

Welcome To

Mathema Shukur

যাদের জন্যে প্রযোজ্যঃ একাদশ ও দ্বাদশ শ্রেণীর শিক্ষার্থী  
বিষয়ঃ উচ্চতর গণিত ১ম পত্র  
অধ্যায়ঃ ৪-বৃত্ত

$$S_1 = x^2 + y^2 + 2g_1x + 2f_1y + c_1$$

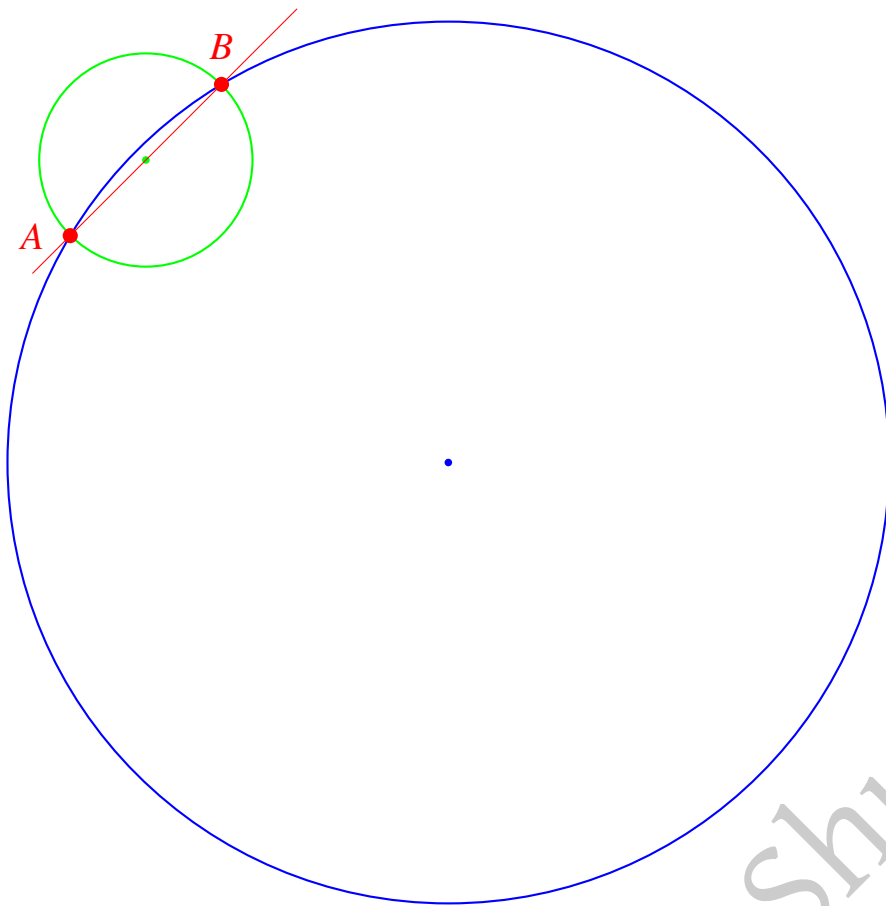
$$S_2 = x^2 + y^2 + 2g_2x + 2f_2y + c_2$$

$$S_1 = 0 \text{ ও } S_2 = 0 \text{ দুইটি বৃত্তের সাধারণ জ্যা এর সমীকরণ } S_1 - S_2 = 0$$

$x^2 + y^2 + 4x - 2y + 3 = 0$  ও  $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 21 = 0$  বৃত্ত দুইটির সাধারণ জ্যা এর সমীকরণ  
এবং দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর

$$S_1 = x^2 + y^2 + 4x - 2y + 3$$

$$S_2 = x^2 + y^2 - 4x + 6y - 21$$



দুইটি বৃত্তের সাধারণ জ্যা এর সমীকরণ

$$S_1 - S_2 = 0$$

$$(x^2 + y^2 + 4x - 2y + 3) - (x^2 + y^2 - 4x + 6y - 21) = 0$$

$$x^2 + y^2 + 4x - 2y + 3 - x^2 - y^2 + 4x - 6y + 21 = 0$$

$$8x - 8y + 24 = 0$$

$$x - y + 3 = 0$$

দুইটি বৃত্তের সাধারণ জ্যা AB এর সমীকরণ  $x - y + 3 = 0$

$$x^2 + y^2 + 4x - 2y + 3 = 0$$

$$y = x + 3$$

$$x^2 + (x + 3)^2 + 4x - 2(x + 3) + 3 = 0$$

$$x^2 + x^2 + 6x + 9 + 4x - 2x - 6 + 3 = 0$$

$$2x^2 + 8x + 6 = 0$$

$$x^2 + 4x + 3 = 0$$

$$x^2 + 3x + x + 3 = 0$$

$$x(x+3)(x+1) = 0$$

$$(x+3)(x+1) = 0$$

$$x = -3, -1$$

$$y = x + 3$$

$$x = -3$$

$$y = -3 + 3$$

$$y = 0$$

$$y = x + 3$$

$$x = -1$$

$$y = -1 + 3$$

$$y = 2$$

অতএব জ্যা AB এর প্রান্ত বিন্দু  $A(-3, 0)$  ও  $B(-1, 2)$

সাধারণ জ্যা AB এর দৈর্ঘ্য

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

$$= \sqrt{(-3 + 1)^2 + (0 - 2)^2}$$

$$= \sqrt{4 + 4}$$

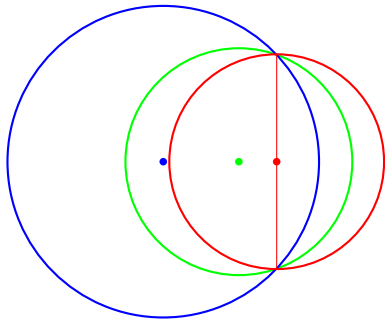
$$= \sqrt{8}$$

$$= 2\sqrt{2}$$

সাধারণ জ্যা এর দৈর্ঘ্য  $2\sqrt{2}$

[ঢাকা বোর্ড-২০১৪]

$x^2 + y^2 + 2x + 3y + 1 = 0$  এবং  $x^2 + y^2 + 4x + 3y + 2 = 0$  বৃত্তদ্বয়ের সাধারণ জ্যা যে বৃত্তের ব্যাস তার সমীকরণ নির্ণয় কর



$$S_1 = x^2 + y^2 + 2x + 3y + 1$$

$$S_2 = x^2 + y^2 + 4x + 3y + 2$$

দুইটি বৃত্তের সাধারণ জ্যা এর সমীকরণ

$$S_1 - S_2 = 0$$

$$(x^2 + y^2 + 2x + 3y + 1) - (x^2 + y^2 + 4x + 3y + 2) = 0$$

$$x^2 + y^2 + 2x + 3y + 1 - x^2 - y^2 - 4x - 3y - 2 = 0$$

$$-2x - 1 = 0$$

$$2x + 1 = 0$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

দুইটি বৃত্তের সাধারণ জ্যা  $2x + 1 = 0$

$$x^2 + y^2 + 2x + 3y + 1 = 0$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 + 2\left(-\frac{1}{2}\right) + 3y + 1 = 0$$

$$\frac{1}{4} + y^2 - 1 + 3y + 1 = 0$$

$$y^2 + 3y + \frac{1}{4} = 0$$

$$y^2 + 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot y + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

$$\left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} - \frac{1}{4}$$

$$\left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{8}{4}$$

$$\left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = 2$$

$$y + \frac{3}{2} = \pm\sqrt{2}$$

$$y = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{2}$$

নির্ণেয় বৃত্তের ব্যাসের প্রান্ত বিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক  $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2} + \sqrt{2}\right)$  এবং  $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right)$

ব্যাসের প্রান্তবিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ

$$(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0$$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right) \left(x + \frac{1}{2}\right) + \left(y + \frac{3}{2} - \sqrt{2}\right) \left(y + \frac{3}{2} + \sqrt{2}\right) = 0$$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 - (\sqrt{2})^2 = 0$$

$$x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + y^2 + 2 \cdot y \cdot \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2 = 0$$

$$x^2 + y^2 + x + 3y + \frac{10}{4} - 2 = 0$$

$$x^2 + y^2 + x + 3y + \frac{5}{2} - 2 = 0$$

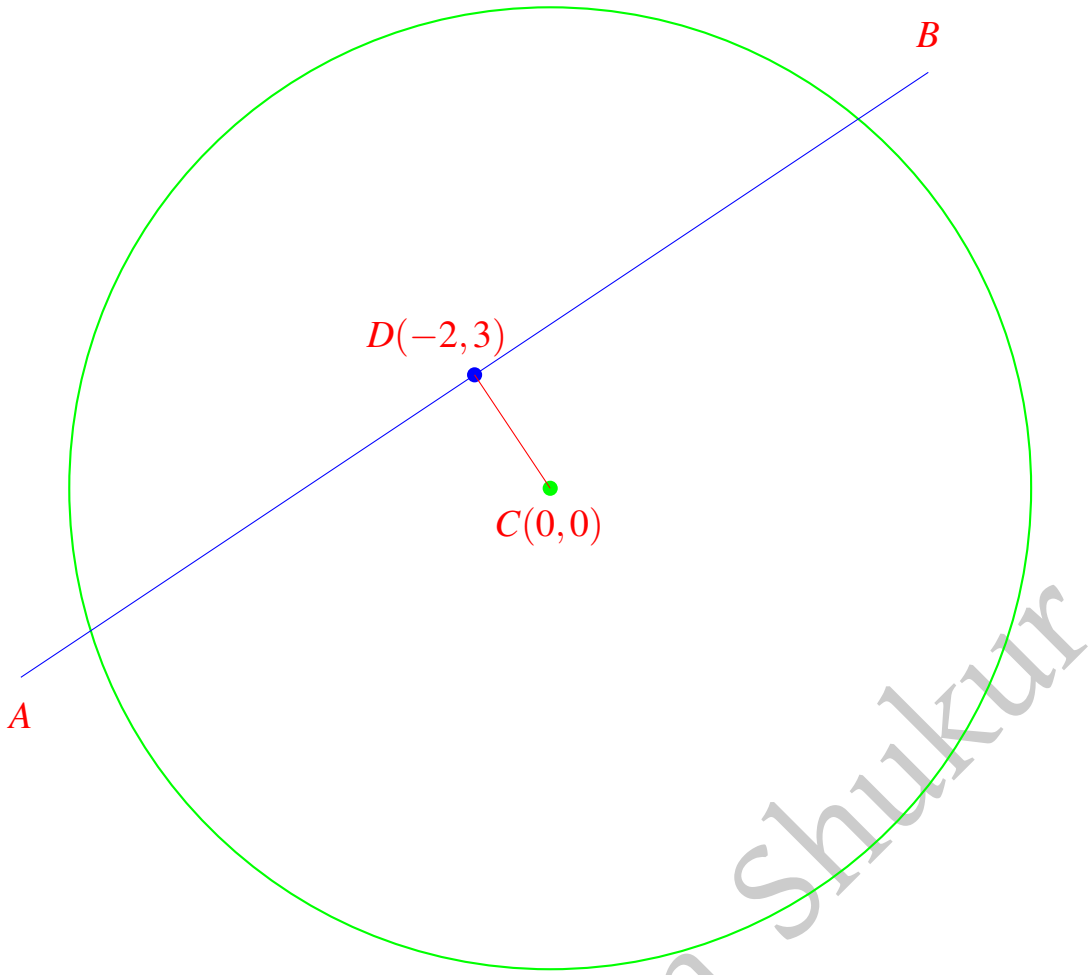
$$x^2 + y^2 + x + 3y + \frac{5 - 4}{2} = 0$$

$$x^2 + y^2 + x + 3y + \frac{1}{2} = 0$$

[দিনাজপুর বোর্ড-২০১৩]

$x^2 + y^2 = 81$  বৃত্তটির জ্যা  $(-2, 3)$  বিন্দুতে সমদ্বিখন্ডিত হয়। জ্যা এর সমীকরণ নির্ণয় কর।

$x^2 + y^2 = 81$  বৃত্তের কেন্দ্র  $C(0, 0)$



$C(0,0)$  ও  $D(-2,3)$  বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ

$$\frac{x-x_1}{x_1-x_2} = \frac{y-y_1}{y_1-y_2}$$

$$\frac{x-0}{0+2} = \frac{y-0}{0-3}$$

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{-3}$$

$$-3x = 2y$$

$$3x + 2y = 0$$

কেন্দ্র থেকে বৃত্তের জ্যা এর উপর লম্ব রেখা জ্যা কে সমদ্বিখন্ডিত করে। D বিন্দু AB রেখাকে সমদ্বিখন্ডিত করে।

$CD$  ও  $AB$  রেখা পরস্পর লম্ব

$3x + 2y = 0$  রেখার লম্ব সমীকরণ

$$2x - 3y + k = 0$$

$$2(-2) - 3(3) + k = 0$$

$$-4 - 9 + k = 0$$

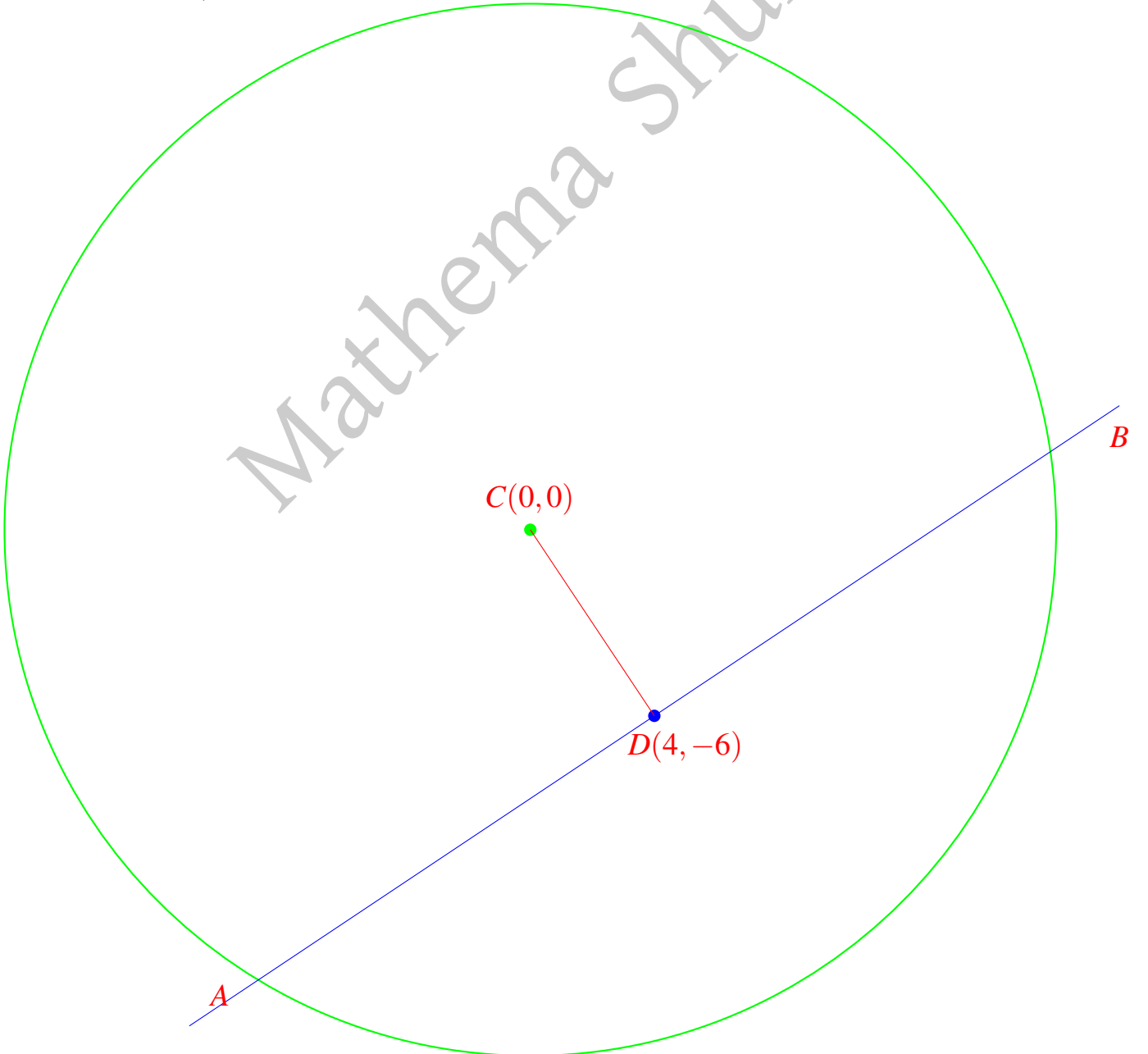
$$k = 13$$

$(CD)3x + 2y = 0$  রেখার লম্ব সমীকরণ  $(AB)2x - 3y + 13 = 0$ , এটি বৃত্তের জ্যা এর সমীকরণ

[রাজশাহী বোর্ড-২০১৪]

$x^2 + y^2 = 144$  বৃত্তের একটি জ্যা এর সমীকরণ নির্ণয় কর যার মধ্যবিন্দু  $(4, -6)$  বিন্দুতে অবস্থিত।

$x^2 + y^2 = 144$  বৃত্তের কেন্দ্র  $C(0, 0)$





$C(0,0)$  ও  $D(4,-6)$  বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ

$$\frac{x-x_1}{x_1-x_2} = \frac{y-y_1}{y_1-y_2}$$

$$\frac{x-0}{0-4} = \frac{y-0}{0+6}$$

$$\frac{x}{-4} = \frac{y}{6}$$

$$6x = -4y$$

$$3x + 2y = 0$$

কেন্দ্র থেকে বৃত্তের জ্যা এর উপর লম্ব রেখা জ্যা কে সমদ্বিখন্ডিত করে। D বিন্দু AB রেখাকে সমদ্বিখন্ডিত করে। সুতরাং AB ও CD রেখা পরস্পর লম্ব।

$3x + 2y = 0$  রেখার লম্ব সমীকরণ

$$2x - 3y + k = 0$$

$$2(4) - 3(-6) + k = 0$$

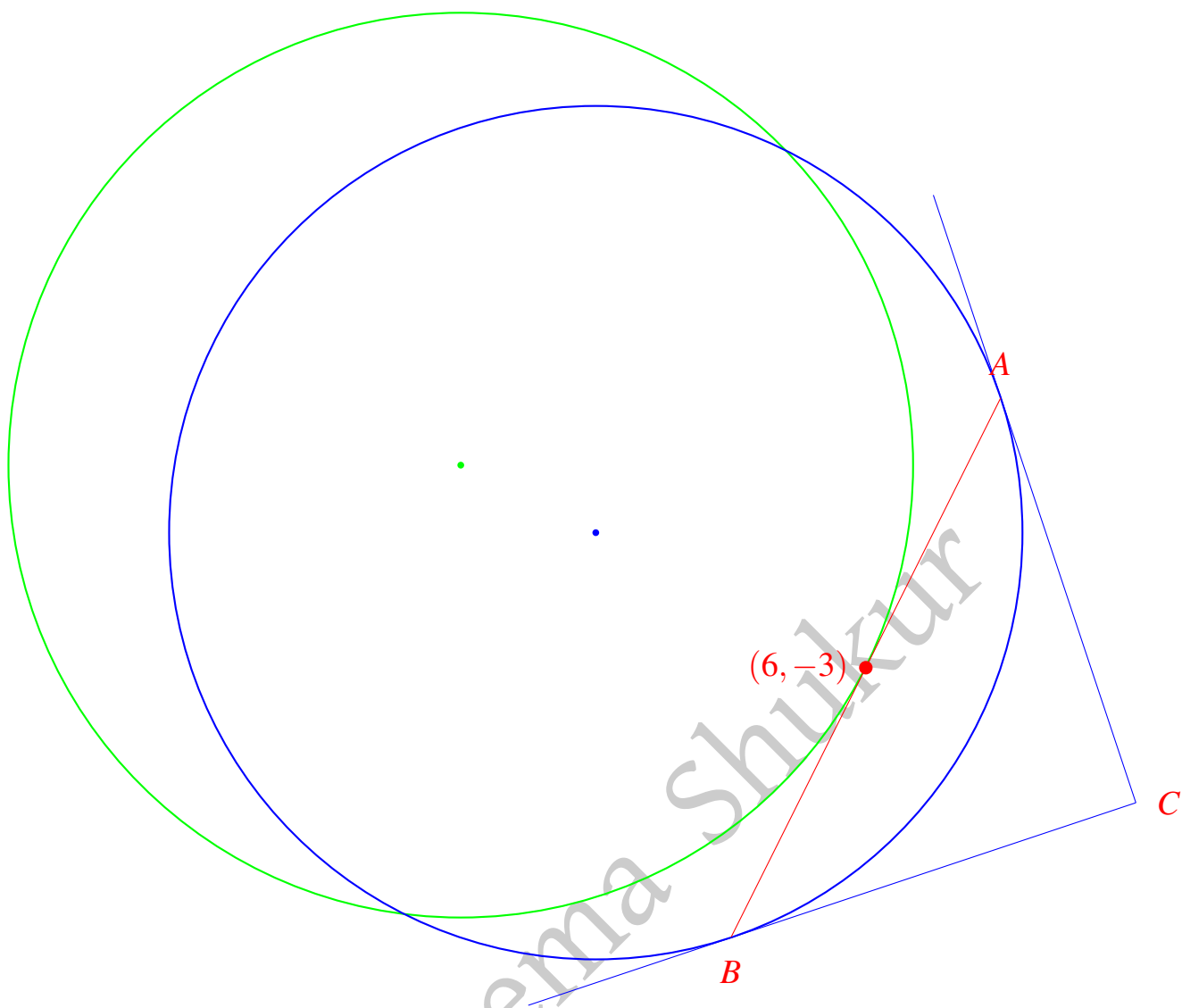
$$8 + 18 + k = 0$$

$$k = -26$$

বৃত্তের জ্যা এর সমীকরণ  $2x - 3y - 26 = 0$

[BUET-2011-2012]

$x^2 + y^2 = 45$  বৃত্তের  $(6, -3)$  বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক  $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 35 = 0$  বৃত্তকে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে। দেখাও যে, A ও B বিন্দুতে স্পর্শকদ্বয় পরস্পর লম্ব।



$x^2 + y^2 = 45$  বৃত্তের  $(6, -3)$  বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের (AB) সমীকরণ

$$\begin{aligned}
 xx_1 + yy_1 &= a^2 \\
 6x + (-3)y &= 45 \\
 6x - 3y &= 45 \\
 2x - y &= 15 \\
 y &= 2x - 15
 \end{aligned}$$

AB রেখার সমীকরণ  $2x - y = 15$

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y - 35 = 0$$

$$y = 2x - 15$$

$$x^2 + (2x - 15)^2 - 4x + 2(2x - 15) - 35 = 0$$

$$x^2 + 4x^2 - 60x + 225 - 4x + 4x - 30 - 35 = 0$$

$$5x^2 - 60x + 160 = 0$$

$$x^2 - 12x + 32 = 0$$

$$x^2 - 8x - 4x + 32 = 0$$

$$x(x - 8) - 4(x - 8) = 0$$

$$(x - 8)(x - 4) = 0$$

$$x = 4, 8$$

$$y = 2x - 15$$

$$x = 8$$

$$y = 2(8) - 15$$

$$y = 16 - 15$$

$$y = 1$$

$$y = 2x - 15$$

$$x = 4$$

$$y = 2(4) - 15$$

$$y = 8 - 15$$

$$y = -7$$

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y - 35 = 0$$

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

$$x^2 + y^2 + 2(-2)x + 2(1)y + (-35) = 0$$

$$g = -2, f = 1, c = -35$$

(4, -7) বিন্দুতে BC স্পর্শকের সমীকরণ

$$xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0$$

$$x_1 = 4, y_1 = -7, g = -2, f = 1, c = -35$$

$$x(4) + y(-7) + (-2)(x + 4) + (1)(y - 7) - 35 = 0$$

$$4x - 7y - 2x - 8 + y - 7 - 35 = 0$$

$$2x - 6y - 50 = 0$$

$$x - 3y - 25 = 0$$

$x - 3y - 25 = 0$  (BC) স্পর্শকের ঢাল  $m_1 = \frac{1}{3}$

(8, 1) বিন্দুতে AC স্পর্শকের সমীকরণ

$$xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0$$

$$x_1 = 8, y_1 = 1, g = -2, f = 1, c = -35$$

$$x(8) + y(1) + (-2)(x + 8) + (1)(y + 1) - 35 = 0$$

$$8x + y - 2x - 16 + y + 1 - 35 = 0$$

$$6x + 2y - 50 = 0$$

$$3x + y - 25 = 0$$

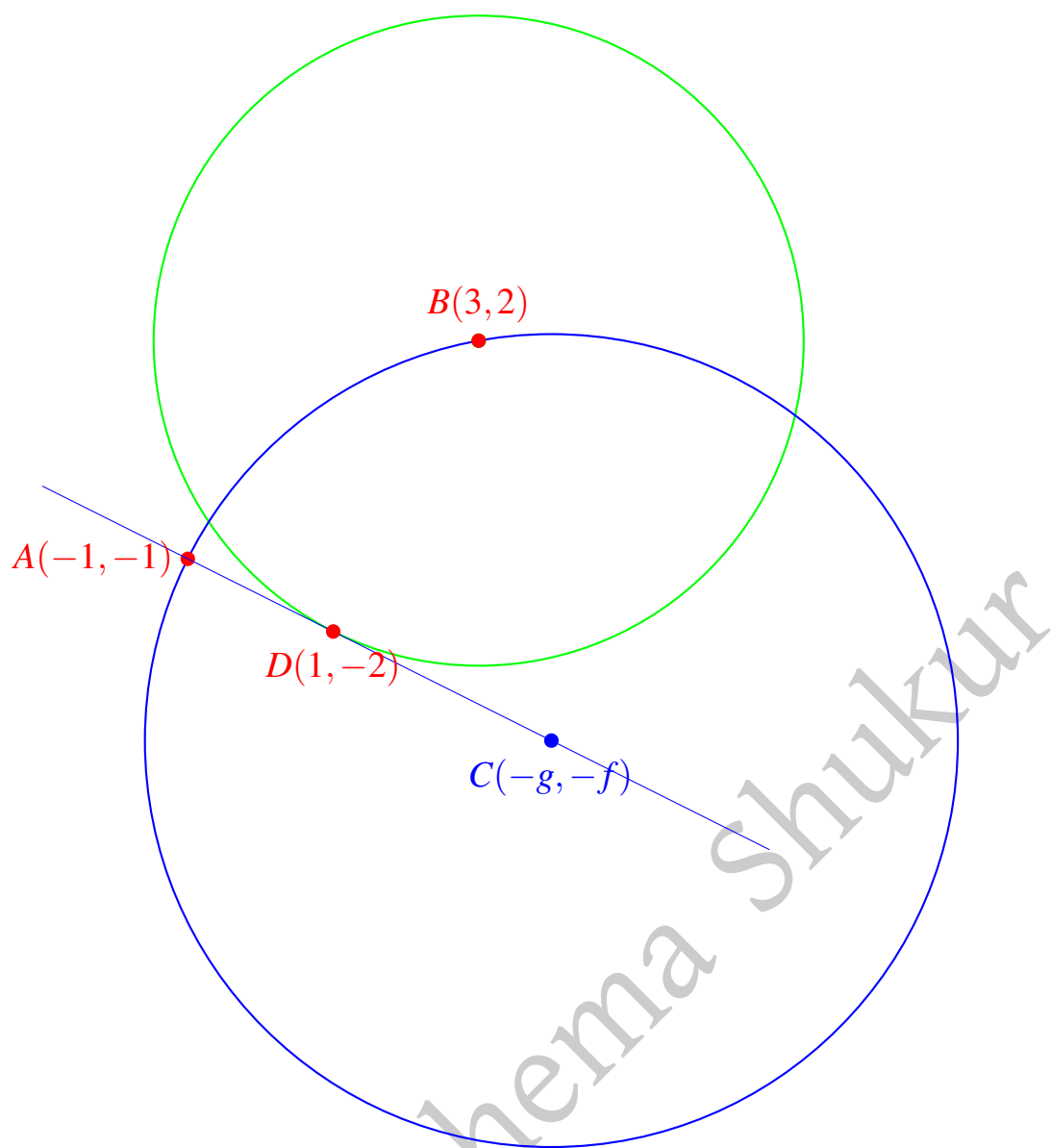
$3x + y - 25 = 0$  (AC) স্পর্শকের ঢাল  $m_2 = -3$

$$m_1 m_2 = \left(\frac{1}{3}\right)(-3) = -1$$

AC ও BC স্পর্শক দুইটি পরস্পর লম্ব

[BUET-2019-2020]

একটি বৃত্ত  $(-1, -1)$  এবং  $(3, 2)$  বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে এবং এর কেন্দ্র  $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 7 = 0$  বৃত্তের  $(1, -2)$  বিন্দুতে স্পর্শকের উপর অবস্থিত। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর



$$x^2 + y^2 - 6x - 4y - 7 = 0$$

$$\boxed{x^2 + y^2 + 2g_1x + 2f_1y + c_1 = 0}$$

$$x^2 + y^2 + 2(-3)x + 2(-2)y + (-7) = 0$$

$$g_1 = -3, f_1 = -2, c_1 = -7$$

(1, -2) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ

$$xx_1 + yy_1 + g_1(x + x_1) + f_1(y + y_1) + c_1 = 0$$

$$x_1 = 1, y_1 = -2, g_1 = -3, f_1 = -2, c_1 = -7$$

$$x(1) + y(-2) + (-3)(x + 1) - 2(y - 2) - 7 = 0$$

$$x - 2y - 3x - 3 - 2y + 4 - 7 = 0$$

$$-2x - 4y - 6 = 0$$

$$x + 2y + 3 = 0$$

CD স্পর্শকের সমীকরণ  $x + 2y + 3 = 0$

ধরি,  $(-1, -1)$  ও  $(3, 2)$  বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ  $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

$$x = -1, y = -1$$

$$(-1)^2 + (-1)^2 + 2g(-1) + 2f(-1) + c = 0$$

$$1 + 1 - 2g - 2f + c = 0$$

$$-2g - 2f + c = -2$$

$$2g + 2f - c = 2 \text{ [EQ01]}$$

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

$$x = 3, y = 2$$

$$(3)^2 + (2)^2 + 2g(3) + 2f(2) + c = 0$$

$$9 + 4 + 6g + 4f + c = 0$$

$$6g + 4f + c = -13 \text{ [EQ02]}$$

বৃত্তের কেন্দ্র  $(-g, -f)$  ,  $x + 2y + 3 = 0$  স্পর্শকের উপর অবস্থিত

$$x + 2y + 3 = 0$$

$$\boxed{x = -g, y = -f}$$

$$-g + 2(-f) + 3 = 0$$

$$-g - 2f + 3 = 0$$

$$g + 2f - 3 = 0 \text{ [EQ03]}$$

$$2g + 2f - c = 2 \text{ [EQ01]}$$

$$6g + 4f + c = -13 \text{ [EQ02]}$$

$$g + 2f - 3 = 0 \text{ [EQ03]}$$

উপরের তিনটি সমীকরণ সমাধান করে পাই

$$(2g + 2f - c) + (6g + 4f + c) = 2 + (-13) \text{ [EQ01 + EQ02]}$$

$$8g + 6f = -11$$

$$\boxed{g = 3 - 2f} \text{ [EQ03]}$$

$$8(3 - 2f) + 6f = -11$$

$$24 - 16f + 6f = -11$$

$$-10f = -11 - 24$$

$$10f = 35$$

$$f = \frac{35}{10}$$

$$f = \frac{7}{2}$$

$$g + 2f - 3 = 0 \text{ [EQ03]}$$

$$f = \frac{7}{2}$$

$$g + 2\left(\frac{7}{2}\right) - 3 = 0$$

$$g + 7 - 3 = 0$$

$$g + 4 = 0$$

$$g = -4$$

$$2g + 2f - c = 2 \text{ [EQ01]}$$

$$g = -4, f = \frac{7}{2}$$

$$2(-4) + 2\left(\frac{7}{2}\right) - c = 2$$

$$-8 + 7 - c = 2$$

$$-1 - c = 2$$

$$c = -3$$

$(-1, -1)$  ও  $(3, 2)$  বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

$$g = -4, f = \frac{7}{2}, c = -3$$

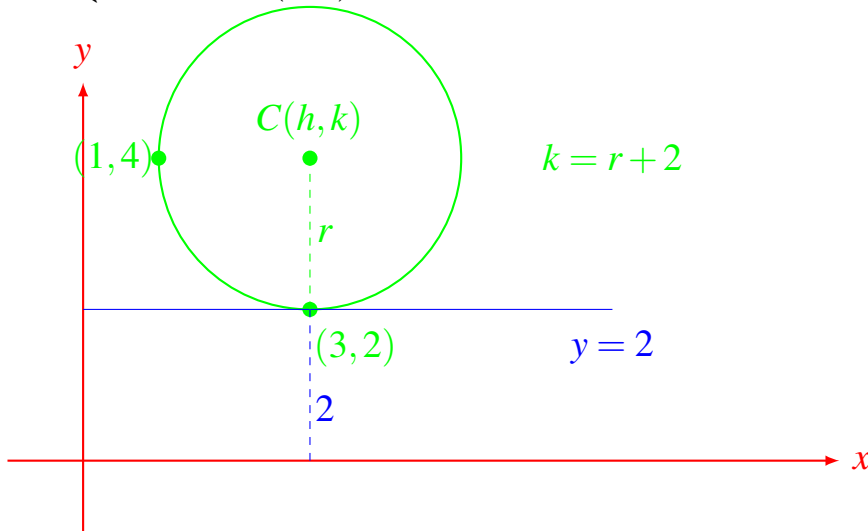
$$x^2 + y^2 + 2(-4)x + 2\left(\frac{7}{2}\right)y - 3 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 8x + 7y - 3 = 0$$

[BUET-2013-2014]

একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা  $y = 2$  রেখাকে  $(3, 2)$  বিন্দুতে স্পর্শ করে এবং  $(1, 4)$  বিন্দু দিয়ে যায়।

ধরি, বৃত্তের কেন্দ্র  $C(h, k)$  ও ব্যাসার্ধ  $= r$





বৃত্তটি  $y = 2$  রেখাকে  $(3, 2)$  বিন্দুতে স্পর্শ করে। সুতরাং কেন্দ্রের ভূজ  $h = 3$  ও কোটি  $k = r + 2$

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

$$h = 3$$

$$(x - 3)^2 + (y - k)^2 = (k - 2)^2$$

$$x = 1, y = 4$$

$$(1 - 3)^2 + (4 - k)^2 = (k - 2)^2$$

$$(-2)^2 + 16 - 8k + k^2 = k^2 - 4k + 4$$

$$4k = 16$$

$$k = 4$$

বৃত্তের সমীকরণ

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

$$h = 3, k = 4$$

$$(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = (4 - 2)^2$$

$$(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 4$$