISTÊNCIA e faz parte de um conjunto de axiomas conhecidos como Axiomas de Zermelo-Fraenkel(ZF)

1.2 A Relação de Inclusão

Sejam A e B conjuntos. Se todo elemento de A for também elemento de B, diz-se que A é um SUBCONJUNTO de B. Usa-se a notação $A \subset B$. A relação $A \subset B$ chama-se relação de Inclusão.

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall x \in A \Rightarrow \; x \in B$$

Quando A não é subconjunto de B escreve-se $A \not\subset B$. Isto significa existe um $x \in A$ tal que $x \notin B$.

Há duas inclusões extremas: $A \subset A$ para todo conjunto A e $\varnothing \subset A$ para todo conjunto A.

Definição 1.1 *[Subconjunto Próprio] Diz-se que A é um subconjunto próprio de B quando se tem $A \subset B$ com $A \neq \varnothing$ e $A \neq B$.*

Propriedade 1.1 *Temos três propriedade fundamentais. Dados quaisquer conjuntos A, B e C tem-se:*

i Reflexividade: $A \subset A$;

ii Anti-simetria: se $A \subset B$ e $B \subset A$ então $A = B$;

iii Transitividade: se $A \subset B$ e $B \subset C$ então $A \subset C$.

1.3 Provando Inclusões

Sejam A e B conjuntos definidos por propriedades. Para justificar que $A \subset B$, basta fazer o seguinte:

1. *Pegar um elemento genérico em A, ou seja, pegar um objeto que satisfaz a propriedade que define A;*
2. *Explicar por que ele satisfaz a propriedade que define B.*

Feito isso de forma "convincente" teremos provado que A está contido em B.

1.4 Complementar de um Conjunto

A noção de complementar de um conjunto só faz pleno sentido quando se fixa um conjunto $\mathbb{U}$, chamado UNIVERSO DO DISCURSO, *ou* CONJUNTO-UNIVERSO.

Uma vez fixado $\mathbb{U}$, todos os elementos a serem considerados pertencerão a $\mathbb{U}$ e todos os conjuntos serão subconjuntos de $\mathbb{U}$ [1].

Definição 1.2 *Dado um conjunto $A \in \mathbb{U}$ chama-se* COMPLEMENTAR *de A ao conjunto A^c formados pelos elementos de $\mathbb{U}$ que não pertencem a A, ou seja*

$$A^c = \{x \in \mathbb{U}; x \notin A\}$$

1.5 Propriedades de Inclusão de Conjuntos

Propriedade 1.2 *1. Para todo $A \in \mathbb{U}$, tem-se $(A^c)^c = A$*

2. Se $A \subset B$ então $B^c \subset A^c$.
Na realidade na presença da regra (1) , a regra (2) dois pode ser generalizada

$$A \subset B \ \Leftrightarrow \ B^c \subset A^c$$

1.6 Reunião e Interseção

Dados dois conjuntos A e B, a reunião $A \cup B$ é o conjunto formados pelos elementos de A mais os elementos de B, enquanto que a interseção $A \cap B$ é o conjunto dos objetos que são ao mesmo tempo elementos de A e de B. Assim,

$$x \in \ A \cup B \text{ significa } ''x \in \ A \text{ ou } x \in \ B'';$$
$$x \in \ A \cap B \text{ significa } ''x \in \ A \text{ e } x \in \ B''.$$

Usaremos como exemplo os seguintes conjuntos $A = \{1,\ 2,\ 3\}$ e $B = \{2,\ 4,\ 6\}$ Sendo A e B conjuntos definimos:

1. *A, união com B: $A \cup B = \{x :\ x \in A \text{ ou } x \in B\} = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6\}$*
2. *A, intersecção com B: $A \cap B = \{x : x \in A \text{ e } x \in B\} = A \text{ e } B = \{2\}$*
3. *A, menos (diferença) B: $A - B = \{x :\ x \in A \text{ e } x \notin B\} = A - B = \{1,\ 3\}$*

Quaisquer que sejam os conjuntos A e B, as proposições abaixo serão verdadeiras:

i) Reflexiva: $A \cup A = A$ e $A \cap A = A$

ii) Inclusão: $A \subset A \cup B$, $B \subset A \cup B$, $A \cap B \subset A$, $A \cap B \subset B$.

1.7 Conexões entre operadores $\cap$ e $\cup$[2]

Propriedade 1.3 *1. $A \cup B = B \ \Leftrightarrow \ A \subset B$;*

2. $A \cap B = A \ \Leftrightarrow \ A \subset B$;

3. $A \subset B \ \Rightarrow \ A \cup C \subset B \cup C \ \forall \ C$;

4. $A \subset B \ \Rightarrow \ A \cap C \subset B \cap C \ \forall \ C$;

Propriedade 1.4 (Morgan) *Dados A, B conjuntos:*

1. *$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$;*
2. *$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.*

1.8 Conjunto Diferença $A - B$ ou $A \setminus B$

Definição 1.3 *Dados A e B subconjuntos de $\mathbb{U}$ definimos:*

$$A - B = \{x \in \mathbb{U}; x \in A \text{ e } x \notin B\}.$$

1.9 O conjunto Vazio $\varnothing$

Um conjunto vazio é um elemento neutro para união: $A \cup \varnothing = A$. *Um conjunto vazio e um elemento nulo para intersecção:*$A \cap \varnothing = \varnothing$ *Logo podemos afirmar que se* $A \cap B = \varnothing$, *então* $A - B = A$.

1.10 Conjunto de partes

Definição 1.4 *Seja A um conjunto. O* Conjunto das Partes *de A é o conjunto cujos elementos são os objetos do universo $\mathbb{U}$ que são subconjuntos de A.*

$$\mathcal{P}(A) = \{x \in \mathbb{U} : x \subset A\}$$

Exemplo 1.2 *Sendo $A = \{1, 2\}$, seu conjunto de partes é igual a $\{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$*

$$\mathcal{P}(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$$

Propriedade 1.5 *Se A tem k elementos, o conjunto de partes tem 2 elevado a k (sendo k o número de elementos de A), ou seja,*

$$A = \{x_1, x_2, \cdots, x_k\} \;\Rightarrow n(\mathcal{P}(A)) = 2^k.$$

Exemplo 1.3 *Sendo $B = \{1, 2, 3\}$ o conjunto de partes terá 8 elementos*

$$\mathcal{P}(B) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

Propriedade 1.6 *Para todos os conjuntos A, B e C de $\mathbb{U}$:*

1. $A \in \mathcal{P}(A)$;
2. $\varnothing \in \mathcal{P}(A)$;
3. $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$;
4. $\mathcal{P}(A \cup B) \supset \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$;

1.11 Exercícios

Questão 1. *Se $A, X \subset E$ são tais que $A \cap X = \varnothing$ e $A \cup X = E$, prove que $X = A^c$.*

Questão 2. *Dados os conjuntos A e B, seja X um conjunto com as seguintes propriedades:*

I. $X \supset A$ *e* $X \supset B$,

II. *Se* $Y \supset A$ *e* $Y \supset B$ *então* $Y \supset X$

Prove que: $X = A \cup B$.

Questão 3. *Dados $A, B \;\subset E$, prove que $A \subset B$ se, somente se, $A \cap B^c = \varnothing$.*

Questão 4. *Sejam X_1, X_2, Y_1 e Y_2 subconjuntos do conjunto universo U. Suponha que $X_1 \cup X_2 = U$ e $Y_1 \cap Y_2 = \varnothing$, que $X_1 \subset Y_1$ e que $X_2 \subset Y_2$. Prove que $X_1 = Y_1$ e $X_2 = Y_2$.*

Questão 5. *Uma urna contém três bolas vermelhas, duas azuis e uma amarela. Duas bolas são selecionadas aleatoriamente sem reposição. Sejam os eventos:*

$$A = \{\textit{pelo menos uma bola é vermelha}\} \; B = \{\textit{pelo menos uma bola é azul}\}$$

Descreva usando a notação de conjuntos os seguintes eventos:

(a) *Ambas as bolas são amarelas.*

(b) *Há uma bola vermelha e uma azul.*

Referências

[1] Elon Lages Lima et al. *A Matemática do Ensino Médio*. Coleção do Professor de Matemática v. 1. SBM, 2004.

[2] L. Lovász, J. Pelikán e K. Vesztergombi. *Discrete Mathematics: Elementary and Beyond*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2003.