Notas de Aula III

Matemática Discreta

Moésio M. de Sales[1]

1 Produto Catesiano

1.1 Par Ordenado

Um par ordenado (a, b) é uma lista de objetos a e b em uma ordem estabelecida, com a aparecendo em primeiro e b em segundo [2, 1, 3, 4]. Dois pares ordenados (a_1, b_1) são ditos iguais (a_2, b_2) se, e somente se, $a_1 = a_2$ e $b_1 = b_2$.

1.2 Produto Cartesiano

Definição 1.1 *Sejam $A, B \subset U$. O produto cartesiano de A e B é o conjunto*

$$A \times B = \{(a, b) \in \mathbb{U} : a \in A \text{ e } b \in B\}.$$

Exemplo 1.1 *Sejam $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{a, b, c\}$ temos*

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c), (3, a), (3, b), (3, c)\}$$

Proposição 1.1 *Para quaisquer conjuntos finitos A e B temos*

$$\#(A \times B) = \#A \cdot \#B$$

2 Relações

As ligações entre elementos de conjuntos são representadas utilizando uma estrutura chamada relação.

Objetos podem ser especificados de acordo com a maneira como eles se relacionam com outros objetos.

Definição 2.1 *Sejam A e B conjuntos. Dizemos que R é uma relação de A em B se $R \subset A \times B$. Se a não está relacionado com b por R, escreve-se $a \not R b$.*

Observe que relações são conjuntos de pares ordenados.

- Quando $(a, b) \in R$, diz-se que a está relacionado com b por R.
- Usa-se a notação aRb para denotar que $(a, b) \in R$.

Note que: $\varnothing$ é uma relação. Se A e B são conjuntos, então $A \times B$ é uma relação.

Exemplo 2.1 *Sejam $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{t, r, s\}$. Definimos*

$$R = \{(1, r), (1, s), (2, s), (3, r), (3, t)\}$$

é uma relação de A em B.

[1] moesio@gifce.edu.br

Exemplo 2.2 *Seja $A = \mathbb{R}$, o conjunto dos números reais. Defina a relação sobre A.*

$x\ R\ y$ se, somente se, x e y satisfaz a equação

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

O conjunto R consiste de todos os pontos sobre a elipse mostrada na figura 2

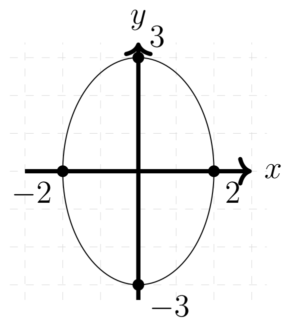

Figura 2: Relação R

Definição 2.2 *Domínio de R, denotado por $Dom(R)$ é o conjunto de todos os elementos em A que estão relacionados com algum elemento em B.*

No exemplo 2.1 temos que $Dom(R) = \{1, 2, 3\}$.

Definição 2.3 *Imagem de R, denotado por $Ran(R)$ ou $Im(R)$ é o conjunto de todos os elementos de B que são segundos elementos de pares de R.*

Como relações são conjuntos, é possível aplicar as operações usuais sobre conjuntos também sobre relações. O conjunto resultante também será composto por pares ordenados e definirá uma relação.

Definição 2.4 *Sejam R e S relações de A em B. Então:*

1. *$R \cap S$ define uma relação tal que: $a(R \cap S)b = aRb \wedge aSb$;*
2. *$R \cup S$ define uma relação tal que: $a(R \cup S)b = aRb \vee aSb$;*
3. *$R - S$ define uma relação tal que: $a(R - S)b = aRb \wedge a\overline{S}b = (a, b) \in R \wedge (a, b) \notin S$.*

Exemplo 2.3 *Dados $A = \{1, 3, 4\}$ e $B = \{2, 3, 5\}$, defina $R, S \subset A \times B$ tais que $R = \{(x, y) \in A \times B | x < y\}$ e $S = \{(x, y) \in A \times B | x + y < 6\}$ temos $R \cup S = \{(1, 2), (1, 3), (1, 5), (3, 2), (3, 5), (4, 5)\}$ e $R \cap S = \{(1, 2), (1, 3)\}$.*

Definição 2.5 *Seja R uma relação de A em B. O* COMPLEMENTAR *de R é a relação:*

$$\overline{R} = \{(a, b) \in A \times B; (a, b) \notin R\}. \text{ Ou seja, } a\overline{R}b \text{ se, e somente se, } a \not{R} b$$

Exemplo 2.4 *Dados $A = \{1, 3, 4\}$ e $B = \{2, 3, 5\}$, defina $R \subset A \times B$ tal que $R = \{(x, y) \in A \times B | x < y\}$ e $\overline{R} = \{(x, y) \in A \times B | x \geq y\}$.*

Propriedade 2.1 *Supondo que R e S são relações de A em B.*

1. $\overline{(R \cup S)} = \overline{R} \cap \overline{S}$
2. $\overline{(R \cap S)} = \overline{R} \cup \overline{S}$

Definição 2.6 *Sejam $R \subset A \times B$ e $S \subset C \times D$. A* COMPOSIÇÃO *de R com S é a relação:*

$$S \circ R = \{(x, z) \in A \times D; \exists y \in B \cap C \text{ tal que } (x, y) \in R \text{ e } (y, z) \in S\}$$

2.1 Relações Especiais

Quantas relações podem ser construídas sobre um conjunto com n elementos?

Definição 2.7 *Sejam A e B conjuntos.*

1. *$Id_A = \{(a, a) : a \in A\}$ é uma relação de A em A, chamada* IDENTIDADE *em A.*
2. *$Df_A = \{(a, b) \in A \times A : a \neq b\}$ é uma relação de A em A, chamada* DIVERSIDADE *em A.*

Propriedade 2.2 (Composição de Identidades) *Para toda relação $R \subset A \times B$:*

1. $R \circ Id_A = R$
2. $Id_B \circ R = R$

2.2 Endorrelações

Definição 2.8 *Seja A um conjunto. Dizemos que R é uma* ENDORRELAÇÃO *em A se $R \subset A \times A$.*

2.3 Álgebra das Endorrelações

Para todas as relações R, S, T em A:

1. $(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$
2. $R \circ Id_A = Id_A \circ R = R$
3. $R \circ \varnothing = \varnothing \circ R = \varnothing$
4. $R \circ (S \cup T) = (R \circ S) \cup (R \circ T)$

3 Conjuntos Originados de Relações

Definição 3.1 *Se $x \in A$, define-se o conjunto $R(x)$ dos R-relativos de x como sendo o conjunto de todos os y em B com a propriedade de que x está relacionado a y por $R(xRy)$.*

$$R(x) = \{y \in B \mid xRy\}$$

Exemplo 3.1 *Seja $A = \mathbb{R}$, o conjunto dos números reais. Defina a relação sobre A.*

$x\ R\ y$ se, somente se, x e y satisfaz a equação

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

O conjunto $R(0)$ consiste de todas as imagens da relação $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ onde $x = 0$, ou seja,

$$\begin{aligned}\frac{0^2}{4} + \frac{y^2}{9} &= 1\\ 0 + \frac{y^2}{9} &= 1\\ y^2 &= 9 \Rightarrow y = \pm 3 \text{ Assim, } R(0) = \{-3, 3\}\end{aligned}$$

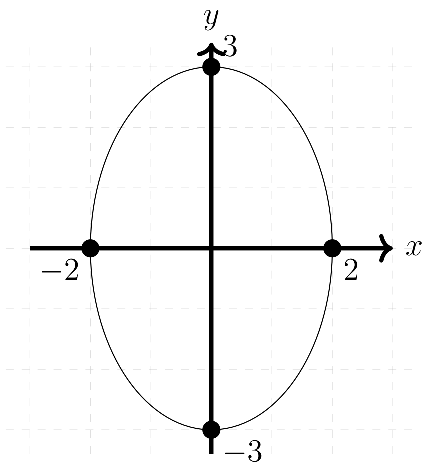

Figura 3: Relação R

Definição 3.2 *Similarmente, se $A_1 \subset A$, então $R(A_1)$, o conjunto dos R-relativos de A_1 é o conjunto de todos os y em B com a propriedade de que x está relacionado a y por R com $x \in A_1$.*

$$R(A_1) = \{y \in B \mid xRy \text{ para algum } x \in A_1\}$$

Obs.: note que $R(A_1)$ é a união dos conjuntos $R(x)$, onde $x \in A_1$

Exemplo 3.2 *Seja*

$$A = B = \{1, b, 3, d\}$$

e seja

$$R = \{(1,1), (1,b), (b,3), (3,1), (d,3), (3,b)\}$$

. Então: $R(1) = \{1, b\}$, $R(b) = \{3\}$, $Dom(R) = \{1, b, 3, d\}$, $Ran(R) = \{1, b, 3\}$

- *Se $A_1 = \{3, d\}$, então $R(A_1) = R(3) \cup R(d) = \{1, b, 3\}$*

Exemplo 3.3 *Seja $A = \mathbb{R}$, o conjunto dos números reais. Defina a relação sobre A.*

$$x \ R \ y \text{ se, somente se, } x \text{ e } y \text{ satisfaz a equação } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

Para o Exemplo 2.2, temos:

- $R(x)$ *para* $x < -2$ *será* $R(x) = \{\}$
- $R(x)$ *para* $x > 2$ *será* $R(x) = \{\}$
- $R(x)$ *para* $x = -2$

$$\frac{(-2)^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \ \Rightarrow \frac{y^2}{9} = 0 \ \Rightarrow R(-2) = \{0\}$$

- $R(x)$ *para* $x = 2$

$$\frac{(2)^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \ \Rightarrow \frac{y^2}{9} = 0 \ \Rightarrow R(2) = \{0\}$$

- $R(x)$ *para* $-2 < x < 2$

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} &= 1 \ \Rightarrow \frac{y^2}{9} = 1 - \frac{x^2}{4} \ \Rightarrow y^2 = 9 - \frac{9x^2}{4} \ \Rightarrow y = \pm\sqrt{9 - \frac{9x^2}{4}} \ \Rightarrow \\ R(x) &= \left\{ -\sqrt{9 - \frac{9x^2}{4}}, +\sqrt{9 - \frac{9x^2}{4}} \right\} \end{aligned}$$

Nota: A passagem $y^2 = 9 - \frac{9x^2}{4} \ \Rightarrow \ y = \pm\sqrt{9 - \frac{9x^2}{4}}$ *só é possível pois* $-2 < x < 2$. *Verifique!*

Propriedade 3.1 *Seja R uma relação de A em B e sejam A_1 e A_2 subconjuntos de A. Então:*

1. *Se* $A_1 \subset A_2$, *então* $R(A_1) \subset R(A_2)$
2. $R(A_1 \cup A_2) = R(A_1) \cup R(A_2)$
3. $R(A_1 \cap A_2) \subset R(A_1) \cap R(A_2)$

Exemplo 3.4 *Prove!*

Teorema 3.1 *Sejam R e S relações de A em B. Se $R(a) = S(a)$ para todo $a \in A$, então $R = S$.*

4 Exercícios

1. Seja $A = \mathbb{Z}^+$, os inteiros positivos, e R a relação definido por aRb se e somente se $2a \leq b+1$. Qual dos seguintes pares ordenados pertencem a R?

   (a) $(2, 2)$
   (b) $(3, 2)$
   (c) $(6, 15)$
   (d) $(1, 1)$
   (e) $(15, 6)$
   (f) (n, n)

2. Seja $A = \mathbb{N}$. Considere a seguinte relação R em A: aRb se e somente se $2a + 3b = 30$. Encontre R.

3. Seja $A = B = \{1, 2, 3, 4, 8\}$ e condidere a relação R.

$$aRb \iff a \text{ é múltiplo de } b$$

   (a) Determine R;
   (b) Ache $R(3)$;
   (c) Ache $R(6)$;
   (d) Ache $R(\{2, 4, 6\})$;

4. Seja $A = \mathbb{R}$. Considere a seguinte relação R em A: aRb se e somente se $a^2 + b^2 = 25$. Encontre $Dom(R)$ e $Ran(R)$.

5. Seja $A = \mathbb{R}$. Considere a seguinte relação R em A:

$$x \ R \ y \text{ se, somente se, } x \text{ e } y \text{ satisfaz a equação } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

   Determine $R(A_1)$

   (a) $A_1 = \{1, 8\}$
   (b) $A_1 = \{3, 4, 5\}$
   (c) $A_1 = \{\}$

Referências

[1] Edgard de Alencar Filho. *Teoria elementar dos conjuntos*. Nobel, 1976.

[2] Bernard Kolman, Robert C. Busby e Sharon Cutler Ross. *Discrete Mathematical Structures*. Prentice Hall, 2000.

[3] L. Lovász, J. Pelikán e K. Vesztergombi. *Discrete Mathematics: Elementary and Beyond*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2003.

[4] E.R. Scheinerman. *Matemática Discreta - Uma Introdução*. THOMSON PIONEIRA, 2003.