

Welcome To

Mathema Shukur

যাদের জন্যে প্রযোজ্যঃ একাদশ ও দ্বাদশ শ্রেণীর শিক্ষার্থী  
বিষয়ঃ উচ্চতর গণিত ১ম পত্র  
অধ্যায়ঃ ৪-বৃত্ত

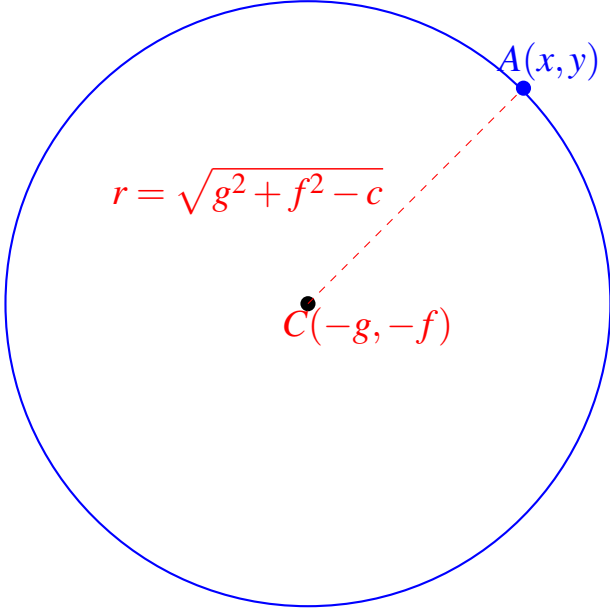
শিখন ফলঃ

- (১) কেন্দ্র মূল বিন্দু বিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ শনাক্ত করতে পারবে।
- (২) কেন্দ্র মূল বিন্দু বিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ অংকন ও অক্ষদ্বয়ের সাথে ছেদ বিন্দু নির্ধারণ করতে পারবে।
- (৩) নির্দিষ্ট কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করতে পারবে।
- (৪) পোলার স্থানাঙ্কে বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করতে পারবে।
- (৫) বৃত্তস্থ কোনো বিন্দুতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় করতে পারবে
- (৬) বৃত্তের বহিঃস্থ কোনো বিন্দু থেকে অঙ্কিত স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় করতে পারবে
- (৭) বৃত্তের বহিঃস্থ কোনো বিন্দু থেকে অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করতে পারবে
- (৮) দুইটি বৃত্তের সাধারণ জ্যা এর সমীকরণ নির্ণয় করতে পারবে

বৃত্তের সাধারণ সমীকরণ

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

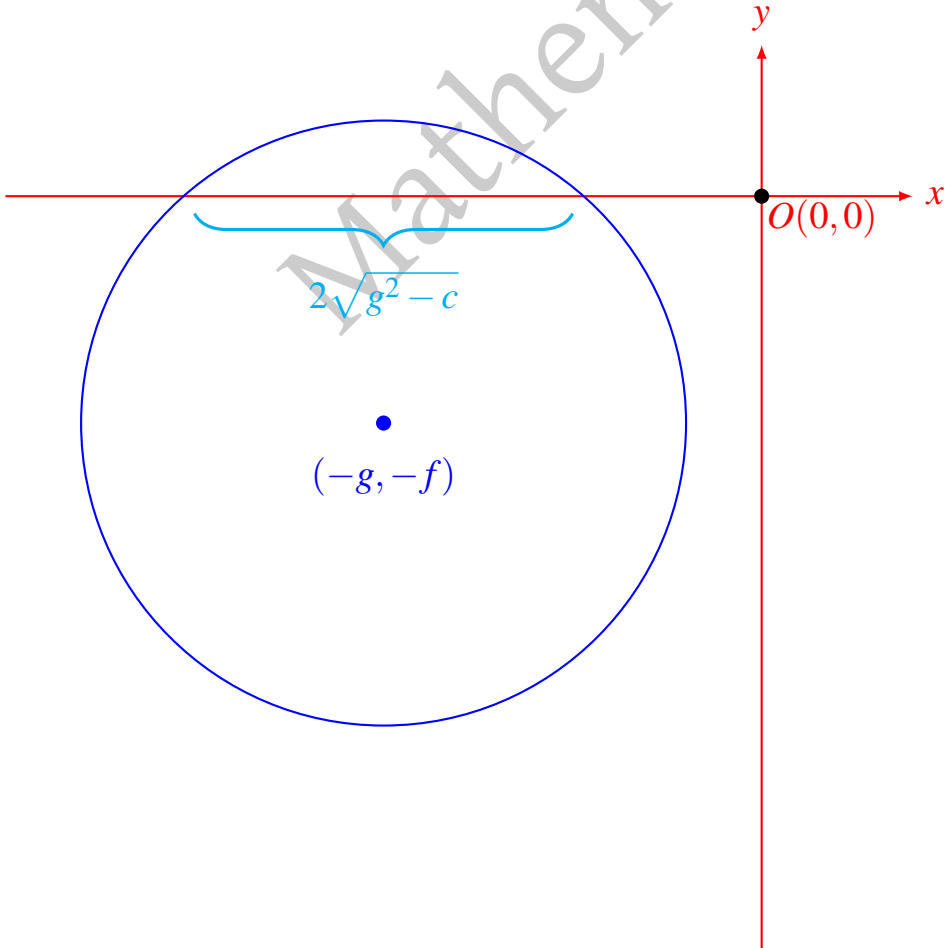
কেন্দ্র  $(-g, -f)$  ও ব্যাসার্ধ  $r = \sqrt{g^2 + f^2 - c}$  বিশিষ্ট বৃত্তের চিত্র



বৃত্তের সাধারণ সমীকরণ

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

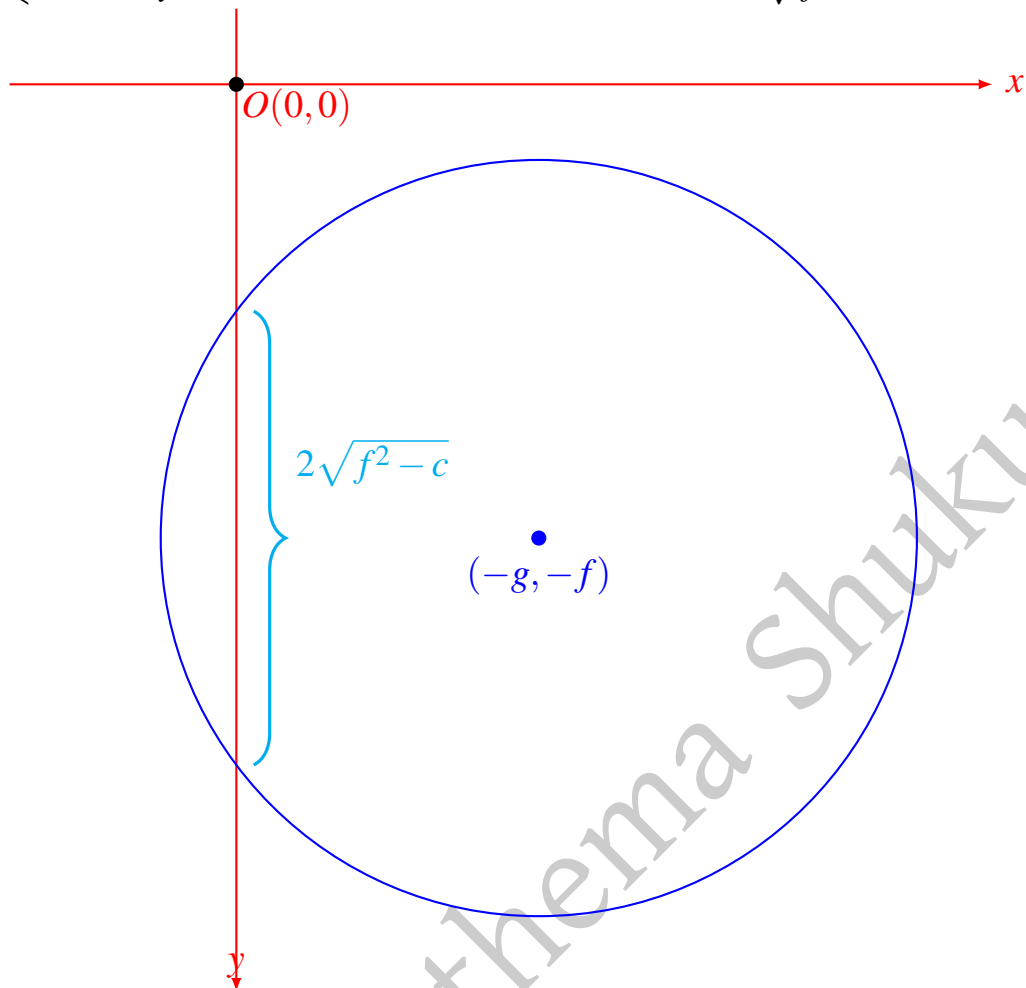
বৃত্তটি দ্বারা  $x$ - অক্ষের খন্ডিত অংশের দৈর্ঘ্যের পরিমাণ  $2\sqrt{g^2 - c}$



বৃত্তের সাধারণ সমীকরণ

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

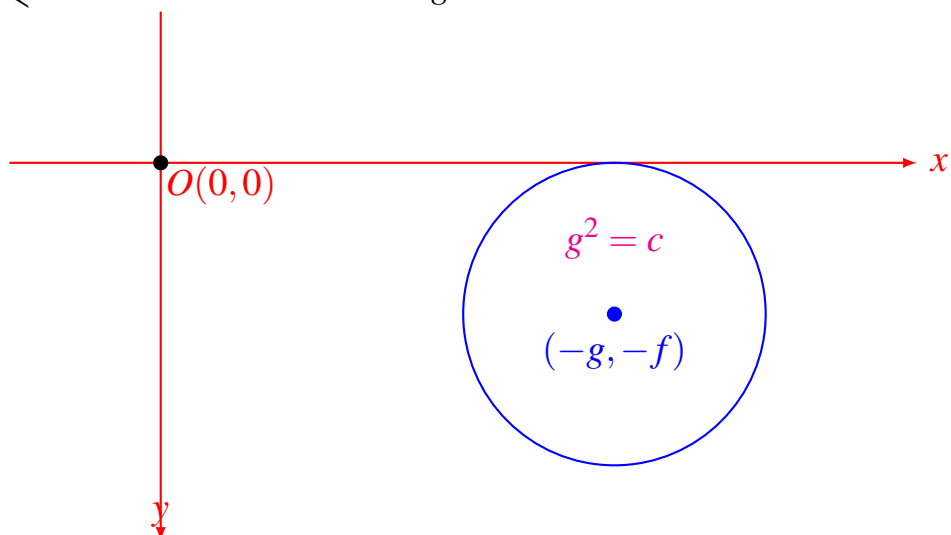
বৃত্তটি দ্বারা  $y$ - অক্ষের খন্ডিত অংশের দৈর্ঘ্যের পরিমাণ  $2\sqrt{f^2 - c}$



বৃত্তের সাধারণ সমীকরণ

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

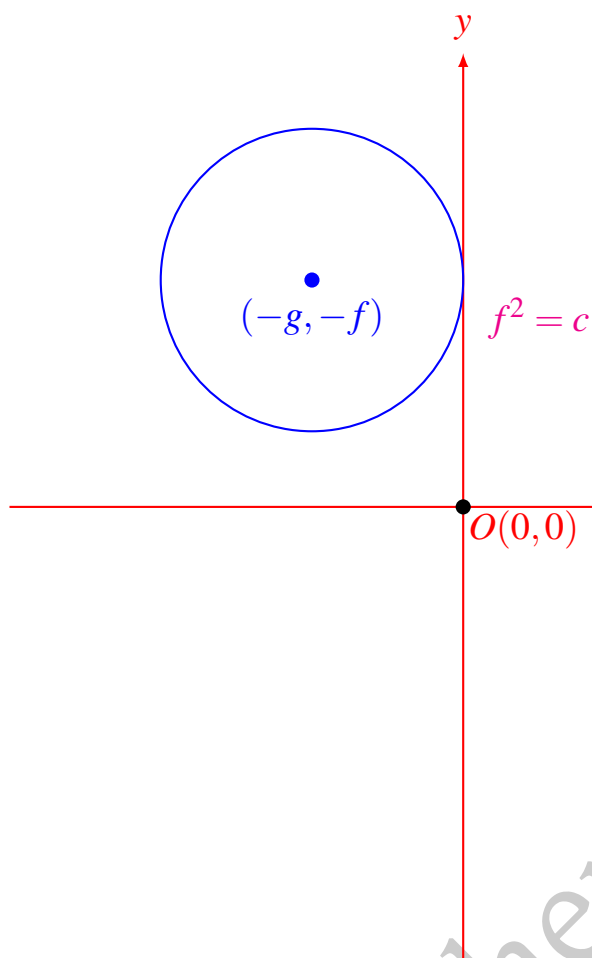
বৃত্তটি  $x$ - অক্ষকে স্পর্শ করলে  $g^2 = c$



বৃত্তের সাধারণ সমীকরণ

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

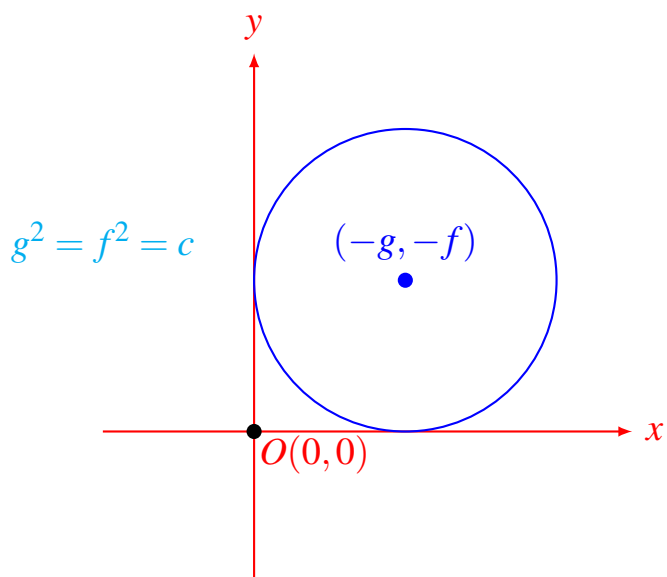
বৃত্তটি  $y$ - অক্ষকে স্পর্শ করলে  $f^2 = c$



বৃত্তের সাধারণ সমীকরণ

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

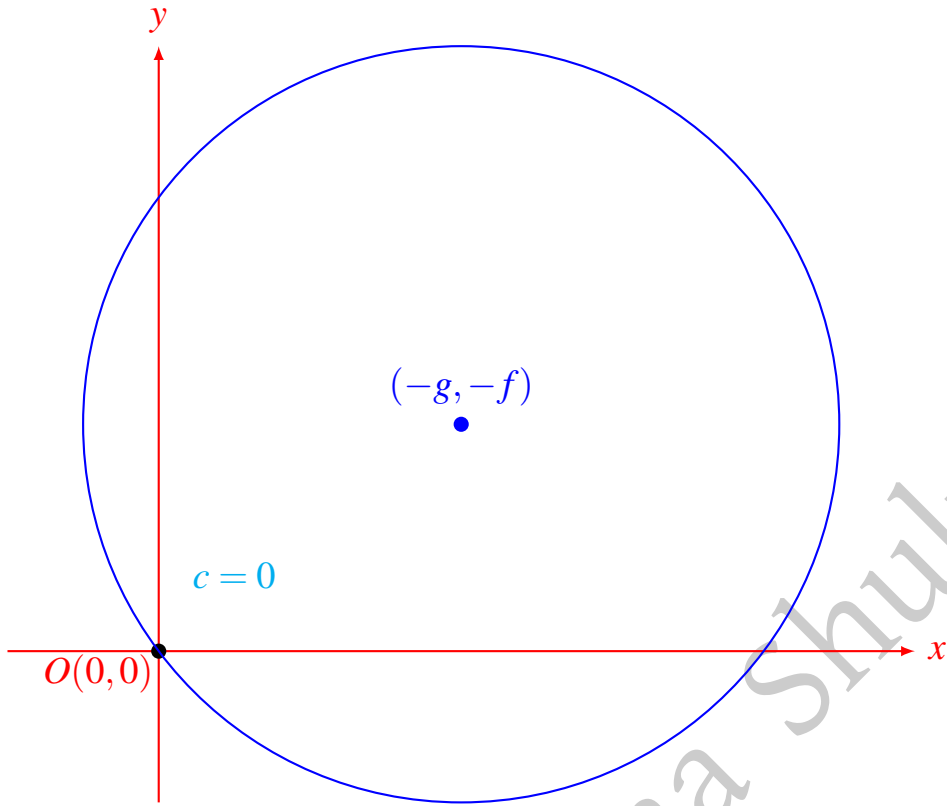
বৃত্তটি উভয় অক্ষকে স্পর্শ করলে  $g^2 = f^2 = c$



বৃত্তের সাধারণ সমীকরণ

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

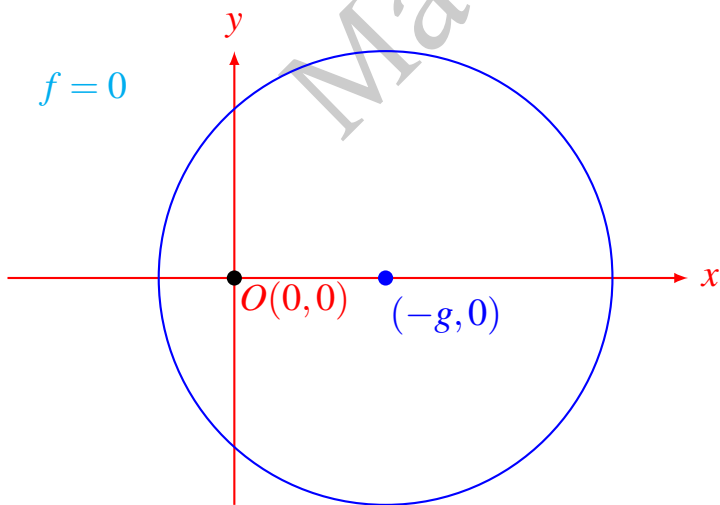
$c = 0$  হলে বৃত্তটি মূল বিন্দু দিয়ে যাবে



বৃত্তের সাধারণ সমীকরণ

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

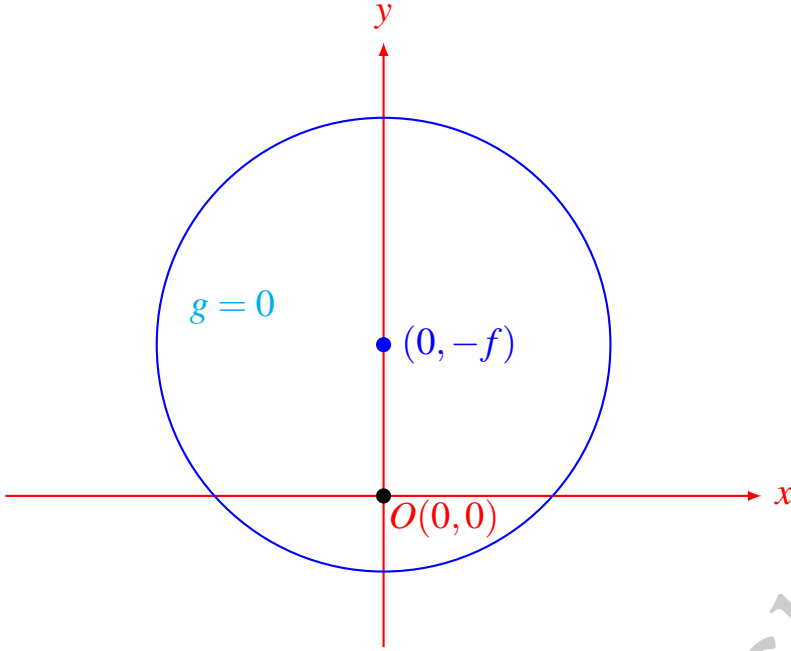
$f = 0$  হলে বৃত্তের কেন্দ্র  $x$ - অক্ষের উপর অবস্থিত হয়



বৃত্তের সাধারণ সমীকরণ

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

$g = 0$  হলে বৃত্তের কেন্দ্র  $y$ - অক্ষের উপর অবস্থিত হয়



[ঢাকা বিশ্ববিদ্যালয় ভর্তি পরীক্ষা -২০১৪-২০১৫]

$kx^2 + 2y^2 - 4x - 12y + 11 = 0$  সমীকরণটি বৃত্ত নির্দেশ করলে  $k$  এর মান কত ?

বৃত্তের সাধারণ সমীকরণ  $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

(i) এটি  $x, y$  যুক্ত একটি দ্বিঘাত বহুপদী সমীকরণ

(ii)  $x^2$  এবং  $y^2$  এর সহগ সমান

$x^2$  এর সহগ  $= k$

$y^2$  এর সহগ  $= 2$

সুতরাং  $k = 2$

[KUET-2011-2012]

$k$  এর কোন মানের জন্য  $(x - y + 3)^2 + (kx + 2)(y - 1) = 0$  সমীকরণটি একটি বৃত্ত নির্দেশ করে।

$$(x - y + 3)^2 + (kx + 2)(y - 1) = 0$$

$$x^2 + (-y)^2 + 3^2 + 2x(-y) + 2(-y)3 + 2(3)x + kxy - kx + 2y - 2 = 0$$

$$x^2 + y^2 + 9 - 2xy - 6y + 6x + kxy - kx + 2y - 2 = 0$$

$$x^2 + y^2 + (k - 2)xy + (6 - k)x - 4y + 7 = 0$$

বৃত্তের সাধারণ সমীকরণ  $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

$xy$  যুক্ত পদটি অনুপস্থিত।

সুতরাং  $k - 2 = 0$

$k = 2$

[কুমিল্লা বোর্ড-২০২২]

$ax^2 + by^2 = c$  সমীকরণটি একটি বৃত্ত নির্দেশ করলে  $a$  ও  $b$  এর মধ্যে সম্পর্ক কী হবে ?

বৃত্তের সাধারণ সমীকরণ  $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

(i) এটি  $x, y$  যুক্ত একটি দ্বিঘাত বহুপদী সমীকরণ

(ii)  $x^2$  এবং  $y^2$  এর সহগ সমান

$x^2$  এর সহগ  $= a$

$y^2$  এর সহগ  $= b$

সুতরাং  $a = b$

[কুমিল্লা বোর্ড-২০২২]

$2x^2 + 2y^2 + 4x - 2y + 4 = 0$  বৃত্তের কেন্দ্র নির্ণয় কর

বৃত্তের সাধারণ সমীকরণ  $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

বৃত্তের কেন্দ্র  $(-g, -f)$

$$2x^2 + 2y^2 + 4x - 2y + 4 = 0$$

$$x^2 + y^2 + 2x - y + 2 = 0$$

$$[x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0]$$

$$x^2 + y^2 + 2(1)x + 2\left(-\frac{1}{2}\right)y + 2 = 0$$

$$g = 1, f = \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\text{বৃত্তের কেন্দ্র } (-g, -f) = (-1, -(-\frac{1}{2})) = (-1, \frac{1}{2})$$

[ঢাকা বিশ্ববিদ্যালয় ভর্তি পরীক্ষা -২০১৮-২০১৯]

$3x^2 + 3y^2 - 5x - 6y + 4 = 0$  বৃত্তের কেন্দ্র নির্ণয় কর

$$\text{বৃত্তের সাধারণ সমীকরণ } [x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0]$$

$$\text{বৃত্তের কেন্দ্র } (-g, -f)$$

$$3x^2 + 3y^2 - 5x - 6y + 4 = 0$$

$$x^2 + y^2 - \frac{5}{3}x - 2y + \frac{4}{3} = 0$$

$$[x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0]$$

$$x^2 + y^2 + 2\left(-\frac{5}{6}\right)x + 2(-1)y + \frac{4}{3} = 0$$

$$g = \left(-\frac{5}{6}\right), f = (-1)$$

$$\text{বৃত্তের কেন্দ্র } (-g, -f) = (-(-\frac{5}{6}), -(-1)) = (\frac{5}{6}, 1)$$

[ চট্টগ্রাম বিশ্ববিদ্যালয় ভর্তি পরীক্ষা -২০১৪-২০১৫]

$x^2 + y^2 - 24x + 10y = 0$  বৃত্তের ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর

$$\text{বৃত্তের সাধারণ সমীকরণ } [x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0]$$

$$\text{বৃত্তের ব্যাসার্ধ } = \sqrt{g^2 + f^2 - c}$$



$$x^2 + y^2 - 24x + 10y = 0$$

$$[x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0]$$

$$x^2 + y^2 + 2(-12)x + 2(5)y + 0 = 0$$

$$g = (-12), f = (5) \quad c = 0$$

$$\text{বৃত্তের ব্যাসার্ধ} = \sqrt{g^2 + f^2 - c} = \sqrt{(-12)^2 + (5)^2 - 0} = 13 = 13$$

[ নোয়াখালী বিজ্ঞান ও প্রযুক্তি বিশ্ববিদ্যালয় ভর্তি পরীক্ষা -২০১৭-২০১৮]

$2x^2 + 2y^2 - 4x - 12y + 11 = 0$  বৃত্তের ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর

$$\text{বৃত্তের সাধারণ সমীকরণ} \quad [x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0]$$

$$\text{বৃত্তের ব্যাসার্ধ} \quad [= \sqrt{g^2 + f^2 - c}]$$

$$2x^2 + 2y^2 - 4x - 12y + 11 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 2x - 6y + \frac{11}{2} = 0$$

$$[x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0]$$

$$x^2 + y^2 + 2(-1)x + 2(-3)y + \frac{11}{2} = 0$$

$$g = (-1), f = (-3) \quad c = \frac{11}{2}$$

$$\text{বৃত্তের ব্যাসার্ধ} = \sqrt{g^2 + f^2 - c} = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2 - \frac{11}{2}} = \sqrt{1 + 9 - \frac{11}{2}} = \sqrt{\frac{9}{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

[দিনাজপুর বোর্ড-২০২২]

$3x^2 + 3y^2 - 6x + 4y - 1 = 0$  বৃত্তের কেন্দ্র নির্ণয় কর

$$\text{বৃত্তের সাধারণ সমীকরণ} \quad [x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0]$$

$$\text{বৃত্তের কেন্দ্র} \quad [(-g, -f)]$$

$$3x^2 + 3y^2 - 6x + 4y - 1 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 2x + \frac{4}{3}y - \frac{1}{3} = 0$$

$$[x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0]$$

$$x^2 + y^2 + 2(-1)x + 2\left(\frac{2}{3}\right)y - \frac{1}{3} = 0$$

$$g = (-1), f = \left(\frac{2}{3}\right)$$

$$\text{বৃত্তের কেন্দ্র } (-g, -f) = (-(-1), -\left(\frac{2}{3}\right)) = (1, -\frac{2}{3})$$

[ঢাকা বোর্ড-২০২২]

$x^2 + y^2 - 6x + 8y + 9 = 0$  বৃত্ত দ্বারা  $y$ - অক্ষের খন্ডিত অংশের পরিমাণ নির্ণয় কর

$$\text{বৃত্তের সাধারণ সমীকরণ } [x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0]$$

$$\text{বৃত্ত দ্বারা } y\text{- অক্ষের খন্ডিত অংশের দৈর্ঘ্যের পরিমাণ } [ = 2\sqrt{f^2 - c} ]$$

$$x^2 + y^2 - 6x + 8y + 9 = 0$$

$$[x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0]$$

$$x^2 + y^2 + 2(-3)x + 2(4)y + 9 = 0$$

$$g = -3, f = 4, c = 9$$

$$\text{বৃত্ত দ্বারা } y\text{- অক্ষের খন্ডিত অংশের দৈর্ঘ্যের পরিমাণ } = 2\sqrt{f^2 - c} = 2\sqrt{(4)^2 - 9} = 2\sqrt{7}$$

[ঢাকা বোর্ড-২০২২]

$3x^2 + 3y^2 - 6x - 9y - 3 = 0$  বৃত্ত দ্বারা  $x$ - অক্ষের খন্ডিত অংশের পরিমাণ নির্ণয় কর

$$\text{বৃত্তের সাধারণ সমীকরণ } [x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0]$$

$$\text{বৃত্ত দ্বারা } x\text{- অক্ষের খন্ডিত অংশের দৈর্ঘ্যের পরিমাণ } [ = 2\sqrt{g^2 - c} ]$$

$$3x^2 + 3y^2 - 6x - 9y - 3 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 2x - 3y - 1 = 0$$

$$[x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0]$$

$$x^2 + y^2 + 2(-1)x + 2\left(-\frac{3}{2}\right)y + (-1) = 0$$

$$g = -1, f = \left(-\frac{3}{2}\right), c = -1$$

বৃত্ত দ্বারা  $x$ - অক্ষের খন্ডিত অংশের দৈর্ঘ্যের পরিমাণ  $= 2\sqrt{g^2 - c} = 2\sqrt{(-1)^2 - (-1)} = 2\sqrt{2}$   
[CUET-2010-2011]

$k$  এর কোন মানের জন্য  $x^2 + y^2 + kx + 2y + 25 = 0$  বৃত্তটি  $x$ - অক্ষকে স্পর্শ করে

বৃত্তের সাধারণ সমীকরণ  $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

বৃত্তটি  $x$ - অক্ষকে স্পর্শ করলে  $g^2 = c$

$$x^2 + y^2 + kx + 2y + 25 = 0$$

$$[x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0]$$

$$x^2 + y^2 + 2\left(\frac{k}{2}\right)x + 2(1)y + (25) = 0$$

$$g = \frac{k}{2}, f = (1), c = 25$$

বৃত্তটি  $x$ - অক্ষকে স্পর্শ করলে

$$g^2 = c$$

$$\left(\frac{k}{2}\right)^2 = 25$$

$$k^2 = 100$$

$$k = \pm 10$$

[বরিশাল বোর্ড-২০২২]

যদি  $x^2 + y^2 - 12x + 8y + c = 0$  বৃত্তটি  $x$ - অক্ষকে স্পর্শ করে তবে  $c$  এর মান নির্ণয় কর। স্পর্শ বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

বৃত্তের সাধারণ সমীকরণ  $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

বৃত্তটি  $x$ - অক্ষকে স্পর্শ করলে  $g^2 = c$

$$x^2 + y^2 - 12x + 8y + c = 0$$

$$[x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0]$$

$$x^2 + y^2 + 2(-6)x + 2(4)y + c = 0$$

$$g = -6, f = (4), c = c$$

বৃত্তটি  $x$ - অক্ষকে স্পর্শ করলে

$$g^2 = c$$

$$(-6)^2 = c$$

$$c = 36$$

$$\text{বৃত্তের সমীকরণ } x^2 + y^2 - 12x + 8y + 36 = 0$$

$$y = 0 \text{ বসিয়ে পাই}$$

$$x^2 - 12x + 36 = 0$$

$$(x - 6)^2 = 0$$

$$x = 6$$

স্পর্শ বিন্দুর স্থানাঙ্ক  $(6, 0)$

[সিলেট বোর্ড-২০২২]

যদি  $x^2 + y^2 - 4x - 6y + c = 0$  বৃত্তটি  $y$ - অক্ষকে স্পর্শ করে তবে  $c$  এর মান নির্ণয় কর। স্পর্শ বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

$$\text{বৃত্তের সাধারণ সমীকরণ } x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

$$\text{বৃত্তটি } y\text{- অক্ষকে স্পর্শ করলে } f^2 = c$$

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y + c = 0$$

$$[x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0]$$

$$x^2 + y^2 + 2(-2)x + 2(-3)y + c = 0$$

$$g = -2, f = (-3), c = c$$

বৃত্তটি  $x$ - অক্ষকে স্পর্শ করলে

$$f^2 = c$$

$$(-3)^2 = c$$

$$c = 9$$

বৃত্তের সমীকরণ  $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0$

$x = 0$  বসিয়ে পাই

$$y^2 - 6y + 9 = 0$$

$$(y - 3)^2 = 0$$

$$y = 3$$

স্পর্শ বিন্দুর স্থানাঙ্ক  $(0, 3)$

[রাজশাহী বোর্ড-২০২২]

$x^2 + y^2 - 4x - 6y = 7$  বৃত্ত দ্বারা  $x$ - অক্ষের খন্ডিত অংশের পরিমাণ নির্ণয় কর

[যশোর বোর্ড-২০২২]

$x^2 + y^2 - 2x + 6y - 6 = 0$  বৃত্ত দ্বারা  $x$ - অক্ষের খন্ডিত অংশের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর

[দিনাজপুর বোর্ড-২০২২]

$x^2 + y^2 + 4x - 6y - 1 = 0$  বৃত্ত দ্বারা  $y$ - অক্ষের খন্ডিত অংশের পরিমাণ কর

[কুমিল্লা বোর্ড-২০২২]

$x^2 + y^2 - 4x + 8y = 0$  বৃত্ত দ্বারা  $y$ - অক্ষের খন্ডিত অংশের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর

বিশ্লেষণ ধর্মী আলোচনা ও প্রমাণ, ব্যাখ্যা

কেন্দ্র  $(h, k)$  ও ব্যাসার্ধ  $r$  বিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

$$x^2 - 2hx + h^2 + y^2 - 2ky + k^2 = r^2$$

$$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + (h^2 + k^2 - r^2) = 0$$

$$x^2 + y^2 + 2(-h)x + 2(-k)y + (h^2 + k^2 - r^2) = 0$$

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

ধরি,

$$-h = g, \Rightarrow h = -g$$

$$-k = f, \Rightarrow k = -f$$

$$\text{কেন্দ্র } (h, k) = (-g, -f)$$

ধরি,

$$c = h^2 + k^2 - r^2$$

$$c = g^2 + f^2 - r^2$$

$$r^2 = g^2 + f^2 - c$$

$$\text{ব্যাসার্ধ } r = \sqrt{g^2 + f^2 - c}$$

বৃত্তের সাধারণ সমীকরণ

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

(i) এটি  $x, y$  যুক্ত একটি দ্বিঘাত বহুপদী সমীকরণ

(ii)  $x^2$  এবং  $y^2$  এর সহগ সমান

(iii)  $xy$  যুক্ত পদটি অনুপস্থিত।

$c = 0$  হলে বৃত্তটি মূলবিন্দু দিয়ে যাবে।

কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক  $(-g, -f)$

$g = 0$  হলে কেন্দ্র  $y$ -অক্ষের উপর অবস্থিত

$f = 0$  হলে কেন্দ্র  $x$ -অক্ষের উপর অবস্থিত

$$\text{ব্যাসার্ধ } \sqrt{g^2 + f^2 - c}$$

যদি  $g^2 + f^2 - c = 0$  হয়, তাহলে বৃত্তের ব্যাসার্ধ শূন্য হবে এবং এক্ষেত্রে বৃত্তটি  $(-g, -f)$  বিন্দুতে পরিনত হবে। এরূপ বৃত্তকে বিন্দু বৃত্ত বলে।

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ , ( $g^2 > c$   $f^2 > c$ ) বৃত্তটি দ্বারা অক্ষ দুইটি থেকে ছেদিত অংশের পরিমাণ নির্ণয় কর।

মনে করি, বৃত্তটি  $x$ -অক্ষকে  $(x_1, 0)$  ও  $(x_2, 0)$  বিন্দুতে ছেদ করে।

বৃত্তের সাধারণ সমীকরণে  $y = 0$  বসিয়ে পাই  $x^2 + 2gx + c = 0$

$x_1$  ও  $x_2$  উপরের সমীকরণটির মূল হবে।

মূলদ্বয়ের যোগফল  $x_1 + x_2 = -2g$

মূলদ্বয়ের গুনফল  $x_1 x_2 = c$

বৃত্তটি দ্বারা  $x$ - অক্ষের ছেদিত অংশের পরিমাণ

$$\begin{aligned} & |x_1 - x_2| \\ &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2} \\ &= \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} \\ &= \sqrt{4g^2 - 4c} \\ &= 2\sqrt{g^2 - c} \end{aligned}$$

বৃত্তের সাধারণ সমীকরণে  $x = 0$  বসিয়ে পাই  $y^2 + 2fy + c = 0$

$y_1$  ও  $y_2$  উপরের সমীকরণটির মূল হবে।

মূলদ্বয়ের যোগফল  $y_1 + y_2 = -2f$

মূলদ্বয়ের গুনফল  $y_1 y_2 = c$

বৃত্তটি দ্বারা  $y$ - অক্ষের ছেদিত অংশের পরিমাণ

$$\begin{aligned} & |y_1 - y_2| \\ &= \sqrt{(y_1 - y_2)^2} \\ &= \sqrt{(y_1 + y_2)^2 - 4y_1 y_2} \\ &= \sqrt{4f^2 - 4c} \\ &= 2\sqrt{f^2 - c} \end{aligned}$$

বৃত্ত দ্বারা  $x$  অক্ষের খণ্ডিত অংশ  $2\sqrt{g^2 - c}$

বৃত্ত যদি  $x$ - অক্ষকে স্পর্শ করে তবে  $x$ - অক্ষের ছেদিত অংশের মান শূন্য হবে

$$2\sqrt{g^2 - c} = 0$$

$$g^2 = c$$

বৃত্তটি  $x$  অক্ষকে স্পর্শ করলে  $g^2 = c$

বৃত্ত দ্বারা  $y$  অক্ষের খণ্ডিত অংশ  $2\sqrt{f^2 - c}$

বৃত্ত যদি  $y$ - অক্ষকে স্পর্শ করে তবে  $y$ - অক্ষের ছেদিত অংশের মান শূন্য হবে

$$2\sqrt{f^2 - c} = 0$$

$$f^2 = c$$

বৃত্তটি  $y$  অক্ষকে স্পর্শ করলে  $f^2 = c$

বৃত্তটি উভয় অক্ষকে স্পর্শ করলে  $g^2 = f^2 = c$

Mathema Shukur