Tag 2: Komplexe Zahlen in der Form $re^{i\varphi}$

Aufgabe 1

1. Sei $x \in \mathbb{R}$. Leite aus der Eulerschen Formel ($e^{ix} = \cos x + i \sin x$) die folgenden Formeln her:

   (a) $\left|e^{ix}\right| = 1$

   (b) $e^{-ix} = \cos x - i \sin x = \overline{e^{ix}}$

   (c) $\cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$

   (d) $\sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$

2. Laut Potenzgesetz gilt für alle reellen Zahlen x, y, dass

   $$e^{i(x+y)} = e^{ix}e^{iy} \quad \text{und} \quad e^{i(x-y)} = e^{ix}e^{-iy}\,.$$

   Benutze die Eulersche Formel, um hieraus die Additionstheoreme für “sin” und “cos” zu folgern.

Aufgabe 2

1. Wandle die folgenden komplexen Zahlen aus der Darstellung $a + bi$ in die Darstellung $re^{i\varphi}$ um:

   (a) $1 + i$

   (b) $-1 - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

   (c) i

   (d) -1

2. Wandle die folgenden komplexen Zahlen aus der Darstellung $re^{i\varphi}$ in die Darstellung $a + bi$ um:

   (a) $2e^{2i\pi}$

   (b) $5e^{i\cdot 3{,}5\pi}$

   (c) $2\sqrt{3}\,e^{i\frac{2\pi}{3}}$

   (d) $4\sqrt{2}\,e^{i\cdot 1.25\pi}$

Aufgabe 3

Im Folgenden seien r, s, φ, ϑ relle Zahlen. Leite Formeln für das komplex Konugierte, das Inverse, den Betrag und die Multiplikation her für komplexe Zahlen in der Darstellung $z = re^{i\varphi}$:

(a) $\left|re^{i\varphi}\right| =?$

(b) $\overline{re^{i\varphi}} =?$

(c) $\dfrac{1}{re^{i\varphi}} =?$

(d) $re^{i\varphi} \cdot se^{i\vartheta} =?$

Aufgabe 4

Finde alle komplexen Zahlen z sodass $z^3 = 9i$. Wieviele Lösungen gibt es?