Tag 3: Quantoren und Aussagenlogik

Aufgabe 1

Das Sprichwort “Nicht alles was glänzt ist Gold” lässt sich mit Quantoren wie folgt schreiben:

$$\neg(\forall x : x \text{ glänzt} \implies x \text{ ist aus Gold})\,.$$

Dies ist äquivalent zu folgender Aussage:

$$\exists x : x \text{ glänzt} \wedge \neg(x \text{ ist aus Gold})\ .$$

Dies lässt sich in die Alltagssprache übersetzen zu “Es gibt etwas, was glänzt, und nicht aus Gold besteht.”

Gehe mit dem folgenden Sprichwort in umgekehrter Richtung vor: “Auch ein blindes Huhn findet mal ein Korn.” Übersetze es zunächst in eine Aussage, welche mit dem $\exists$-Quantor und logischen Verknüpfungen geschrieben wird, und wandle es dann in eine Aussage um, welche mit dem $\forall$-Quantor geschrieben wird. Übersetze diese Aussage dann wieder in die Alltagssprache.

Aufgabe 2

Seien A und B Aussagen. Welche der folgenden Aussagen sind äquivalent zu “$A \implies B$, welche sind äquivalent zur Verneinung davon, und welche sind zu keinem der beiden äquivalent?

(a) $A \wedge \neg B$

(b) $\neg A \wedge B$

(c) $A \vee \neg B$

(d) $\neg A \vee B$

(e) $(\neg A) \implies (\neg B)$

(f) $(\neg A) \impliedby (\neg B)$

(g) $B \implies A$

(h) $\neg(A \wedge \neg\,(B \wedge B))$

Aufgabe 3

Verneine die folgenden Aussagen:

(a) $\forall n \in \mathbb{N}\, \exists m \in \mathbb{N}_0 : n < 2m+1 < n^2.$

(b) $\exists n \in \mathbb{N}\, \forall m \in \mathbb{N} : 2m < n \implies (\exists k \in \mathbb{N} : km = n).$

(c) $\forall n \in \mathbb{N}\, \forall x \in \mathbb{R} : (1+x)^n \geqslant 1 + nx.$

(d) $\forall x, y \in \mathbb{R}\, (x > 0 \wedge y > 0 \implies (\exists n \in \mathbb{N} : nx > y)).$

Aufgabe 4

Die Technik des Widerspruchsbeweises lässt sich wie folgt beschreiben: Seien die Voraussetzungen in einer Aussage A gegeben. Es soll nun B bewiesen werden. Man nimmt daher an, dass A gilt während B nicht gilt, und folgert daraus einen Widerspruch. Daher muss die Annahme, dass A gilt und B nicht gilt, falsch sein. Da A vorausgesetzt wird, muss B gelten.
Diese Technik lässt sich kompakt in folgender Aussage beschreiben:

$$(A \wedge \neg(A \wedge \neg B)) \implies B\,.$$

Zeige mithilfe einer Wahrheitstafel, dass die obige Aussage immer wahr ist, unabhängig von den Wahrheitswerten der Aussagen A und B.