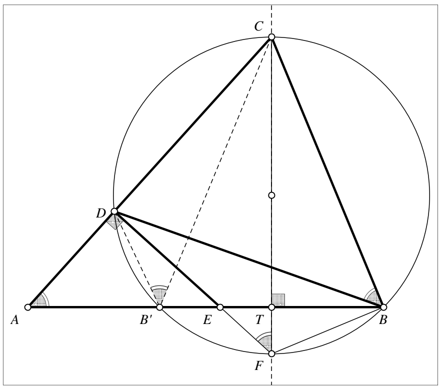
Aufgabe 3: Gegeben sind eine Strecke AB und auf ihr ein Punkt T , wobei T näher an B liegt als an A.

Zeige, dass es zu jedem von T verschiedenen Punkt C auf der Senkrechten zur Strecke AB durch T jeweils genau einen Punkt D auf der Strecke AC mit $\angle CBD = \angle BAC$ gibt und dass dann das Lot zu AC durch D stets durch ein und denselben, von der Wahl von C unabhängigen Punkt E auf der Geraden AB geht.

Den Nachweis für die Existenz und Eindeutigkeit der Punkte D und E geben wir nur im 1. Beweis.



1. Beweis: Da T näher an B als an A liegt, ist $|AC| > |BC|$ und deshalb $\alpha < \beta$. Trägt man also an BC in B den Winkel α an, so liegt dessen zweiter Schenkel im Winkelfeld von β und schneidet somit die Strecke AC in genau einem Punkt; damit ist die Existenz und Eindeutigkeit des Punktes D nachgewiesen. Da $\alpha \neq 90°$, ist jedes Lot zu AC nicht parallel zu AB, hat also mit dieser Geraden genau einen Schnittpunkt; damit ist Existenz und Eindeutigkeit von E nachgewiesen. Da schärfer $0° < \alpha < 90°$, liegt E auf der Halbgeraden $[AB$, d.h. durch Vorgabe der Länge $|AE|$ ist E eindeutig festgelegt.

Aus $0° < \alpha < 90°$ folgt weiter, dass die Geraden DE und CT nicht parallel sind, sie schneiden sich also in einem Punkt, den wir mit F bezeichnen. Nun ist $DF \perp CA$ und $CF \perp BA$, also gilt

$$\angle CFD = \angle BAC = \angle CBD.$$

Hieraus folgt einerseits die Ähnlichkeit der Dreiecke ATC und FTE (und sogar auch FDC), und andererseits, dass der Thaleskreis über der Strecke CF nicht nur den Punkt D enthält, sondern als Fasskreis über der Sehne DC für den Winkel $\angle CFD$ auch den Punkt B. Das Dreieck FBC ist also rechtwinklig bei B und die Strecke TB ist Höhe in diesem Dreieck. Insbesondere liegen F und C in verschiedenen Halbebenen bez. der Geraden AB und somit E zwischen A und T. Durch die Vorgabe der Länge $|ET|$ ist E also eindeutig festgelegt.

Mit der Ähnlichkeit der Dreiecke ATC und FTE und dem Höhensatz im rechtwinkligen Dreieck FBC folgt

$$|ET| \cdot |AT| = |TF| \cdot |TC| = |TB|^2 = const,$$

weil $|TB|$ unabhängig von der Wahl von C ist. Da auch $|AT|$ unabhängig von der Wahl von C ist, hat auch $|ET|$ einen festen Wert. Also ist nach obiger Bemerkung die Lage von E auf der Strecke AB fest.

2. Beweis (vgl. Figur zu Beweis 1): Aus dem 1. Beweis übernehmen wir die Definition des Punktes F und die Tatsache, dass der Kreis mit Durchmesser CF die Punkte B und D enthält.

Sei B' das Bild von B bei der Spiegelung an CT. Da diese Spiegelung sowohl die Gerade AB als auch diesen Kreis in sich überführt, ist B' auch der von B verschiedene Schnittpunkt dieses Kreises mit der Gerade AB. Nun können wir die Weite der Winkel mit Scheitel B' bestimmen: Es ist $\angle BB'C = \beta$ (Symmetrie bez. CF), $\angle CB'D = \angle CBD = \alpha$ (Umfangswinkelsatz über Sehne DC), also ist $\angle DB'A = \gamma$ (Summe der drei Winkel bei B' ist 180°). Damit haben die Dreiecke ADB', ABC und BDC gleiche Innenwinkel, sind also ähnlich.

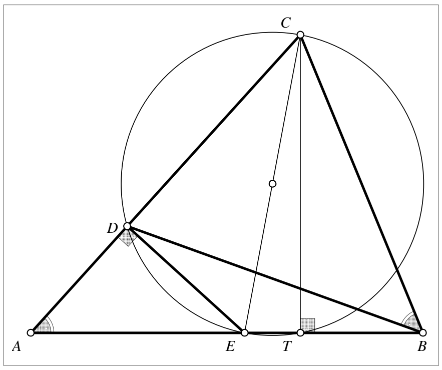
Weiter schneidet die Gerade DE den Umkreis des Dreiecks $B'DB$ im gleichen Punkt wie die Mittelsenkrechte der Strecke BB', also halbiert sie den Winkel $\angle B'DB$ ("Südpolsatz"). Nach dem Satz über die Winkelhalbierenden gilt dann $|EB'| : |EB| = |DB'| : |DB|$; hieraus schließen wir:

$$\frac{|EB'|}{|EB|} = \frac{|DB'|}{|DB|} = \frac{|BC|\cdot\frac{|AB'|}{|AC|}}{|BA|\cdot\frac{|BC|}{|AC|}} = \frac{|AB'|}{|BA|} = const.$$, und da E zwischen B' und B liegt, ist die Lage von E fest.

3. Beweis: Nach Konstruktion sind in den Dreiecken ABC und BDC zwei Innenwinkel gleich, sie sind also ähnlich und es gilt $|AC| : |BC| = |BC| : |DC|$, also $|BC|^2 = |AC| \cdot |DC|$.

Der Thaleskreis über der Strecke CE enthält die Punkte D und T, also gilt nach Sehnensatz

$$\begin{aligned}|AE| \cdot |AT| &= |AD| \cdot |AC| = (|AC| - |CD|) \cdot |AC|\\ &= |AC|^2 - |AC| \cdot |DC|) = |AC|^2 - |BC|^2\\ &= (|AT|^2 + |TC|^2) - (|BT|^2 + |TC|^2)\\ &= |AT|^2 - |BT|^2 = const..\end{aligned}$$

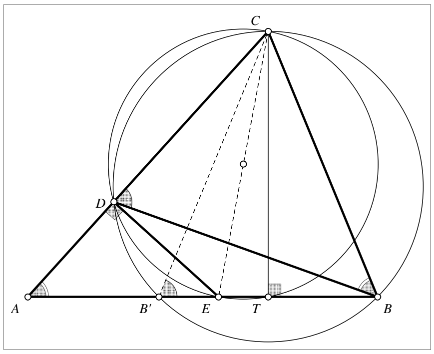


Da auch $|AT|$ unabhängig von der Wahl von C ist, ist es auch $|AE|$; und, da E auf $[AB$ liegt (vgl. 1. Beweis), auch die Lage von E auf der Strecke AB.

4. Beweis: Die Dreiecke ABC und BDC haben beide zwei gleiche weite Innenwinkel, nämlich α und γ. Also sind die jeweils dritten Winkel ebenfalls gleich, d.h. $\angle BDC = \angle CBA = \beta$.

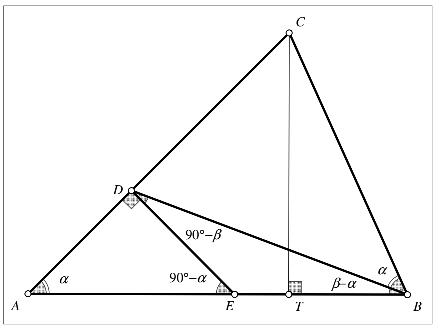
Sei B' das Bild von B bei Spiegelung an CT. Da $CT \perp AB$, liegt B' auf der Geraden AB. Dann ist $\angle CBB' = \angle BB'C = \angle BDC$, also liegen nach Umfangswinkelsatz die Punkte B' und D auf dem gleichen Kreis über der Sehne BC. Der Thaleskreis über der Strecke CE enthält die Punkte D und T. Also gilt nach Sehnensatz

$$|AE| \cdot |AT| = |AD| \cdot |AC| = |AB'| \cdot |AB| = const.$$



5. Beweis (mit Trigonometrie, vgl. Figur): Wir verifizieren leicht die in der Figur angegebenen Winkelmaße. Anwendung des Sinussatzes in den Dreiecken AED, BED und ABC ergibt (Nenner sind nicht 0, da $0° < \alpha,\beta < 90°$):

$$\begin{aligned}\frac{|AE|}{|BE|} &= \frac{|AE|}{|DE|}\cdot\frac{|DE|}{|BE|} = \frac{\sin(90°)}{\sin(\alpha)}\cdot\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(90°-\beta)}\\ &= \frac{1}{\sin(\alpha)}\cdot\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\cos(\beta)} = \frac{\sin(\beta)\cos(\alpha)-\sin(\alpha)\cos(\beta)}{\sin(\alpha)\cos(\beta)}\\ &= \frac{\tan(\beta)}{\tan(\alpha)}-1 = \frac{\frac{|CT|}{|TB|}}{\frac{|CT|}{|AT|}}-1 = \frac{|AT|}{|TB|}-1 = const.\end{aligned}$$



6. Beweis(~skizze mit Koordinatenrechnung): Wir legen ein Koordinatensystem so auf die Figur, dass TC die y – Achse und AB die x – Achse ist; die Koordinaten der Punkte A, B und C seien $(-a|0)$, $(b|0)$ bzw. $(0|c)$ mit $a,b,c > 0$, $a > b$. Dann hat die Gerade AC den Steigungswinkel α, ihre Steigung ist also $m_{AC} = tan(\alpha) = {}^c/_a$, ihre Funktionsgleichung ist $y = {}^c/_a\cdot(x + a) + c$. Die Gerade BC hat den Steigungswinkel $180° - \beta$ mit $m_{BC} = -tan(\beta) = -{}^c/_b$ (und die Funktionsgleichung $y = -{}^c/_b\cdot(x - b) + c$).

Hieraus können wir nun die Funktionsgleichung der Geraden BD ermitteln: Sie hat den Steigungswinkel $(180° - \beta) + \alpha$, nach bekanntem Additionstheorem ergibt sich (die auftauchenden Nenner sind stets von Null verschieden und damit alle Rechenterme für alle möglichen a,b,c definiert):

$$m_{BC} = \frac{m_{BC} + m_{AC}}{1 - m_{BC}m_{AC}} = \frac{-\frac{c}{b} + \frac{c}{a}}{1 - \left(-\frac{c}{b}\right)\cdot\frac{c}{a}} = \frac{c(b-a)}{ab + c^2};$$

die Funktionsgleichung der Geraden BD ist also $y = \frac{c(b-a)}{ab+c^2}(x-b)$.

Hieraus berechnen wir mit schulüblichen Mitteln die Koordinaten des Punktes D (die Rechnungen werden nicht im Detail ausgeführt):

$${}^c/_a\cdot(x_D + a) + c = \frac{c(b-a)}{ab+c^2}(x-b) \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow c\cdot(a^2 + c^2)\cdot x_D = -ac\cdot(b^2 + c^2),$$

woraus die Koordinaten von D und hieraus schließlich die von $E(-b^2/a \mid 0)$ unabhängig von c ermittelt werden können.

Bemerkungen: Eine Gerade, die die Seite BC unter dem Winkel β schneidet, ist eine Parallele zu AB. Analog nennt man eine Gerade, die die Seite BC unter dem Winkel α schneidet, eine *Antiparallele* zu AB. Unter diesem Stichwort findet man etliche hilfreiche und schöne Sätze zur Dreiecksgeometrie, z.B. in
Honsberger, Ross: Episodes in Nineteenth and Twentieth Century Euclidean Geometry, p. 87 ff.
(ISBN 0-88385-639-5)