



低动能机器人技术

走路、跑步、游泳、飞行和操纵的算法

吕斯-特德雷克

www.princexml.com

这份文件是用Prince创建的，这是一种将网络内容搬到纸上的好方法。

© Russ Tedrake, 2021
最后修改 2021-6-13.

如何引用这些笔记，使用注释，并给予反馈。

注意：这些是用于在麻省理工学院教授的课程的工作笔记。它们将在2021年春季学期中被更新。讲座视频可在YouTube上找到。

目录

- 前言
- 第一章：全动与欠动系统的比较
 - 激励
 - 本田的ASIMO与被动式动态步行器的比较
 - 鸟类与现代飞机
 - 操纵
 - 共同的主题
 - 定义
 - 反馈等效性
 - 输入和状态约束
 - 非holonomic约束
 - 低动能机器人技术
 - 课程的目标
 - 练习
- 模型系统
- 第二章：简单的钟摆
 - 简介
 - 恒定扭矩下的非线性动力学
 - 超阻尼摆
 - 零扭矩的无阻尼钟摆
 - 具有恒定扭矩的无阻尼钟摆
 - 扭力有限的简单摆锤
 - 能量塑造控制
 - 练习
- 第三章：杂技机器人、车杆和四旋翼飞机
 - 杂技演员
 - 运动方程
 - 车杆系统
 - 运动方程
 - 四旋翼飞机

- 平面四旋翼飞机
 - 全三维四旋翼飞机
- 平衡
 - 操纵器方程的线性化
 - 线性系统的可控性
 - LQR反馈
- 局部反馈线性化
 - 用于车杆系统的PFL
 - 一般形式
- 摆动式控制
 - 能量塑造
 - 杆子

- 阿克罗波特
 - 讨论
 - 其他模型系统
 - 练习
- 第四章：步行和跑步的简单模型
 - 限定周期
 - 庞加莱地图
 - 步行的简单模型
 - 无边际的轮子
 - 指南针步态
 - 跪着的行者
 - 弯曲的脚
 - 还有更多...
 - 运行的简单模型
 - 弹簧加载的倒立摆(SLIP)
 - 麻省理工学院腿部实验室的跳跃式机器人
 - 争取实现类似人类的跑步
 - 一个可以行走和运行的简单模型
 - 练习
- 第5章：高关节的腿部机器人
 - 质量中心动力学
 - 一个气垫船模型
 - 有（无质量）腿的机器人
 - 捕捉机器人的全部动态
 - 影响动态
 - ∞ 平坦地形的特殊情况
 - 一个旁证：零矩点的推导
 - ZMP规划
 - 从CoM计划到整个身体的计划
 - 全身控制
 - 脚步规划和推动恢复
 - 超越ZMP规划
 - 练习
- 第6章：具有随机性的模型系统
 - 主方程
 - 静态分布
 - 扩展实例。崎岖路面上的无边轮
 - 真实机器人/系统的噪声模型。

非线性规划和控制

- 第7章：动态编程
 - 将控制设计制定为一个优化方案
 - 加法成本
 - 最优控制作为图的搜索
 - 连续动态编程
 - 汉密尔顿-雅各比-贝尔曼方程
 - 求解最小化控制
 - J 的数值解 *

- 延伸
 - Onite MDPs的随机控制
 - 线性编程方法
 - 练习
- 第8章：线性二次调节器
 - 基本推导
 - 非线性系统的局部稳定化
 - 有限跨度公式
 - 有限跨度LQR
 - 时变的LQR
 - 非线性系统的局部轨迹稳定化
 - 线性四次方最佳跟踪
 - 线性最终边界值问题
 - 变化和扩展
 - 离散时间李卡提方程
 - 具有输入和状态约束的LQR

- LQR是一个凸式优化
 - 通过最小二乘法的有限跨度LQR
 - 练习
 - 笔记
 - 有限跨度LQR推导（一般形式）。
- 第九章：李亚普诺夫分析
 - 李亚普诺夫函数
 - 全球稳定
 - 拉萨尔的不变量原则
 - 与汉密尔顿-雅各比-贝尔曼方程的关系
 - 凸式优化的李亚普诺夫分析
 - 线性系统的李亚普诺夫分析
 - 李亚普诺夫分析是一个半去核程序（SDP）。
 - 多项式系统的李亚普诺夫分析
 - 用于估计吸引区的李亚普诺夫函数
 - 使用 "普通李亚普诺夫函数 "的稳健性分析
 - 多项式系统的吸引力区域估计
 - 有限时间可及性
 - 时变动力学和Lyapunov函数
 - 有限时间可及性
 - 通过李亚普诺夫函数的可达性
 - 刚体动力学是（有理）多项式的
 - 控制设计
 - 线性系统的状态反馈
 - 通过交替进行的控制设计
 - 控制-利亚普诺夫函数
 - 带有SOS的近似动态编程
 - 其他计算方法
 - "可满足性模数理论"（SMT）
 - 混合整数编程（MIP）公式
 - 延续方法
 - 神经李亚普诺夫函数
 - 收缩指标
 - 练习
- 第十章：轨迹优化
 - 问题的提出
 - 线性系统的凸式计算
 - 直接转录
 - 直接射击
 - 计算方面的考虑
 - 连续时间
 - 非凸性轨迹优化
 - 直接抄写和直接拍摄
 - 直通拼接
 - 伪谱系方法

- 解决方案技术
- 本地轨迹反馈设计
 - 有限跨度LQR
 - 模型预测控制
- 案例研究。一个可以像鸟儿一样降落在栖息地的滑翔机
 - 平板滑翔机模型
 - 轨迹优化
 - 轨迹稳定化
 - 弹道漏斗
 - 超越单一的轨迹
- 庞特里亚金的最小原则
 - 拉格朗日乘法器推导的邻接方程
 - 连续时间内最优性的必要条件
- 变化和扩展
 - 双向平整度
 - 迭代LQR和Differential动态编程
 - 混合整数凸点优化
 - 凸点约束下的混合整数
 - 明确的模型预测控制

- 练习
- 第11章：政策搜索
 - 问题的提出
 - 线性四次方调节器
 - 政策评估
 - K 中的一个非凸目标
 - 没有局部最小值
 - 真正的梯度下降
 - 更多的收敛结果和反例
 - 基于轨迹的政策搜索
 - 地域内目标
 - 全局优化的搜索策略
 - 政策迭代
- 第12章：作为搜索的运动规划
 - 作为搜索的人工智能
 - 随机化运动规划
 - 快速探索的随机树（RRTs）
 - 带动力的机器人的RRTs
 - 变化和扩展
 - 讨论
 - 分解方法
 - 练习
- 第13章：反馈运动规划
- 第14章：稳健和随机控制
 - 有限马尔科夫决策过程
 - 线性最优控制
 - 分析报告
 - H_2 设计
 - H_∞ 设计
 - 线性指数-二次方高斯（LEQG）。
 - 自适应控制
 - 结构性的不确定性
 - 线性参数变化（LPV）控制
 - 轨迹优化
 - 蒙特卡洛轨迹优化
 - 迭代式 H_2
 - 有限时间（可达性）分析
 - 非线性分析和控制
 - 领域随机化
 - 延伸
 - 替代的风险/稳健性衡量标准
- 第15章：输出反馈（又称"像素转矩"）。
 - 古典的视角
 - 基于观察者的反馈
 - 卢恩贝格观察家
 - 带高斯噪声的线性二次调节器(LQG)
 - 部分可观察的马尔科夫决策过程
 - 静态输出反馈
 - 对于线性系统

- 基于扰动的反馈
 - 系统级合成
- 第16章：极限循环的算法
 - 轨迹优化
 - 李亚普诺夫分析
 - 横向坐标
 - 横向线性化
 - 使用平方之和的吸引力区域估计
 - 反馈设计
 - 对于行动不足的程度一。
 - 横向LQR
 - 非周期性轨迹的轨道稳定化
- 第17章：通过联系进行规划和控制
 - (自主) 混合系统
 - 混合轨迹优化

- 稳定的混合模型。

衍生混合模型：最小
与 ∞ -norm 坐标

的关系

◦ 练习

估算和学习

• 第18章：系统识别

◦ 问题的提出：方程误差与模拟误差

◦ 机械系统的参数识别

- 运动学参数和校准
- 最小二乘法公式（逆动力学的）。
- 使用能量而不是逆动力学进行识别。
- 残余物理学模型与线性函数的近似值
- 实验设计是一种轨迹优化
- 在线估计和自适应控制
- 识别与联系

◦ 识别（时域）线性动力系统

- 从国家观察来看
- 从投入-产出数据（状态实现问题）来看
- 增加稳定性约束
- 自回归模型

◦ Onite (PO)MDPs的识别

- 从国家观察来看
- 识别隐马尔科夫模型（HMMs）。

◦ 神经网络模型

- 生成训练数据
- 从国家观察来看
- 来自输入-输出数据的状态空间模型（递归网络）。

- 输入-输出（自回归）模型

◦ 非线性系统识别的替代方案

◦ 混合系统的识别

◦ 与任务相关的模型

◦ 练习

• 第19章：状态估计

- 观察者和卡尔曼滤波
- 递归贝叶斯过滤器
- 平滑化

• 第20章：无模型的政策搜索

- 政策梯度方法
 - 似然比法（又称REINFORCE）。
 - 熟练程度样本
 - 随机梯度下降法
 - 权重推理算法
 - 用估计的基线进行重量扰动
 - REINFORCE w/ additive Gaussian noise
 - 摘要

- [通过信噪比取样性能。](#)
 - 权重扰动的性能

[附录](#)

- [附录A：德雷克](#)
 - [九头鸟](#)
 - [在线Jupyter笔记本](#)
 - [在你自己的机器上运行](#)
 - 安装德雷克
 - [获得帮助](#)
- [附录B：多体动力学](#)
 - [推导出运动方程](#)
 - [操纵者方程式](#)
 - 递归动力学算法
 - 汉密尔顿力学
 - 双边立场的限制

- 双边速度限制
- [接触的动力](#)
 - 符合标准的接触模式
 - 带有事件检测的刚性接触
 - 刚性接触的时间步进近似值
- [静态行动的原则](#)
- [附录C：优化和数学编程](#)
 - [优化软件](#)
 - [一般概念](#)
 - 凸点与非凸点优化
 - 带拉格朗日乘数的限制性优化
 - [凸面优化](#)
 - Linear Programs / Quadratic Programs / Second-Order Cones
 - 半有限编程和线性矩阵不等式
 - 二次方之和优化
 - 解决方案技术
 - [非线性编程](#)
 - 二阶方法（SQP/内点法）
 - 一阶方法（SGD / ADMM）。
 - 零阶方法（CMA）
 - 例子。逆向运动学
 - [组合优化](#)
 - 搜索，SAT，一阶逻辑，SMT求解器，LP解释
 - 混合整数凸形优化
 - ["黑匣子"优化](#)
- [附录D:优化游戏手册](#)
- [附录E：杂项](#)
 - [如何引用这些笔记](#)
 - [注释工具的礼节](#)
 - [一些伟大的Openal项目](#)
 - [请给我反馈!](#)

序言

本书是关于非线性动力学和控制的，重点是机械系统。我在职业生涯中一直在思考如何使机器人移动得更稳健，但也要有速度、敏捷性和优雅。我相信，通过机械设计、被动动力学和非线性控制综合之间的紧密结合，可以最好地实现这一点。这些笔记包含了来自动力系统理论以及线性和非线性控制的精选材料。但是我们的机器人的动力学很快就变得太复杂了，我们无法用纸笔的方法来处理。因此，这些笔记的主要重点是控制设计的计算方法，特别是使用优化。

当我开始教这门课和写这些笔记时，控制的计算方法还远远不是机器人学的主流。当时我刚刚完成我的博士论文，专注于强化学习（应用于双足机器人），并且正在研究基于优化的运动规划。我记得作为一名年轻的教师，坐在一个机器人会议的晚宴上，

周围都是我崇拜的人，他们在谈论优化。其中一位资深教师说："拉斯：像你这样说话的人不是让真正的机器人工作的人。"哇，事情已经改变了。现在，几乎每个先进的机器人都在规划/控制系统中使用优化或学习。

今天，关于强化学习（**RL**）的谈话响亮而热情，足以淹没房间里的其他谈话。具有讽刺意味的是，现在我是年长的教授，我发现自己仍然相信**RL**，但不是像我年轻时那样完全相信。对于支配我们的机械系统的方程结构，人们可以理解的东西太多了；不利用这种结构的算法就会失去提高数据效率和稳健性的明显机会。我们的梦想是让学习算法发现这种结构。

他们自己的。然而，本课程的目标是帮助 *你* 发现这种结构，并学习如何使用这种结构来开发更强大的算法，并指导你的科学努力进入基于学习的控制。

我甚至会走得更远。我愿意打赌，在10-20年内，我们对智能的看法将不像具有训练模式和测试模式的前馈网络，而更像一个具有动态的 *系统*，在环境的动态中起伏不定，跳着美丽的舞蹈。这些系统将在感知、前向预测/顺序决策、存储和检索长期记忆以及采取行动之间更灵活地移动。一个引人入胜的问题是，这些系统是否有必要被体现出来（例如在机器人中），以便在我们学习和进化的经典力学的时间尺度上探索世界。这肯定会成为一个美妙的游乐场。

虽然书中的材料来自许多方面，但其介绍是针对少数几个机器人问题的。只有当概念有助于提高我们正在努力开发的能力时，才会引入这些概念。我所借鉴的许多学科在传统上是非常严格的，以至于对于一个刚进入这个领域的人来说，基本的想法可能很难渗透进去。在这些笔记中，我有意识地努力保持一种非常非正式的、对话式的语气，即使在介绍这些严格的主题时也是如此，并参考最有力的定理，但只在证明这些定理会增加特别的见解而又不分散主流介绍的情况下才证明。我希望其结果是一个广泛但合理地自成体系和可读的手稿，对任何热情的机器人学家都是有用的。

组织机构

这些笔记中的材料被组织成几个主要部分。"模型系统"介绍了一系列越来越复杂的动态系统，并概述了每个系统的一些相关文献结果。"非线性规划和控制"介绍了用于推理这些动力系统的相当普遍的计算算法，其中优化理论发挥了核心作用。这些算法中有许多将动态系统视为已知的和确定的，直到这一部分的最后几章介绍随机性和稳健性。在"估计和学习"一章中，统计学和机器学习的技术紧随其后，这些技术利用这一观点引入了更多的算法，这些算法可以在较少假设知道模型或拥有完美传感器的情况下运行。本书最后有一个"附录"，为课程中使用的主要课题提供了稍多的介绍（和参考资料）。

选择这些章节的顺序是为了使这本书具有参考价值。然而，在教授该课程时，我采取了螺旋式的教材轨迹，一次又一次地介绍机器人动力学和控制问题，并只介绍解决该特定问题所需的技术。

软件

本书中所有的例子和算法，还有更多的，现在都可以作为我们开源软件项目的一部分。*DRAKE*。*DRAKE*是一个C++项目，但在本文中我们将使用*Drake*的*Python绑定*。我鼓励超级用户或想深入挖掘的读者也去探索C++代码（并回馈）。

请参阅[附录](#)，了解使用*DRAKE*的具体说明以及这些说明。

低动能机器人技术

走路、跑步、游泳、飞行和操纵的算法

吕斯-特德雷克

© Russ Tedrake, 2021

最后修改 2021-6-13.

如何引用这些笔记，使用注释，并给予反馈。

注意：这些是用于在麻省理工学院教授的课程的工作笔记。它们将在2021年春季学期中被更新。讲座视频可在YouTube上找到。

目录

下一章

章节 1

全动式欠动式系统

 打开InvColasb

今天的机器人行动过于保守，只完成了一小部分任务，实现了它们在机械上所能达到的一小部分性能。在许多情况下，我们仍然从根本上受到控制技术的限制，这些技术是在结构化的工厂环境中的刚性机械臂上成熟的。对欠驱动机器人的研究侧重于建立控制系统，利用机器的自然动力学，试图在速度、效率或稳健性方面实现非凡的性能。

1.1 激励

让我们从一些例子，和一些视频开始。

1.1.1 本田的ASIMO与被动式动态步行器的比较

1996年底，本田汽车公司宣布，他们已经在步行机器人技术上工作了近15年（闭门造车），这改变了机器人的世界。他们的设计不断发展，最终形成了他们称之为ASIMO（Advanced Step in Innovative MObility）的仿人机器人。近20年来，本田的机器人被广泛认为代表了行走机器人的技术水平，尽管现在有许多机器人的设计和性能与ASIMO的非常相似。当我们讨论行走的算法时，我们将致力于了解ASIMO的一些细节.....现在我只想让你熟悉ASIMO的动作的外观和感觉[现在观看下面的asimo视频]。

图-1.1-本田的ASIMO（来自<http://world.honda.com/ASIMO/video/>）

我希望你的第一反应是对ASIMO的动作质量和多功能性感到不可思议。现在再看一下。虽然这些动作

虽然非常平稳，但ASIMO的步态还是有些不自然。它的感觉有点像一个被沉重的太空服束缚的宇航员。事实上，这是一个合理的比喻...ASIMO的行走方式有点像不熟悉自己动态的人。它的控制系统正在使用高增益反馈，因此有相当大的关节扭矩，以抵消机器的自然动态，并严格遵循所需的轨迹。这种控制方法伴随着一个僵硬的惩罚。ASIMO使用的能量（按比例）大约是人类在地面上行走的两倍²⁰（以运输成本衡量）[1]。另外，这种方法中的控制稳定只在相对较小的状态空间中起作用（当站立脚在地面上 ∞ 时），所以ASIMO不能像人类那样快速移动，也不能在未建模或不平整的地形上行走。

图-1.2-史蒂夫-柯林斯和安迪-鲁伊纳的三维被动动态步行器[2]。

作为对比，我们现在考虑一种非常不同类型的步行机器人，称为被动动态步行器（PDW）。这种“机器人”没有马达、没有控制器、没有电脑，但仍然能够在一个小斜坡上稳定地行走，只靠重力驱动[现在观看上面的视频]。大多数人都会同意，这台机器的被动步态比ASIMO的更自然；当然，它也更有爱因斯坦。被动式行走机器有很长的历史--有被动式行走玩具的专利可以追溯到19世纪中期。我们将详细讨论人们对这些机器的动力学的了解以及在实验中所取得的成就。这个迄今为止最令人印象深刻的被动式动态步行器是由Steve Collins在康奈尔大学Andy Ruina实验室建造的[2]。

被动步行者表明，在ASIMO上采取的高增益、消除动态的反馈方法并不是必要的。事实上，行走的动态是美丽的，应该被利用，而不是被取消。

世界才刚刚开始看到这个愿景的模样。波士顿动力公司的这段视频是我一直以来的最爱之一。

图-1.3-波士顿动力公司的阿特拉斯机器人做了一个背部 ∞ ip。请确保你也看过跳舞的视频。

这个结果是工程的一个奇迹（光是机械设计就很惊人.....）。在这门课上，我们将教你使机器人以这种方式运行所需的计算工具。我们还将尝试推理这些类型的机动性有

多强，以及

可以。不要担心，如果你没有一个超轻、超能、超耐用的人形物体，那么将为你提供
一个模拟。

1.1.2 鸟类与现代飞机

在一个非常不同类型的机器中，情况也是惊人的相似。现代飞机在静止的空气中进行稳定的水平飞行是非常有效的。螺旋桨能非常有效地产生推力，而今天的凸面机翼对速度和/或效率进行了高度优化。我们很容易说服自己，我们已经没有什么可以从鸟类身上学到的了。但是，像ASIMO一样，这些机器主要是在一个非常保守的、低攻角的 ∞ 飞行体系中，机翼上的空气动力学被充分理解。鸟类经常在这个飞行包络面之外执行机动动作（例如，当它们在栖息地着陆时），并且在利用空中的能量（例如，风）方面比我们最好的飞机要有效得多。

因此，鸟类是极其高效的飞行机器；一些鸟类能够在燃料供应少得惊人的情况下迁徙数千公里。漂泊的信天翁可以在不拍打翅膀的情况下飞行数小时，甚至数天。

- 这些鸟类利用了风在海洋表面形成的剪切层，这种技术称为动态翱翔。值得注意的是，这些鸟类飞行的代谢成本与基线代谢成本没有区别[3]，这表明它们几乎可以完全通过风的梯度来实现难以置信的距离（顺风或逆风）。其他鸟类通过与空气进行类似的丰富互动来实现飞行能力--包括编队飞行、热力翱翔和山脊翱翔。小型鸟类和大型昆虫，如蝴蝶和蝗虫，利用“阵风翱翔”来迁移数百甚至数千公里，主要由风携带。

鸟类也有令人难以置信的可操作性。一架高度机动的飞机（如A-4天鹰）的滚动率约为720度/秒[4]；一只谷燕的翻滚速度超过5000度/秒[4]。蝙蝠可以在一个方向上全速飞行，并在保持前进速度的同时完全扭转方向，所有这些都只需要超过2个翼拍，而且距离还不到翼展的一半[5]。尽管在数量上

∞ 来自机动飞行的 ∞ 流可视化数据很少，一个主要的理论是，这些动物产生突然的、巨大的力以实现机动性的能力可以归因于非稳定的空气动力学，例如，动物产生一个大的吸力涡流以迅速改变方向[6]。这些惊人的能力在机动性方面经常被调用，例如，在森林和山洞中的栖息、捕捉猎物 and 高速飞行。即使在高速和高转弯率的情况下，这些动物也有令人难以置信的敏捷性--蝙蝠有时会用翅膀捕捉猎物，游隼可以把G25从240每小时的俯冲中拉出来捕捉一只麻雀。

∞ 飞行[7]，甚至可以看到我们大楼外的小鸟跳过铁丝网，抢食一口食物。

尽管已经记录了许多关于鸟类飞行的令人印象深刻的统计数据，但我们的理解部分地受到了实验可及性的限制--在鸟类最令人印象深刻的机动过程中，在不干扰它们的情况下仔细测量鸟类（以及周围的气流）是相当困难的。游泳的动态与此密切相关，而且研究起来也更方便。据了解，海豚可以在20节速度行驶的船只旁优雅地游过海浪[6]。较小的 ∞ sh，如蓝鳃太阳鱼，已知拥有一种逃逸反应，它们在不到一个身体长度的情况下将自己从静止状态推进到全速； ∞ 流可视化确实证实了这是通过沿身体侧面创造一个大的吸力漩涡来完成的[8]--类似于蝙蝠在不到一个身体长度内改变方向的方式。甚至还观察到死 ∞ sh通过从圆柱体的尾流中拉出能量向上游游动；这种被动推进可能是虹鳟鱼在交配季节向上游游动的技术的一部分[9]。

1.1.3 操纵

尽管在工业应用方面有很长的成功历史，而且在消费者应用方面有巨大的潜力，但我们仍然没有能够执行任何任务的机器人手臂。

在家庭中有意义的任务。诚然，家用机器人的感知问题（使用传感器检测/定位物体并理解场景）是令人难以置信的difficult。但是，即使我们得到了一个完美的感知系统，我们的机器人离以人类的灵活性和多功能性来完成基本的物体操作任务仍有很大的距离。

今天，大多数进行物体操纵的机器人都使用了一个刻板的管道。首先，我们列举出手部的几个接触点（这些点，而且只有这些点，才允许接触世界）。然后，给定环境中的一个局部物体，我们为手臂规划一个无碰撞的轨迹，将手移到一个“预抓取”的位置。在这一点上，机器人闭上眼睛（Ogurally）并闭上手，希望预抓取的位置足够好，以便成功地抓取物体，例如，只使用Ongers中的电流反馈来知道何时停止关闭。“反应不足的手”使这种方法更加成功，但整个方法实际上只对包围式抓取有好处。

包围式抓取方法实际上可能对一些简单的取放任务很有帮助，但它对人类如何进行操纵的表述非常差。当人类操纵物体时，与物体和世界的接触互动是非常丰富的--我们经常使用环境的碎片作为Oxtures来减少不确定性，我们通常利用滑动行为（例如，用于拿起东西，或在手中调整方向），如果我们使用整个手臂的表面来操纵一个大物体，我们的大脑就不会抛出NaN。

在过去的几年里，我开始将自己的研究集中在操纵领域的问题上。在这个领域，动力学和感知之间的互动是非常丰富的。因此，我已经开始了一套完全独立的关于操纵的笔记（和第二门课程）。

顺便说一下，在大多数情况下，如果机器人未能在预期的接触时间/地点进行接触，就会发生坏事。其结果是搞笑的，同时也是令人沮丧的。（让我们Ox一下！）

1.1.4 共同的主题

经典的机器人控制技术是基于这样的想法：反馈可以被用来推翻我们机器的动态性能。这些例子表明，为了从我们的机器人中获得出色的动态性能（敏捷性、灵活性和稳健性），我们需要了解如何设计控制系统，以利用动态性能，而不是取消它们。这就是本课程的主题。

令人惊讶的是，许多正式的控制思想并不支持“利用”动态的想法。最佳控制公式（我们将深入研究）原则上允许这样做，但非线性系统的最佳控制仍然是一门相对临时的学科。有时我开玩笑说，为了说服控制理论家考虑动力学问题，你必须做一些激烈的事情，比如剥夺她的控制权--拆掉一个电机，或者强制执行一个扭矩限制。这些问题创造了一类正式的系统，即欠驱动系统，对于这些系统，人们已经开始在控制的背景下更仔细地考虑他们机器的动力学。

1.2 定义

根据牛顿的观点，机械系统的动力学是二阶的（ $F=ma$ ）。它们的状态由位置向量 \mathbf{q} （也称为配置向量）和速度向量 $\dot{\mathbf{q}}$ 以及（可能）时间给出。二阶控制动态系统的一般形式是。

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{u}, t)。$$

其中 \mathbf{u} 是控制向量。

定义（1.1欠激励控制微分方程） 一个二阶控制微分方程由方程描述。

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{u}, t) \quad (1)$$

在状态 $\mathbf{x}=(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ 和时间 t 中，如果产生的映射 \mathbf{f} 是射影的：对于每一个 $\dot{\mathbf{q}}$ ，存在一个 \mathbf{u} ，产生期望的响应，那么它就**完全被激活**。否则，它是**欠激励的**（在时间 t 的 \mathbf{x} ）。

这个定义也可以扩展到离散时间系统和/或二元论中。

正如我们将看到的，我们所关心的许多机器人的动力学特性在指令扭矩中变成了埃因，所以让我们考虑一个稍有约束的形式。

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{f}_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) + \mathbf{f}_2(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \mathbf{u}_0. \quad (2)$$

对于方程（2）所描述的控制动力系统，如果我们有

$$\text{等级}[\mathbf{f}_2(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)] < \dim[\mathbf{q}], \quad (3)$$

则该系统是欠激励的。不过要小心 -- 有时我们会写出类似（2）的方程，但会加上额外的约束，如 $|\mathbf{u}| \leq 1$ ；正如我们将在下面讨论的那样，输入限制和其他约束也会使系统欠驱动。

请注意，一个控制系统是否欠驱动可能取决于系统的状态，甚至取决于时间，尽管对于大多数系统（包括本书中的所有系统），欠驱动是系统的一个全局属性。如果一个系统在**所有**的状态和时间下都是欠驱动的，我们将把它称为欠驱动。在实践中，我们经常非正式地称系统为完全作用力，只要它们在**大多数**状态下是完全作用力的（例如，一个“完全作用力”的系统可能仍然有关节限制或在运动学奇点上失去等级）。诚然，这允许存在一个灰色地带，在那里，将**系统**描述为完全动作或欠动作可能会感到尴尬（我们应该只描述它的状态）；即使是工厂 ∞ 地面上强大的机器人手臂也有动作限制，但我们通常可以为它们设计控制器，就好像它们是完全动作的。本文的主要兴趣在于，在制定控制策略时，欠驱动是有用/必要的系统。

例子（1.1机器人操纵器）。

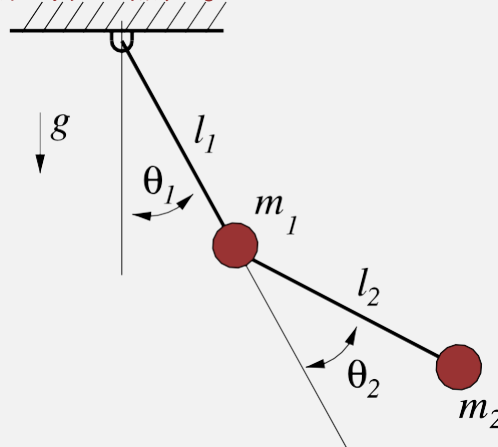


图 -1.4 简单的双摆。 [点击这里查看动画。](#)

考虑一下上面的简单机器人操纵器。正如[附录](#)中所描述的，这个系统的运动方程相当简单，采取标准“操纵器方程”的形式。

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} = \boldsymbol{\tau}(\mathbf{q}) + \mathbf{B}\mathbf{u}。$$

众所周知，惯性矩阵 $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ (总是)是均匀对称的，并且是正定核的，因此是可倒的。将该系统置于方程的形式中，可以2得到。

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}) [\boldsymbol{\tau}(\mathbf{q}) + \mathbf{B}\mathbf{u} - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}]。$$

因为 $\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q})$ 总是全等级的，我们发现，当且仅当 \mathbf{B} 是全行等级时，由操纵器方程描述的系统是完全致动的。对于这个特殊的例子， $\mathbf{q}=[\vartheta_1, \vartheta_2]^T$ 和 $\mathbf{u}=[\tau_1, \tau_2]^T$ （关节处的电机扭矩）， $\mathbf{B}=\mathbf{I}_{2 \times 2}$ ，系统是完全驱动的。

Python实例

我个人在能够进行实验并获得一些物理直觉的时候，学习效果最好。这些笔记中的大多数章节都有一个相关的Jupyter笔记本，可以在谷歌的Colab上运行；本章的笔记本让你很容易看到这个系统的运作。



试试吧!你会看到如何模拟双摆，甚至如何用符号检查动态。

注意：你也可以在自己的机器上运行代码（详见附录）。

虽然基本的双摆是完全被驱动的，但想象一下有点奇怪的情况，即我们有一个电机在肘部提供扭矩，但在肩部没有电机。在这种情况下，我们有 $\mathbf{u} = \tau_2$ ，并且 $\mathbf{B}(\mathbf{q}) = [0, 1]^T$ 。这个系统显然是欠驱动的。虽然这听起来像是一个矫揉造作的例子，但事实证明，它几乎正是我们在本课后面要用来研究的最简单的行走模型的动力学。

方程中的矩阵 \mathbf{f}_2 总是有 $\dim[\mathbf{q}]$ 行和 $\dim[\mathbf{u}]$ 列。因此，在例子中，最常见的一种情况是 $\dim[\mathbf{u}] < \dim[\mathbf{q}]$ ，这就意味着 \mathbf{f}_2 不是全行等级。当机器人的关节没有马达时就是这种情况。但这并不是唯一的情况。例如，人体有数量惊人的执行器（肌肉），在许多情况下，每个关节有多块肌肉；尽管有比位置变量更多的执行器，但当我在空中跳跃时，没有任何肌肉输入的组合可以改变我质心的弹道（排除空气动力学的影响）。我的控制系统的作用力不足。

关于符号的简单说明。在本课中描述刚体系统的动力学时，我将用 \mathbf{q} 表示构型（位置）， $\dot{\mathbf{q}}$ 表示速度，用 \mathbf{x} 表示全部状态（ $\mathbf{x} = [\mathbf{q}^T, \dot{\mathbf{q}}^T]^T$ ）。这个约定有一个重要的限制（三维角速度不应表示为三维姿态的导数），详见下文。

在附录中，这将使注释更简洁。除非另有说明，向量总是作为列向量处理。向量和矩阵是粗体的（标量不是）。

1.3 反馈等效性

全动系统比欠动系统更容易控制。关键的观察是，对于具有已知动力学特性的全动系统（例如，对于二阶控制-艾因系统来说， \mathbf{f}_1 和 \mathbf{f}_2 是已知的），有可能使用反馈来有效地将任意控制问题变为控制一个微不足道的线性系统的问题。

当 \mathbf{f}_2 是全行等级时，它是可逆的。考虑潜在的非线性反馈控制。

$$\mathbf{u} = \pi(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)_2 = \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) [\mathbf{u}' - \mathbf{f}_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)]。$$

其中 \mathbf{u}' 是新的控制输入（对你的控制器的输入）。将这个反馈控制器应用于方程 2 的结果是线性的、去耦的、二阶的系统。

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{u}'。$$

换句话说，如果 \mathbf{f}_1 和 \mathbf{f}_2 是已知的，并且 \mathbf{f}_2 是可逆的，那么我们说系统是 "反馈等效" 的 $\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{u}'$ 。有一些强有力的结果

将这一想法推广到 \mathbf{f}_1 和 \mathbf{f}_2 被估计而不是已知的情况下（例如，[10]）。

例子（双摆上的1.2反馈取消）。

假设我们想让我们的简单双摆像一个简单的单摆（有阻尼）一样行动，其动力学特性由以下几点给出。

$$\ddot{\theta}_1 = -\frac{g}{l} \sin \theta_1 - b \dot{\theta}_1$$
$$\ddot{\theta}_2 = 0。$$

这很容易实现，使用

$$\mathbf{u} = \mathbf{B}^{-1} [\ddot{\mathbf{q}} - \tau + \mathbf{M} [-s \frac{g}{l} b q_1 \quad \ddot{\theta}_1]].$$

由于我们嵌入的是一个非线性动力学（而不是一个线性动力学），我们将其称为 "反馈取消"，或 "动态反转"。这个想法揭示了为什么我说控制是容易的--对于一个具有已知动力学的完全活动的确定性系统的特殊情况。例如，对我来说，反转重力也同样容易。请注意，如果机器人有关节100，这里的控制推导就不会再有任何偏差。

你可以在笔记本中运行这些例子。



在Colab中打开

像往常一样，我强烈建议你花几分钟时间来阅读源代码。

如果 \mathbf{f}_2 不是正方形，例如你有多个执行器 per joint，那么这个倒数可能不是唯一的。

请注意，我们所选择的动力学实际上并不稳定 θ_2 - 为了清楚起见，我们没有提及这个细节，但对于任何真正的实施来说，这是必要的。

全动系统的反馈等效于 $\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{u}$ ，而欠动系统的

因此，与全动式系统不同的是，在全动式系统中， $\mathbf{q} \mathbf{u}$ 不是反馈等价的。

系统，控制设计者别无选择，只能在控制设计中对植物的更复杂的动态进行推理。当这些动态是非线性的时候，这就会使反馈控制器的设计大大复杂化。

一个相关的概念是反馈线性化。上面例子中的反馈消除控制器是反馈线性化的一个例子--使用反馈将非线性系统转换成可控的线性系统。问一个系统是否 "可反馈线性化" 并不等同于问它是否欠激励；甚至一个可控的线性系统也可能欠激励，我们很快就会讨论。

1.4 输入和状态限制

虽然由于执行器缺失而产生的动态约束肯定体现了本课程的精神，但我们所关心的许多系统也可能受到其他动态约束的影响。例如，我们机器上的执行器可能只能产生一些有限的扭矩，或者在自由空间中可能有一个物理障碍物，我们不能允许我们的机器人与之接触。

定义1.2（输入和状态约束） 由 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$ 描述的动态系统可能受到一个或多个由 $j(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \geq 0$ 描述的约束。

在实践中，分离出只依赖于输入的约束，如 $j(\mathbf{u}) \geq 0$ ，是很有用的，如执行器限制，因为它们往往比状态约束更容易处理。环境中的障碍物可能表现为一个或多个仅依赖于位置的约束，例如 $j(\mathbf{q}) \geq 0$ 。

根据我们对行动不足的广义定义，我们可以看到，输入约束肯定会导致系统行动不足。状态（仅）约束更为微妙--一般来说，这些约束实际上降低了状态空间的维度，因此需要更少的执行维度来实现 "完全 "控制，但我们只有在能够在 "最小坐标 "中进行控制设计时才能获得好处（这通常是困难的）。

例子 (1.3 输入限制)

输入和状态约束会使控制设计复杂化，其方式类似于执行器数量不足（即进一步限制可行轨迹集），并且通常需要类似的工具来找到控制方案。

$$\ddot{x} = u, \quad |u| \leq 1.$$

1.4.1 非holonomic约束

根据我们的定义，这个系统是欠激励的。例如，没有一个 u 可以产生加速度 $\ddot{x} = 2$ 。

你可能听说过 "非holonomic系统 "这个术语（见例如[11]），并在思考非holonomy与underactuation的关系。简而言之，非holonomic约束是指 $j(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = 0$ 的约束，它不能被整合到 $j(\mathbf{q}, t) = 0$ 的约束中（一个holonomic约束）。非全局性约束并不限制系统的可能构型，而是限制这些构型的达成方式。全局性约束将系统的自由度数量减少一个，而非全局性约束则不会。一个汽车或传统的轮式机器人提供了一个典型的例子。

例如（1.4 轮式机器人）。

考虑一个简单的轮式机器人模型，其结构由笛卡尔位置 x, y 和方向 ϑ 描述，所以 $\mathbf{q} = [x, y, \vartheta]^T$ 。该系统受制于一个防止侧滑的二重约束。

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v \cos \vartheta \\ \dot{y} &= v \sin \vartheta \\ v &= \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\end{aligned}$$

或等价的。

$$\dot{y} \cos \vartheta - \dot{x} \sin \vartheta = 0 .$$

这个约束不能被整合到关于构型的约束中--汽车可以到达任何构型 (x, y, ϑ) , 只是不能直接向侧面移动--所以这是一个非holonomic约束。

将轮式机器人的例子与火车轨道上的机器人形成对比。火车轨道对应于一个整体的约束：轨道约束可以直接用系统的构型 \mathbf{q} 来写，而不用速度 $\dot{\mathbf{q}}$ 。 尽管轨道约束也可以写成对速度的二重约束，但有可能整合这一约束以获得对构型的约束。轨迹限制了系统的可能构型。

像轮式车辆上的无侧滑约束那样的非holonomic约束肯定会导致一个欠驱动的系统。反过来也不一定--缺少执行器的双摆系统是欠驱动的，但通常不会被称为非霍尔果斯系统。请注意，拉格朗日运动方程的形式是一个约束条件

$$j(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}, t) = 0,$$

所以不符合非holonomic约束的条件。

1.5 低动能机器人技术

欠驱动系统的控制是控制领域一个开放而有趣的问题。虽然有一些特殊情况下，欠驱动系统已经被控制，但相对来说，一般的原理很少。现在问题来了.....机器人学中大多数有趣的问题都是欠驱动的。

- 腿部机器人是欠驱动力的。考虑一个有 N 个内部关节和 N 个执行器的有腿机器。如果机器人没有用螺栓固定在地面上，那么系统的自由度包括内部关节和六个自由度，它们决定了机器人在空间的位置和方向。由于 $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^N$ 和 $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{N+6}$ ，方程 (3) 得到满足。
- (大多数)游泳和 ∞ 游泳机器人的动作不足。这个故事是这里与腿部机器的情况相同。每个控制面增加一个执行器和一个DOF。这已经是一种简化，因为系统的真实状态应该真正包括 ∞ 流的（内维）状态。
- 机器人的操纵（通常）是未充分执行的。考虑一个全动的机器人手臂。当这个手臂在操纵一个有自由度的物体时（即使是一块砖头也有六个自由度），它可能会变得不够活跃。如果实现并保持力的闭合，那么我们可以认为该系统是全动的，因为物体的自由度被约束到与手的自由度相匹配。当然，除非被操纵物体有额外的自由度（例如，任何可变形的物体）。

即使是全动系统和其他无约束系统的控制系统也可以利用欠动系统的经验加以改进，特别是在需要提高其运动的效率或降低其设计的复杂性时。

1.6 课程的目标

本课程是基于这样的观察：有来自优化理论、控制理论、运动规划、甚至机器学习的新的计算工具，可以用来设计欠执行系统的反馈控制。这门课的目标是开发这些工具，以便设计出比目前最先进的机器人更有活力和更灵活的机器人。

这门课的目标受众包括计算机科学和从事机器人研究的机械/航空专业的学生。尽管我假定学生对线性代数、ODE和Python很熟悉，但课程说明旨在提供该课程所需的大部分材料和参考文献。

我有一个坦白。事实上，我认为我们在这些笔记中所涉及的材料的价值远远超出了机器人学。我认为系统理论为组织极其复杂的系统的计算提供了一种强大的语言--特别是当人们试图对具有反馈回路中的连续变量的系统进行编程和/或分析时（顺便说一下，这在整个计算机科学和工程中都会发生）。我希望你能发现这些工具是广泛有用的，即使你没有一个人能够进行反 ∞ ip的人形机器人供你立即使用。

1.7 练习题

练习 (1.1Atlas BackPip)

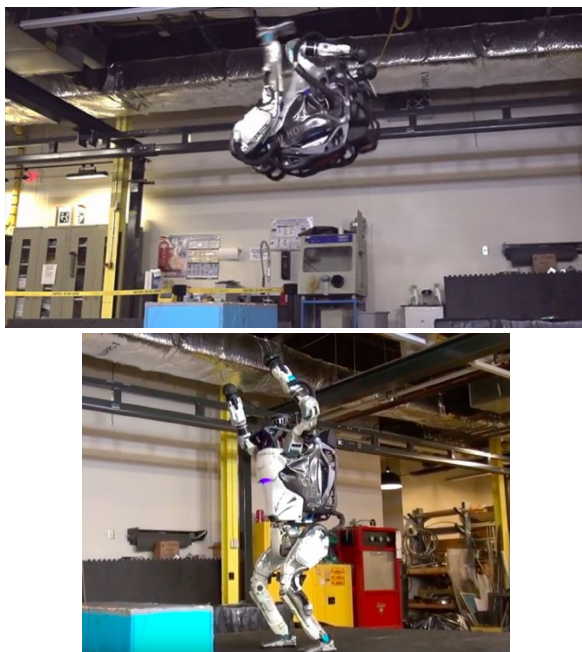


图1.5--阿特拉斯做背部 ∞ ip，阿特拉斯站立。

在本章的开头，你已经看到了Atlas人形机器人在做一个背部 ∞ ip。现在考虑一下机器人在上述 ∞ igure中捕捉到的两种状态。假设Atlas的执行器可以产生无限制的扭矩 \mathbf{u} ，请确定以下每项声明是否为真。请简要说明你的答案。

- 人形机器人的状态可以由其所有关节的角度和角速度来表示。
- 在做背部 ∞ ip（左侧 ∞ igure中的状态）时，人形被完全激活。
- 当站立时（右图中的状态），人形被完全激活。

练习（1.2状态空间中的轨迹跟踪）。

以一个机器人为例，其动力学受方程的支配。2，并假设它在所有时间 t 的所有状态 $\mathbf{x}=[q^T, \dot{q}^T]^T$ 中都是完全动作的。

- 对于任何两次二择一的期望轨迹 $\mathbf{q}_{\text{des}}(t)$ ，是否总能找到一个控制信号 $\mathbf{u}(t)$ ，使 $\mathbf{q}(t)=\mathbf{q}_{\text{des}}(t)$ ，对于所有 $t \geq 0$ ，只要 $\mathbf{q}(0)=\mathbf{q}_{\text{des}}(0)$ 和 $\dot{\mathbf{q}}(0)=\dot{\mathbf{q}}_{\text{des}}(0)$ ？
- 现在考虑最简单的全动式机器人：双积分器。这个系统的动力学解读为 $m\ddot{q}=u$ ，你可以把它想象成一个质量为 m 的小车在直线轨道上移动，由一个力 u 控制。下面的图描述了 $u=0$ 时的相位图。有没有可能找到一个控制信号 $u(t)$ ，驱动双积分器从初始状态 $\mathbf{x}(0)=[2, 0.5]^T$ 沿直线到达原点（蓝色轨迹）？如果我们设定 $\mathbf{x}(0)$ 为 $[2, -0.5]^T$ （红色轨迹），答案是否会改变？

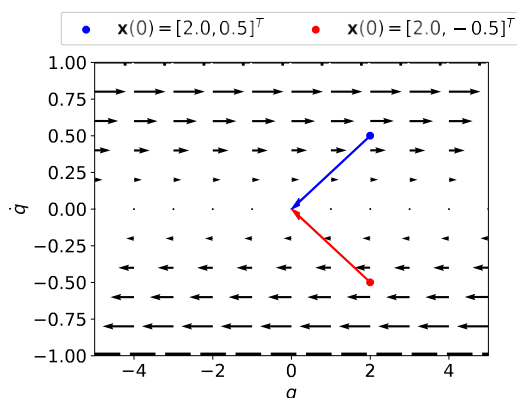


图 -1.6 双重积分器的相位图。

- 动力学2是 $n = \dim[\mathbf{q}]$ 二阶二阶方程。然而，用 $2n$ 个二阶二阶方程 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ 来描述这些方程总是可能的（我们也会经常这样做）。为此，我们只需将

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \mathbf{f}_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) + \mathbf{f}_2(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)\mathbf{u} \end{bmatrix}.$$

对于任何两次二择一的轨迹 $\mathbf{x}_{\text{des}}(t)$ ，是否总是有可能找到一个控制 $\mathbf{u}(t)$ ，使 $\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}_{\text{des}}(t)$ ，对于所有 $t \geq 0$ ，只要 $\mathbf{x}(0)=\mathbf{x}_{\text{des}}(0)$ ？

练习

1.3（任务空间控制双摆）

在上面的例子中，我们已经看到，每个关节有一个电机的双摆是一个全动的系统。在这里，我们考虑它的一个变化：不是用肩部和肘部的致动器来控制机器人，而是直接对质量 m_2 （第二环节的顶端）施加一个力。让 $\mathbf{u} = [u_1, u_2]^T$ 成为这个力，有 u_1 水平分量（向右正向）和 u_2 垂直分量（向上正向）。这一修改使得附录中的例子中得出的运动方程几乎没有变化；唯一的区别是，矩阵 \mathbf{B} 现在是 \mathbf{q} 的函数。

$$\mathbf{B}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} l_{11} + 2l_{c1} + 2l_{s1} + 2 & 2l_{c1} \\ 2l_{c1} & 2l_{s1} + 2 \end{bmatrix}.$$

在所有的状态下，新的控制输入下的双摆是否仍然是全动的？如果不是，请指出它在哪些状态下动作不足。

练习（1.4平面四旋翼飞机的欠激励）。

在课程的后期，我们将相当深入地研究四旋翼的动力学，目前只需看看平面四旋翼部分产生的运动方程的结构。四旋翼飞行器被限制在垂直平面内移动，重力指向下方。配置矢量 $\mathbf{q} = [x, y, \vartheta]^T$ 收集了质心的位置和俯仰角。控制输入是由两个转子 i 产生的推力 $\mathbf{u} = [u_1, u_2]$ 。输入 \mathbf{u} 可以有两个符号，并且没有界限。

- 确定系统处于欠行为的状态 $\mathbf{x} = [\mathbf{q}^T, \dot{\mathbf{q}}^T]^T$ 的集合。
- 对于系统处于欠驱动状态的所有状态，确定一个加速度 $\ddot{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ ，不能瞬间实现。提供
通过使用运动方程来严格证明你的主张：将候选加速度插入动力学中，并尝试找出矛盾之处，如 $m\mathbf{g} = 0$ 。

参考文献

1. Steven H. Collins and Andy Ruina and Russ Tedrake and Martijn Wisse, "Efficient bipedal robots based on passive-dynamic walkers", *Science*, vol. pp307, 1082-1085, February [18, 2005, [link](#)]。
2. Steven H. Collins 和 Martijn Wisse 和 Andy Ruina, "A Three-Dimensional Passive-Dynamic Walking Robot with Two Legs and Knees", *International Journal of Robotics Research*, vol. no20, pp7, 607-615, July, 2001.
3. J.P.Y. Arnould and D.R. Briggs and J.P. Croxall and P.A. Prince and A.G. Wood, "The foraging behaviour and energetics of wandering albatrosses brooding chicks", *Antarctic Science*, vol. no8, pp3, 229-236, 1996.
4. Wei Shyy and Yongsheng Lian and Jian Teng and Dragos Viieru and Hao Liu, "Aerodynamics of Low Reynolds Number Flyers", Cambridge University Press, 2008.
5. Xiaodong Tian and Jose Iriarte-Diaz and Kevin Middleton and Ricardo Galvao and Emily Israeli and Abigail Roemer and Allyce Sullivan and Arnold Song and Sharon Swartz and Kenneth Breuer, "Direct measurements of the kinematics and dynamics of bat flight", *Bioinspiration & Biomimetics*, vol. pp1, S10-S18, 2006.
6. Michael S. Triantafyllou 和 George S. Triantafyllou, "An efficient swimming machine", *Scientific American*, vol. 272, no.3, 第64页, 3月, 1995.
7. Vance A. Tucker, "滑翔飞行。理想猎鹰在潜水和拉出过程中的速度和加速度", 《实验生物学杂志》，第201卷, 第403-414页, 11月, 1998.
8. Eric D. Tytell和George V. Lauder, "蓝鳃太阳鱼 (Lepomis macrochirus) 逃跑反应的流体动力学", 《实验生物学杂志》，第3359-3369页, 211, 2008.
9. D.N. Beal and F.S. Hover and M.S. Triantafyllou and J.C. Liao and G. V. Lauder, "Passive propulsion in vortex wakes", *Journal of Fluid Mechanics*, vol. pp549, 385-402, 2006.
10. Jean-Weiping Li, Jacques E. Slotine 和 "Applied Nonlinear Control", Prentice Hall, October, 1990.

11. Anthony Bloch and P. Crouch and J. Baillieul and J. Marsden, "Nonholonomic Mechanics and Control", Springer, April 8, 2003.

[目录](#)

[下一章](#)

[可访问性](#)

© Russ Tedrake, 2021

低动能机器人技术

走路、跑步、游泳、飞行和操纵的算法

吕斯-特德雷克

© Russ Tedrake, 2021

最后修改 2021-6-13.

如何引用这些笔记，使用注释，并给予反馈。

注意：这些是用于在麻省理工学院教授的课程的工作笔记。它们将在2021年春季学期中被更新。讲座视频可在YouTube上找到。

[上一章](#)

[目录](#)

[下一章](#)

章节 2

 在Colab中打开

简单的摆锤

2.1 简介

我们在这一章的目标是适度的：我们想了解钟摆的动力学。

为什么要用钟摆？部分原因是，我们大多数的多连杆机器人操纵器的动力学特性只是大量耦合的摆的动力学特性。另外，一个单摆的动力学足够丰富，可以引入我们在本文中要用到的非线性动力学的大部分概念，但又足够容易理解，我们可以在接下来的几页中（主要）理解。

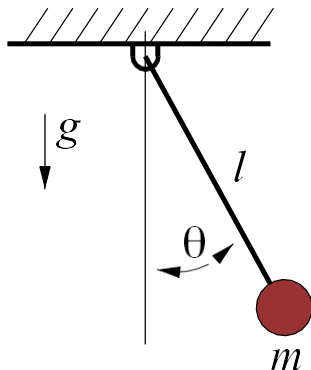


图-2.1-简单钟摆

简单摆的运动方程的拉格朗日推导（如附录中所述）得出。

$$ml\ddot{\vartheta}(t) + mgl \sin \vartheta(t) = Q.$$

我们将考虑这样的情况：广义的力， Q ，模拟一个阻尼扭矩（来自摩擦）加上一个控制扭矩输入， $u(t)$ 。

$$Q = -b\dot{\vartheta}(t) + u(t)。$$

2.2 恒定扭矩下的非线性动力学

让我们首先考虑摆的动力学，如果它以一种特别简单的方式被驱动：一个不随时间变化的扭矩。

$$ml\ddot{\vartheta} + b\dot{\vartheta} + mgl \sin \vartheta = u_0。 \quad (1)$$

例子 (Python中的2.1简单钟摆)

你可以在DRAKE中试验这个系统，使用



在Colab中打开

这些是相对简单的二阶方程，所以如果我给你 $\vartheta(0)$ 和 $\dot{\vartheta}(0)$ ，那么你应该能够对它们进行积分，从而得到 $\vartheta(t)$对吗？虽然这是可能的，但即使是最简单的情况（ $b = u = 0$ ）的积分也涉及到第一类椭圆积分；在这里可以获得的直觉相对较少。

这与线性系统的情况形成了鲜明的对比，在线性系统中，我们的大部分理解来自于能够明确地对方程进行积分。例如，对于一个简单的线性系统，我们有

$$\dot{q} = aq \rightarrow q(t) = q(0) e^{at}。$$

我们可以立即理解，如果 $a < 0$ ，系统的长期行为是一个（稳定的）指数衰减，如果 $a > 0$ ，是一个（不稳定的）指数增长，如果 $a = 0$ ，系统什么都不做。

一切并没有失去。如果我们关心的是系统的长期行为，那么我们可以应用一些技术。在本章中，我们将从研究图形求解方法开始。这些方法在Steve Strogatz的书中有精彩的描述[1]。

2.2.1 超阻尼摆

让我们先研究一个特殊情况--直观地说，当 $b\dot{\vartheta} \gg ml^2\ddot{\vartheta}$ 时--它通过
维分析（使用自然频率 $\sqrt{\frac{g}{l}}$ 以匹配单位）发生时

$b\sqrt{\frac{g}{l}} \gg 1$ 毫升²。这是重阻尼的情况，例如，如果摆锤被

在糖浆中运动。在这种情况下，阻尼项支配着加速度项，我们有：

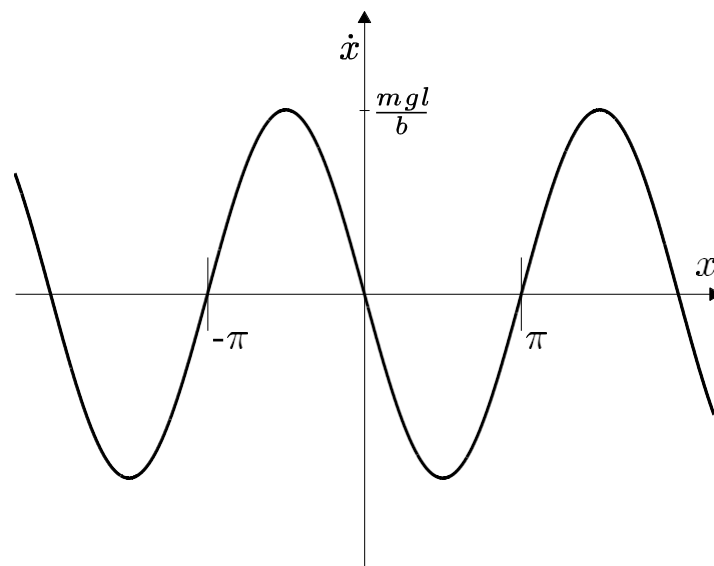
$$ml\ddot{\vartheta} + b\dot{\vartheta} \approx b\dot{\vartheta} = u_0 - mgl \sin \vartheta。$$

换句话说，在重阻尼的情况下，系统看起来大约是0^{rst} order。这是重阻尼系统的一般特性，如雷诺数很低时的液体。

我想暂时忽略一个细节：事实上， ϑ 每隔一段时间就会在自己身上绕一圈。 2π 。为了清楚起见，我们把没有包络的系统写成：

$$\dot{x} = u_0 - mgl \sin x。 \quad (2)$$

我们的目标是了解这个系统的长期行为：在给定的 $x(\infty)$ 中， $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{x} = 0$ 。
 $x(0)$ 。让我们先画出 \dot{x} 与 x 的关系。



首先要注意的是，系统有许多**平衡点**或**稳定状态**，每当 $\dot{x} = 0$ 时就会出现。在这个简单的例子中，零点交叉点是 $x^* = \{ \dots, -\pi, 0, \pi, 2\pi, \dots \}$ 。当系统处于这些状态之一时，它将永远不会离开这个状态。如果初始条件是在一个平衡点，我们知道 $x(\infty)$ 将在同一个平衡点。

接下来我们来研究系统在平衡点附近的行为。考察 $x^* = \pi$ 处的平衡点，如果系统从平衡点右侧开始，则 \dot{x} 为正，所以系统将远离平衡点。如果系统从左边开始，那么 \dot{x} 是负的，系统将向相反方向移动。我们把具有这种性质的平衡点称为**不稳定的**。如果我们看一下位于 $x^* = 0$ ，的轴心点，情况就不一样了：向右或向左开始的轨迹将向轴心点移动。我们将这个平衡点称为**局部稳定**。更具体地说，我们将区分多种类型的稳定性（其中 ϵ 是用来表示一个任意的标量）。

- 在Lyapunov (i.s.L.) 的意义上，局部**稳定**。如果对于每一个 $\epsilon > 0$ ，我可以产生一个 $\delta > 0$ ，使得如果 $|x(0) - x^*| < \delta$ ，那么 $\forall t, |x(t) - x^*| < \epsilon$ 的话，这意味着对于平衡点周围任何大小为 ϵ 的球，我可以创建一个大小为 δ 的球，保证如果系统在 δ 球内启动，那么它将一直保持在 ϵ 球内。
- 局部**吸引**。如果 $x(0) = x^* + \epsilon$ 意味着 $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x^*$ ，则一个平衡点是局部吸引的。
- 局部**渐近稳定**。如果一个平衡点是局部稳定的i.s.L.和局部吸引的，那么它就是局部渐近稳定的。
- 局部**指数稳定**。如果 $x(0) = x^* + \epsilon$ 意味着 $|x(t) - x^*| < C e^{-\alpha t}$ ，对于一些正常数 C 和 α ，一个平衡点是局部指数稳定的。
- **不稳定的**。如果一个平衡点不是局部稳定的i.s.L.，它就是不稳定的。

在Lyapunov意义上稳定的平衡点附近的初始条件可能永远不会到达平衡点（但它不会发散），在渐近稳定的平衡点附近将随着 $t \rightarrow \infty$ 到达平衡点，在指数稳定的平衡点附近将以一定的速度到达平衡点。一个指数稳定的平衡点是

也是一个渐近稳定的平衡点，但反过来就不是这样了。吸引力实际上并不意味着李亚普诺夫稳定性[†]，这就是为什么我们要求i.s.L。

特别是对于渐近稳定性的定义。

稳定的系统将是

但不是渐近稳定的，很容易构建（如 $\dot{x} = 0$ ）。有趣的是，这也是

[†] 我们不能看到，在
 在 一个维度上

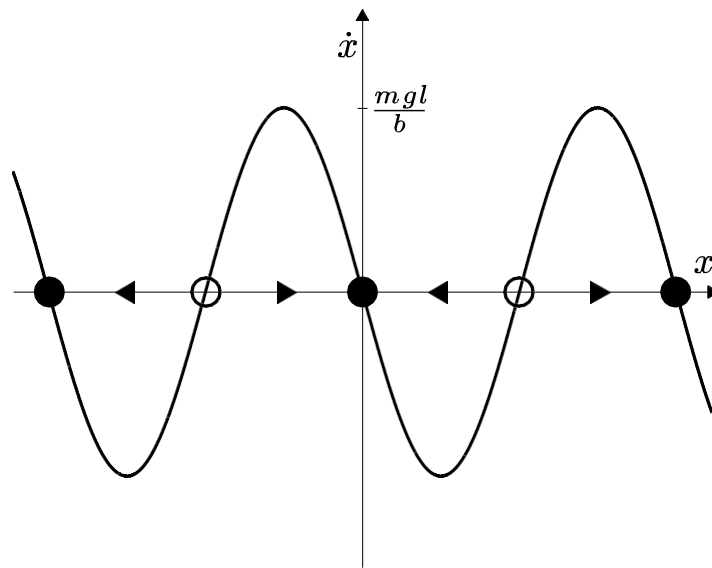
必须持有的是

有可能出现在 ∞ -time收敛（或发散）的非线性系统；一种所谓的 V -time稳定性；我们将在本书后面看到这样的例子，但这是一个难以用图形分析来渗透的话题。严格的非线性系统分析具有丰富的微妙性和意外性。此外，这些差异实际上很重要--我们为稳定系统而编写的代码将根据我们想要的稳定类型而发生微妙的变化，它可以决定我们方法的成功与否。

我们的 \dot{x} 对 x 的图可以用来说服我们自己，通过目视检查 \dot{x} 在 ∞ 点附近的i. s. L.和渐近稳定性。如果我们能找到一条穿过平衡点的负斜线，将 $f(x)$ 的图形与横轴分开，甚至可以推断出指数稳定性，因为这意味着非线性系统的收敛速度至少与线性系统一样快。

直线所代表的。我将用开放的圆圈来说明不稳定的 ∞ 点，用 \odot 来说明稳定的 ∞ 点（i.s.L.）。

接下来，我们需要考虑在离 ∞ 点较远的初始条件下会发生什么。如果我们把系统的动力学看作是一个在 x -轴，则我们不知道任何時候 $\dot{x} > 0$ ， ∞ 流都是向右移动，而 $\dot{x} < 0$ ，则是向右移动。 ∞ 流是向左移动的。如果我们用箭头进一步注释我们的图，表明 ∞ 流的方向，那么整个（长期）系统的行为就变得清晰了。



例如，我们可以看到，任何初始条件 $x(0) \in (-\pi, \pi)$ 将导致这个区域被称为 $x^* = 0$ 的 ∞ 点的吸引盆地。

两个 ∞ 点的吸引盆地不能重叠，分隔两个吸引盆地的流形被称为分离矩阵。这里的不稳定的 ∞ 点，在 $x^* = \{0, -\pi, \pi, 3\pi, \dots\}$ 形成了稳定 ∞ 点的吸引盆地之间的分离矩阵。

正如这些图所示，一阶一维系统在直线上的行为是相对受限的。该系统要么单调地接近一个 ∞ 点，要么单调地向 $\pm\infty$ 方向移动。没有其他的可能性。例如，震荡是不可能的。图形分析是许多一阶非线性系统（不仅仅是垂线）的一个神奇的分析工具；如图所示

下面的例子。

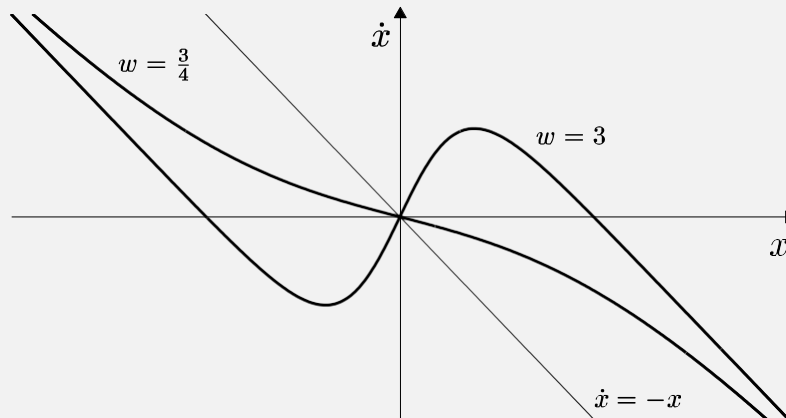
例子（2.2非线性自失效）

考虑以下系统。

$$\dot{x} + x = \tanh(wx)$$

(3)

注意到 $\tanh(z) \approx z$ 对小 z 来说是很方便的。对于 $w \leq 1$ ，系统只有一个 Fixed 点。对于 $w > 1$ ，系统有三个 Fixed 点：两个稳定的和一个不稳定的。



这些方程不是任意的--它们实际上是最简单的神经网络之一的模型，也是最简单的持久性记忆的模型之一[2].在方程中， x 是单个神经元的 Firing rate 模型，该神经元与自身有反馈连接。 \tanh 是神经元的激活（sigmoidal）函数， w 是突触反馈的权重。

自己实验一下吧。



作为奖励，你还会发现一个 LSTM 单元的方程式，你也可以进行实验。看看你能不能把它猜出来！

最后一个术语。在神经元的例子中，以及在许多动力学系统中，动力学是参数化的；在这种情况下，由一个单一的参数 w 来决定。事实上，如果我们把 w 增加到 $w=1$ ，就会发生一些戏剧性的事情--系统从有一个 Fixed 点变成有三个 Fixed 点。这被称为**分岔**。这个特殊的分叉被称为叉状分叉。我们经常绘制分叉图，将系统的轴心点作为参数的函数，用实线表示稳定的轴心点，虚线表示不稳定的轴心点，如图所示。

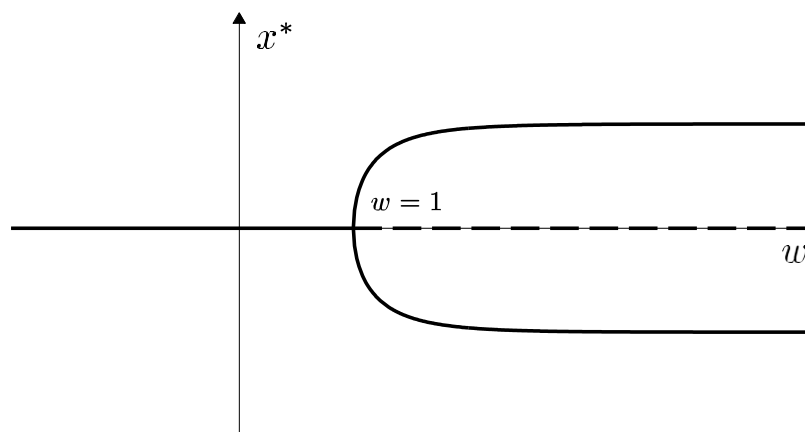


图2.5 - 非线性自闭症的分岔图。

我们的钟摆方程也有一个（鞍节点）分叉，当我们改变了

最后，让我们回到 θ 中的原始方程，而不是 x 中的方程。只有一点要说明：由于环绕，这个系统看起来会有振荡。事实上，图形分析显示，只要 $|u_0| > mgl$ ，钟摆就会永远转动，但现在你明白了，这不是振荡，而是 $\theta \rightarrow \pm\infty$ 的不稳定性。

你可以在下面关于[Hopfield网络](#)的练习中，从循环神经网络中找到这些概念（Fixed points, basins of attraction, bifurcations）的另一个美丽例子。

2.2.2 零扭矩的无阻尼钟摆

再考虑一下这个系统

$$ml^2\ddot{\theta} = u_0 - mgl \sin \theta - b\dot{\theta}.$$

这一次，系统的动态是真正的二阶。我们总是可以把任何二阶系统看作是具有两倍变量的（耦合）二阶系统。考虑一个一般的、自主的（不依赖于时间）的二阶系统。

$$\ddot{q} = f(q, \dot{q}, u).$$

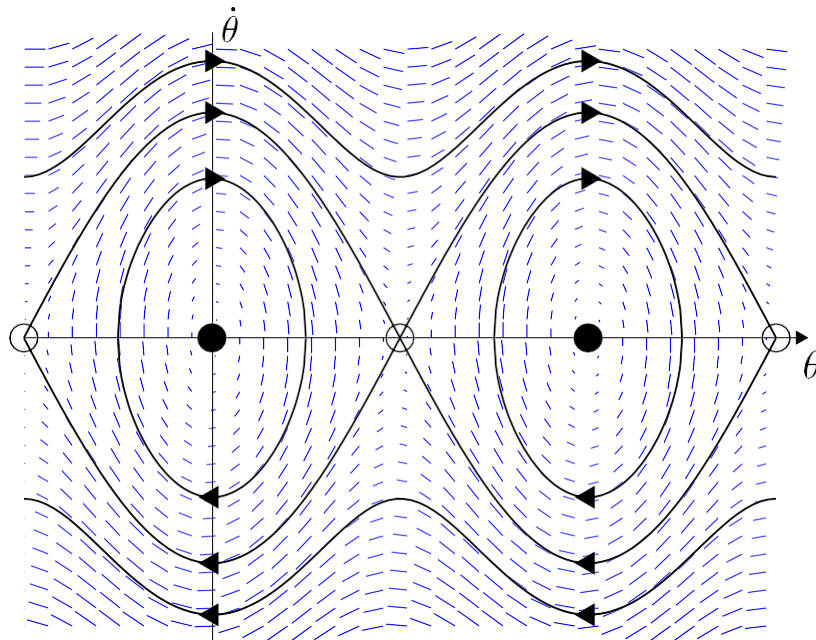
这个系统等同于二维的一阶系统

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= f(x_1, x_2, u). \end{aligned}$$

其中 $x_1=q$ 和 $x_2=\dot{q}$ 。因此，这个系统的图形描述不是一条线，而是一个向量场，其中向量 $[\dot{x}_1, \dot{x}_2]^T$ 被绘制在域 (x_1, x_2) 上。

.这个向量场被称为系统的**相位图**。

在本节中，我们将自己限制在 $u_0=0$ 的最简单情况下。首先沿着 θ 轴画草图。这里的向量场的 x 分量是零， y 分量是 $-\sin \theta$ 。正如预期的那样，我们在 $\pm\pi, \dots$ 有Fixed点。现在画出其余的向量场的草图。你能告诉我哪些Fixed点是稳定的吗？其中一些是稳定的，没有一个是渐进稳定的。



轨道计算

你可能想知道我们是如何画出上面Figure中的黑色等高线的。我们可以通过数值模拟得到它们，但这些线可以很容易地以闭合形式得到。直接对运动方程进行积分是错误的，但至少对于 $u_0=0$ 的情况，我们对这个问题有一些额外的物理洞察力，我们可以利用。摆的动能 T 和势能 U 分别为

$$T = \frac{1}{2} I \dot{\vartheta}^2, \quad U = -mgl \cos(\vartheta)。$$

其中 $I=ml^2$ ，总能量为 $E(\vartheta, \dot{\vartheta}) = T(\dot{\vartheta}) + U(\vartheta)$ 。无阻尼摆是一个保守系统：总能量在系统轨迹上是一个常数。利用能量守恒，我们有。

$$\begin{aligned} E(\vartheta(t), \dot{\vartheta}(t)) &= E(\vartheta(0), \dot{\vartheta}(0)) = E_0 \\ \frac{1}{2} I \dot{\vartheta}^2(t) - mgl \cos(\vartheta(t)) &= E_0 \\ \dot{\vartheta}(t) &= \pm \sqrt{\frac{2}{I} (E_0 + mgl \cos(\vartheta(t)))} \end{aligned}$$

利用这一点，如果你告诉我 ϑ ，我可以确定 $\dot{\vartheta}$ 的两个可能值中的一个，而且该解具有图中黑色等值线的所有丰富性。当 $\cos(\vartheta) > \cos(\vartheta_{max})$ 时，此方程有一个实解，其中

$$\vartheta_{max} = \begin{cases} \cos^{-1}(\frac{mgl}{E_0}), & E_0 < mgl \\ \pi, & \text{否则。} \end{cases}$$

当然，这只是一个直观的概念，即摆子不会在总能量等于势能的高度以上摆动。作为一个练习，你可以验证一下，将这个方程与时间二分，确实可以得到运动方程。

由 $E=mgl$ 定义的特定轨道是特殊的--这是一个访问直立的（不稳定的）平衡的轨道。它被称为同曲线轨道。

2.2.3 具有恒定扭矩的无阻尼钟摆

现在，如果我们增加一个恒定的扭矩会发生什么？如果你想象一下分叉图，你会看到Fixed点聚集在一起，朝着 $q = \pi$ ， $-\pi$ ，。直到它们消失了。一个Fixed点是不稳定的，一个是稳定的。

22

在我们继续之前，现在让我给你一个承诺的例子，即一个系统不稳定的i.s.L.，但随着时间的推移，它吸引了所有的轨迹。我们可以用一个非常类似于钟摆的例子来实现这一点（这里用极坐标写）。

例子（吸引所有轨迹的2.3不稳定平衡点）。

考虑到该系统

$$\begin{aligned} \dot{r} &= r(1-r) \\ \dot{\vartheta} &= \sin^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right) . \end{aligned}$$

这个系统有两个平衡点，一个在 $r^* = 0, \vartheta^* = 0$ ，另一个在 $r^* = 1, \vartheta^* = 0$ 。 $r^*=1$ 的轴心点吸引了所有其他轨迹，但根据我们的任何定义，它并不稳定。

花一分钟来画出这个的矢量场（如果有帮助的话，你可以独立画出每个坐标），以确保你能理解。请注意，环绕旋转是方便的，但不是必须的--我们可以在没有环绕的情况下，用直角坐标编写同样的动力系统。如果这仍然感觉太过武断，当我们在下一章介绍钟摆的能量整形摆动控制器时，我们将看到它在实践中发生。

2.2.4 阻尼摆

现在让我们把阻尼加回去。你仍然可以添加扭矩来移动平衡点（以同样的方式）。

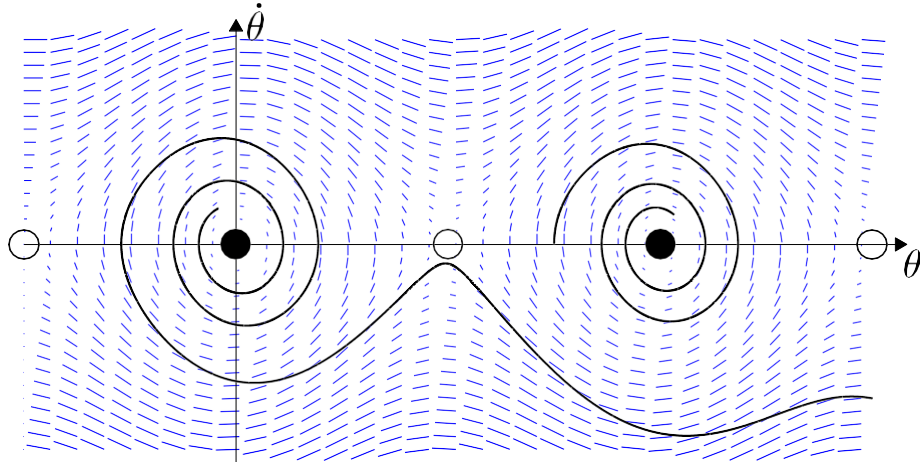


图-2.7阻尼摆的相位图

有了阻尼，现在摆的平衡点变得渐进稳定（除了稳定i.s.L.）。它也是指数稳定的吗？我们怎样才能知道呢？一种技术是在平衡点对系统进行线性化。一个平滑的、时间不变的、局部指数稳定的非线性系统必须有一个稳定的线性化；我们将在下一章更多地讨论线性化。

这里有一个思考练习。如果 u 不再是一个常数，而是一个函数 $\pi(\vartheta, \dot{\vartheta})$ ，那么你将如何选择 π 来稳定垂直位置。例如，反馈消除是一个微不足道的解决方案。

$$u = \pi(\vartheta, \dot{\vartheta}) = 2mgl \sin \vartheta.$$

但是我们所做的这些图告诉我们一个不同的故事。你将如何塑造自然动力学--在每一点上从相位图堆中挑选一个 u --以稳定垂直平衡点，并将扭矩消耗降到最低？这正是我希望你思考控制系统设计的方式。我们将在下一节课上给你提供第一个解决方案的技术--使用动态编程。

2.3 扭力有限的简摆

简单的摆锤被完全驱动。给予足够的扭矩，我们可以产生任何数量的控制方案来稳定顶部原本不稳定的平衡点（例如设计一个反馈控制器来有效地反转重力）。

如果我们施加一个扭矩限制约束， $|u| \leq u_{max}$ ，问题就开始变得有趣了（也就是变得不活跃了）。通过反馈，你可以改变每个点的矢量场的方向，但只能是一个固定的量。显然，如果最大扭矩很小（小于 mgl ），那么有一些状态不能直接驱动到目标，而是必须抽出能量来达到目标。此外，如果

如果扭矩限制太严重，系统有阻尼，那么就不可能摆动到顶部。解决方案的存在，以及到达顶部所需的泵的数量，是初始条件和扭矩限制的一个非微分函数。

虽然这个系统非常简单，但用通用算法获得解决方案需要很多控制更复杂的欠驱动系统所必需的推理；当我们在本书中介绍新算法时，这个问题将成为我们的工作重点。

2.3.1 能量塑造控制

在摆的特殊情况下，我们可以根据我们向系统泵送能量的直觉，给出一个满意的手工设计的非线性控制器。我们已经观察到，摆的总能量由以下公式给出

$$E = \frac{ml^2}{2} \dot{\vartheta}^2 - mgl \cos \vartheta。$$

为了了解如何控制能量，让我们研究该能量如何随时间变化。

$$\begin{aligned} \dot{E} &= ml\dot{\vartheta}\ddot{\vartheta} + \dot{\vartheta}mgl \sin \vartheta \\ &= \dot{\vartheta}[u - mgl \sin \vartheta] + \dot{\vartheta}mgl \sin \vartheta \\ &= u\dot{\vartheta}。 \end{aligned}$$

换句话说，给系统增加能量很简单--在与 $\dot{\vartheta}$ 相同的方向施加扭矩。要消除能量，就在相反的方向上施加扭矩（例如，阻尼）。

为了摆起来，即使有扭矩限制，让我们用这个观察来驱动系统到它的同曲线轨道，然后让摆的动力学把我们带到直立的平衡点。回顾一下，同曲线轨道的能量为 mgl

-- 让我们把这称为我们期望的能量。

$$E^d = mgl。$$

此外，让我们把我们目前的能量和这个期望的能量之间的差异定义为 $\tilde{E} = E - E^d$ ，并注意到我们仍然有

$$\dot{\tilde{E}} = \dot{E} = u\dot{\vartheta}。$$

现在考虑反馈控制器的形式

$$u = -k\dot{\vartheta}\tilde{E}, \quad k > 0。$$

我承认这看起来有点奇怪；选择它的原因很简单，因为它把产生的"错误动态"变成了简单的东西。

$$\dot{\tilde{E}} = -k\dot{\vartheta}^2 \tilde{E}。$$

思考一下这个系统的图形分析，如果你要画出 \tilde{E} 与 $\dot{\vartheta}$ 的任何

\tilde{E}

相图 $\dot{\vartheta}$ -- 它是一条与横轴分离的直线，这将意味着指数收敛的结果。 $\tilde{E} \rightarrow 0$ 这对任何 $\dot{\vartheta}$ 都是真实的，除了 $\dot{\vartheta} = 0$ （所以它实际上不会让我们从直接的 $\dot{\vartheta} = 0$ 点向上摆动.....但如果你推动这个系统

只是一点点，然后它将开始泵送能量，并将一路摇摆起来）。其基本属性是：当 $E > E^d$ 时，我们应该从系统中移除能量（阻尼），当 $E < E^d$ 时，我们应该增加能量（负阻尼）。即使控制动作是有界的，收敛性也很容易被保留下来。

这是一个非线性控制器，会将所有系统轨迹推向不稳定平衡。但它能使不稳定的平衡点局部稳定吗？只有这个控制器， $\dot{\vartheta} = 0$ 点是**有吸引力的，但不稳定**--就像我们上面的例子。小的扰动可能会导致系统完全绕着 $\dot{\vartheta} = 0$ 点行驶。

循环，以便再次回到不稳定的平衡状态。由于这个原因，为了真正平衡系统，一旦我们接近Oxed point，我们就必须切换到一个不同的控制器（这个想法我们将在下一章详细讨论）。

例子(摆锤的2.4能量塑造)

花一分钟时间玩一玩摇摆起来的能量塑造控制器

 在Colab中打开

请确保你花一分钟时间看看这些例子中运行的代码。注意切换到平衡控制器的阈值有点随意。我们将在[李亚普诺夫方法一章](#)中给出一个更令人满意的答案。

这个控制器有几件事非常好。它不仅简单，而且对我们在估计模型参数 m 、 l 和 g 时可能出现的错误实际上非常稳健。我们的控制方程是在计算 $\dot{E} = ml\dot{\theta}^2 - mgl(1 + \cos\theta)$ ，而唯一的

这个估计的影响稳定性的属性是轨道的位置，当 $E = 0$ ，也就是 $l\dot{\theta}^2 = g(\cos\theta + 1)$ 。这完全不取决于我们对的估计。

质量，而且只对我们对长度和重力的估计有线性影响（如果不能准确测量摆的长度，那么适当的测量设备将是一项很好的投资）。这有点令人惊讶；我们将开发出许多基于优化的算法，能够摆动起钟摆，但要Ond一个对模型参数同样不敏感的算法，还需要大量的工作。

如果原系统中存在阻尼，当然我们也可以将其取消，使用 $u = -k\theta + b\dot{\theta}$ 。再一次，如果我们有误差，该控制器是相当稳健的。估计的阻尼比。

2.4 练习题

练习（2.1图形分析）

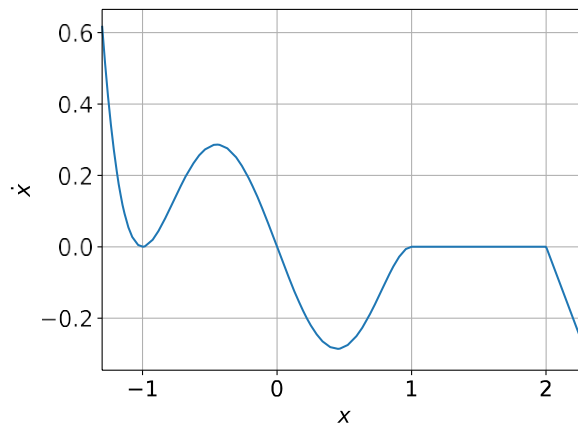


图-2.8-具有多个平衡点的一阶系统。

考虑Orst-order系统

$$\dot{x} = \begin{cases} -x^5 + 2x^3 - x & \text{if } x \leq 1, \\ 0 & \text{如果 } 1 < x \leq 2, \\ -x + 2 & \text{如果 } x > 2, \end{cases}$$

其动态在上面的图中表示。注意，连同 $x^*=-1$ 和 $x^*=0$ ，封闭区间 $[1, 2]$ 中的所有点都是这个系统的平衡点。对于每个平衡点，确定它是不稳定的、稳定的i.s.L、渐近稳定的还是指数稳定的。

练习2.2(吸引力

盆地和 分叉图)

考虑具有多项式动力学的0rst-order系统

$$\dot{x} = f(x) = -x^3 + 4x^2 + 11x - 30。$$

- 画出函数 $f(x)$ 的图形，并确定所有的平衡点。(请用你选择的工具画出这个图形，以检查你的工作。)
- 对于每个平衡点，确定它是稳定的 (i.s.L) 还是不稳定的。对于每一个稳定的平衡点，确定吸引力的盆地。
- 考虑系统动力学中的加性项 w ： $\dot{x} = f(x) + w$ 。当 w 的范围为 0∞ 时，请确定系统有多少个稳定和不稳定的平衡点。用 w 的非负值的分叉图来支持你的答案。

练习 (2.3列举不稳定的平衡)。

我们得到一个具有标量状态 x 的动态系统 $\dot{x} = f(x)$ ，动态 $f(x)$ 是未知的，但我们得到了两个信息。

- 函数 $f(x)$ 是连续的。
- 该系统正好有三个稳定的 (i.s.L.) 平衡点。

确定该系统可以有的最小 n_{\min} 个和最大 n_{\max} 个不稳定平衡点。用两个函数 $f_{\min}(x)$ 和 $f_{\max}(x)$ 的草图来支持你的答案，这两个函数验证了上述要求，并且分别有 n_{\min} 个和 n_{\max} 个不稳定的平衡。

锻炼 (2.4吸引力与稳定性)

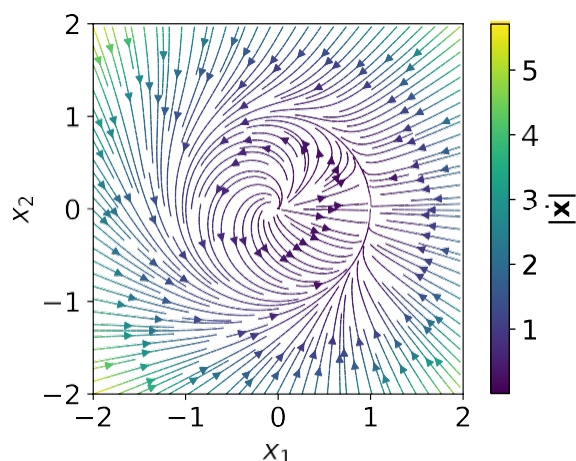


图 -2.9 二维系统的相位图。

该图显示了动态系统的相位图

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1(1 - |\mathbf{x}|) + x_2 \frac{x_1 - |\mathbf{x}|}{2|\mathbf{x}|}, \\ \dot{x}_2 &= x_2(1 - |\mathbf{x}|) - x_1 \frac{x_1 - |\mathbf{x}|}{2|\mathbf{x}|},\end{aligned}$$

其中 $|\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ 。为了帮助你分析这个系统，我们设置了[这个](#)

[python笔记本](#)。花点时间理解其中的代码，然后回答以下问题。

- 找到这个系统的所有平衡点（不需要在上面描述的状态空间部分之外寻找）。用笔记本仔细检查你的答案：模拟系统的演变，把你确定的平衡点作为初始条件。
- 判断你在上一点确定的平衡点是否具有吸引力和/或稳定的i.s.L。
- 这个动态系统是我们在本章中分析的一个系统的（非常）近亲。你能猜到这是哪一个吗？两者之间有什么联系？加分：用一个数学推导来支持你的说法。

练习 (2.5带振动底座的摆锤)

考虑一个被动摆，其底座（杆的支点）被迫按照谐波规律 $h \sin(\omega t)$ 水平振荡，其中 h 表示振荡的振幅， ω 表示频率。这个系统的运动方程是

$$ml\ddot{\vartheta} + mgl \sin \vartheta = ml\omega^2 h \sin(\omega t) \cos \vartheta + u。$$

(如果这个方程对你来说很模糊，可以尝试用[拉格朗日方法](#)来推导它；但要小心，这个系统的动能 $T(\vartheta, \dot{\vartheta}, t)$ 明确地取决于时间。)我们的目标是设计一个随时间变化的控制律 $u = \pi(\vartheta, \dot{\vartheta}, t)$ ，使摆子以恒定速度 $\dot{\vartheta} = 1$ 。

- 确定一个理想的闭环动态系统

$\ddot{\vartheta} = f(\vartheta)$ ，其唯一的

平衡点是稳定的，位于 $\dot{\theta}=1$ 。

- 使用反馈抵消来设计一个控制法 $u = \pi(\theta, \dot{\theta}, t)$ ，使闭环动态与上一点选择的控制法相吻合。
- 在这个python笔记本中，我们设置了一个模拟环境来测试你的控制法。试着理解代码的结构：这个工作流程是相当普遍的，它可以成为你未来Drake项目的一个好的起点。在专用单元中实现你的控制法，并使用笔记本末尾的动画和图表来检查你的工作。

练习 (2.6 Hopfield Networks)

考虑以下动态系统

$$\dot{x} = A^T \text{softmax}(\beta A x) - x \quad (4)$$

其中 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 和 $\beta \in \mathbb{R}$ 分别是一个常数矩阵和一个标量，并且

柔和函数由 $\text{softmax}(z)$ 给出。
$$i = \frac{e^{z_i}}{\sum_k e^{z_k}}$$

- Draw the phase portrait of the system with constants $\beta = 5$ and $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.
- 确定上述系统的平衡（通过观察相位图近似确定）。什么是稳定和不安定的平衡？
- 稳定平衡点与矩阵 A 的关系如何？
- 使用这个python笔记本，用Hopfield网络实现一个图像恢复算法。修改上面的动态系统以记忆MNIST数据集的一个子集。使用一个被破坏的图像作为初始条件，模拟动态系统来恢复图像。

练习 (2.7 神经ODE的图形分析)

我们最近看到一个趋势，即使用神经网络来描述我们的动力学功能。网络所代表的二阶方程可能是非常复杂的，而且很难进行严格的分析。然而，在一维系统的特殊情况下，我们可以使用图形分析来分析我们的系统。在这个练习中，你将看看如何从数据中学习阻尼摆的动力学。这个练习有一个编码部分，你将学习在pytorch中训练神经网络的基础知识。然后有一个书面部分，你将训练后的网络所代表的动力学函数进行图形分析。

- 在这个python笔记本中，从数据中学习阻尼摆的动力学。
- 在 $\theta \in [-5.0, 5.0]$ 的范围内， $(\theta, \dot{\theta})$ 的哪些值代表平衡点？哪些平衡点是稳定的，哪些是不稳定的？
- 我们的模型可能不完全吻合地面真实数据的一个原因是什么？
- 我们的模型是否对所有 $(\theta, \dot{\theta})$ 对的动态进行了合理的近似？为什么或为什么不呢？

参考文献

1. Steven H. Strogatz, "Nonlinear Dynamics and Chaos:在物理学、生物学、化学和工程学中的应用", Perseus Books。 1994.
2. H.Sebastian Seung和Daniel D. Lee和Ben Y. Reis和David W. Tank, "自闭症：通过调整突触反馈进行短期模拟记忆存储的简单说明", 《计算神经科学》杂志, 第9卷, 第171-85页。 2000.

[上一章](#)

[目录](#)

[下一章](#) [可访](#)

[问性](#)

© Russ Tedrake, 2021

低动能机器人技术

走路、跑步、游泳、飞行和操纵的算法

吕斯-特德雷克

© Russ Tedrake, 2021

最后修改 2021-6-13.

如何引用这些笔记，使用注释，并给予反馈。

注意：这些是用于在麻省理工学院教授的课程的工作笔记。它们将在2021年春季学期中被更新。讲座视频可在YouTube上找到。

[上一章](#)

[目录](#)

[下一章](#)

章节 3

Open in Codalab
, 车杆, 四旋翼

翼机器人

在欠驱动系统的控制方面的大量工作是在低维模型系统的背景下完成的。这些模型系统抓住了问题的本质，而没有引入更多现实世界的例子中经常涉及的所有复杂性。在这一章中，我们将集中讨论两个最著名和研究最充分的模型系统--Acrobot和Cart-Pole。在我们开发了一些工具之后，我们将看到这些工具可以直接应用于其他模型系统；我们将使用四旋翼飞机举出一些例子。所有这些系统都是微不足道的，它们的执行器比自由度少。

3.1 ACROBOT

Acrobot是一个在垂直平面内的平面双连杆机械臂（逆重力工作），在肘部有一个推杆，但在肩部没有推杆。它第一次被详细描述在[1]。肩部有致动器，但肘部没有致动器的配套系统被称为Pendubot[2]。Acrobot之所以被称为Acrobot，是因为它类似于在平行杆上的体操运动员（或杂技演员），他们主要通过腰部的用力（而不是手腕的用力）来控制他/她的运动。Acrobot研究的最常见的控制任务是摆动起来的任务，在这个任务中，系统必须使用肘部（或腰部）的扭矩将系统移动到垂直状态，然后达到平衡。

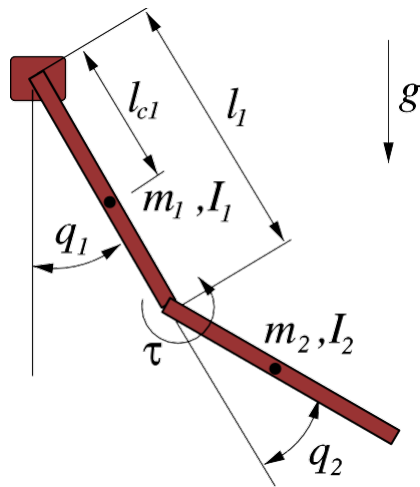


图-3.1-杂技演员。 [点击这里](#)，可以看到实物杂技演员摆动起来并保持平衡。

Acrobot是欠驱动机器人的主要挑战的代表。为了摆动和平衡整个系统，控制器必须推理并利用有作用的自由度和无作用的自由度之间的状态耦合。这也是一个重要的系统，因为正如我们将看到的，它与最简单的行走机器人模型之一非常相似。

3.1.1 运动方程

图3.1说明了我们分析中使用的模型参数。 ϑ_1 是肩关节角度， ϑ_2 是肘关节（相对）角度，我们将使用 $\mathbf{q} = [\vartheta_1, \vartheta_2]^T$ ， $\mathbf{x} = [\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}]^T$ 。零配置是两个链接都直接朝下。惯性矩， I_1 ， I_2 是关于枢轴的。任务是稳定不稳定的Fixed点 $\mathbf{x} = [\pi, 0, 0, 0]^T$ 。

我们将用拉格朗日的方法推导出Acrobot的运动方程。每个环节的质量中心的位置， \mathbf{p}_{c1} ， \mathbf{p}_{c2} ，由运动学给出。

$$\mathbf{p}_{c1} = \begin{bmatrix} l_{c1} s_1 \\ -l_{c1} c_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_{c2} = \begin{bmatrix} l_1 s_1 + l_{c2} s_{1+2} \\ -l_1 c_1 - l_{c2} c_{1+2} \end{bmatrix} \quad (1)$$

其中 s_1 是 $\sin(\vartheta_1)$ 的缩写， c_{1+2} 是 $\cos(\vartheta_1 + \vartheta_2)$ 的缩写，等等。能量由以下公式给出。

$$T = T_1 + T_2, \quad T_1 = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}_1^T \mathbf{I}_1 \dot{\mathbf{q}}_1 \quad (2)$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 \dot{\mathbf{p}}_{c2}^T \dot{\mathbf{p}}_{c2} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}_2^T \mathbf{I}_2 \dot{\mathbf{q}}_2 + (I_2 + m_2 l_{c2}^2) \dot{\mathbf{q}}_1 \dot{\mathbf{q}}_2 \quad (3)$$

$$U = -m_1 g l_{c1} c_1 - m_2 g (l_1 c_1 + l_{c2} c_{1+2}) \quad (4)$$

将这些量输入拉格朗日，就可以得到运动方程。

$$(I_1 + I_2 + m_2 l_{c2}^2 + 2 m_2 l_{c2} l_1 c_2) \ddot{\mathbf{q}}_1 + (I_2 + m_2 l_{c2}^2) \ddot{\mathbf{q}}_2 - 2 m_2 l_{c2} l_1 \dot{\mathbf{q}}_1 \dot{\mathbf{q}}_2 s_2 \quad (5)$$

$$- 2 m_2 l_{c2} l_1 \dot{\mathbf{q}}_1^2 c_2 + m_2 g l_{c1} s_1 + m_2 g (l_1 s_1 + l_{c2} s_{1+2}) = 0 \quad (I_2 \ddot{\mathbf{q}}_2 + 2 m_2 l_{c2} l_1 \dot{\mathbf{q}}_1 \dot{\mathbf{q}}_2 s_2 + m_2 g l_{c2} s_{1+2} = \tau \quad (6)$$

$$+ 2 m_2 l_{c2} l_1 \dot{\mathbf{q}}_1^2 c_2 + m_2 g l_{c2} s_{1+2} = \tau \quad (7)$$

在标准的，操纵者方程式的形式。

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} = \boldsymbol{\tau}(\mathbf{q}) + \mathbf{B} \mathbf{u}.$$

用 $\mathbf{q} = [\vartheta_1, \vartheta_2]^T$ ， $\mathbf{u} = \tau$ 我们有。

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} I_1 + I_2 + 2ml^2 + 2c_1 m l l c_2 I_2 + 2c_1 m l l c_2 I_2 & 0 \\ I_2 + 2c_1 m l l c_2 I_2 & 2 \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} -2m l c_1 c_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - 2c_1 m l c_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \\ m l c_1 c_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\tau_g(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} -c_1 m g l s_1 - 2 m g (c_1 s_1 + c_2 s_1) \\ -2 m g l c_1 s_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (10)$$

例3.1（杂技演员的动力学）。

你可以在DRAKE中试验Acrobot的动态，比如说，使用



3.2 车杆系统

我们在这里要研究的另一个模型系统是车-杆系统，其中的任务是在其不稳定的平衡点周围平衡一个简单的摆，只使用车的水平力。平衡车杆系统被用于许多控制学的入门课程中，包括麻省理工学院的6.003，因为它可以通过简单的线性控制（如车杆的放置）技术来完成。在这一章中，我们将考虑完整的摆放和平衡控制问题，这需要一个完整的非线性控制处理。

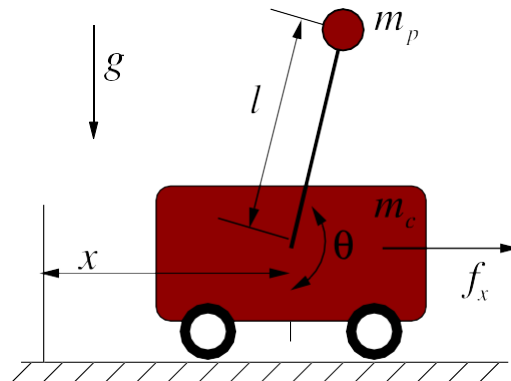


图-3.2-Cart-Pole系统。点击[这里看一个真正的机器人](#)。

图中显示了对系统的参数化。 x 是小车的水平位置， ϑ 是钟摆的逆时针角度（零是直挂）。我们将使用 $\mathbf{q} = [x, \vartheta]^T$ ，和 $\mathbf{x} = [\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}]^T$ 。任务是稳定 $\mathbf{x} = [0, \pi, 0, 0]^T$ 处的不稳定的Fixed点。

3.2.1 运动方程

系统的运动学由以下公式给出

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} x + l \sin \vartheta \\ -l \cos \vartheta \end{bmatrix}. \quad (11)$$

能量由以下公式给出

$$T = \frac{1}{2} (m + m_p) \dot{x}^2 + m \dot{x} \dot{\vartheta} l \cos \vartheta + \frac{1}{2} m l^2 \dot{\vartheta}^2 \quad (12)$$

$$U = -m g l \cos \vartheta. \quad (13)$$

拉格朗日产生了运动方程。

$$(m_c + m_p)\ddot{x} + ml\ddot{\vartheta}\cos\vartheta - pml\dot{\vartheta}^2\sin\vartheta = f_{xp} \quad (14)$$

$$f_{xp}l\dot{\vartheta}\cos\vartheta + ml\ddot{\vartheta}^2 + p mgl\sin\vartheta = 0 \quad (15)$$

在标准的，操纵者方程式的形式。

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} = \tau(\mathbf{q}) + \mathbf{B}\mathbf{u}。$$

用 $\mathbf{q} = [x, \vartheta]^T$, $\mathbf{u} = f_x$, 我们有。

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} m_c + m_p & m_p l \cos\vartheta \\ m_p l \cos\vartheta & m_p l^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} 0 & -m_p l \dot{\vartheta} \sin\vartheta \\ m_p l \dot{\vartheta} \sin\vartheta & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tau(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 0 \\ -m_p g l \sin\vartheta \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

在这种情况下，直接求解加速度是特别容易的。

$$\ddot{x} = \frac{1}{m_c + m_p} [f_{xp} + m \sin\vartheta (l\ddot{\vartheta} + g \cos\vartheta)] \quad (16)$$

$$\ddot{\vartheta} = \frac{1}{l(m_c + m_p \sin^2\vartheta)} [-f_{xp} \cos\vartheta - m l \dot{\vartheta}^2 \cos\vartheta \sin\vartheta - (m_c + m_p) g \sin\vartheta]。 \quad (17)$$

在接下来的一些分析中，我们将研究运动方程的形式，忽略细节，任意地将所有常数设为1。

$$2\ddot{x} + \ddot{\vartheta} \cos\vartheta - \dot{\vartheta}^2 \sin\vartheta = f \quad (18)$$

$$\ddot{x} \cos\vartheta + \ddot{\vartheta} + \sin\vartheta = 0 \quad (19)$$

例子（3.2车-杆系统的动力学）。

你可以在DRAKE中尝试使用Cart-Pole动力学，例如，使用



3.3 四轮驱动车

在过去的几年里，四旋翼飞机已经变得非常流行--来自业余爱好者社区的外转子马达的进步使它们变得强大、轻巧和便宜！它们足够强大，可以携带有趣的有效载荷（例如用于测绘/拍摄环境的传感器），但又足够动态地快速移动。它们足够强大，可以携带有趣的有效载荷（例如，用于测绘/拍摄环境的传感器），但又有足够的动力，可以相对快速地移动。最有趣的动力在更高的速度下开始显现，当推进器开始从水平运动的空气 ∞ 流中获得升力时，或者当它们足够接近地面时，会出现明显的地面效应，但我们不会试图在这里捕捉这些效应（尚未）。

当四旋翼飞行器的革命开始发生时，我预测它将很快被一种认识所取代，即斜翼飞行器对大多数应用来说是更好的。推进器在产生推力方面几乎是最有效的--这使得四旋翼飞行器在悬停方面非常有效--但是要想在向前飞行时有效，你可能希望有一个气翼。机翼是一个非常好的主意!但我错了 -- 四旋翼飞机已经完全主导了商业无人机的

Øxed-wing。也许这只是因为它们更容易控制？也许仍有希望...

3.3.1 平面四旋翼飞机

我们可以从一个极其简单的四旋翼模型开始，它被限制在飞机上生活。在这种情况下，它实际上只需要两个推进器，但称它为 "生物机器人" 就不太合适了。运动方程几乎是微不足道的，因为它只是一个单一的刚体，而且肯定是 $\mathcal{O}(t)$ 到我们的标准操纵器方程。

$$m\ddot{\mathbf{x}} = -(u_1 + u_2) \sin \vartheta. \quad (20)$$

$$m\ddot{\mathbf{y}} = (u_1 + u_2) \cos \vartheta - mg \quad (21)$$

$$I\ddot{\theta} = r(u_1 - u_2) \quad (22)$$

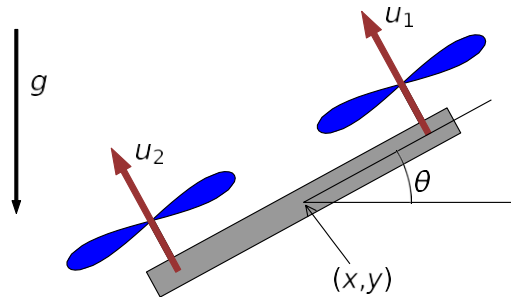


图-3.3-平面四旋翼系统（我们在代码中也将其称为 "Quadrotor2D"，以便在目录表中与 "Quadrotor" 相邻）。模型参数是质量， m ，惯性矩， I ，以及从中心到螺旋桨底部的距离， r 。

3.3.2 全三维四旋翼飞机

见 `drake/examples/Quadrotor`。很快就会有文字描述/推导的内容最有趣的部分是，该模型需要包括旋转道具产生的力矩，否则关于悬停构型的线性化系统实际上是无法控制的。

3.4 平衡

对于 Acrobot 和 Cart-Pole 系统，我们将首先设计一个线性控制器，当系统开始在不稳定的 $\mathcal{O}(x)$ 点附近时，可以平衡系统。为了实现这一目标，我们将对关于 $\mathcal{O}(x)$ 点的非线性方程进行线性化，检查该线性系统的可控性，然后使用 线性二次调节器 (LQR) 理论来设计我们的反馈控制器。

3.4.1 操纵器方程的线性化

尽管这两个模型系统的运动方程都是相对可操作的，但前向动力学仍然涉及到相当多的非线性项，在任何线性化中都必须考虑。让我们考虑操纵器方程所描述的系统线性化的一般问题。

我们可以使用泰勒展开法，围绕一个 $\mathcal{O}(x)$ 点 $(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)$ 进行线性化。

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \approx \mathbf{f}(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*) + \left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right]_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*, \mathbf{u}=\mathbf{u}^*} (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) + \left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right]_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*, \mathbf{u}=\mathbf{u}^*} (\mathbf{u} - \mathbf{u}^*)$$

$$\mathbf{x}=\mathbf{x}^*,\mathbf{u}=\mathbf{u}^*$$

$$(\mathbf{u}-\mathbf{u}^*)^T$$

$$*(23)$$

让我们考虑将操纵器方程线性化的具体问题。

一个（稳定或不稳定的）Fixed点。 在这种情况下， $\mathbf{f}(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)$ 为零，我们就剩下标准的线性状态空间形式了。

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}) [\boldsymbol{\tau}(\mathbf{q}) + \mathbf{B}(\mathbf{q})\mathbf{u} - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}] \end{bmatrix}, \quad (24)$$

$$\approx \mathbf{A}_{lin} (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) + \mathbf{B}_{lin} (\mathbf{u} - \mathbf{u}^*) \quad (25)$$

其中 \mathbf{A}_{lin} 和 \mathbf{B}_{lin} 是常数矩阵。 让我们把 $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^*$ ， $\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{u} - \mathbf{u}^*$ ，写成

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}_{lin} \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{B}_{lin} \bar{\mathbf{u}}.$$

围绕一个Fixed点的泰勒扩展得到以下非常简单的方程，以块状形式给出。

$$\mathbf{A}_{lin} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{M}^{-1} \frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} + \sum_j \frac{\partial \mathbf{B}_j}{\partial \dot{\mathbf{q}}} & \mathbf{0} \end{bmatrix}_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*, \mathbf{u}=\mathbf{u}^*} \quad (26)$$

$$\mathbf{B}_{lin} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1} \mathbf{B} \end{bmatrix}_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*, \mathbf{u}=\mathbf{u}^*} \quad (27)$$

其中 \mathbf{B}_j 是 \mathbf{B} 的第 j 列。 请注意，涉及 $\frac{\partial \mathbf{M}^{-1}}{\partial \dot{q}_i}$ 条款消失

因为 $\boldsymbol{\tau} + \mathbf{B}\mathbf{u} - \mathbf{q}$ 在Fixed点必须为零。所有的 \mathbf{q} 导数也都消失了，因为 $\dot{\mathbf{q}}^* \neq 0$ ，任何带有 \mathbf{C} 的项也都消失了，因为当速度为零时，向心力和离心力为零。在许多情况下，包括Acrobot和Cart-Pole系统（但不是四旋翼），矩阵 $\mathbf{B}(\mathbf{q})$ 是一个常数，所以这些条款也会被删除。

例子 (3.3 Acrobot的线性化)

围绕（不稳定的）直立点线性化，我们有。

$$\frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial \mathbf{q}} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*} = \begin{bmatrix} g(1ml_1 + 2ml_1 + 2ml_2) & 2mgl_2 \\ 2mgl_2 & 2mgl_2 \end{bmatrix} \quad (28)$$

线性动力学直接来自这些方程和Acrobot方程的操纵器形式。

例子 (3.4 车杆系统的线性化)

在这个系统中，围绕不稳定的Fixed点线性化，我们有。

$$\frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial \mathbf{q}} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & mgl \end{bmatrix} \quad (29)$$

同样，线性动力学也很简单。

研究线性化系统的属性可以告诉我们一些关于非线性系统的（局部）属性的事情。例如，有一个严格稳定的线性化意味着非线性系统的局部指数稳定性[3](定理4.15)。值得注意的是，有一个不稳定的线性化也意味着系统是局部不稳定的，但是如果线性化是边际稳定的，那么就不能得出非线性系统是渐近稳定的、稳定的i.s.L.，还是不稳定的结论（只能说它不是指数稳定的）[4].

3.4.2 线性系统的可控性

定义 (3.1 可控性) 形式的控制系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$$

如果有可能构建一个无约束的输入信号 $\mathbf{u}(t)$, $t \in [0, t_f]$, 使系统在一个有限的时间间隔内从任何初始状态移动到任何最终状态, $0 \leq t \leq t_f$, 则称为**可控**。

对于线性系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}。$$

我们可以用闭合形式对这个线性系统进行积分, 因此有可能推导出可控性的确切条件。特别是, 对于线性系统来说, 要证明存在一个控制输入, 它可以将任何初始条件驱动到原点。

不重复的特征值的特殊情况

让我们先研究一个特例, 它不能作为一般工具, 但对理解可控性的直觉可能更有用。让我们对系统矩阵 \mathbf{A} 进行特征值分析, 这样。

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i。$$

其中 λ_i 是第 i 个特征值, \mathbf{v}_i 是相应的(右)特征向量。 $n \times n$ 矩阵 \mathbf{A} 将有 n 个特征值。将(列)特征向量收集到矩阵 \mathbf{V} 中, 将特征值收集到对角矩阵 $\mathbf{\Lambda}$ 中, 我们有

$$\mathbf{AV} = \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}。$$

下面是我们的主要假设: 让我们假设这 n 个特征值中的每一个都有一个不同的值(没有重复)。有了这个假设, 就可以证明特征向量 \mathbf{v}_i 形成了一个线性独立的基集, 因此 \mathbf{V}^{-1} 的定义是很好的。

我们可以继续我们对线性系统的特征模态分析, 通过定义模态坐标, \mathbf{r} 。

$$\mathbf{x} = \mathbf{V}\mathbf{r}, \quad \text{或} \quad \mathbf{r} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{x}。$$

在模态坐标中, 线性系统的动力学由以下公式给出

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{V}\mathbf{r} + \mathbf{V}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u} = \mathbf{\Lambda}\mathbf{r} + \mathbf{\Theta}\mathbf{u}。$$

这说明了模态分析的力量; 在模态坐标中, 动力学对角线化, 产生独立的线性方程。

$$\dot{r}_i = \lambda_i r_i + \sum_j \theta_{ij} u_j, \quad \mathbf{\Theta} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{B}。$$

现在, 可控性的概念变得清晰了。当且仅当 $\theta_{ij} \neq 0$ 时, 输入 j 可以影响模态坐标 i 的动力学。在非重复特征值的特殊情况下, 对每个单独的特征模式的控制是足够的(在有限时间)调节所有的特征模式[5]。因此, 我们说该系统是可控的, 当且仅当

$$\forall i, \exists j, \text{ 使得 } \theta_{ij} \neq 0。$$

包括一个一般的解决方案, 只是为了完整。点击展开细节。

通过研究线性方程的时域解，可以得到对可控性问题的一个更普遍的解决方案，它消除了我们对特征值的假设。这个系统的解是

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau。$$

在不丧失一般性的情况下，让我们考虑系统的最终状态为零。那么我们就有。

$$\mathbf{x}(0) = - \int_0^{t_f} e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau。$$

你可能想知道我们所说的 e 是什么意思 \mathbf{A}^t ；一个标量提高到矩阵的幂。回顾一下， e^z 实际上是由一个收敛的非线性总和决定的。

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \dots$$

符号 $e^{\mathbf{A}t}$ 使用相同的定义。

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2}\mathbf{A}^2t^2 + \frac{1}{6}\mathbf{A}^3t^3 + \dots$$

毫不奇怪，这有许多特殊形式。例如，如果 \mathbf{A} 是可对角线化的， $e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{V}\mathbf{e}^{\mathbf{\Lambda}t}\mathbf{V}^{-1}$ ，其中 $\mathbf{A} = \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^{-1}$ 是 \mathbf{A} 的特征值分解[6].我们在这里要使用的特殊形式是

$$e^{-\mathbf{A}\tau} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(\tau)\mathbf{A}^k。$$

这是一个特别令人惊讶的形式，因为上面的非线性和是由这个非线性和表示的；推导时使用了西尔维斯特定理[5], [7].那么我们有

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(0) &= - \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{A}^k \mathbf{B} \int_0^{t_f} \alpha_k(\tau) \mathbf{u}(\tau) d\tau \\ &= - \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{A}^k \mathbf{B} \mathbf{w}_k, \quad \text{其中 } \mathbf{w}_k = \int_0^{t_f} \alpha_k(\tau) \mathbf{u}(\tau) d\tau \\ &= - [\mathbf{B} \mathbf{A} \mathbf{B} \mathbf{A}^2 \mathbf{B} \dots \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{B}]_{n \times (nm)} \begin{bmatrix} \mathbf{w}_0 \\ \mathbf{w}_1 \\ \mathbf{w}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{w}_{n-1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

包含向量 \mathbf{B} 、 $\mathbf{A}\mathbf{B}$ 、...的矩阵称为可控性矩阵。 $\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}$ 被称为可控性矩阵。为了使系统可控，对于每个初始条件 $\mathbf{x}(0)$ ，我们必须能够找到相应的矢量 \mathbf{w} 。因此，可控性的条件是这个可控矩阵是全等级的。在DRAKE中，你可以使用ControllabilityMatrix获得线性系统的可控性矩阵，或者直接使用IsControllable检查秩条件。

请注意，改变特征模式的特征值的线性反馈对于完成我们在有限时间内到达目标的目标是不够的。事实上，达到目标的开环控制很容易通过一个final-value LQR问题得到，并且（对于 $\mathbf{R} = \mathbf{I}$ ）实际上是一个简单的可控性格拉米亚的函数[7].

可控性与欠动性

对Acrobot和Cart-Pole系统的可控性分析表明，关于直立的线性化动力学实际上是可控的。这意味着线性化系统，如果从零状态开始，可以在有限时间内返回到零状态。这有可能是令人惊讶的--毕竟这些系统是欠驱动的。例如，有趣和令人惊讶的是，Acrobot在没有肩部电机的情况下也能在直立位置上保持平衡。

这些模型系统的可控性证明了一个极其重要的观点。一个欠驱动的系统并不一定是一个不可控制的系统。欠驱动系统不能遵循任意的轨迹，但这并不意味着它们不能到达状态空间中的任意点。然而，使系统进入一个特定状态所需的轨迹可能是任意复杂的。

这里介绍的可控性分析是针对线性时变（LTI）系统的。对于线性时变（LTV）系统也有类似的分析。我们甚至会看到对非线性系统的扩展；尽管它经常被称为“可达性”分析的同义词。

3.4.3 LQR反馈

可控性告诉我们存在一条通往期望点的轨迹，但并没有告诉我们应该采取哪条轨迹，也没有告诉我们什么控制输入会导致它发生。为什么不呢？可能有无限多的解决方案。我们必须选择一个。

线性系统中的控制器设计工具是非常先进的。特别是，正如我们在[线性最优控制一章](#)中所描述的那样，只要我们愿意将系统围绕操作点线性化，并以二次成本函数的方式来定义最优性，就可以很容易地为像平衡这样的调节任务设计一个最优反馈控制器。

$$J(\mathbf{x}_0) = \int_0^{\infty} [\mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R} \mathbf{u}(t)] dt, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T > 0, \mathbf{R} = \mathbf{R}^T > 0.$$

线性反馈矩阵 \mathbf{K} 用来作为

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K} \mathbf{x}(t).$$

是所谓的最佳线性二次调节器（LQR）。即使不了解详细的推导，我们也能很快成为LQR的实践者。`DRAKE`提供了一个函数。

```
K = LinearQuadraticRegulator(A, B, Q, R)
```

为线性系统。它还提供了一个版本

```
控制器 = LinearQuadraticRegulator(system, context, Q, R)
```

这将使系统围绕平衡点线性化，并返回控制器（在原始坐标中）。因此，要使用LQR，只需确定对称的正对数成本矩阵 \mathbf{Q} 和 \mathbf{R} 。在其最常见的形式中， \mathbf{Q} 和 \mathbf{R} 是正对角矩阵，其中条目 Q_{ii} 惩罚状态变量 x_i 与其他状态变量相比的相对误差，条目 R_{ii} 惩罚 u 的 i 动作。

示例（[3.5 Acrobot和Cart-Pole的LQR](#)）。

花一分钟时间玩一玩Acrobot和Cart-Pole的LQR控制器。

 在Colab中打开

请确保你花点时间看一下这些例子中运行的代码。你能以不同的方式设置**Q**和**R**矩阵，以提高性能吗？

对带有**LQR**反馈的闭环响应的模拟表明，任务确实完成了--而且是以令人印象深刻的方式完成的。很多时候，系统的状态必须猛烈地偏离原点，才能最终到达原点。进一步检查发现，（线性化的）闭环动力学实际上是非最小相位的（杂技演员有右3半边的零点，车杆有1）。

示例（3.6四旋翼飞机的LQR）。

如果围绕一个标称的**Øxed**点（螺旋桨的非零推力平衡重力的地方）进行线性化，**LQR**对四旋翼飞机来说基本上是开箱即用。



在Colab中打开

或[点击这里查看动画](#)。

请注意，**LQR**虽然对线性化系统来说是最优的，但不一定是最大化**Øxed-point**吸引盆地的最佳线性控制方案。**稳健控制**理论（例如，[.....]），明确考虑到了系统的差异性。**[8]**），它明确考虑了线性化模型和非线性模型之间的差异，将产生在这方面优于我们**LQR**解决方案的控制器。

3.5 部分反馈线性化

在介绍性章节中，我们提出了这样的观点：欠驱动系统不是反馈等价于 $\ddot{q} = \mathbf{u}$ 。尽管我们不能总是简化系统的全部动力学，但仍有可能将系统动力学的一部分线性化。这种技术被称为**部分反馈线性化**。

考虑一下车杆的例子。小车的动力学受到钟摆运动的影响。如果我们知道这个模型，那么我们似乎可以很合理地认为，我们可以创建一个反馈控制器，它可以准确地以必要的方式推动小车，以抵消摆的动态贡献--从而使小车动态线性化。我们将看到，可能更令人惊讶的是，我们也可以使用小车的反馈控制器来反馈线性化无源摆锤关节的动力学。

我们将使用“局部反馈线性化”这一术语来描述一个使被动关节动力学线性化的控制器。更令人惊讶的是，通常有可能实现**非共振**部分反馈线性化--一种使未执行关节动力学线性化的控制器。这里介绍的处理方法来自于**[9]**。

3.5.1 用于车杆系统的PFL拼接

从方程开始 18和 19，我们有

$$\begin{aligned}\ddot{\theta} &= -\ddot{x}_c - s \\ \ddot{x}(2-c^2) - sc - \dot{\theta}^2 s &= f_x\end{aligned}$$

因此，应用反馈控制

$$f_x = (2 - c)\ddot{x}^d - s\dot{c} - \dot{\vartheta}^2 s \quad (30)$$

结果在

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \ddot{x}^d \\ \ddot{\vartheta} &= -\ddot{x}^d c - s \end{aligned}$$

这在全球范围内都是有
效的。

仔细看一下得出的方程式。当然，它说我们可以在小车上施加任何我们喜欢的加速度。但即使是极点的结果方程在这里也恰好采取了一个很好的形式：它们已经被简化为简单摆的方程（没有小车），其中扭矩输入现在由 \ddot{x}^d 给出。就好像我们有一个带有扭矩控制的简单摆，只是我们的指令被一个 $\cos \vartheta$ 项所调制，而这个 $\cos \vartheta$ 项是基本的--当杆子处于水平状态时，我们的控制权确实归于零，因为在这种配置下，小车上的任何力量都不能像杆子上的扭矩那样发挥作用。

非集中式的

再从方程开始 18和 19我们有

$$\ddot{x} = -\frac{\ddot{\vartheta} + s}{c}$$

$$\ddot{\vartheta}(c - \frac{2}{c}) - \dot{\vartheta}^2 s = f_x$$

应用反馈控制

$$f_x = (c - \frac{2}{c})\ddot{\vartheta}^d - 2 \tan \vartheta - \dot{\vartheta}^2 s \quad (31)$$

结果在

$$\begin{aligned} \ddot{\vartheta} &= \ddot{\vartheta}^d \\ \ddot{x} &= -\frac{\ddot{\vartheta}^d}{c} - \tan \vartheta \end{aligned}$$

请注意，这个表达式只有在 $\cos \vartheta \neq 0$ 时才有效。再一次，我们知道，当杆子完全水平时，力不能产生扭矩。事实上，我们所写的控制器会"爆炸"--在 $\cos \vartheta = 0$ 时，要求的力是有限的0；所以在硬件上（甚至在模拟中）执行命令之前，请确保你的命令是饱和的。虽然这可能是一个小小的安慰，但至少我们有 $(c - 2)$ 永远不会归零；事实上，你可以自己检查一下， $|c - 2| \geq 1$ 。

cc

3.5.2 一般形式

对于那些微不足道的系统（某些关节上有扭矩，其他关节上没有扭矩），我们可以在不丧失一般性的情况下，将操纵器方程所描述的任何微不足道的系统中的关节坐标重新组织为以下形式。

$$\mathbf{M}_{1+12} \ddot{\mathbf{q}}_2 = \boldsymbol{\tau}_1 \quad (32)$$

$$\mathbf{M}_{1+22} \ddot{\mathbf{q}}_2 = \boldsymbol{\tau}_2 + \mathbf{u} \quad (33)$$

$\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{q}_1 \in \mathbb{R}^l$, $\mathbf{q}_2 \in \mathbb{R}^m$, $l+n=m$ 。 \mathbf{q}_1 代表所有的被动关节， \mathbf{q}_2 代表所有的主动关节， $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_g - \mathbf{q}$ 项捕捉所有的科里奥利和重力项，以及

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}$$

幸运的是，由于 \mathbf{M} 是均匀的（例如对所有 \mathbf{q} ）正去核，根据正去核的Schur补充条件， \mathbf{M}_{11} 和 \mathbf{M}_{22} 是正去核。

共用的线性化

对完整的操纵器方程进行同样的替换，我们得到。

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{q}}_1 &= \mathbf{M}_1^{-1} [\tau_1 - {}_{12}\mathbf{M}_2] \quad (34) \\ (\mathbf{M}_{22} - {}_{21}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{M}_1)\ddot{\mathbf{q}}_2 - \tau_2 + {}_{21}\mathbf{M}\mathbf{M}_1^{-1}\tau_1 &= \mathbf{u} \quad (35) \end{aligned}$$

可以很容易地证明，矩阵 $(\mathbf{M}_{22} - {}_{21}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{M}_1)$ 是可倒置的[9]；我们可以通过检查发现它是对称的。PFL自然而然地出现，并且在全球范围内有效。¹

非集中式线性化

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{q}}_2 &= \mathbf{M}_2^+ [\tau_2 - {}_{21}\mathbf{M}_1] \quad (36) \\ (\mathbf{M}_{21} - {}_{22}\mathbf{M}\mathbf{M}_2^+ + \mathbf{M})\ddot{\mathbf{q}}_1 - \tau_1 + {}_{22}\mathbf{M}\mathbf{M}_2^+ \tau_2 &= \mathbf{u} \quad (37) \end{aligned}$$

其中 \mathbf{M}_2^+ 是一个Moore-Penrose的伪逆。这个逆提供了一个唯一的当 \mathbf{M} 的 ${}_{12}$ 等级等于 l 时，系统中的被动自由度的数量（不能更多，因为矩阵只有 l 行）。在这种情况下，等级条件有时被称为"强惯性耦合"的属性。它与状态有关；在上面的车杆例子中， $\mathbf{M}_{12} = \cos \vartheta$ ，当 $\cos \vartheta = 0$ 时，等级正好下降0。如果一个系统在每个状态下都表现出强惯性耦合，它就具有全局强惯性耦合。

任务空间部分反馈线性化

一般来说，我们可以确定一些我们想控制的主动和被动关节的组合。这种组合有时被称为"任务空间"。考虑一个输出函数的形式。

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{q}).$$

与 $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$ ，这是对任务空间的定义。确定 $\mathbf{H}_1 = \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{q}_1}$ ， $\mathbf{H}_2 = \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{q}_2}$ ， $\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{q}} = [\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2]$ 。

定理--3.1 任务空间PFL

如果对被驱动的关节进行指令，使其

$$\ddot{\mathbf{q}}_2 = \mathbf{H} [\ddot{\mathbf{y}} - \ddot{\mathbf{h}} - \mathbf{H}_1 \mathbf{M}_1^{-1} \tau_1] \quad (38)$$

其中， $\bar{\mathbf{H}} = \mathbf{H}_{22} - {}_{21}^{-1}\mathbf{H}_1\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2$ ，而 $\bar{\mathbf{H}}^+$ 是右摩尔-彭罗斯的伪反过来。

$$\bar{\mathbf{h}}^+ = \bar{\mathbf{h}}^t (\bar{\mathbf{h}} \bar{\mathbf{h}}^t)^{-1}.$$

那么我们有

$$\ddot{\mathbf{y}} = \ddot{\mathbf{y}}^d \quad (39)$$

受制于

$$\text{rank}(\bar{\mathbf{H}}) = p, \quad (40)$$

证明草图。将输出函数二阶化，我们有

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{y}} &= \dot{\mathbf{h}} \\ \ddot{\mathbf{y}} &= \ddot{\mathbf{h}} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{H}_1^{-1} + {}_{22}\mathbf{H}_2 \end{aligned}$$

求解 32 的动力学，我们可以得到。

$$\ddot{\mathbf{q}}_1 = \mathbf{M}_1^{-1} \tau_1 - \mathbf{M}_1^{-1} \mathbf{M}_{12} \ddot{\mathbf{q}}_2 \quad (41)$$

代入，我们有

$$\mathbf{y} = \dot{\mathbf{H}} \dot{\mathbf{q}}_1 + \mathbf{H} \mathbf{M}_1^{-1} (\tau_1 - \mathbf{M}_{12} \ddot{\mathbf{q}}_2) + \mathbf{M}_1^{-1} \mathbf{M}_{12} \ddot{\mathbf{q}}_2 \quad (42)$$

$$= \dot{\mathbf{H}} \dot{\mathbf{q}} + \bar{\mathbf{H}} \ddot{\mathbf{q}}_2 + \mathbf{1}_{11} \quad (43)$$

$$\mathbf{H} \mathbf{M}_1^{-1} \tau_1 \quad (44)$$

请注意，最后一行要求 \mathbf{H}^{-1} 的等级条件(40)，以确保 $\bar{\mathbf{H}}$ 的行是线性独立的，允许 $\bar{\mathbf{H}}^+ = \mathbf{I}$ 。

为了执行一个任务空间的轨迹，人们可以命令

$$\ddot{\mathbf{y}}^d = \ddot{\mathbf{y}}^d + \mathbf{K}_d (\dot{\mathbf{y}}^d - \dot{\mathbf{y}}) + \mathbf{K}_p (\mathbf{y}^d - \mathbf{y})。$$

假设内部动力学是稳定的，这就产生了收敛的误差动力学，当 $\mathbf{K}_p, \mathbf{K}_d > 0$ [4]，这意味着 $\mathbf{y}(t) \rightarrow \mathbf{y}^d(t)$ 。对于一个位置控制机器人来说，加速度指令(38)的加速度指令，就可以了。或者，用()代替扭矩指令。(38)和(41)代入(33)。

例3.7（用Cart-Pole系统进行端点轨迹跟踪）。

考虑一下试图用车-杆系统中的摆的端点跟踪一个理想的运动轨迹的任务。在一个致动器和运动学约束下，我们可能很难在水平和垂直坐标上跟踪一个轨迹。但我们至少可以尝试在端点的垂直位置上跟踪一个轨迹。

使用任务空间的PFL推导，我们有。

$$\begin{aligned} y &= h(\mathbf{q}) = -l \cos \vartheta \\ \dot{y} &= l \dot{\vartheta} \sin \vartheta \end{aligned}$$

如果我们确定一个理想的轨迹。

$$y^d(t) = \frac{l}{24} \sin(t)。$$

那么任务空间控制器就可以通过上述推导轻松实现。

上面的任务空间推导提供了部分反馈线性化（PFL）的一个方便的概括[9]，它同时包含了同位和非同位的结果。如果我们选择 $\mathbf{y} = \mathbf{q}_2$ （同位），那么我们有

$$\mathbf{h}_1 = 0, \quad \mathbf{h}_2 = \mathbf{i}, \quad \dot{\mathbf{h}} = 0, \quad \bar{\mathbf{h}} = \mathbf{i}, \quad \bar{\mathbf{h}}^+ = \mathbf{i}。$$

由此可见，(38)中的命令减少为 $\ddot{\mathbf{q}}_2 = \ddot{\mathbf{q}}^d$ 。那么，执行器的指令是

$$\mathbf{u} = \mathbf{M}_1 \mathbf{M}_1^{-1} \tau_1 - \mathbf{M}_1 \ddot{\mathbf{q}}^d + \mathbf{M}_1 \ddot{\mathbf{q}}^d - \tau_2。$$

且等级条件(40)总是被满足。

如果我们选择 $\mathbf{y} = \mathbf{q}_1$ （非集中式），我们有

$$\mathbf{h}_1 = \mathbf{i}, \quad \mathbf{h}_2 = 0, \quad \dot{\mathbf{h}} = 0, \quad \bar{\mathbf{h}} = \mathbf{1}_1^{-1} \mathbf{m} \mathbf{m}_{12}。$$

等级条件(40)要求 $\text{rank}(\mathbf{M}_{12})=l$, 在这种情况下, 我们可以写成 $\bar{\mathbf{H}}^+ = -\mathbf{M}^+ \mathbf{M}_{11}$, 将rank条件精确地简化为[]中描述的 "强惯性耦合" 条件。9].现在, (38)中的命令简化为

$$\ddot{\mathbf{q}}_2 = \mathbf{M}^+ [\tau_{1-11} \ddot{\mathbf{q}}_1^d] \quad (45)$$

执行器指令是通过将(45)代入(33), 得出的结果与[]中的相同。9].

3.6 摆动式控制

3.6.1 能量塑造

记得在上一章中, 我们用能量塑形来摆动起简单的钟摆。事实证明, 这个想法比单纯的钟摆更为普遍。正如我们将看到的, 我们可以使用类似的 "能量塑造" 的概念, 为杂技机器人和车杆系统产生摆动的控制器。值得注意的是, 只需要一个执行器就可以改变系统的总能量。

尽管已经为这些模型系统提出了大量的摆动式控制器 (参见[10], [11], [12], [13], [14], [15], [1], [16]), 能量整形控制器往往是最自然的推导, 也许是最著名的。

3.6.2 杆子

让我们尝试将能量塑造的想法应用于车杆系统。基本的想法, 来自[17]的基本思想是使用共轭PFL来简化动力学, 使用能量整形来调节摆的同曲线轨道, 然后增加一些项来确保小车保持在原点附近。这有点令人惊讶.....如果我们想控制钟摆, 我们不应该使用非共轭版本吗? 实际上, 我们最终想同时控制小车和磁极, 我们将建立在共轭版本的基础上, 因为它避免了倒置可能为零的 $\cos \vartheta$ 项, 还因为 (当所有参数被设置为1时) 我们留下了一个特别简单的方程形式。

$$\ddot{x} = u \quad (46)$$

$$\ddot{\vartheta} = -uc - s - \frac{1}{l}(uc + gs) \quad (47)$$

第一个方程显然很简单, 但即使是第二个方程也正是一个去耦摆的方程, 只是有一个稍微奇怪的控制输入, 由 $\cos \vartheta$ 调制。

让我们用能量塑形来调节这个去耦摆的能量。摆的能量 (单位质量、单位长度、单位重力下的简单摆) 由以下几点给出。

$$E(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \dot{\vartheta}^2 - \cos \vartheta。$$

所需的能量, 相当于所需Fixed点的能量, 为

$$E^d = 1。$$

再一次证明 $\tilde{E}(\mathbf{x}) = E(\mathbf{x}) - E^d$, 我们现在观察到

$$\begin{aligned} \tilde{E}(\mathbf{x}) &= E(\mathbf{x}) - E^d \\ &= \dot{\vartheta}^2 - \cos \vartheta - 1 \\ &= \dot{\vartheta}^2 - \cos \vartheta - 1 \\ &= -u \dot{\vartheta} \cos \vartheta。 \end{aligned}$$

因此，如果我们设计的控制器形式为

$$u = k\dot{\vartheta} \cos \vartheta \hat{E}, \quad k > 0$$

其结果是

$$\dot{E} = -k\dot{\vartheta}^2 \cos^2 \vartheta \hat{E}.$$

这保证了 $|\dot{\vartheta}|$ 是不增加的，但还不足以保证它将归于零。例如，如果 $\vartheta = \dot{\vartheta} = 0$ ，系统就不会移动。然而，如果我们有

$$\int_0^t \dot{\vartheta}^2(t') \cos^2 \vartheta(t') dt' \rightarrow \infty. \quad \text{当 } t \rightarrow \infty \text{ 时。}$$

那么我们有 $\dot{\vartheta} \rightarrow 0$ 。这个条件是拉萨尔定理的一个版本，我们将在关于李亚普诺夫方法的笔记中加以阐述，除了在 $\vartheta = 0$ 点的微不足道的恒定轨迹外，所有的恒定轨迹都得到满足。

现在我们回到完整的系统动力学（其中包括小车）。[17] 和 [18] 使用了简单的摆式能量控制器和一个额外的PD控制器，旨在调节小车。

$$\ddot{x}^d = k_E \dot{\vartheta} \cos \vartheta \hat{E} - k_{x_p} - d \hat{k}_c.$$

[17] 提供了该控制器在一些名义参数下的收敛性证明。[10] 提供了一个略微不同的控制器，直接从Lyapunov论证中得出。

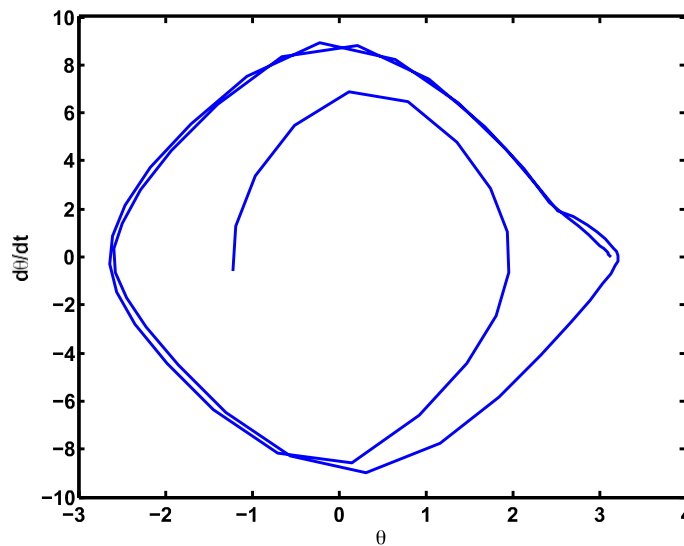


图3.4 - 车-杆摆动上升。使用能量整形控制的摆锤子系统的相位图示例。控制器将系统驱动到同曲线轨道，然后在顶部附近切换到一个LQR平衡控制器。

3.6.3 阿克罗波特

杂技演员的摆动控制可以用同样的方式完成。[13]

- 泵的能量。干净而简单。没有证明。稍微修改过的版本（用 \arctan 而不是 sat ）在[19].最清晰的表述在[18].

使用拼接的PFL。 $(\ddot{q}_2 = \ddot{q}^d)_2$

$$E(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} + U(\mathbf{x}).$$

$$E_d = U(\mathbf{x}^*).$$

$$\bar{u} = \dot{q} \tilde{E}.$$

$$\ddot{q}^d = -1kq - 2\dot{q} + \dot{q}^-.$$

额外的PD条款阻碍了对同曲线轨道的渐进收敛性的证明。另一个基于能量的控制器的证明在[12].

3.6.4 讨论

这里介绍的用于摆动的能量整形控制器是非线性欠驱动控制领域的一个相当忠实的代表。通常这些控制推导需要一些巧妙的技巧来简化或取消非线性方程中的条款，然后用一些巧妙的李亚普诺夫函数来证明稳定性。在这些情况下，PFL被用来简化方程，因此也简化了控制器的设计。

我们将看到另一个很好的例子，即当我们研究轨迹优化的“二重性”时，改变非线性方程中的坐标以使问题更容易解决。这种方法也许是现在最著名的，用于四旋翼飞机的动态轨迹规划。

这些控制器很重要，有代表性，也很有意义。但是用非线性方程的巧妙技巧似乎从根本上受到限制。本书所介绍的其余大部分材料将强调更普遍的计算方法来制定和解决这些和其他控制问题。

3.7 其他模型系统

杂技机器人和车杆系统只是欠驱动控制研究中大量使用的两个模型系统。其他的例子包括。

- Pendubot
- 惯性轮摆
- 古田摆（水平旋转和垂直摆动）
- 气垫船

3.8 练习题

练习 (3.1 Cart-Pole: Linearization and Balancing)

在这个练习中，你将专门在[这个笔记本](#)上工作。你将被要求完成以下步骤。

- a. 推导[出车极系统](#)的状态空间动力学 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ 。
- b. 从(a)点开始，围绕不稳定平衡点线性化动力学。
- c. 分析状态 \mathbf{x} 和控制 \mathbf{u} 的不同值的线性化误差。
- d. 在(c)点的状态中，确定哪些状态是由LQR控制器稳定到原点的。

练习 (3.2 车杆：双摆和URDF)。

在这个练习中，你将在[这个笔记本](#)上工作。你将完成以下内容

步骤。

- a. 构建单摆的车极摆URDF结构。
- b. 通过修改机器人的URDF模型，将单摆车杆扩展到双摆车杆，测试LQR的控制能力。

参考文献

1. Richard M. Murray和John Hauser, "近似线性化的案例研究。The Acrobot Example", *Memorandum No. UCB/ERL (unknown)*, April, 1991.
2. M.W. Spong, "Underactuated Mechanical Systems", *Control Problems in Robotics and Automation*, 1997.
3. Mark Spong, "Acrobot的摆动控制问题", *IEEE控制系统杂志*, 第15,49-55页1,, 2月。1995.
4. Hassan K. Khalil, "Nonlinear Systems", Prentice Hall, December, 2001.
5. Jean-Jacques E. Slotine and Weiping Li, "Applied Nonlinear Control", Prentice Hall, October, 1990.
6. Katsuhiko Ogata, "现代控制工程", Prentice Hall Incorporated., 八月。1996.
7. Gilbert Strang, "Introduction to Linear Algebra", Wellesley-Cambridge Press, 10月。1998.
8. 陈志松, 《线性系统理论与设计》, 牛津大学出版社, 9月10, 1998.
9. Kemin Zhou and John C. Doyle, "Essentials of Robust Control", Prentice Hall. 1997.
10. Mark Spong, "Partial feedback linearization of underactuated mechanical systems", *Proceedings of the IEEE International Conference on Intelligent Robots and Systems*, vol. pp1.,314-321, September, 1994.
11. Isabelle Fantoni and Rogelio Lozano, "Non-linear Control for Underactuated Mechanical Systems", Springer-Verlag, 2002.
12. Araki and N.; Okada and M.; Konishi and Y.; Ishigaki and H., "Parameter identification and swing-up control of an Acrobot system", *International Conference on International Technology*, 2005.
13. 辛欣和M.Kaneda, "基于能量的Acrobot摆动控制的新分析结果", *第43届IEEE决策与控制会议 (CDC) 论文集*, 第页1,-70412709,月。2004.
14. Mark W. Spong, "Swing up control of the Acrobot", *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, pp.2356-2361, 1994.
15. Arun D. Mahindrakar和Ravi N. Banavar, "A swing-up of the acrobot based on a simple pendulum strategy", *International Journal of Control*, vol. no78,, pp.6,424-429, April, 2005.

16. M.D. Berkemeier和R.S. Fearing, "Tracking fast inverted trajectories of the underactuated Acrobot", *Robotics and Automation, IEEE Transactions on*, vol. no15, pp4,740-750, Aug, 1999.
17. Xu-Zhi Lai and Jin-Hua She and Simon X. Yang and Min Wu, "Stability Analysis and Control Law Design for Acrobots", *Proceedings of 2006 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, May, 2006.
18. Chung Choo Chung 和 John Hauser, "Nonlinear Control of a Swinging Pendulum", *Automatica*, vol. no31, pp6,851-862, June, 1995.
19. Mark W. Spong, "基于能量的一类欠驱动机械系统的控制", *IFAC1996 世界大会论文集*. 1996.

[上一章](#)

[目录](#)

[下一章 可访](#)

[问性](#)

© Russ Tedrake, 2021

低动能机器人技术

走路、跑步、游泳、飞行和操纵的算法

吕斯-特德雷克

© Russ Tedrake, 2021

最后修改 2021-6-13.

如何引用这些笔记，使用注释，并给予反馈。

注意：这些是用于在麻省理工学院教授的课程的工作笔记。它们将在2021年春季学期中被更新。讲座视频可在YouTube上找到。

[上一章](#)

[目录](#)

[下一章](#)

章节 4

简单的 模型 的



和运行的简单模型

实用的腿部运动是机器人学的基本问题之一；在过去的几年里，我们看到了惊人的进展，但仍有一些重大的问题没有解决。最近的进展主要是由于硬件的改进

-- 腿部机器人必须携带其所有的传感器、执行器和动力，传统上这意味着动力不足的电机，作为远非理想的力/力矩源，波士顿动力公司和其他公司在这方面取得了令人难以置信的进展。不过，在这些系统上实现的控制系统仍然比你想象的要启发式的多。它们还需要比人类电机控制系统更高的带宽和更低的延迟，并且在具有挑战性的环境中仍然表现得更差。

步行机器人的控制无疑是欠驱动的：假设我们不能拉动地面（并且排除任何空气动力学影响！），那么无论我的执行器多么强大，我们都无法以超过重力的速度将机器人的质量中心加速到地面。但是，除了我们迄今为止所研究的欠激励系统之外，行走机器人的控制还面临一个额外的复杂性：**通过接触进行控制**。当且仅当两个物体接触时，我们可以得到非零的接触力，这一事实为问题引入了根本性的离散/组合元素[†]。

接触对于机器人技术的许多方面来说都是必不可少的（操纵是我在这个指针上与人们的另一个最爱）。例如；看到这么多机器人在生活中避免接触是可能会导致他们的生活受到影响。

成本。控制接触意味着你的机器人能够对环境进行物理工作；毕竟，这不正是机器人技术的重点吗？

出于几个重要的原因，我喜欢用行走机器人开始我们对接触的讨论。正如你在本章中所看到的，有许多优雅的行走"简单模型"，它们以最小的复杂性抓住了问题的大部分本质。但还有一个更微妙的原因：我想继续使用稳定性的语言。在这一点上，我们已经看到了

我有过一些有趣的争论

很可悲的，因为这有

编写接触模型，使之平滑。

不连续，和/或
Ønite-horizon 和
inØnite-horizon 问
题

具有可忽略的碰撞事件的模型系统。但是，用一个僵硬的 "小 "来代替矢量field中的不连续，就会使人感到不舒服。

当我们可以对一个系统的行为说些什么，但平稳过渡的时候

随着时间的推移，它几乎总是比onite-time分析更干净（因为时间下降了）。步行提供了一种非常干净的方式来使用语言

并不消除决定是否需要

在研究有时接触但有时不接触的系统行为的极限情况下，我们只需要将我们的概念从平衡点的稳定性扩展到（周期）循环的稳定性。

4.1 限定周期

极限循环是一个周期性的轨道，它是动态系统的**极限集**；它们可以是稳定的（当时间进入不确定状态时，相邻轨迹的极限集）或不稳定的（当时间进入负不确定状态时，相邻轨迹的极限集）。极限周期行为的最简单的模型之一是范德波尔振荡器。让我们先来看看这个系统...

示例（4.1 范德堡振荡器）

范德波尔振荡器由一个单变量的二阶二阶方程描述。

$$\ddot{q} + \mu(q^2 - 1)\dot{q} + q = 0, \quad \mu > 0$$

我们可以把这个系统看作是一个简单的弹簧-质量-阻尼器系统，只是它有非线性阻尼。特别是，当 $|q| > 1$ 时，速度项耗散能量，而当 $|q| < 1$ 时，速度项增加能量。因此，从几乎任何初始条件看，系统都会进入稳定的振荡状态（ $q=0, \dot{q}=0$ 的状态除外），这并不令人惊讶。这在下面的相位图中可以很好地看到。

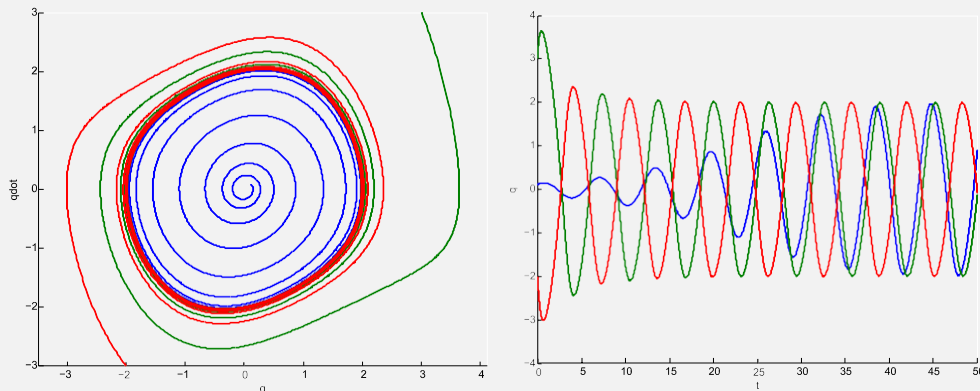


图-- $\mu=1$ 的范德波尔振荡器的4.1系统轨迹.2。左）相位图。（右）时域。

然而，如果我们在时域中检查系统的轨迹（见上面Figure的右面板），那么我们可以看到，我们传统的轨迹稳定性概念， $\lim_{t \rightarrow \infty} |\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*(t)| = 0$ ，在这里对于任何 $\mathbf{x}^*(t)$ 都不满足。虽然相位图清楚地显示，所有的轨迹都收敛到同一个轨道上，即时域图显示，这些轨迹在时间上不一定同步。

这个例子表明，轨迹（在时间上）的稳定性不是我们想要的定义。相反，我们将用以下方法来定义轨道的稳定性， $\mathbf{x}^*(t)$ 。

$$\min_{\tau} \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*(\tau)\|。$$

这里感兴趣的量是我们的轨迹与轨道上**最近的点**之间的距离。根据这个距离如何随时间演变，我们可以确定**轨道的稳定性**：对于每一个小的 $\epsilon > 0$ ，我们可以找到一个 $\delta > 0$ ，从而

即 $\min_{\tau} \|\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{x}^*(\tau)\| < \delta$ 意味着 $\forall t, \min_{\tau} \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*(\tau)\| < \epsilon$ 。的定义

渐进轨道稳定性、指数轨道稳定性、极限时间轨道稳定性，以及不稳定轨道的定义都是自然而然的。在极限循环的情况下，这个 $\mathbf{x}^*(t)$ 是一个周期解， $\mathbf{x}^*(t+t_{\text{period}})=\mathbf{x}^*(t)$ 。

当我们开始扩展我们的稳定性概念时，请允许我对[李亚普诺夫分析一章](#)中关于稳定性的讨论做一些简单的联系。有趣的是，如果我们能在状态空间中找到一个不包含任何 \emptyset ed点的不变集，那么这个集一定包含一个封闭的轨道（这就是Poincaré-Bendixson定理）[\[1\]](#)。同样有趣的是，梯度势 \emptyset elds（和具有 $\dot{V}(\mathbf{x})$ 的Lyapunov函数 \emptyset ）[3](#)不能有封闭轨道[\[1\]](#)，因此，我们也必须稍微修改迄今为止介绍的李亚普诺夫分析，以处理极限循环。我们将在[下一章](#)中详细讨论这个问题。

4.1.1 庞加莱地图

分析极限循环稳定性的第一个工具是Poincaré的方法，它对本章的例子很有帮助。'让我们考虑一个动态系统， $\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{f}(\mathbf{x})$ ， $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$ 。构建一个 $n-1$ 维的我们还要求 S 是横跨 ∞ 流的（即所有从 S 开始的轨迹都 ∞ 流过 S ，而不是平行于它）。庞加莱图（或称返回图）是一个从 S 到自身的映射。

$$\mathbf{x}_p[n+1] = \mathbf{P}(\mathbf{x}_p[n])。$$

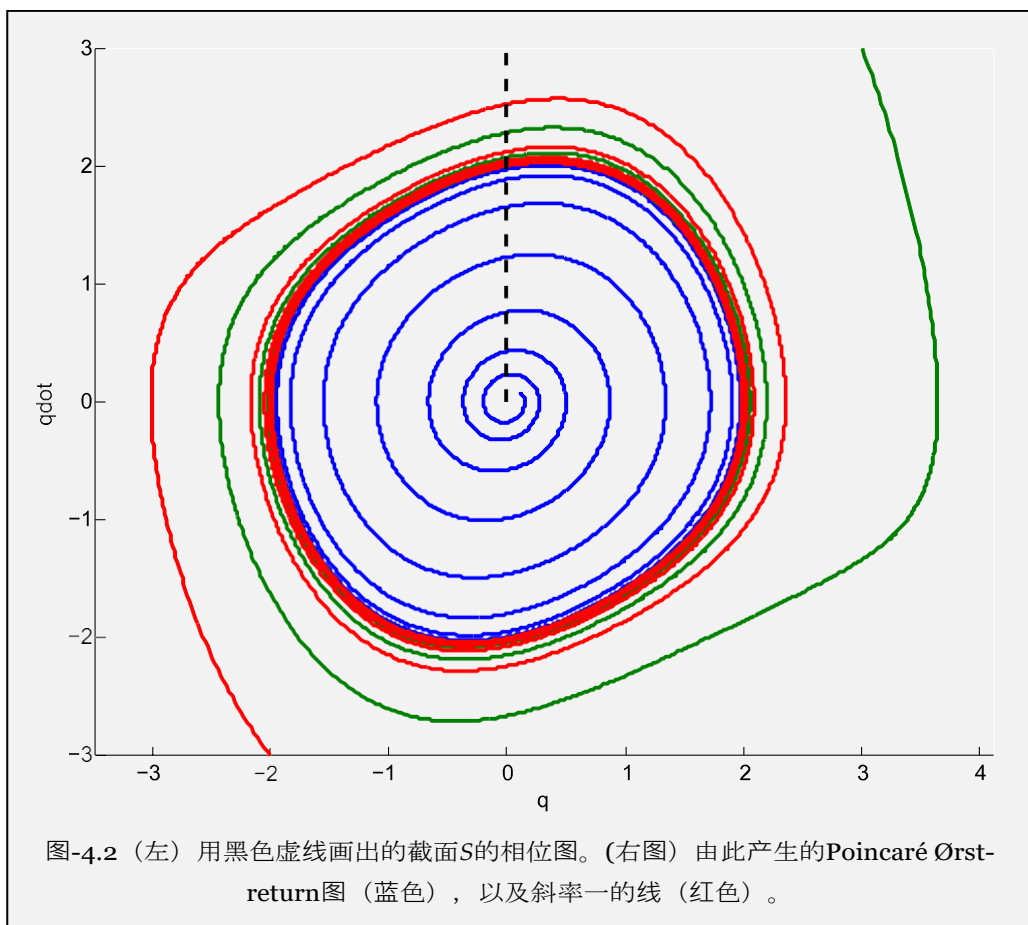
其中 $\mathbf{x}_p[n]$ 是系统在第 n 次穿越断面时的状态。注意，我们将使用符号 \mathbf{x}_p 来区分离散时间系统的状态和连续时间系统的状态；它们的关系是 $\mathbf{x}_p[n]=\mathbf{x}(t_c[n])$ ，其中 $t_c[n]$ 是 S 的第 n 次穿越的时间。

对于我们本章的目的来说，允许Poincaré地图也包括原始连续时间系统的 \emptyset xed点，并将返回时间定为零，对我们来说是有用的。这些点不满足横向条件，需要在数值上进行一些处理，但它们并不影响我们的分析。

例子（范德堡振荡器的4.2返回图）

由于该系统的状态空间是二维的，因此该系统的返回图必须有一维。例如，我们可以把 S 看作是 $q=0$ ， $\dot{q}\geq 0$ 的线段。很容易看出，所有从 S 开始的轨迹都是横跨 S 的。

一维地图，就像一维流一样，是可以进行图形分析的。



如果我们能证明 $\mathbf{P}(\mathbf{x}_p)$ 对所有 $\mathbf{x}_p \in S$ 都存在, (所有离开 S 的轨迹最终都会回到 S), 那么就会发生一些了不起的事情: 我们可以把原坐标中极限循环的稳定性分析简化为离散图上的一个 \mathbf{x}^* 点的稳定性分析。如果 \mathbf{x}^* 是地图 \mathbf{P} 的一个稳定 (或不稳定) 的 \mathbf{x}^* 点, 那么存在一个唯一的周期性轨道 $\mathbf{x}^*(t)$, 该轨道经过 \mathbf{x}^* , 即一个 (稳定的, 或不稳定的) 极限循环。如果我们能够对离开 S 的轨迹返回所需的时间作出上限规定, 那么也有可能推断出非同位素轨道或甚至指数轨道的稳定性。

在实践中, 往往很难或不可能用分析法找到 \mathbf{P} , 但可以用数值法对其进行相当合理的采样。一旦得到 \mathbf{P} 的一个固定点 (通过 $\mathbf{x}^* = \mathbf{P}(\mathbf{x}^*)$ 的解), 我们可以用一个特征值推断出局部极限循环的稳定性分析。如果这个特征分析是在原始坐标 (相对于 S 的 $n-1$ 维坐标) 下进行的, 那么至少会有一个零特征值--对应于沿极限循环的扰动, 不改变 \mathbf{x}^* return的状态。如果所有剩余的特征值 λ_i 的大小都小于1, $|\lambda_i| < 1$, 则该极限循环被认为是局部指数稳定的。

有时可以通过检查 \mathbf{P} 来推断出返回图的更多全局稳定性属性, 我们将在[后面一章](#)研究计算方法。[2] 描述了一些已知的单模态地图的较少计算的稳定性特性, 这些特性对于我们本章中研究的简单系统是很有用的。

理解一维迭代图的动态的一个特别的图形方法是 "阶梯法"。 画出Poincaré地图-- $x_p[n]$ 与 $x_p[n+1]$ 的曲线--以及斜率为1的直线。为了 "迭代 "地图, 在图上取一个初始条件作为点 $(x_p[k], x_p[k])$, 并在图上垂直移动到点 $(x_p[k], x_p[k+1] = f(x_p[k]))$ 。 现在水平移动到下一个点 $(x_p[k+1], x_p[k+1])$ 并重复。

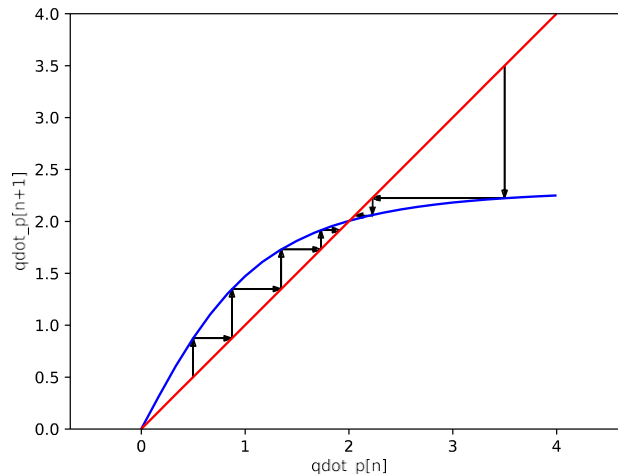


图4.3 - 范德堡振荡器返回图上的 "楼梯" 与 $\mu = 0.2$, 从两个初始条件 ($\dot{q}_p[0] = .5$ 和 $\dot{q}_p[0] = 3.5$) 开始。

我们可以快速识别出 Oxed 点, 即返回图与这条线相交的点。如果返回图在 Oxed 点的斜率的绝对值小于 1 ($|\lambda| < 1$), 我们可以推断出局部指数稳定性。上面的图说明了范德波尔极限循环的稳定性; 它也说明了原点处的 Oxed 点的 (单边) 不稳定性。从图形上理解迭代地图 (或任何离散时间系统) 上 Oxed 点的吸引区域, 需要比我们之前研究的连续时间 ∞ 流更谨慎一些。离散地图在每一步都可以跳出一个 Onite 距离, 事实上, 当 $\lambda < 0$ 时, 它将从 Oxed 点的两侧来回摆动。

4.2 步行的简单模型

腿部机器人动力学方面的许多基础工作最初是在研究 *被动-动态步行器* (通常只是 "被动步行器") 的背景下完成的。我们已经在第一章中看到了我最喜欢的被动步行器的例子, 但在这里又看到了它。

图-4.4-史蒂夫-柯林斯和安迪-鲁伊纳的三维被动动态步行器[3].

这个神奇的机器人没有马达, 也没有控制器.....它在一个小小的斜坡上行走, 完全靠重力驱动。我们可以通过一系列的步骤来建立我们对这个机器人的理解。正如我们将看到的, 引人注目的是, 尽管该系统是被动的, 但我们相信你在视频中看到的周期性步态实际上是一个稳定的极限周期

早在第一个被动步行者出现之前, 最早的步行模型之一是由麦克马洪提出的[4], 他认为人类主要使用弹道 (被动) 步态。他观察到 "站立腿" 的肌肉活动 (通过 *EMG* 记录) 相对较高, 但 "摆动腿" 的肌肉活动非常低, 除了在摆动的最开始和最后。他提出了一个 "弹道式行走" 模型--*矢状面* 的三连杆钟摆, 从脚踝到髋部的一连杆代表直的 "站立腿", 第二连杆从髋部回落到 "摆动腿" 的膝盖, 最后一连杆从膝盖回落到摆动脚--并认为这个模型可以在很大程度上再现步态的运动学。这种 "跳跃式行走" 的模型今天被认为过于简单, 因为我们现在对行走过程中站立腿的顺应性作用有了更好的理解。他的模型也只限于步态的连续部分, 而不是迈出一步的实际动态。但这是一个开始。近十年后, *McGeer*[5] 接着提出了一系列

的类似灵感的行走机器，他将其称为 "被动-动态行走器"。

4.2.1 无边际的轮子

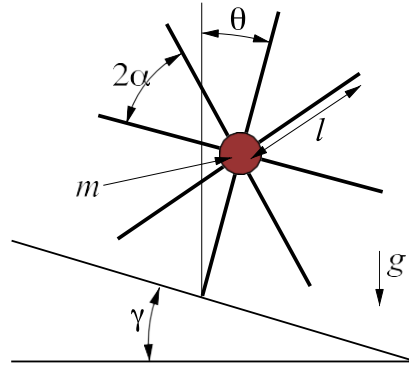


图-4.5-无边轮。姿态腿的方向， ϑ ，从垂直轴顺时针测量。

也许最简单的腿部机器人模型，由McGeer提出，作为被动-动态行走的概念框架[5]提出的被动动态行走的概念框架，是无边轮。如上图所示，这个系统有刚性的腿和髋部的点质量。为了进一步简化分析，我们做了以下的建模假设。

- 与地面的碰撞是非弹性的和冲动的（只有碰撞点周围的角动量是保守的）。
- 站立脚就像一个针状关节，不会滑动。
- 在接触时，支持的转移是瞬间的（没有双重支持阶段）。
- $0 \leq \gamma \leq \frac{\pi}{2}, 0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}, l > 0$ 。

请注意，这里使用的坐标系与简单摆的坐标系略有不同（ $\vartheta=0$ 在顶部，而 ϑ 的符号已经改变）。

对无缘轮最全面的分析是由[6]。

姿态动态

当一条腿在地上时，系统的动力学特性由以下公式给出

$$\ddot{\vartheta} = \frac{g}{l} \sin(\vartheta)。$$

如果我们假设系统是在支持力转移后直接以构型开始的（ $\vartheta(0^+) = \gamma - \alpha$ ），那么当系统有一个初始速度 $\dot{\vartheta}(0^+) > \omega_1$ 时，就会发生向前行走，其中

$$\omega_1 = \sqrt{2 \frac{g}{l} [1 - \cos(\gamma - \alpha)]}。$$

ω_1 是系统有足够动能将质量跃过站立脚并迈出一歩的阈值。这个阈值在 $\gamma = \alpha$ 时为零，在 $\gamma > \alpha$ 时不存在（因为当 $\gamma > \alpha$ 时，质量总是在站立脚的前面，站立脚点消失了）。当 $\vartheta(t) = \gamma + \alpha$ 时，下一只脚触地，此时势能转换为动能，产生的速度为

$$\dot{\vartheta}(t^-) = \sqrt{\dot{\vartheta}(t)^2(0^+) + \frac{g}{l} 4 \sin^2 \alpha \sin \gamma}。$$

t^- 表示碰撞前的时间。

脚部碰撞

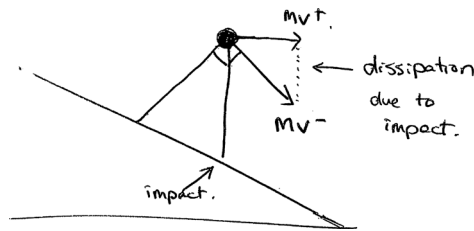


图-4.6角动量在撞击点周围是守恒的

在下一只脚与地面碰撞前的时间 t ，碰撞点周围的角动量为

$$L(t^-) = -ml^2 \dot{\vartheta}(t^-) \cos(2\alpha)。$$

碰撞后同一地点的角动量为

$$L(t^+) = -ml^2 \dot{\vartheta}(t^+)。$$

假设角动量是守恒的，这种碰撞会造成瞬间的速度损失。

$$\dot{\vartheta}(t^+) = \dot{\vartheta}(t^-) \cos(2\alpha)。$$

正向模拟

鉴于立场动力学、碰撞检测逻辑 ($\vartheta = \gamma \pm \alpha$) 和碰撞更新，我们可以对这个简单的模型进行数值模拟。这样做会发现一些显著的现象.....车轮开始滚动，但随后会发生两种情况之一：要么能量耗尽而静止，要么迅速落入一个稳定的周期解。收敛到这个稳定的周期性解决方案似乎是从一个巨大的初始条件范围内发生的。自己试试吧。

例子（4.3无边框车轮的数值模拟）

 在Colab中打开

我对笔记本进行了设置，使你可以很容易地尝试一些有趣的初始条件。甚至还做了一个交互式的小工具，让你在改变这些初始条件时观看仿真阶段的画像。试一试吧！(我建议使用Binder而不是Colab，这样你就能得到互动功能了)

无边轮模型实际上使用了DRAKE的一些更细微的功能，以便准确地模拟混合系统（正如本章中的许多例子一样）。它实际上登记了系统的碰撞事件--模拟器使用零交叉检测来确保准确获得碰撞的时间/状态，然后应用复位图。

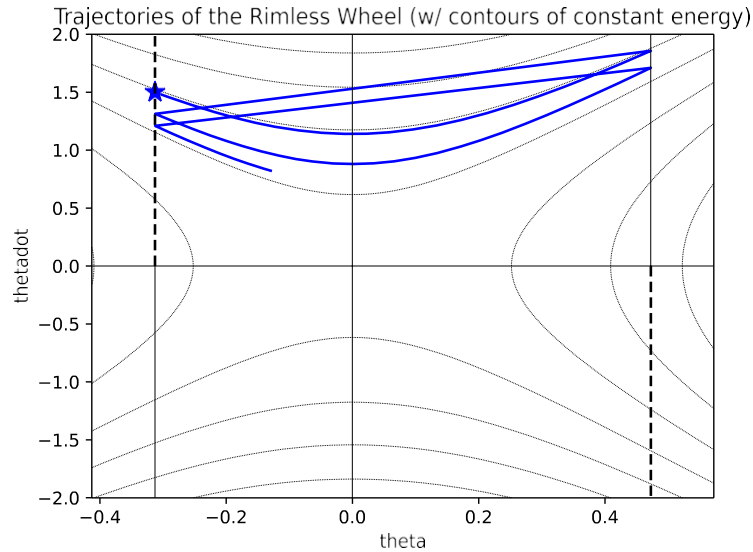


图-4.7-无边轮的相位图 ($m = 1$, $l = 1$, $g = 9.8$, $\alpha = \pi/8$, $\gamma = 0.08$)。

关于无边轮的一个奇妙之处在于，其动力学特性正是我们所思考过的无阻尼简摆。因此，你会认识到系统的相位图--它们是以单摆的不稳定Fixed点为中心的。

庞加莱地图

现在我们可以推导出每个姿态阶段开始时的角速度是前一个姿态阶段的角速度的函数。首先，我们将处理 $\gamma \leq \alpha$ 和 $\dot{\theta}_n^+ > \omega$ 的情况₁。"步进回程图"，考虑到一次碰撞的损失，得出的图是：

$$\dot{\theta}_{n+1}^+ = \cos(2\alpha) \sqrt{(\dot{\theta}_n^+)^2 + \frac{g}{4} \sin \alpha \sin \gamma}。$$

其中 $\dot{\theta}^+$ 表示冲击时能量损失刚发生后₁的速度。

对其余的情况使用同样的分析，我们就可以完成回归图。向相反方向迈出一步的阈值是

$$\omega_2 = -\sqrt{\frac{2g}{l} [1 - \cos(\alpha + \gamma)]}。$$

对于 $\omega_2 < \dot{\theta}_n^+ < \omega_1$ ，我们有

$$\dot{\theta}_{n+1}^+ = -\dot{\theta}_n^+ \cos(2\alpha)。$$

最后，对于 $\dot{\theta}_n^+ < \omega_2$ ，我们有

$$\dot{\theta}_{n+1}^+ = -\cos(2\alpha) \sqrt{(\dot{\theta}_n^+)^2 - \frac{g}{4} \sin \alpha \sin \gamma}。$$

总的来说，我们有（对 $\gamma \leq \alpha$ 而言）以下几点

$$\dot{\vartheta}_n^+ = \begin{cases} \cos(2\alpha) \sqrt{(\dot{\vartheta}_n^+)^2 + \frac{4g}{l} \sin \alpha \sin \gamma}, & \omega_1 < \dot{\vartheta}_n^+ \\ -\dot{\vartheta}_n^+ \cos(2\alpha), & \omega_2 < \dot{\vartheta}_n^+ < \omega_1 \\ -\cos(2\alpha) \sqrt{(\dot{\vartheta}_n^+)^2 - \frac{4g}{l} \sin \alpha \sin \gamma}, & \dot{\vartheta}_n^+ < \omega_2 \end{cases}$$

请注意，返回图在以下情况下是不存在的 $\dot{\vartheta}_n = \{\omega_1, \omega_2\}$ ，因为从这些的情况下，轮子将结束在（不稳定的）平衡点，其中 $\vartheta = 0$ 和 $\dot{\vartheta} = 0$ ，因此将永远不会返回地图。

这个回归图顺利地融合到了 $\gamma > \alpha$ 的情况中。在这个制度中。

$$\dot{\vartheta}_{n+1} = \begin{cases} \cos(2\alpha) \sqrt{(\dot{\vartheta}_n^+)^2 + \frac{4g}{l} \sin \alpha \sin \gamma}, & 0 \leq \dot{\vartheta}_n^+ \\ -\dot{\vartheta}_n^+ \cos(2\alpha), & \omega_2 < \dot{\vartheta}_n^+ < 0 \\ -\cos(2\alpha) \sqrt{(\dot{\vartheta}_n^+)^2 - \frac{4g}{l} \sin \alpha \sin \gamma}, & \dot{\vartheta}_n^+ \leq \omega_2 \end{cases}$$

请注意，以前在 $\{\omega_1, \omega_2\}$ 处的未定点现在是 $\omega_1 = 0$ 的良好定点转换，因为从运动学上来说，车轮在单腿上静态平衡是不可能的。

固定点和稳定性

对于一个 Fixed 点，我们要求 $\dot{\vartheta}_n^+ = \dot{\vartheta}_n^* = \omega^*$ 。我们的系统有两种可能的 Fixed 点，取决于参数。

$$\omega_{\text{站在}}^* = 0, \omega_{\text{滚}}^* = \frac{4g}{l} \cot(2\alpha) \sin \gamma$$

上面绘制的极限循环图说明了一个状态空间轨迹在只要 $\gamma < \alpha$ ， $\omega_{\text{站在}}^*$ 就是一个 Fixed 点。只要 $\omega^* > \omega_1$ ，就可以看到这些分岔，从 γ 的角度来看是很有意思的。对于小的 γ ， $\omega_{\text{站在}}^*$ 是唯一的 Fixed 点，因为从碰撞中损失的能量与地面的能量没有得到重力的补偿。当我们增加 γ 时，我们得到了一个稳定的滚动方案，其中与地面的碰撞正好平衡了重力势能向动能的转换。当我们把 γ 进一步增加到 $\gamma > \alpha$ 时，车轮的质量中心就不可能在支撑多边形内，这就使得站在一个不稳定的构型。

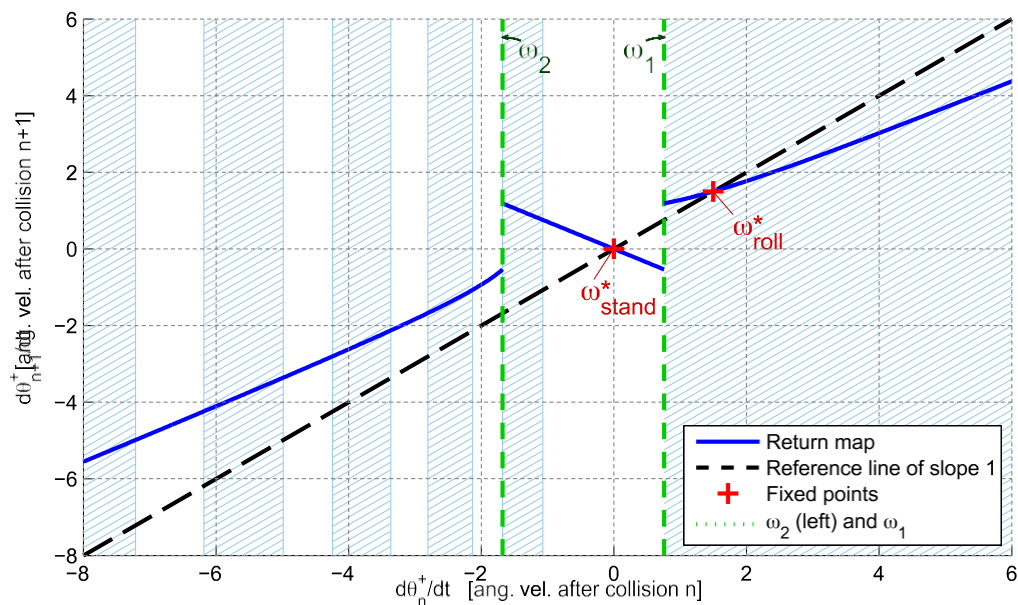


图--无边轮的4.8极限循环轨迹(
 $m = l1, = g1, = \alpha9.8, = \pi/8, \gamma = 0.15$)。所有带帽子的区域都收敛于滚动
 $\text{Fixed point, } \omega^*$ 白色区域收敛到零速度 (ω^* 站在)。

静止的稳定性

我在这一章的开篇提出了这样一个观点：对于一个行走系统来说，稳定性的自然概念是周期性的稳定性，我将坚持这一观点。但我们也可以研究一个具有接触力学的系统的Fixed点（原始坐标；这次没有Poincaré）的稳定性。对于一个有腿的机器人来说，一个Fixed点意味着站立不动。在我们的混合模型中，这实际上是有点微妙的：在无边轮中，静止是我们有无限频繁碰撞的极限情况。[详情即将公布]。

4.2.2 指南针步态

无边轮只建立了站立腿的动力学模型，并简单地假设在碰撞发生时总有一条摆动腿在位。为了消除这一假设，我们拿走了除两个辐条以外的所有辐条，并在臀部放置了一个针状关节。为了建立摆动的动力学模型，我们在每条腿上加一点质量。我已经推导出了系统的运动方程，假设我们在髋部有一个扭矩驱动器--导致摆动动力学等同于一个Acrobot（尽管是在一个不同的坐标框架中）--但让我们先检查一下系统的被动动力学First ($u = 0$)。

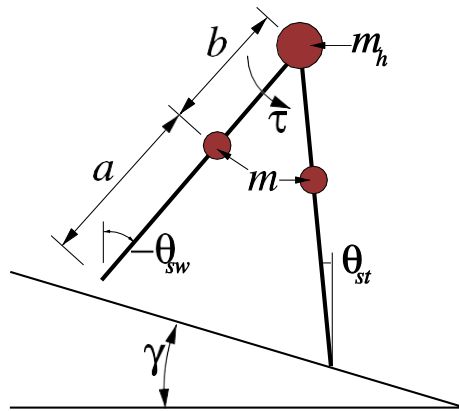


图-4.9罗盘步态

除了用于无缘轮的建模假设外，我们还假设摆动腿缩回，以清除地面而不干扰该腿的质量位置。这个模型被称为罗盘步态，在文献中使用数值方法进行了很好的研究[7, 8, 9]，但对它的分析了解相对较少。

这个机器人的状态可以用变量4来描述： ϑ_{st} 、 ϑ_{sw} 、 $\dot{\vartheta}_{st}$ 和 $\dot{\vartheta}_{sw}$ 。缩写st是站立腿的简称，sw是摆动腿的简称。使用 $\mathbf{q} = [\vartheta_{st}, \vartheta_{sw}]^T$ 和 $\mathbf{u} = \tau$ ，我们可以将动力学写为

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} = \tau(g\mathbf{q}) + \mathbf{B}\mathbf{u}。$$

与

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} (m_h + m)l^2 + ma^2 & mlb \cos(\vartheta_{st} - \vartheta_{sw}) \\ -mlb \cos(\vartheta_{st} - \vartheta) & mb^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & -mlb \sin(\vartheta_{st} - \vartheta)_{sw} \dot{\vartheta}_{sw} \\ mlb \sin(\vartheta_{st} - \vartheta)_{sw} \dot{\vartheta}_{st} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tau_g(q) = \begin{bmatrix} (ml + ma + ml)g \sin(\vartheta_{st}) \\ -mbg \sin(\vartheta_{sw}) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

和 $l = a + b$ 。

脚部碰撞是由脚部的冲动力引起的瞬间速度变化，使脚部静止。速度的更新可以用[附录中得出的](#)冲动碰撞的推导法来计算。为了使用它，我们按以下步骤进行。

- 通过在冲击前的脚趾处增加一个自由的 (x, y) 关节， $\mathbf{q}_{fb} = [x, y, \vartheta_{st}, \vartheta_{sw}]^T$ ，为系统增加一个"floating base"。
- 计算这个新系统的质量矩阵，称之为 \mathbf{M}_{fb} 。
- 将（撞击前）摆动脚趾的位置写成一个函数 $j(\mathbf{q}_{fb})$ 。解释一下这个函数的Jacobian。 $\mathbf{J} = \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{q}_{fb}}$
- 确保碰撞后 $\dot{j} = 0$ 的撞击后速度由以下公式给出

$$\dot{\mathbf{q}}^+ = [\mathbf{I} - \mathbf{M}_{fb}^{-1T} \mathbf{J} \mathbf{M}_{fb}^{-1T} \mathbf{J}^T] \dot{\mathbf{q}}^-。$$

注意到 $\dot{x}^- = \dot{y}^- = 0$ ，而你只需要读出最后两个

$\dot{\mathbf{q}}^+$ 的元素。根据定义，冲击后脚的速度将为零，而冲击前脚的新速度可以完全由最小坐标确定。

- 交换站姿和摆动腿的位置和速度。

例子 (4.4 罗盘步态的数值模拟)

你可以用以下方法模拟被动罗盘步态。

 在Colab中打开

试着玩一下初始条件。你会发现这个系统对初始条件比无边轮要敏感得多。实际上，我们花了一些功夫才找到使其稳定行走的初始条件。

这些方程的数值积分显示了一个稳定的极限循环，如下图所示。请注意，当左腿处于站立状态时（图的上半部分），其轨迹相当类似于我们熟悉的无边轮的钟摆动力学。但是这一次，当腿部撞击时，它在回到站立状态之前，要像摆动的腿一样绕一个长弧。冲击也清楚地显示为速度的不连续变化（减少）。这种极限循环对系统参数的依赖性已在[7]中进行了广泛的研究。[7].

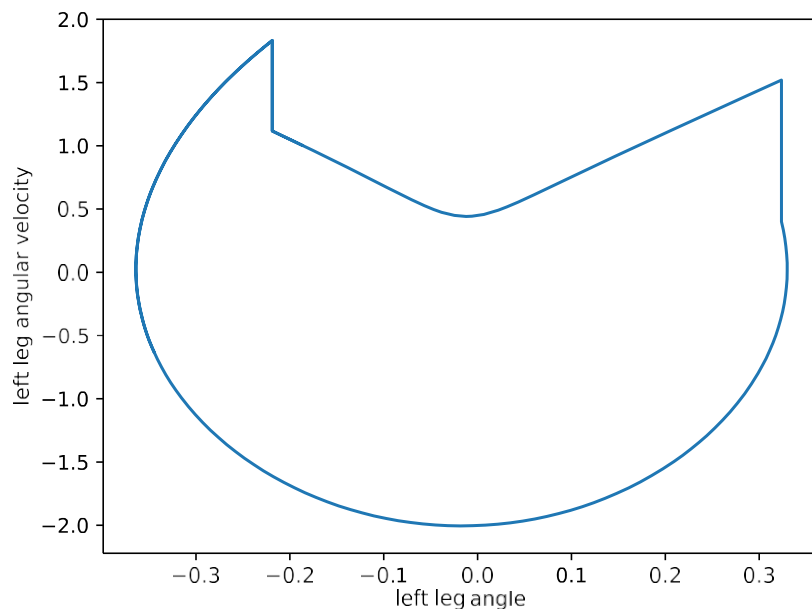


图-4.10 罗盘步态的被动极限循环轨迹。($m = 5 \text{ kg}$, $m_h = \text{kg}10$, $a = b = 0.5\text{m}$, $j = 0.0525\text{rad}$. $\mathbf{x}(0) = [0, -2.0, 0.4, 0]^T$)。图中画的是左腿角度的相位，它是在模拟中通过一些简单的记账方式从 ϑ_{st} 和 ϑ_{ste} 恢复过来的。

稳定极限循环的吸引盆地是围绕稳态轨迹的一个狭窄的状态带。尽管这个模型的简单性使它对概念性的探索具有吸引力，但这种缺乏稳定性的特点使它在物理设备上的实施变得很困难。

4.2.3 跪着的行者

为了实现更加拟人化的步态，以及获得更好的脚部间隙和在粗糙地形上行走的能力，我们希望建立一个包括膝关节的步行器模型[10]。如果我们对站立的腿使用单个链接，数学建模会更简单，但我们会继续使用每个腿的两个链接（并且每个链接都有一个点质量），因为这个机器人实际上可以被建造出来

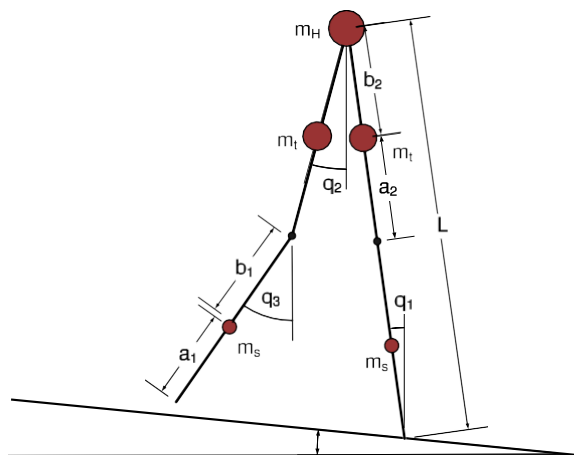


图 -4.11 膝行者

在每一步的开始，系统被建模为一个三连杆摆，就像弹道步行者一样[4, 11, 9]. 站立腿是前面的那条腿，它是钟摆的第0个环节，有两个点质量。摆动腿有两个环节，它们之间的关节在膝关节之前是不受约束的。给定适当的质量分布和初始条件，摆动腿弯曲膝盖并向前摆动。当摆动的腿伸直时（上下长度一致），发生膝击。膝击被模拟成一个离散的非弹性碰撞，保存角动量并瞬间改变速度。

在这次碰撞之后，膝盖被锁定，我们切换到具有不同质量分布的罗盘步态模型。换句话说，该系统变成了一个双环节的钟摆。同样，脚跟撞击被建模为一个非弹性碰撞。碰撞后，两腿瞬间转换。然后，在脚跟撞击后，我们又切换回弹道式步行者的三连杆摆动力学。这描述了膝行器的一个完整的步幅周期，如上图所示。

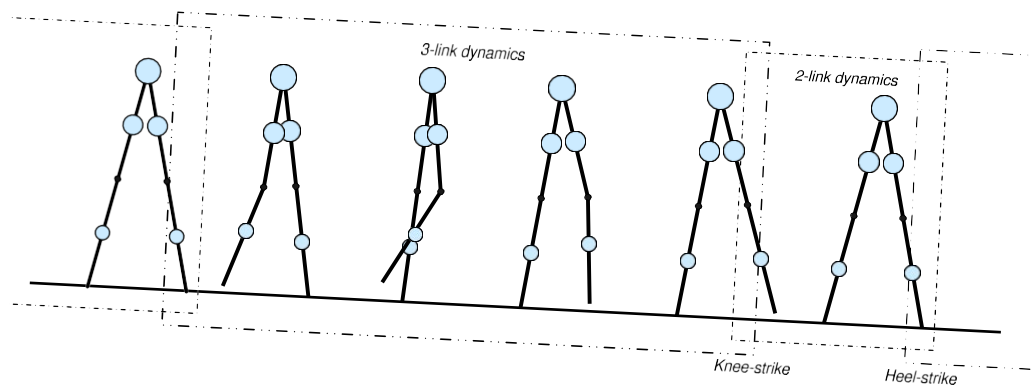


图 - 膝行器的4.12极限循环轨迹

通过在连续的三连杆和两连杆摆的动力学与两个离散的碰撞事件之间的切换，我们描述了一个完整的点进式膝行器的行走周期。在找到质量和链路长度的适当参数后，我们发现了一个稳定的步态。与罗盘步态的极限周期一样，有一个摆动阶段（顶部）和一个站立阶段（底部）。除了两个脚跟击球外，还有两个来自膝盖击球的瞬时速度变化，如图中所示。这个极限周期是顺时针方向穿越的。

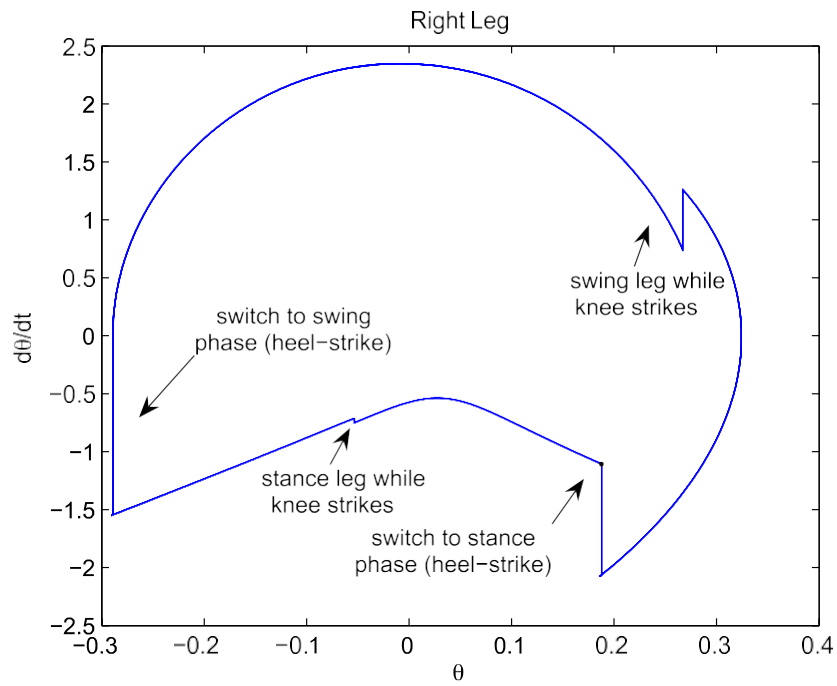


图 - 膝行器的4.13极限周期（相位图）。

4.2.4 弯曲的脚

膝部行走极限循环的吸引区域可以通过增加弯曲的脚来大大改善...

图 -4.14 Tad McGeer的膝行器。[这里是](#)Matt Haberland关于成功发射的指南。这是不简单的!

4.2.5 还有更多...

世界上已经出现了各种关于被动-动态步行者的伟大变化

主题。几乎可以肯定的是，最令人印象深刻的是荷兰艺术家西奥-扬森（Theo Jansen）的作品 -- 他喜欢说他正在创造 "新的生命形式"，他称之为Strandbeest。这些神奇的机器有很多变化 -- 包括他的海滩步行者，只靠风来驱动（我实际上已经能够参观过一次西奥的工作室；那里风很大）。

这些结果是非常真实的。罗宾-迪茨（一个特别有才华的学生，有一次在长周末感到特别有灵感）曾经用DRAKE再现了西奥最早的创作之一。

图--4.15罗宾-迪茨对斯特兰贝斯特的模拟。

4.3 简单的跑步模型

就像走路一样，我们对跑步的动力学和控制的理解是通过生物力学领域和机器人学领域之间的良好互动而发展起来的。但在跑步方面，我认为可以说是机器人学家先开始了。我认为可以这样说，它始于马克-雷伯特和腿部实验室（最初在CMU，后来搬到了MIT）在20世纪80年代初制造的一系列跳跃机器。当时，许多机器人学家都在制造相对笨拙的行走机器人，它们的移动速度非常慢（当它们设法站起来的时候！），腿部实验室制造了一系列的跳跃机器，它们以相当大的动能和相当大的 ∞ 空气将自己抛在空中。

时至今日，我仍然对令人印象深刻的跑步机器人（假设你接受跳动是跑步的第一种形式）出现在令人印象深刻的步行机器人之前感到有些惊讶。我本以为，与行走相比，跑步会是一项更有难度的控制和工程任务。但是，这些跳动的机器被证明是一种令人难以置信的聪明方式，可以建造一些简单而非常有活力的东西。

在Raibert制造出他的机器后不久，Dan Koditschek和Martin Buehler就开始用更简单的模型对其进行分析[2]。几年后，在与生物学家Bob Full的合作中，他们开始意识到，用来描述Raibert的跳板动力学的简单模型也可以用来描述从奔跑的动物身上获得的实验数据。事实上，他们描述了一系列令人难以置信的实验结果，这些动物的大小从蟑螂到马都有[12]（我认为对这一线工作最好的整体总结是[13]）。最成功的简单模型是所谓的 "弹簧加载的倒立摆"（或 "SLIP"，简称）。

4.3.1 弹簧加载的倒立摆(SLIP)

该模型是一个点状质量， m ，在一个无质量、有弹性的腿上，其静止长度为 l_0 ，弹簧常数为 k 。动力学的模型是分块的--一个动力学支配着飞行阶段，另一个支配着站立阶段。

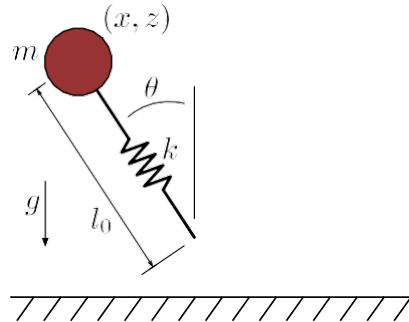


图-4.16-弹簧加载的倒立摆（SLIP）模型

在SLIP中，我们实际上在动力学的每个阶段使用不同的状态变量。在 ∞ 飞行阶段，我们使用状态变量： $\mathbf{x} = [x, z, \dot{x}, \dot{z}]^T$ 。 ∞ 飞行动态是简单的

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \\ 0 \\ -g \end{bmatrix}$$

由于腿部是无质量的，我们假设腿部可以被瞬间控制到任何位置，所以把腿部角度作为控制输入 $\vartheta=u$ 是合理的。

在"站立阶段"，我们用极坐标来写动力学，脚固定在原点上。使用状态变量： $\mathbf{x} = [r, \vartheta, \dot{r}, \dot{\vartheta}]^T$ ，质量的位置由以下公式给出

$$\mathbf{x}_m = \begin{bmatrix} r \sin \vartheta \\ r \cos \vartheta \end{bmatrix}$$

总能量由（质量的）动能和来自重力和腿部弹簧的势能给出。

$$T = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2) \quad U = mgr \cos \vartheta + \frac{k}{2} (r_0 - r)^2$$

将这些插入拉格朗日，就可以得到姿态动力学的结果。

$$\begin{aligned} m\ddot{r} - mr\dot{\vartheta}^2 + mg \cos \vartheta - k(r_0 - r) &= 0, \\ mr\ddot{\vartheta} + 2m\dot{r}\dot{\vartheta} - mgr \sin \vartheta &= 0. \end{aligned}$$

我们假设站立阶段完全是弹道式的；在这个阶段没有控制输入。

与无边轮模型不同，带有无质量脚趾的弹簧腿的理想化意味着在与地面的碰撞中没有能量损失。碰撞事件导致过渡到一个不同的状态空间，以及一个不同的动力学模型，但速度没有瞬间变化。从"飞行"到"站立"的过渡发生在当 $z - l_0 \cos \vartheta \leq 0$ 时，从站立到 ∞ 飞行的过渡发生在站立腿达到其静止长度时： $r \geq l_0$ 。

例子 (4.5 SLIP模型的模拟)

你可以用以下方法模拟弹簧式倒立摆的情况。



在Colab中打开

花点时间来阅读定义`SpringLoadedInvertedPendulum`系统的代码。你可以看到，我们仔细地注册了混合防护（见证函数）和复位图，这告诉数值积分器使用过零事件检测来精确隔离事件发生的时间，并在此事件中应用复位更新。这是相当优雅的，我们花了一些时间来确保DRAKE中的数值积分程序能够支持它。

我们用同样的见证函数和复位来模拟行走模型，但那些是用C++实现的。这是一个纯粹的Python实现，使其更容易看到这些细节。

关于顶点到顶点地图的分析

无边轮只有两个状态变量（ θ ，和 $\dot{\theta}$ ），由于截面的表面下降了一个变量，我们最终得到了一个一维的Poincare图。我们在这里有更多的状态变量。图形分析还有希望吗？

对于这个系统，如果我们把Poincare段定义为在跳跃的顶点（当 $\dot{z}=0$ ），并分析从顶点到顶点的动力学，仍然可以取得进展。我们将忽略绝对水平位置 x 和腿部角度 θ ，因为它们与 ∞ 飞行动力学无关。这就使我们在顶点仍有两个状态变量：水平速度 \dot{x} 和跳跃高度 z 。

重要的是，在顶点，这两个变量是联系在一起的 -- 当你知道一个，你就知道另一个。这是因为没有任何能量从系统中被添加或移除。如果你知道系统中的（恒定）总能量，并且你知道顶点的高度，那么你就知道水平速度（直到一个符号）。

$$E_{\text{顶部}}(z, \dot{x}) = \frac{1}{2} \dot{x}^2 + mgz = E_0$$

为了使我们的分析不太依赖于我们对参数的具体选择，我们通常报告的任何分析都使用无量纲总能量， $\tilde{E} = \frac{E}{E_0}$ ， \tilde{z} 和一个无量纲弹簧常数， $\tilde{k} = \frac{k l_0}{mg}$ [14].

姆格₀

kg

将所有这些放在一起，我们可以在给定系统的已知总能量的情况下，对顶点到顶点的返回图进行数值评估。

例4.6（数值SLIP顶点到顶点图）。

利用零交叉事件检测，对从顶点到顶点的运动方程进行数值积分，可以得到顶点到顶点的地图。

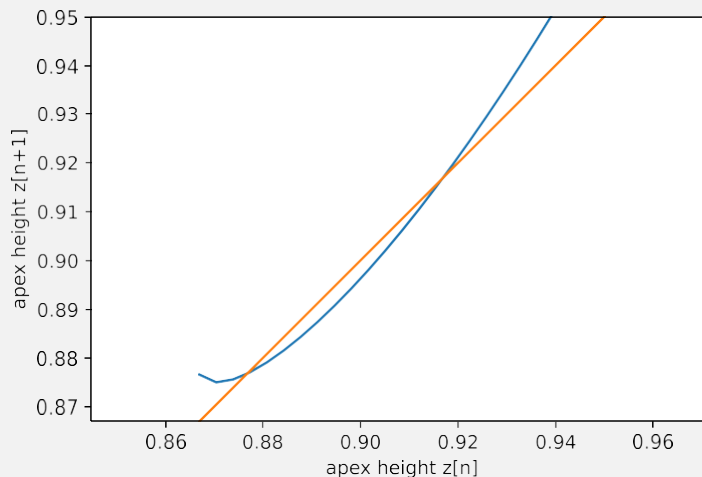


图 -4.17 SLIP模型的Apex-apex回报图，给定 $\tilde{\omega} = 10.7$ ， $\tilde{\omega} = 1.61 \cdot k$ E 和一个Fixed触地角 $\vartheta = \text{deg}30$ （参数在[14]）。

使用我们的图形阶梯分析（对于离散时间系统），我们可以看到这个地图有两个Fixed点：一个是围绕米0.87的"稳定"Fixed点，另一个是围绕米0.92的不稳定Fixed点。

像往常一样，你应该自己运行这段代码以确保你能理解。



在Colab中打开

我还建议在这个图上的不同点使用初始条件进行模拟。你应该问：为什么该图在稳定的顶点小于 $l_0 \cos \vartheta$ （触地时的高度），此外，当 z 太大（相对于 z_0 ），那么系统将没有足够的水平能量来通过站立阶段的过渡，继续向前运动：质量中心将压缩弹簧，然后向后落下，朝着它来时的方向。

系统的总能量守恒对于我们的回程图分析是相当方便的，但它应该让你暂停一下。无边轮实际上是依靠与地面碰撞所产生的耗散来获得其稳定性。一个能量守恒的系统有可能是稳定的吗？上面可视化的顶点到顶点的回归图揭示了"稳定的"Fixed-point，但你必须明白，从 (z, \dot{x}) 到仅仅是 z 的投影是使用能量守恒的假设。因此，我们对一维Poincare图的分析只能说明部分稳定性（即s.L.、渐进性或指数性）；我们的分析并不能说明对改变系统总能量的干扰的稳定性。

尽管有这个限制，但相当有趣的是，这样一个简单的系统从各种初始条件收敛到特定的跳跃高度。这些"片状-希尔顿"系统（希尔顿系统是因为它们保存总能量）能够表现出这种部分稳定性的观察，引起了理论物理学界相当大的兴趣。你可以在阅读[13]时感受到这种热情。[13].

[14]也给出了对这个顶点到顶点地图的更透彻的分析，包括基于立场动力学的线性（小角度）近似的返回地图动力学的封闭形式。

SLIP扩展

最初的SLIP模型，也许是受到了跳跃机器人的启发，在描述各种动物的垂直质心动力学方面相当有效[13]。值得注意的是，实验表明，从0.001公斤的蟑螂到135公斤的马，各种动物的无量纲单腿硬度都非常接近10[15]。但是SLIP模型以及对它的适度扩展，也被用来理解蟑螂的横向稳定性，产生了一些我最喜欢的实验视频[16]。

滑动控制

4.3.2 麻省理工学院腿部实验室的跳跃式机器人

Planar Monopod Hopper

一个由三部分组成的控制策略：对跳跃高度、身体姿态和前进速度的控制解耦[17]。

四条腿奔跑，仿佛它们是一个整体

两足动物，四足动物，和背部 ∞ ips...[18]

4.3.3 争取实现类似人类的跑步

4.4 一个能走能跑的简单模型

4.5 练习题

练习（4.1一维跳板）

在这个练习中，我们实现了[1]中提出的一个一维版本的控制器。[19]。目标是通过产生一个稳定的共振振荡，使系统在给定的高度上跳离地面，从而控制料斗的垂直运动。我们通过对跳动周期进行仔细的能量分析来实现这一目标：所有的细节都在这个笔记本中。除了了解在

在[笔记本上](#)详细介绍了跳动系统的动力学，要求你写两段代码。

- a. 一个函数，给定料斗的状态，返回其总机械能。
- b. 跳跃控制器类。这是一个DRAKE VectorSystem，在每个采样时间，读取料斗的状态，并返回料斗弹簧的预紧力，以使系统在所需的高度上跳跃。[笔记本中](#)给出了合成该控制器的所有必要信息。

参考文献

1. Steven H. Strogatz, "Nonlinear Dynamics and Chaos:在物理学、生物学、化学和工程学中的应用", Perseus Books。 1994.
2. Daniel E. Koditschek和Martin Buehler, "Analysis of a Simplified Hopping Robot", *International Journal of Robotics Research*, vol. no10,. pp6,.587-605, December, 1991.
3. Steven H. Collins 和 Martijn Wisse 和 Andy Ruina, "A Three-Dimensional Passive-Dynamic Walking Robot with Two Legs and Knees", *International Journal of Robotics Research*, vol. no20,. pp7,.607-615, July, 2001.
4. Simon Mochon和Thomas A. McMahon, "弹道行走。An improved model", *Mathematical Biosciences*, vol. no52,.3-4, pp. 241-260, December, 1980.
5. Tad McGeer, "被动动态行走", *国际机器人研究杂志*, 第9,62-82页2,. 4月。 1990.
6. Michael J. Coleman, "人类步态的三维被动动态模型的稳定性研究", 康奈尔大学的博士论文。 1998.
7. Ambarish Goswami 和 Benoit Thuilot 和 Bernard Espiau, "Compass-Like Biped Robot Part {I}: Stability and Bifurcation of Passive Gaits", Tech.报告 , RR-2996, 10月。 1996.
8. A.Goswami, "Postural stability of biped robots and the foot rotation indicator ({FRI}) point", *International Journal of Robotics Research*, Vol. 18, no. 6,1999.
9. Mark W. Spong 和 Gagandeep Bhatia, "Further Results on Control of the Compass Gait Biped", *Proc. IEEE International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*, pp.1933-1938, 2003.
10. Vanessa Hsu, "用膝盖进行被动动态行走。A Point-foot model", , February, [2007.[链接](#)]
11. Simon Mochon和Thomas A. McMahon, "弹道行走", 《生物力学杂志》, 第49-57页13,. 1980.
12. R.J. Full 和 D.E. Koditschek, "Templates and anchors: neuromechanical hypotheses of legged locomotion on land", *Journal of Experimental Biology*, vol. no202,. pp23,.3325-3332, 1999.
13. Philip Holmes and Robert J. Full and Dan Koditschek and John Guckenheimer, "The Dynamics of Legged Locomotion:模型、分析和挑战", *工业与应用数学学会 (SIAM)* 。

评论》，第48,207-304页2。 2006.

14. Hartmut Geyer, "基于顺应性肢体行为的腿部运动的简单模型", 耶拿大学的博士论文。 2005.
15. Daniel E Koditschek and Robert J Full and Martin Buehler, "Mechanical aspects of legged locomotion control", *Arthropod structure & development*, vol. no33, pp3, 2004.
16. DL Jindrich和RJ Full, "Dynamic stabilization of rapid hexapedal locomotion", *J Exp Biol*, vol. no205, Pt18, 2803-23, Sep, 2002.
17. Marc H. Raibert, "Legged Robots That Balance", The MIT Press , 1986.
18. Raibert and M. H. and Chepponis and M. and Brown and H. B., "Running on four legs as though they were one", *IEEE Journal of Robotics and Automation*, vol. no2, pp2, 70-82, 1986.
19. Marc H. Raibert, "腿部系统的跳动。二维单腿案例的建模和仿真", *IEEE Trans.系统、人和控制论*，第451-463页14。 1984.

[上一章](#)

[目录](#)

[下一章 可访](#)

[问性](#)

© Russ Tedrake, 2021

低动能机器人技术

走路、跑步、游泳、飞行和操纵的算法

吕斯-特德雷克

© Russ Tedrake, 2021

最后修改 2021-6-13.

如何引用这些笔记，使用注释，并给予反馈。

注意：这些是用于在麻省理工学院教授的课程的工作笔记。它们将在2021年春季学期中被更新。讲座视频可在YouTube上找到。

[上一章](#)

[目录](#)

[下一章](#)

章节 5

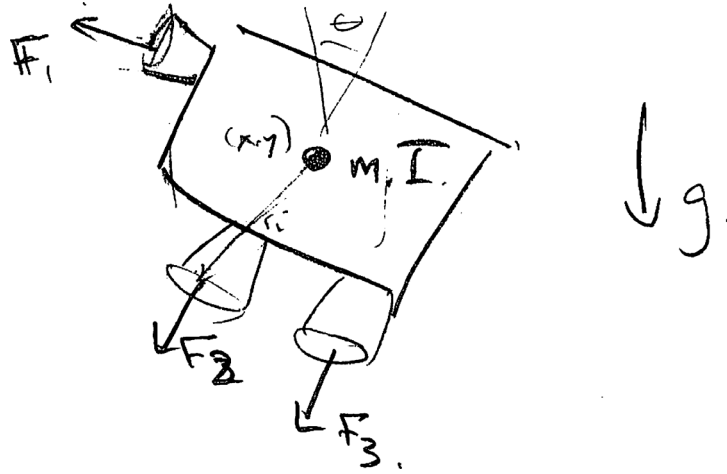
高度仿真的腿部机器人

上一章中描述的被动动态步行器和跳跃机器人捕捉到了腿部运动的基本动态，这些动态从根本上说是非线性的，并且由于与环境的接触和断裂而被冲动事件所打断。但是，如果你开始阅读关于仿人机器人或四足动物等多足机器人的文献，那么你会发现一套完全不同的想法占据了中心位置：像“零矩点”和脚步规划这样的想法。本章的目的就是要深入了解这个世界。

我想用一个模型开始讨论，这个模型可能看起来离腿部机器人的世界很远，但我认为这是一个非常有用的思考问题的方法。

5.1 质量中心动态

5.1.1 一个气垫船模型



想象一下，你有一个在重力场中的单一刚体模型的 ∞ 飞行器，并附有一定数量的力“推进器”。我们将通过其方向 θ 和质心位置 (x, z) 来描述飞行器的配置。从质心到推进器 i 的矢量由 r_i 给出，产生运动方程。

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= \sum_i F_{i,x} \\ m\ddot{z} &= \sum_i F_{i,z} - mg \\ I\ddot{\theta} &= \sum_i [r_i \times F_i]_y \end{aligned}$$

其中我用 $F_{i,x}$ 代表X方向的力的分量，并在最后一行只取交叉积的Y轴分量。

我们的目标是将气垫船移动到一个理想的位置/方向，并使其保持在那里。如果我们把输入看作是 F_i ，那么动力学就是 $\mathbf{a} = \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{c}$ （线性加上一个常数项）。因此，我们可以通过改变坐标和LQR来稳定一个可稳定的 \mathbf{x}_d 点，甚至可以通过时间变化的LQR来规划/跟踪一个期望的轨迹。如果我增加额外的线性约束，例如约束 $F_{min} \leq F_i \leq F_{max}$ ，那么我仍然可以使用线性模型预测控制（MPC）来计划和稳定一个期望的运动。从大多数方面来看，这是一个相对容易的控制

问题。（请注意，如果我的控制输入或输入约束取决于方向， θ ，这将是相当困难的，但我们在这里还不需要这样）。

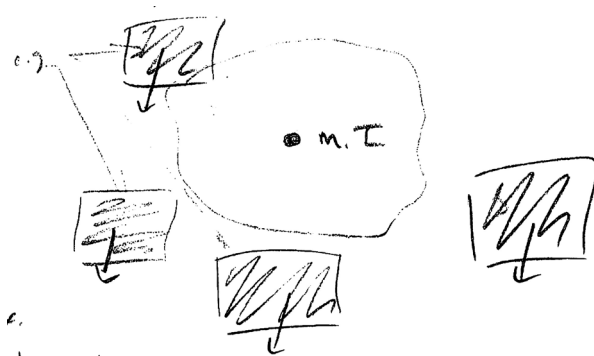
现在想象一下，你只有少量的推进器（比方说两个），每个推进器都有严格的输入限制。为了使事情更有趣，我们假设你被允许移动推进器，所以 r_i 成为一个额外的控制输入，但有一些重要的限制：当推进器移动时，你必须将其转为 $\mathbf{a} = \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{c}$ （例如 $|F_i| |r_i| = 0$ ），而且你移动推进器的速度也有限制

|这个问题现在变得更加棘手了，特别是由于 u_{12} 的约束形式 $\mathbf{0}$ 是非凸的。



我认为这是一个非常有用的思考练习；以某种方式，我们的控制器需要有效地做出离散的决定，打开一个推进器并移动它。最佳控制的框架应该支持这一点--你正在牺牲短期的控制权，以换取推进器在你希望的位置上的长期利益，但是我们还没有开发出能够很好地处理这种离散和连续决策的工具。我们需要在这里解决这个问题。

不幸的是，尽管这个问题已经是difficult了，但我们还需要继续增加约束。现在，让我们另外说一下，推进器只能在特定的位置打开，就像这里的漫画一样。



这些区域的联合不需要形成一个凸集。此外，这些位置可以在机器人框架中指定，但也可以在世界框架中指定，我称之为 \mathbf{p}_i 。

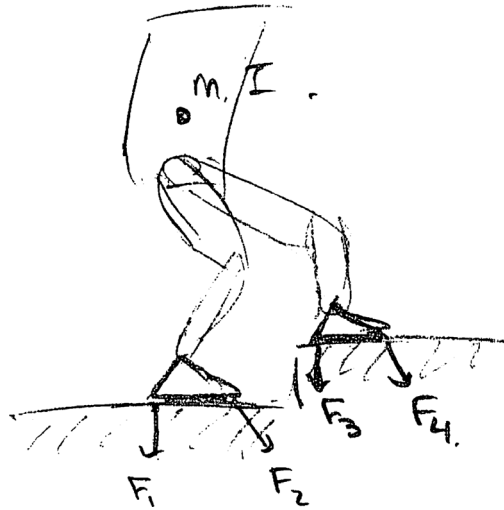
$$\mathbf{p}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_i \\ 0 \\ z \end{pmatrix}.$$

这个问题仍然感觉应该是可以解决的，但它肯定会越来越难。

5.1.2 有（无质量）腿的机器人

在我看来，上述气垫船问题是行走问题的核心组成部分。如果我们考虑一个具有无质量腿的行走机器人，那么脚就完全是可移动的推进器。如上所述，它们是高度受限的--它们只能在接触地面时产生力，而且（通常）它们只能在某些方向上产生力，例如"摩擦锥"所描述的那样（你可以在地面上推，但不能在地面上拉，而且在库仑摩擦下，力

对地面的切向力必须小于对地面的法向力，正如摩擦系数所描述的那样，例如 $|F_{\parallel}| < \mu|F_{\perp}|$ ）。



对你能把脚/推进器放在哪里的限制将取决于你的腿的运动学，而你能移动它们的速度将取决于腿的全部动力学--这些都是要处理的困难限制。但是，刚体的实际动力学原理实际上仍然是简单的，而且仍然是简单的！

5.1.3 捕捉机器人的全部动态

我们实际上并不需要有无质量的腿，这样的讨论才有意义。如果我们用坐标 x 、 z 来描述整个机器人的质心（CoM）的位置，用 m 来表示机器人的全部质量，那么前两个方程就不会改变。质量中心是一个取决于配置的点，没有方向性，但方向动力学的一个重要概括是由中心动量矩阵 $A(q)$ 给出的，其中 $A(q)\dot{q}$ 捕捉到机器人围绕质量中心的线性和角动量 [1]。请注意，质心动力学仍然是简单的--即使对于一个大型复杂的人形物体来说--但中心动量动力学是非线性的。

5.1.4 影响动态

在上一章中，我们对撞击的动力学问题给予了相对较多的关注，例如，在一个混合动力系统中，其特点是有一个重新设置动力学的防护装置。在这些模型中，我们使用了冲动的地面反应力（这些力是瞬时不确定的，但做的是不确定的功），以解释避免与地面穿透所需的速度的不连续变化。这个故事可以自然地扩展到质量中心的动力学。

不过，对于关节型机器人来说，有许多可能的腿部策略会影响质心的动力学。例如，如果机器人用像无边轮那样的硬腿撞击地面，那么关于碰撞点的角动量将保持不变，但任何进入地面的动量都将损失。然而，如果机器人有一个弹簧腿和一个无质量的脚趾，如SLIP模型，那么就不需要损失能量。

许多高度关节化的腿部机器人使用的一个策略是将其质量中心保持在一个恒定的高度。

$$z = c \Rightarrow \dot{z} = \ddot{z} = 0。$$

并使其围绕质心的角动量最小化（这里 $\dot{\theta}=0$ ）。使用这种策略，如果摆动的脚大致落在质心以下，那么即使腿部僵硬，也不会在碰撞中耗散能量--所有的动量都是

保守。这往往（但并不总是）证明忽略系统质心动力学中的影响是合理的。

5.2 平地的特殊情况

虽然不是唯一重要的情况，但我们的机器人在 ∞ 平坦或接近 ∞ 平坦的地形上行走是极为常见的。在这种情况下，即使机器人在许多地方接触地面（例如，两个脚跟和两个脚趾），对质心动力学的约束也可以非常精简地总结出来。

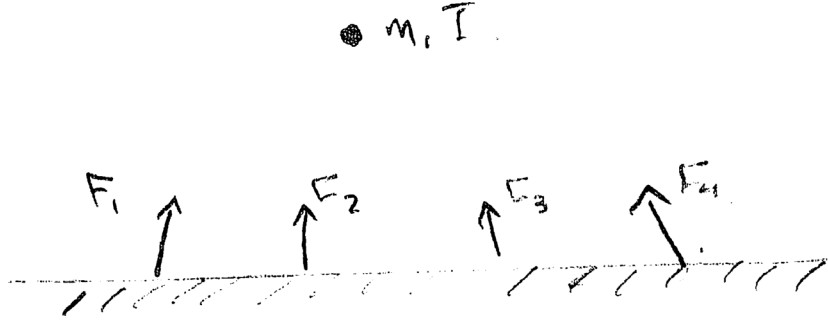


图-5.3-作用在机器人上的外力。

首先，在 ∞ 平坦的地形上， $F_{i,z}$ 代表在接触点 i 处对表面的法向力。如果我们假设机器人只能在地面上推（而不是拉），那么这意味着

$$\forall i, F_{i,z} \geq 0 \Rightarrow \sum_i F_{i,z} \geq 0 \Rightarrow \ddot{z} \geq -g。$$

换句话说，如果我不能拉住地面，那么我的质心就不能以超过重力的速度向地面加速。

此外，如果我们使用地面摩擦的库仑模型，摩擦系数为 μ ，那么

$$\forall i, |F_{i,x}| \leq \mu F_{i,z} \Rightarrow \sum_i |F_{i,x}| \leq \mu \sum_i F_{i,z} \Rightarrow |\ddot{x}| \leq \mu(\ddot{z} + g)。$$

例如，如果我保持我的质心在一个恒定的高度，那么 $\ddot{z} = 0$ 和 $|\ddot{x}| \leq \mu g$ 这是个很好的提醒，如果你想在这个世界上活动，摩擦力是多么重要。

甚至更好的是，让我们把"压力中心"（CoP）定义为地面上的一点，即

$$x_{cop} = \frac{\sum_i p_{i,x} F_{i,z}}{\sum_{i,z} F_{i,z}},$$

而由于所有的 $p_{i,z}$ 在 ∞ 平坦的地形上都是相等的，所以 z_{cop} 只是地形的高度。事实证明，压力中心是一个"零矩点"（ZMP）--我们将在下面证明这一特性--而力矩平衡方程在CoP的位置和CoM的动态之间给了我们一个非常重要的关系。

$$(\ddot{x} + g)(x_{cop} - x) = (z_{cop} - z)\ddot{x} - I\ddot{\theta}。$$

如果我们使用上面提出的忽略碰撞动力学的策略， $\ddot{z} = \ddot{\theta} = 0$ ，那么我们有 $z - z_{cop}$ 是一个常数高度 h ，结果是著名的"ZMP方程"。

$$\ddot{x} = -\frac{g}{h}(x_{cop} - x)。$$

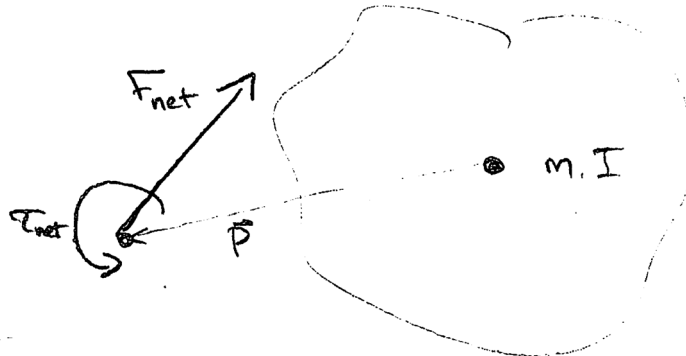
因此，压力中心的位置完全决定了质量中心的加速度，反之亦然！更重要的是，这种关系是一种**Eine**--一种我们可以通过多种方式加以利用的属性。

作为一个例子，我们可以很容易地将对CoP的约束与对 \ddot{x} 的约束联系起来。从定义中很容易验证，CoP必须生活在地面接触点的**凸壳**内。因此，如果我们使用 $\ddot{z} = \ddot{\vartheta} =$ 策略0，那么这直接意味着对给定地面接触点位置的质心的可能加速度的严格限制。

5.2.1 一个旁证：零矩点的推导

在目前关于腿部机器人的文献中，零矩点（ZMP）的讨论非常频繁。它也有一个不幸的趋势，那就是被一些混乱所包围；许多人对ZMP的定义略有不同（见例如：[\[2\]](#)的摘要）。因此，在这里提供一个简单的推导是有意义的。

首先让我们回顾一下，对于刚体系统，我总是可以把许多外力的贡献概括为物体上的一个**扳手**（力和扭矩）--这只是因为 F_i 项线性地进入我们的运动方程。具体来说，给定空间中的任何一点， r ，相对于 (x, z) 的坐标。



我可以将运动方程改写为

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= \sum_i F_{i,x} = F_{net,x} \\ m\ddot{z} &= \sum_i F_{i,z} - mg = F_{net,z} - mg \\ I\ddot{\vartheta} &= \sum_i [r_i \times F_i]_y = (\mathbf{r} \times \mathbf{F}_{net})_y + \tau_{net} \end{aligned}$$

其中 $\mathbf{F}_{net} = \sum_i \mathbf{F}_i$ ， τ_{net} 的值取决于位置 \mathbf{r} 。对于某些 \mathbf{r} 的选择，我们可以使 $\tau_{net} = 0$ 。

$$(\mathbf{r} \times \mathbf{F}_{net})_y = r_z F_{net,x} - r_x F_{net,z} = [\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i]_y$$

我们可以看到，当 $F_{net,z} > 0$ 时，有一整条线的解决方案， $r_x = ar_z + b$ ，包括一个会截断地形的解决方案。对于行走机器人来说，正是地面上的这一点，从这里开始，外部的扳手可以用一个力矢量（而没有力矩）来描述，这就是著名的“零力矩点”（ZMP）。代入后面的内容来代替 F_{net} ，我们可以看到

$$r_x = \frac{m\ddot{x} - I\ddot{\vartheta}}{m\ddot{z} + mg}$$

如果我们假设 $\ddot{z} = \ddot{\vartheta} =$ 并用0全局坐标 $\mathbf{r} = \mathbf{p} - [x, z, 0]$ 代替 \mathbf{r} 相对坐标，那么我们就准确地得到所提出的方程式。

以上。此外，由于

$$[r_i \times F_i]_y = \sum_i (r_{i,z} F_{i,x} - r_{i,x} F_{i,z}) \quad \circ$$

而对于 **Wat地形**，我们有

$$r_z F_{net,x} = \sum_i r_{i,z} F_{i,x}$$

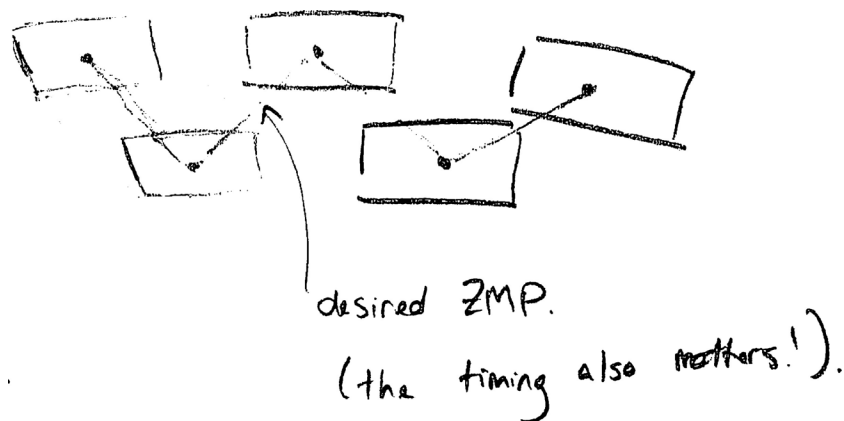
那么我们可以看到，这个ZMP正是CoP。

$$r_x = \frac{\sum_i r_{i,x} F_{i,z}}{F_{net,z}}$$

在三维空间中，我们求解地面上 $\tau_{net,y} = \tau_{net,x} = 0$ 的点，但允许 $\tau_{net,z} \neq 0$ 来提取 y 轴上的类似方程。

$$r_y = \frac{\sum_i r_{i,y} F_{i,z}}{F_{net,z} + mg}$$

5.3 ZMP规划



5.3.1 从CoM计划到整个身体的计划

5.4 全身控制

即将推出。关于我们使用Atlas的方法的描述，见[.3, 4].

5.5 脚步计划和推动恢复

即将推出。关于我们使用Atlas的方法的描述，见[.54].关于推送恢复的漂亮的几何学见解，见[6].

5.6 超越ZMP规划

即将推出。关于我们使用Atlas的方法的描述，见[.74].

示例（[5.1 LittleDog步态优化](#)）。



5.7 练习题

练习5.1（通过 混合整数优化的 脚步规划）。

在这个练习中，我们实现了[]中提出的脚步规划方法的简化版本。[5](#)。你将会[在这个笔记本中](#)找到所有的细节。你的目标是编码混合整数程序的大部分组件，它是脚步规划器的核心。

- 限制最大步长的约束条件。
- 一个脚不能同时在两个踏脚石上的约束。
- 对于机器人的每一步，将每只脚分配给一个踏脚石的约束条件。
- 使步长的平方之和最小化的目标函数。

5.8 参考文献

1. David E. Orin and Ambarish Goswami and Sung-Hee Lee, "Centroidal dynamics of a humanoid robot", *Autonomous Robots*, no.2012年9月, 第1--16页, jun. 2013.
2. A.Goswami, "Postural stability of biped robots and the foot rotation indicator ({FRI}) point", *International Journal of Robotics Research*, Vol. 18, no. 6,1999.
3. Scott Kuindersma and Frank Permenter and Russ Tedrake, "An Efficiently Solvable Quadratic Program for Stabilizing Dynamic Locomotion", *Proceedings of International Conference on Robotics and Automation*, May, [2014.[链接](#)]。
4. Scott Kuindersma and Robin Deits and Maurice Fallon and Andrés Valenzuela and Hongkai Dai and Frank Permenter and Twan Koolen and Pat Marion and Russ Tedrake, "Optimization-based Locomotion Planning, Estimation, and Control Design for the Atlas Humanoid Robot", *Autonomous Robots*, vol. no40, pp3,429-455, [2016.[link](#)]。
5. Robin Deits和Russ Tedrake, "Footstep Planning on Uneven Terrain with Mixed-Integer Convex Optimization", *2014年IEEE/RAS仿人机器人国际会议 (Humanoids 2014) 论文集*, [2014.[链接](#)]
6. Twan Koolen and Tomas de Boer and John Rebula and Ambarish Goswami and Jerry Pratt, "Capturability-based analysis and control of legged locomotion, Part 1: Theory and application to three simple gait models", *The International Journal of Robotics Research*, vol. 31, no. 9, pp.1094-1113. 2012.
7. Hongkai Dai and Andrés Valenzuela and Russ Tedrake, "Whole-body Motion Planning with Centroidal Dynamics and Full Kinematics", *IEEE-RAS*

仿人机器人国际会议, [2014.[链接](#)]。

[上一章](#)

[目录](#)

[下一章](#) [可访](#)

[问性](#)

© Russ Tedrake, 2021

低动能机器人技术

走路、跑步、游泳、飞行和操纵的算法

吕斯-特德雷克

© Russ Tedrake, 2021

最后修改 2021-6-13.

如何引用这些笔记，使用注释，并给予反馈。

注意：这些是用于在麻省理工学院教授的课程的工作笔记。它们将在2021年春季学期中被更新。讲座视频可在YouTube上找到。

[上一章](#)

[目录](#)

[下一章](#)

章节 6

模型系



统随机性

我在这一章的目标是为受到随机（噪声/扰动）输入的非线性动力系统的美丽而丰富的行为建立直觉。

到目前为止，我们主要关注的是由以下方面描述的系统

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \text{ 或 } \mathbf{x}[n+1] = f(\mathbf{x}[n], \mathbf{u}[n])。$$

在本章中，我想扩大范围，思考一下

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{w}(t)) \text{ 或 } \mathbf{x}[n+1] = f(\mathbf{x}[n], \mathbf{u}[n], \mathbf{w}[n])。$$

其中这个额外的输入 \mathbf{w} 是一些随机过程的（向量）输出。换句话说，我们可以通过简单地理解我们现有的ODEs受制于一个额外的随机输入的动态来开始思考随机系统。

$\mathbf{w}(t)$ 可以表示随时间变化的随机干扰（如阵风），甚至是恒定的模型误差/不确定性。有一件事我们还没有加入，那就是测量的不确定性。在可观测性和状态估计方面有大量的工作，研究的是如何在给定噪声传感器读数的情况下推断出系统的真实状态的问题。在本章中，我们假设对全部状态的测量是完美的，而专注于“过程噪声”塑造系统长期动态的方式。

在本章中，我也将主要坚持使用离散时间动力学，只是因为思考离散时间随机过程的输出 $\mathbf{w}[n]$ 比思考 $\mathbf{w}(t)$ 要容易。但你应该知道，所有的想法在连续时间中也是可行的。另外，我们的大多数例子都将采取加性噪声的形式。

$$\mathbf{x}[n+1] = f(\mathbf{x}[n], \mathbf{u}[n]) + \mathbf{w}[n]。$$

这是我们一般形式的一个特别有用和常见的专门化。而这种形式并没有放弃什么--步骤k

上的干扰可以通过步骤 k 上的非线性函数 f_k 给出丰富的结果--但往往更容易操作。

6.1 主方程

让我们先看看一些简单的例子。

例子(6.1 一个双稳态系统+噪声)

让我们考虑一下我最喜欢的一个一维系统的（时间反转版本）。

$$\dot{x} = x - x^3。$$

这个确定性系统在 $x^*=\{-1, 1\}$ 处有稳定的Fixed点，在 $x^*=0$ 处有一个不稳定的Fixed点。

这些动力学的一个合理的离散时间近似，现在有了加性噪声，就是

$$x[n+1] = x[n] + h (x[n] - x[n]^3 + w[n])。$$

当 $w[n]=0$ 时，该系统具有与连续时间系统相同的Fixed points和稳定性特性。但让我们来研究一下当 $w[n]$ 是零均值高斯白噪声过程的结果时的系统，其定义为：

$$\forall n, \quad E[w[n]] = 0,$$

$$E[w[i]w[j]] = \begin{cases} \sigma^2, & \text{如果 } i = j \\ 0, & \text{否则的话} \end{cases}$$

这里 σ 是高斯的标准偏差。

当你模拟这个系统的小 σ 值时，你会看到轨迹大致向两个Fixed点之一移动（对于确定性系统），但每一步都被噪声修改了。事实上，即使轨迹准确到达曾经的Fixed点，它几乎肯定会在下一步再次移动。事实上，如果我们将不同初始条件下的许多模拟运行绘制在同一张图上，我们会看到类似下面的图。

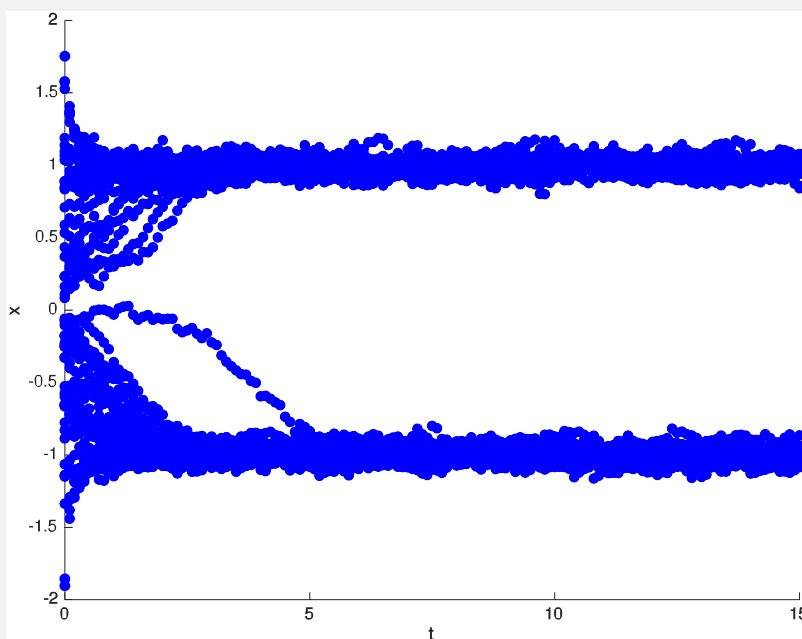


图6.1 - 从许多初始条件出发，用噪声（ $\sigma=0.01$ ）对双稳态系统进行模拟。

在任何单独的模拟过程中，状态在所有时间内随机跳跃，甚至可能从一个Oxed点附近过渡到另一个Oxed点。另一种可视化输出的方法是将粒子随时间变化的直方图做成动画。

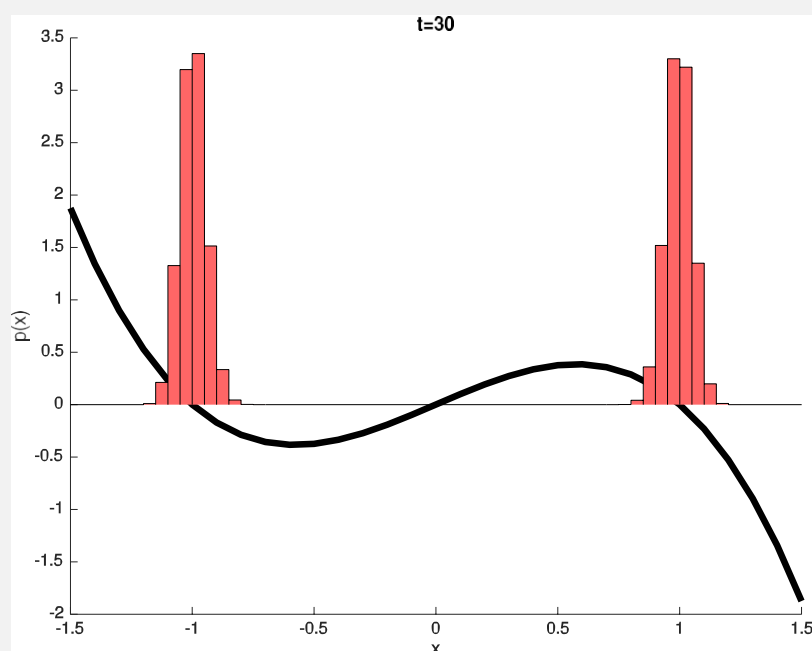


图-6.2-从随机初始条件模拟到 $t=30$ ，带有噪声（ $\sigma=0.01$ ）的双稳态系统的状态柱状图。

[点击这里查看动画](#) 你可以自己



在Colab中打开

让我们花点时间来体会一下我们刚刚观察到的东西的含义。到目前为止，每次我们分析一个系统时，我们都会问这样的问题：“给定 $x[0]$ ，系统的长期行为是什么， $\lim_{n \rightarrow \infty} x[n]$ ？”但是现在 $x[n]$ 是一个随机变量。这个系统的轨迹并不收敛，系统也没有表现出我们到目前为止所介绍的任何形式的稳定性。

一切都没有失去。如果你仔细观察这个动画，你可能会注意到这个随机变量的分布实际上是非常好的行为方式。这就是本章的关键思想。

让我们用 $p_n(x)$ 来表示随机变量的概率密度函数，注意，这个密度函数必须满足

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_n(x) dx = 1.$$

实际上，可以用简单的关系写出概率密度的动态变化

$$p_{n+1}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x|x') p_n(x') dx'.$$

其中 $p(x|x')$ 将随机动态编码为下一个状态（这里是 x ）的条件分布，作为当前状态（这里是 x' ）的一个函数。可以用这种方式编码的动态系统被称为连续状态马尔科夫过程。

而上面的治理方程通常被称为随机过程的 "主方程"。事实上，这个更新甚至是线性的（！）；这一事实可以使一些令人印象深刻的长期统计数据得到闭合式的解决，如平均故障时间或首次通过时间[1]。不幸的是，以闭合形式进行积分往往是困难的，所以我们必须经常求助于离散化或数字分析。

例子（6.2 Logistic Map）。

事实上，人们实际上并不需要随机动力学，以便使分布的动力学成为有意义的研究对象；随机的初始条件就可以了。一个最好的例子来自于也许是最简单和最著名的混沌系统的例子：**Logistic**地图。这个例子在[]中得到了很好的描述。2]。

考虑下面的二重奏方程。

$$x[n+1]=4x[n] (1-x[n]) 。$$

我们将在（不变的）区间 $x \in [0, 1]$ 上研究它。

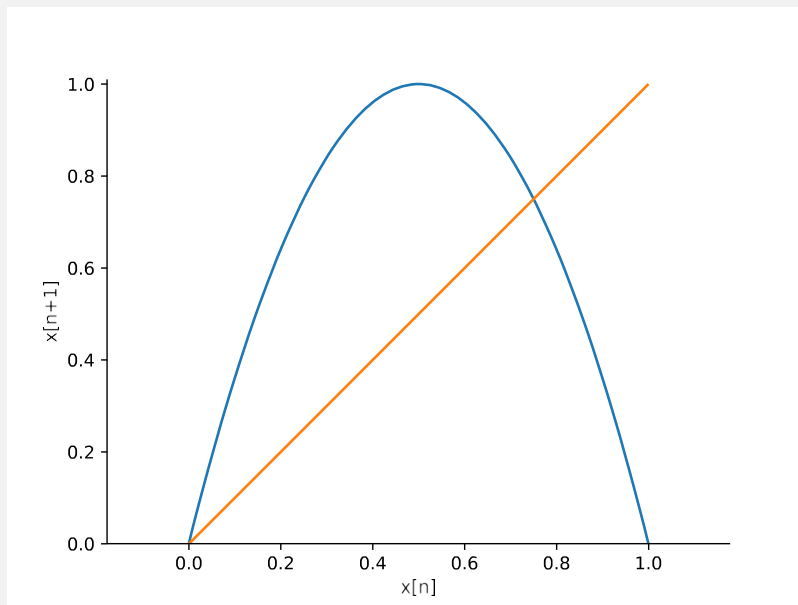


图6.3 - "逻辑图"的离散时间动态（与直线 $x[n + 1]=x[n]$ 一起绘制）。

只需用 "阶梯法"沿着曲线追踪你的眼睛，就能看到这个系统的有趣之处--从一个单一的初始条件出发的滚动最终会在整个区间（0，1）内跳动，而相邻的初始条件最终会采取任意不同的轨迹（这是"混乱"系统的标志）。

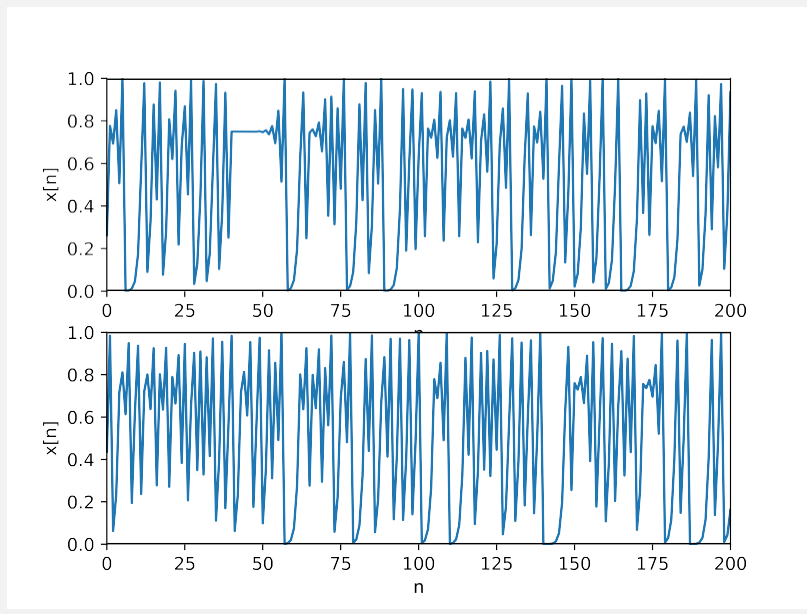


图-6.4-来自不同初始条件的逻辑图的两次模拟。
请记住，这里没有随机性 -- 动态性完全是决定性的！

这就是完全迷人的地方--尽管这个系统的任何一个初始条件的动力学都是极其复杂的，但如果我们研究通过系统的状态分布的动力学，它们就会出奇地简单和行为良好。这个系统是我们能够以封闭形式写出主方程的罕见情况之一[2]:

$$p_{n+1}(x) = \frac{1}{4\sqrt{1-x}} \left[p_n \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{1-x} \right) + p_n \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1-x} \right) \right].$$

此外，这个主方程有一个稳态解。

$$p^*(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{x(1-x)}}.$$

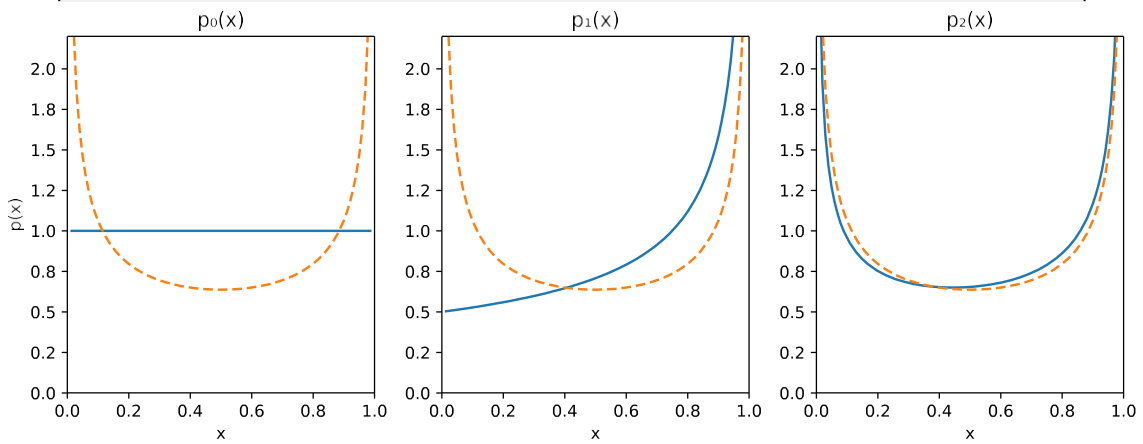


图6.5--绘制Logistic地图的主方程的（闭合形式）演化，初始化为 $p_0(x)=1$ ，显示出令人惊讶的简单性，并迅速收敛到一个静止的分布（橙色虚线）。

对于这个系统（以及许多混沌系统），单一初始条件的动态是复杂的，但初始条件分布的动态是

美丽而简单！

注意：当所研究的动态系统具有确定性的动态（但有初始条件的分布）时，由主方程给出的线性映射被称为 **Perron-Frobenius 算子**，它引起了我们在本章后面要研究的 Liouville 方程。

主控方程的稍微一般的形式，适用于具有状态域 X 的多变量分布，以及具有控制输入 u 的系统，是

$$p_{n+1}(x) = \int_X p(x|x', u) p_n(x') dx'.$$

这是一个（连续状态）马尔可夫决策过程。

连续时间的表述也是可能的--这导致了所谓的 **福克-普朗克方程**。

6.2 静态分布

在上面的例子中，柱状图是我们对概率密度的数字近似。如果你模拟几次，你可能会相信，尽管系统的各个轨迹 **没有** 收敛，但概率分布实际上 **确实** 收敛到所谓的 **静止分布**--主方程的一个 **Fixed** 点。与其思考轨迹的动态，我们需要开始思考分布的动态。

示例（6.3 线性高斯系统）。

让我们考虑具有加性噪声的一维线性系统。

$$x[n+1] = ax[n] + w[n].$$

当 $w[n]=0$ 时，系统在 $-1 < a < 1$ 的情况下是稳定的（对原点）。让我们确保我们能理解当 $w[n]$ 是标准差为 σ 的高斯白噪声时主方程的动态。

首先，回顾一下，均值为 μ 的高斯的概率密度函数由以下公式给出

$$p(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(w-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

当以 $x[n]$ 为条件时，由动力学所给出的分布受制于平均值为零的高斯白噪声只是另一个高斯，其平均值由 $ax[n]$ 给出。

$$p(x[n+1]|x[n]) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x[n+1]-ax[n])^2}{2\sigma^2}},$$

得出主方程

$$p_{n+1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-ax')^2}{2\sigma^2}} p_n(x') dx'.$$

现在，神奇的事情来了。让我们通过主方程推送一个分布， $p_n(x)$ ，它是零均值，标准差为 σ_n 。

$$p_{n+1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-x')^2}{2\sigma^2}} e^{-\frac{x'^2}{2\sigma_n^2}} dx'$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma^2 + a^2\sigma_n^2)}} e^{-\frac{x^2}{2(\sigma^2 + a^2\sigma_n^2)}}$$

结果是另一个均值为零的高斯， $\sigma_{n+1}^2 = \sigma^2 + a^2\sigma_n^2$ 。这个结果这也适用于多变量的情况，而且你可能对卡尔曼滤波器的过程更新很熟悉。

再进一步，我们可以看到，这个系统的静止分布是由一个均值为零的高斯给出的，其特征为

$$\sigma_*^2 = \frac{\sigma^2}{1 - a^2}.$$

请注意，当 $-1 < a < 1$ 时（只有当系统稳定时），这个分布是很好的定义。

线性高斯系统的静止分布揭示了任何随机动态系统的治理方程中两个条款之间的基本和一般的平衡：确定性系统的稳定性使轨迹聚集在一起（较小的 a 意味着确定性系统更快的收敛，导致更窄的分布），但系统中的噪声迫使轨迹分离（较大的 σ 意味着较大的噪声，导致更宽的分布）。

鉴于确定性非线性系统的动力学可以如此丰富，你可能可以想象，概率的可能长期动力学也是极其丰富的。如果我们简单地把我们上面研究的动力学中的符号进行 ∞ 化，我们就会得到我们的下一个例子。

例子(6.4立方体例子+噪音)

现在让我们考虑一下离散时间的近似，即

$$\dot{x} = -x + x^3.$$

又有加性噪声。

$$x[n+1] = x[n] + h(-x[n] + x[n]^3 + w[n]).$$

当 $w[n]=0$ 时，系统只有一个稳定的固定点（在原点），其确定性的吸引区域由 $x \in (-1, 1)$ 给出。如果我们再次从一组随机初始条件模拟该系统并绘制直方图，我们会看到类似下面的图。

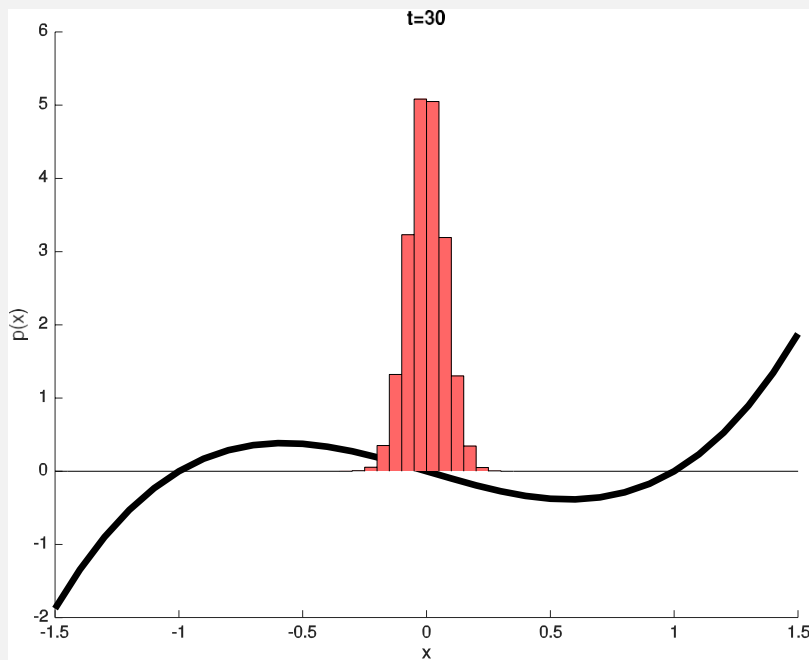


图-6.6-从随机初始条件模拟到 $t=30$ 后，带有噪声 ($\sigma=0.01$) 的双稳态系统的状态柱状图。

[点击这里查看动画](#)

请务必观看该动画。或者更好的是，通过改变双稳态例子中导数的符号并重新运行，为自己运行模拟。

你可以自己运行这个演示。

[在Colab中打开](#)

现在尝试增加噪声（例如，在动力学中预先将噪声输入 w 乘以一个标量，如2）。

[点击这里查看动画](#)

这个系统的稳态分布是什么？事实上，并没有一个。尽管我们最初在稳定的轴点周围收集概率密度，但你应该注意到一个缓慢的泄漏--在每一步都有一些过渡到不稳定的轴点的概率，并被不稳定的动力学所驱动， \mathcal{A} 走向不稳定。如果我们模拟的时间足够长，就不会有任何概率密度留在 $x=0$ 。

例子（6.5 随机的范德波尔振荡器）

还有一个例子；这是个有趣的例子。让我们想一想，我们曾经有过的一个最简单的例子，证明了极限周期稳定性的系统--范德波尔振荡器--但现在我们将添加高斯白噪声。

$$\ddot{q} + (q^{-2})\dot{q} + q = w(t).$$

问题来了：如果我们从以极限周期上的一个点为中心的一小套初始条件开始，那么这个分布的长期行为是什么？

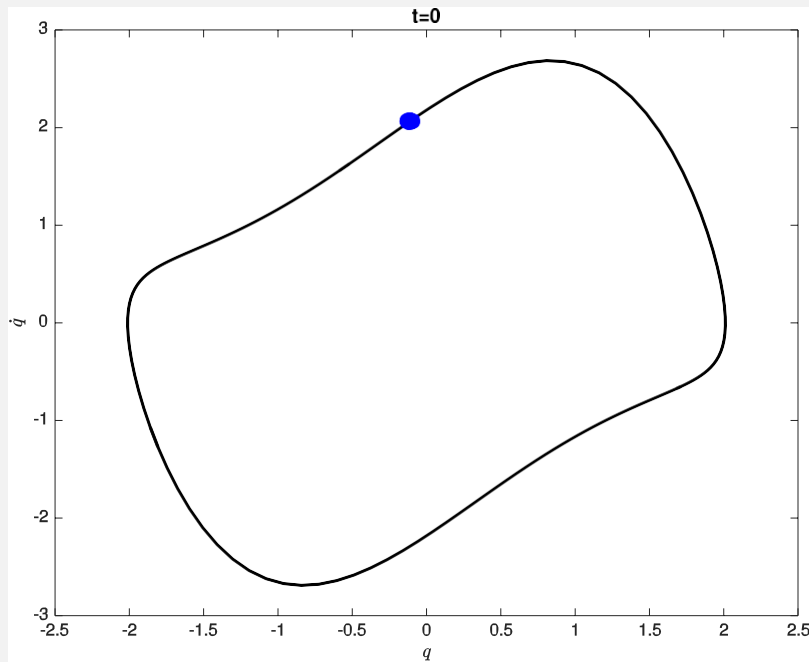


图-6.7-随机采样的初始条件与范德波尔振荡器的稳定极限周期图。

由于确定性系统的长期行为是周期性的，所以非常合乎逻辑的是，这个随机系统的状态分布也会落入一个稳定的周期性解。但是，再想一想，然后看一下这个动画（或者自己运行模拟）。

 在Colab中打开

[点击这里查看动画（第一秒20）。](#)

[点击这里查看模拟数秒2000后的粒子](#)

解释很简单：系统的周期性解只有 轨道上的稳定性；沿极限周期没有稳定性。因此，任何推动粒子沿极限周期运动的干扰都会不受控制地进行。最终，分布将沿着整个周期“混合”。也许令人惊讶的是，这个在 $w=0$ 时具有极限周期稳定性的系统最终会在主方程中达到一个静止的分布（Fixed point）。

6.3 延伸的例子：无名指轮子上的粗糙的地形

我最喜欢的例子是，在一个模型的欠驱动系统上有意义的随机性来源是 无边轮 在随机的“粗糙”地形上滚动[3]。一般来说，生成有趣的/相关的地形概率模型可能相当复杂，但无边轮使之变得简单--因为机器人只在脚点接触该地面，我们可以通过简单地将坡道角度 γ 作为一个随机变量来模拟几乎任意的粗糙地形。如果我们把分析限制在只向一个方向滚动（例如只下坡），那么我们甚至可以把这个坡道角看作是即兴的；在每一个脚步之后，我们将独立地画出一个新的斜面角度 $\gamma[n]$ 用于下一步。

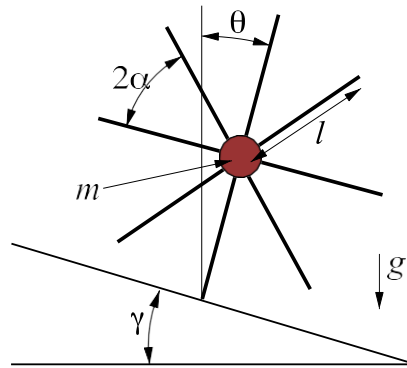


图-6.8-无边轮。姿态腿的方向， ϑ ，从垂直轴顺时针测量。

在我们最初对无缘轮的分析中，我们得出了 "碰撞后 "的返回图--将从站立阶段开始的角速度映射到下一个站立阶段的（碰撞后）角速度。但现在，地面的相对位置在每一步上都在变化，我们改写了 "顶点到顶点 "的返回图，它将角速度从一个顶点（腿垂直的时刻）映射到下一个顶点，其结果是：

$$\dot{\vartheta}[n+1] = \sqrt{\cos^2 \alpha \left(\dot{\vartheta}[n] + \frac{2g}{l} (1 - \cos(\alpha + \nu[n])) \right) - \frac{2g}{l} (1 - \cos(\alpha - \nu[n]))}.$$

更多内容即将推出。阅读论文[3] 和/或观看[视频](#)。

6.4 真实机器人/系统的噪声模型。

传感器模型。来自概率机器人学的光束模型。RGB-D落差。

感知子系统。感知系统的输出不是高斯噪声，而是漏检/漏报.....

任务/环境上的分布。

参考文献

1. Katie Byl 和 Russ Tedrake, "Metastable Walking on Stochastically Rough Terrain", *Proceedings of Robotics: 科学与系统IV*》, [2008.[链接](#)]
2. Andrzej Lasota and Michael C Mackey, "Chaos, fractals, and noise: stochastic aspects of dynamics", Springer Science / Business Media , vol., and the first time of time. 97,2013.
3. Katie Byl 和 Russ Tedrake, "Metastable Walking Machines", *International Journal of Robotics Research*, vol. no28,. pp8,.1040-1064, August [1,2009.[链接](#)]