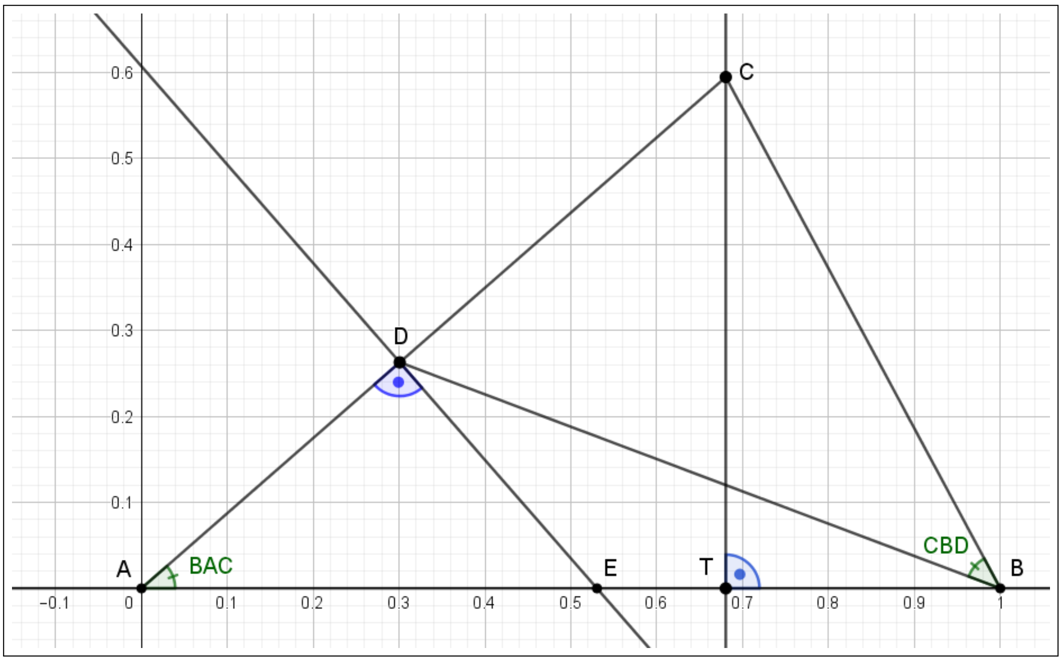
3 Aufgabe

Gegeben sind eine Strecke AB und auf ihr ein Punkt T, wobei T näher an B liegt als an A.

a) Zeige, dass es zu jedem von T verschiedenen Punkt C auf der Senkrechten zur Strecke AB durch T jeweils genau einen Punkt D auf der Strecke AC mit $\angle CBD = \angle BAC$ gibt

b) und dass dann das Lot zu AC durch D stets durch ein und denselben, von der Wahl von C unabhängigen Punkt E auf der Gerade AB geht.

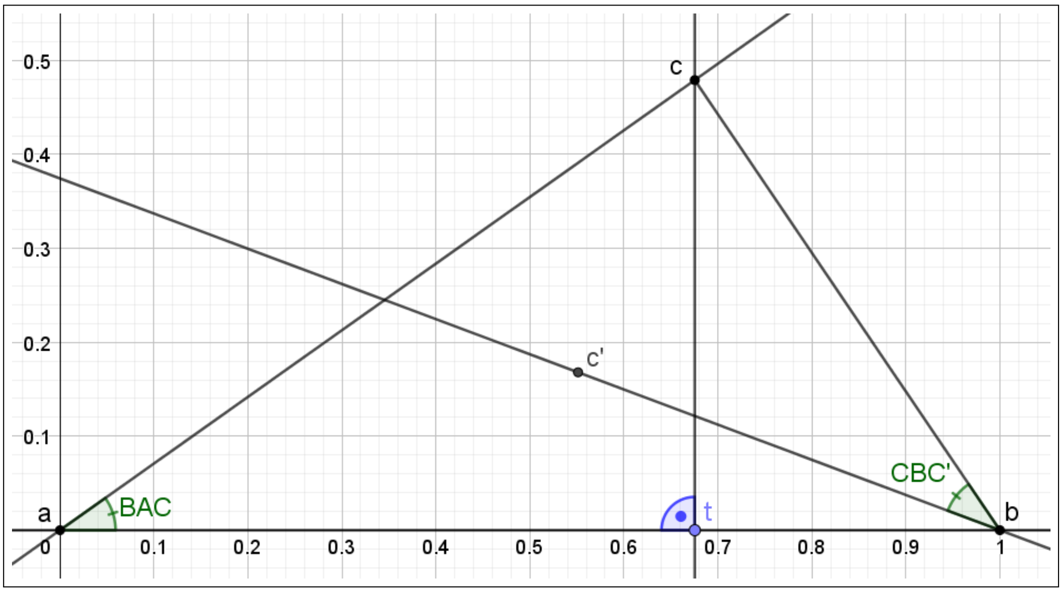


Beweis für a): Ein komplexes Koordinatensystem wird so gewählt, dass der Punkt A durch die komplexe Zahl $a = 0 + 0i$ und der Punkt B durch die komplexe Zahl $b = 1 + 0i$ beschrieben wird.
Folglich wird der Punkt T durch die komplexe Zahl $t = x + 0i$ mit einer beliebigen reellen Zahl $x \in]0.5, 1]$ beschrieben, da T ein beliebiger Punkt auf der Strecke AB ist, der näher an B als an A liegt.
Folglich wird der Punkt C durch die komplexe Zahl $c = x + hi$ mit einer beliebigen reellen Zahl $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ beschrieben, da C ein beliebiger von T verschiedener Punkt auf der Senkrechten zur Strecke AB durch den Punkt T ist. O.B.d.A. ist $h \in \mathbb{R}^+$.

Sei $c' := c(c - b) + b$. Somit ist C' eine Drehstreckung des Punkts C um den Punkt B gegen den Uhrzeigersinn mit dem Winkel $arg(c) = \angle BAC$. Entsprechend gilt $\angle BAC = \angle CBC'$.

Nebenläufig sei angemerkt, dass gilt:

$$c^2 = (x + hi)^2 = x^2 + 2hxi - h^2 = (x^2 - h^2) + (2hx)i$$



In ihrer Parameterform werden die Geraden AC und BC' dargestellt:

$$\begin{aligned}
AC: d &= a + \lambda(c-a) & &|a = 0 + 0i = 0\\
&= \lambda c\\
BC': d &= b + \mu(c'-b) & &|c' = c(c-b)+b\\
&= b + \mu c(c-b) & &|b = 1 + 0i = 1\\
&= b + \mu c^2 - \mu c
\end{aligned}$$

Berechnet wird nun der Schnittpunkt D der beiden Geraden, für den gilt:

$$\begin{aligned}
\Im(d) = \quad & \Im(\lambda c) = \Im(b + \mu c^2 - \mu c)\\
\Leftrightarrow \quad & \lambda \cdot \Im(c) = \Im(b) + \mu \cdot \Im(c^2) - \mu \cdot \Im(c) & &|b = 1 + 0i\\
\Leftrightarrow \quad & \lambda \cdot \Im(c) = \mu \cdot \Im(c^2) - \mu \cdot \Im(c) & &|c = x + hi\\
\Leftrightarrow \quad & \lambda h = \mu \cdot \Im(c^2) - \mu h & &|c^2 = (x^2 - h^2) + (2hx)i\\
\Leftrightarrow \quad & \lambda h = 2\mu hx - \mu h & &|\cdot h^{-1}, h > 0\\
\Leftrightarrow \quad & \lambda = 2\mu x - \mu
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Re(d) = \quad & \Re(\lambda c) = \Re(b + \mu c^2 - \mu c)\\
\Leftrightarrow \quad & \lambda \cdot \Re(c) = \Re(b) + \mu \cdot \Re(c^2) - \mu \cdot \Re(c) & &|b = 1 + 0i\\
\Leftrightarrow \quad & \lambda \cdot \Re(c) = 1 + \mu \cdot \Re(c^2) - \mu \cdot \Re(c) & &|c = x + hi\\
\Leftrightarrow \quad & \lambda x = 1 + \mu \cdot \Re(c^2) - \mu x & &|c^2 = (x^2 - h^2) + (2hx)i\\
\Leftrightarrow \quad & \lambda x = 1 + \mu x^2 - \mu h^2 - \mu x & &|\lambda = 2\mu x - \mu\\
\Leftrightarrow \quad & 2\mu x^2 - \mu x = 1 + \mu x^2 - \mu h^2 - \mu x & &| + \mu x\\
\Leftrightarrow \quad & 2\mu x^2 = 1 + \mu x^2 - \mu h^2 & &| - \mu x^2\\
\Leftrightarrow \quad & \mu x^2 = 1 - \mu h^2 & &| + \mu h^2\\
\Leftrightarrow \quad & \mu x^2 + \mu h^2 = 1 & &| \cdot \frac{1}{x^2 + h^2}, (x^2 + h^2) > 0\\
\Leftrightarrow \quad & \mu = \frac{1}{x^2 + h^2}
\end{aligned}$$

Auch gilt:

$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow && \lambda = 2\mu x - \mu && \Big| \mu = \frac{1}{x^2+h^2} \\
&\Leftrightarrow && \lambda = \frac{2x-1}{x^2+h^2} &&
\end{aligned}
$$

Es gilt $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \geq 0$ bzw. $x^2 \geq 2x - 1$. Mit $h^2 > 0$ gilt sogar $x^2 + h^2 > 2x - 1$. Wegen $x \in]0.5, 1]$ gilt $(2x-1) \in]0, 1]$ und damit $2x - 1 > 0$. Wegen $x^2 + h^2 > 2x - 1$ gilt somit $0 < \frac{2x-1}{x^2+h^2} < 1$. Also ist D ein Punkt zwischen A und C und damit ein Punkt auf der Strecke AC, da der Parameter $\lambda = \frac{2x-1}{x^2+h^2}$ zwischen 0 und 1 liegt.

Insbesondere, da die Punkte B, C' und D auf einer Gerade liegen, gilt $\angle CBC' = \angle CBD$. Also gilt zusammen mit $\angle BAC = \angle CBC'$ die Gleichung $\angle CBD = \angle BAC$.

Für jeden Punkt P mit $\angle CBP = \angle BAC$ gilt, dass P auf der Gerade BC' liegen muss. Für jeden Punkt P mit P auf der Strecke AC gilt, dass P auf der Gerade AC liegen muss. Es sei angemerkt, dass zwei nicht parallele Geraden genau einen Schnittpunkt haben. Folglich gibt es neben D keinen weiteren Punkt auf der Strecke AC mit $\angle CBD = \angle BAC$.

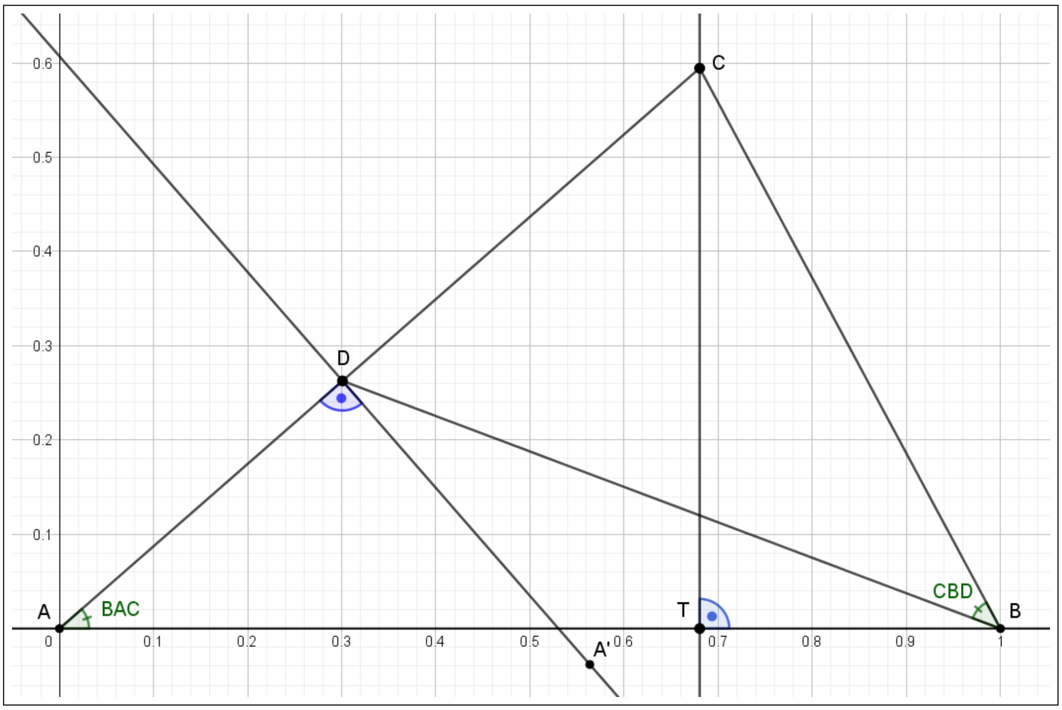
Also gibt es zu jedem von T verschiedenen Punkt C auf der Senkrechten zur Strecke AB durch T jeweils genau einen Punkt D auf der Strecke AC mit $\angle CBD = \angle BAC$.

$\square$

Beweis für b): Die obige Beweisführung wird fortgesetzt. Berechnet wird die Zahl d, die den Punkt D beschreibt:

$$
\begin{aligned}
BC' : d &= b + \mu c^2 - \mu c && \Big| \mu = \frac{1}{x^2+h^2} \\
&= b + \frac{c^2 - c}{x^2+h^2} && \Big| b = 1 + 0i = \frac{x^2+h^2}{x^2+h^2} \\
&= \frac{x^2+h^2}{x^2+h^2} + \frac{c^2 - c}{x^2+h^2} && \big| c = x + hi \\
&= \frac{x^2+h^2}{x^2+h^2} + \frac{c^2 - (x+hi)}{x^2+h^2} && \big| c^2 = (x^2 - h^2) + (2hx)i \\
&= \frac{x^2+h^2}{x^2+h^2} + \frac{(x^2-h^2) + (2hx)i - x - hi}{x^2+h^2} && \\
&= \frac{(x^2 + h^2 + x^2 - h^2 - x) + (2hx - h)i}{x^2+h^2} && \\
&= \frac{(2x^2 - x) + (2hx - h)i}{x^2+h^2} && \\
&= \left(\frac{2x^2 - x}{x^2+h^2}\right) + \left(\frac{2hx - h}{x^2+h^2}\right) i &&
\end{aligned}
$$

Sei $a' := i(a-d)+d = d - di$. Somit ist A' eine Drehstreckung des Punkts A um den Punkt D gegen den Uhrzeigersinn mit dem Winkel $arg(i) = 90°$.



In ihrer Parameterform werden die Geraden AB und DA' dargestellt:

$$\begin{aligned} AB : e &= a + \nu(b-a) && |a = 0 + 0i = 0 \\ &= \nu b \\ DA' : e &= d + \xi(a' - d) && |a' = d - di \\ &= d - \xi di \end{aligned}$$

Berechnet wird nun der Schnittpunkt E der beiden Geraden, für den gilt:

$$\begin{aligned} \Im(e) = \quad & \Im(\nu b) = \Im(d - \xi di) \\ \Leftrightarrow \quad & \nu \cdot \Im(b) = \Im(d) - \xi \cdot \Im(di) && |b = 1 + 0i \\ \Leftrightarrow \quad & 0 = \Im(d) - \xi \cdot \Im(di) && |\Im(d) = \frac{2hx-h}{x^2+h^2} \\ \Leftrightarrow \quad & 0 = \frac{2hx-h}{x^2+h^2} - \xi \cdot \Im(di) && |\Im(di) = \Re(d) = \frac{2x^2-x}{x^2+h^2} \\ \Leftrightarrow \quad & 0 = \frac{2hx-h}{x^2+h^2} - \xi \cdot \frac{2x^2-x}{x^2+h^2} && |+\frac{2hx-h}{x^2+h^2} \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{2hx-h}{x^2+h^2} = \xi \cdot \frac{2x^2-x}{x^2+h^2} && |\div \frac{2x^2-x}{x^2+h^2} \\ \Leftrightarrow \quad & \xi = \frac{\frac{2hx-h}{x^2+h^2}}{\frac{2x^2-x}{x^2+h^2}} = \frac{2hx-h}{2x^2-x} = \frac{h(2x-1)}{x(2x-1)} = \frac{h}{x} \\ \Leftrightarrow \quad & \xi = \frac{h}{x} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\Re(e) = \quad & \Re(\nu b) = \Re(d - \xi di) && \\
\Leftrightarrow \quad & \nu \cdot \Re(b) = \Re(d) - \xi \cdot \Re(di) && |b = 1 + 0i \\
\Leftrightarrow \quad & \nu = \Re(d) - \xi \cdot \Re(di) && |\Re(d) = \frac{2x^2 - x}{x^2 + h^2} \\
\Leftrightarrow \quad & \nu = \frac{2x^2 - x}{x^2 + h^2} - \xi \cdot \Re(di) && |\Re(di) = -\Im(d) = -\frac{2hx - h}{x^2 + h^2} \\
\Leftrightarrow \quad & \nu = \frac{2x^2 - x}{x^2 + h^2} + \xi \cdot \frac{2hx - h}{x^2 + h^2} && |\xi = \frac{h}{x} \\
\Leftrightarrow \quad & \nu = \frac{2x^2 - x}{x^2 + h^2} + \frac{h}{x} \cdot \frac{2hx - h}{x^2 + h^2} && \\
\Leftrightarrow \quad & \nu = \frac{x(2x^2 - x)}{x(x^2 + h^2)} + \frac{h(2hx - h)}{x(x^2 + h^2)} && \\
\Leftrightarrow \quad & \nu = \frac{x^2(2x - 1) + h^2(2x - 1)}{x(x^2 + h^2)} && \\
\Leftrightarrow \quad & \nu = \frac{(x^2 + h^2)(2x - 1)}{x(x^2 + h^2)} && \\
\Leftrightarrow \quad & \nu = \frac{2x - 1}{x} &&
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
AB : e = \; & \nu b && |b = 1 + 0i = 1 \\
= \; & \nu && |\nu = \frac{2x - 1}{x} \\
= \; & \left(\frac{2x - 1}{x}\right) + 0i &&
\end{aligned}
$$

E ist von der Wahl von h bzw. C unabhängig.

Also gilt, dass das Lot zu AC durch D stets durch ein und denselben, von der Wahl von C unabhängigen Punkt E auf der Gerade AB geht.

$\square$