

Tag 3

Aufgabe 1

Das Sprichwort “Nicht alles was glänzt ist Gold” lässt sich mit Quantoren wie folgt schreiben:

$$\neg(\forall x : x \text{ glänzt} \implies x \text{ ist aus Gold}).$$

Dies ist äquivalent zu folgender Aussage:

$$\exists x : x \text{ glänzt} \wedge \neg(x \text{ ist aus Gold}).$$

Dies lässt sich in die Alltagssprache übersetzen zu “Es gibt etwas, was glänzt, und nicht aus Gold besteht.”

Gehe mit dem folgenden Sprichwort in umgekehrter Richtung vor: “Auch ein blindes Huhn findet mal ein Korn.” Übersetze es zunächst in eine Aussage, welche mit dem \exists -Quantor und logischen Verknüpfungen geschrieben wird, und wandle es dann in eine Aussage um, welche mit dem \forall -Quantor geschrieben wird. Übersetze diese Aussage dann wieder in die Alltagssprache.

Aufgabe 2

Seien A und B Aussagen. Welche der folgenden Aussagen sind äquivalent zu “ $A \implies B$ ”, welche sind äquivalent zur Verneinung davon, und welche sind zu keinem der beiden äquivalent?

- | | |
|-----------------------|---------------------------------------|
| (a) $A \wedge \neg B$ | (e) $(\neg A) \implies (\neg B)$ |
| (b) $\neg A \wedge B$ | (f) $(\neg A) \iff (\neg B)$ |
| (c) $A \vee \neg B$ | (g) $B \implies A$ |
| (d) $\neg A \vee B$ | (h) $\neg(A \wedge \neg(B \wedge B))$ |

Aufgabe 3

Verneine die folgenden Aussagen:

- (a) $\forall n \in \mathbb{N} \exists m \in \mathbb{N}_0 : n < 2m + 1 < n^2$.
- (b) $\exists n \in \mathbb{N} \forall m \in \mathbb{N} : 2m < n \implies (\exists k \in \mathbb{N} : km = n)$.
- (c) $\forall n \in \mathbb{N} \forall x \in \mathbb{R} : (1 + x)^n \geq 1 + nx$.
- (d) $\forall x, y \in \mathbb{R} (x > 0 \wedge y > 0 \implies (\exists n \in \mathbb{N} : nx > y))$.

Aufgabe 4

Die Technik des Widerspruchsbeweises lässt sich wie folgt beschreiben: Seien die Voraussetzungen in einer Aussage A gegeben. Es soll nun B bewiesen werden. Man nimmt daher an, dass A gilt während B nicht gilt, und folgert daraus einen Widerspruch. Daher muss die Annahme, dass A gilt und B nicht gilt, falsch sein. Da A vorausgesetzt wird, muss B gelten.

Diese Technik lässt sich kompakt in folgender Aussage beschreiben:

$$(A \wedge \neg(A \wedge \neg B)) \implies B.$$

Zeige mithilfe einer Wahrheitstafel, dass die obige Aussage immer wahr ist, unabhängig von den Wahrheitswerten der Aussagen A und B .