

Une introduction aux sciences de l'imagerie



Gabriel Peyré
CNRS & DMA
École Normale Supérieure
gabriel.peyre@ens.fr
<https://mathematical-tours.github.io>

December 26, 2018

Chapter 1

Le Transport Optimal et ses Applications

Livres sur le transport optimal [5]

1.1 Le Transport Optimal de Monge

Gaspard Monge, en plus d'être un grand mathématicien, a participé activement à la révolution Française, et a créer l'École Polytechnique ainsi que l'École Normale Supérieure. Motivé par des applications militaire, il a formulé en 1781 le problème du transport optimal [4]. Il s'est posé la question du calcul de la façon la plus économique de transporter de la terre entre deux endroits pour faire des remblais. Dans son texte original, il a fait l'hypothèse que le coût du déplacement d'une unité de masse est égal à la distance parcourue, mais l'on peut utiliser n'importe quel coût adapté au problème à résoudre.

Pour illustrer le problème et sa formulation mathématique, intéressons-nous à la façon optimale de distribuer les croissantes depuis les boulangeries vers le café, le matin dans Paris. Pour simplifier, nous allons supposer qu'il y a uniquement 6 boulangeries et cafés, que l'on peut voir à la figure 1.1 (les boulangeries sont en rouge et les cafés en bleu). Le coût à minimisé est le temps de trajets, et l'on note $C_{i,j}$ le temps entre la boulangerie $i \in \{1, \dots, 6\}$ et le café $j \in \{1, \dots, 6\}$. Par exemple, on a $C_{3,4} = 10$, ce qui signifie qu'il y a 10 minutes de trajet entre la boulangerie numéro 3 et le café numéro 4.

Afin de satisfaire la contrainte d'approvisionnement (que l'on appelle aussi la conservation de la masse), il faut que chaque boulangerie soit connectée à un et un seul café. Comme il y a le même nombre de boulangeries que de café, ceci implique que chaque café est également connecté à une et

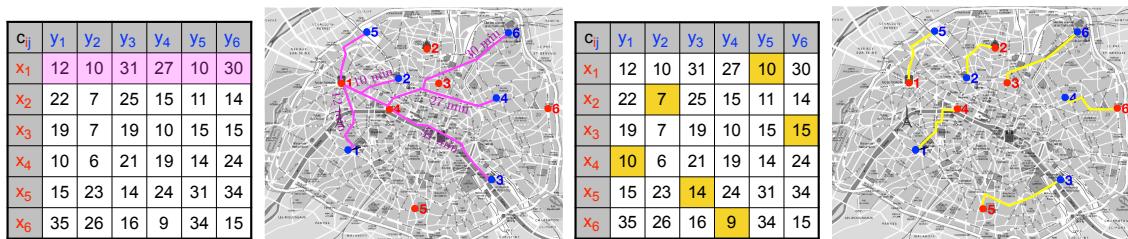


Figure 1.1: Matrice de coût et connexions associées. Gauche: une ligne de la matrice coût. Droite: un choix de permutation valide.

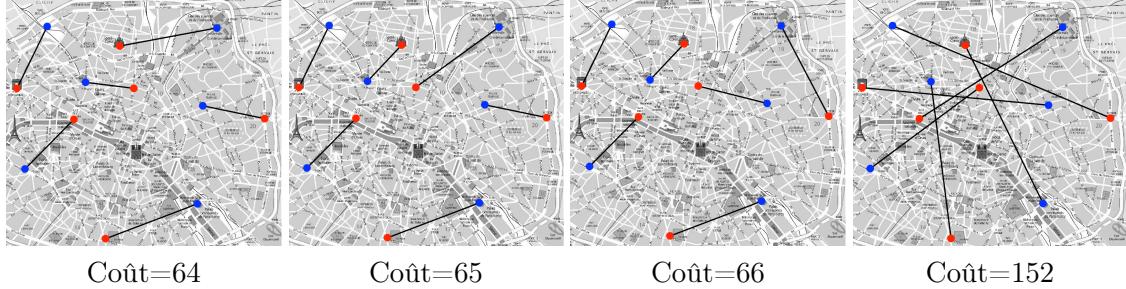


Figure 1.2: Choix de permutation avec différent coûts.



Figure 1.3: Le transport optimal en 1D.

une seule boulangerie. On va noter

$$\sigma : i \in \{1, \dots, 6\} \mapsto j \in \{1, \dots, 6\}$$

un tel choix de connexion. La figure 1.1 illustre au centre et à droite l'exemple

$$\sigma(1) = 5, \sigma(2) = 2, \sigma(3) = 6, \sigma(4) = 1, \sigma(5) = 3, \sigma(6) = 4. \quad (1.1)$$

La contrainte de conservation de masse signifie que σ est une bijection de l'ensemble $\{1, \dots, 6\}$ dans lui-même. On dit ainsi que σ est une permutation.

Le coût de transport associé à une telle bijection est la somme des coût $C_{i,\sigma(i)}$ sélectionnés par la permutation σ , c'est-à-dire

$$\text{Coût}(\sigma) \stackrel{\text{def.}}{=} C_{1,\sigma(1)} + C_{2,\sigma(2)} + C_{3,\sigma(3)} + C_{4,\sigma(4)} + C_{5,\sigma(5)} + C_{6,\sigma(6)}.$$

Par exemple, pour la bijection (1.1) montrée à la figure 1.1, on obtient comme coût

$$C_{1,5} + C_{2,2} + C_{3,6} + C_{4,1} + C_{5,3} + C_{6,4} = 10 + 7 + 15 + 10 + 14 + 9 = 65.$$

Le problème de Monge consiste à chercher la permutation σ qui a le coût minimum, c'est-à-dire résoudre le problème d'optimisation

$$\min_{\sigma} \{\text{Coût}(\sigma) ; \sigma \in \text{Perm}(\{1, \dots, 6\})\}$$

où l'on a noté $\text{Perm}(\{1, \dots, 6\})$ l'ensemble des permutations de l'ensemble $\{1, \dots, 6\}$.

La figure 1.2 montre que la permutation (1.1) n'est pas la meilleure : il existe par exemple une autre permutation qui a un coût de 64. Mais est-ce la meilleure ? Il se trouve que oui, on peut en effet tester sur un ordinateur toutes les permutations de $\{1, \dots, 6\}$ et calculer leur coût. Combien y a-t-il de permutation au total ? Il s'agit

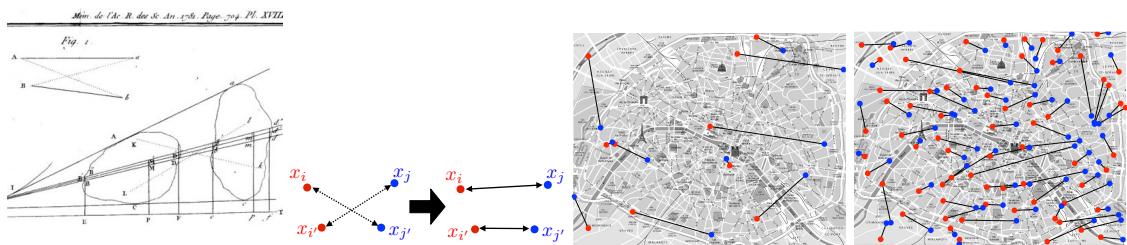


Figure 1.4: Le transport optimal en 2D. Gauche: extrait de l'article de Monge [4].

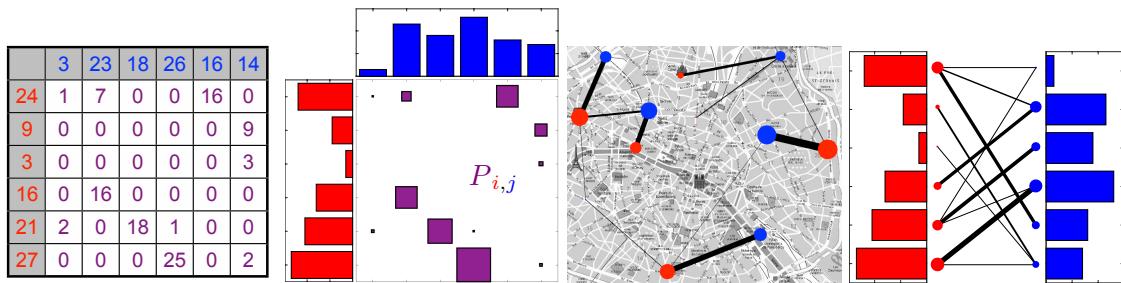


Figure 1.5: Différentes façons de représenter une matrice de couplage.

1.2 Le Transport Optimal de Kantorovitch

[3]

[2]

Théorème de birkhoff-von Neumann.

[1, 6]

1.3 Les Applications

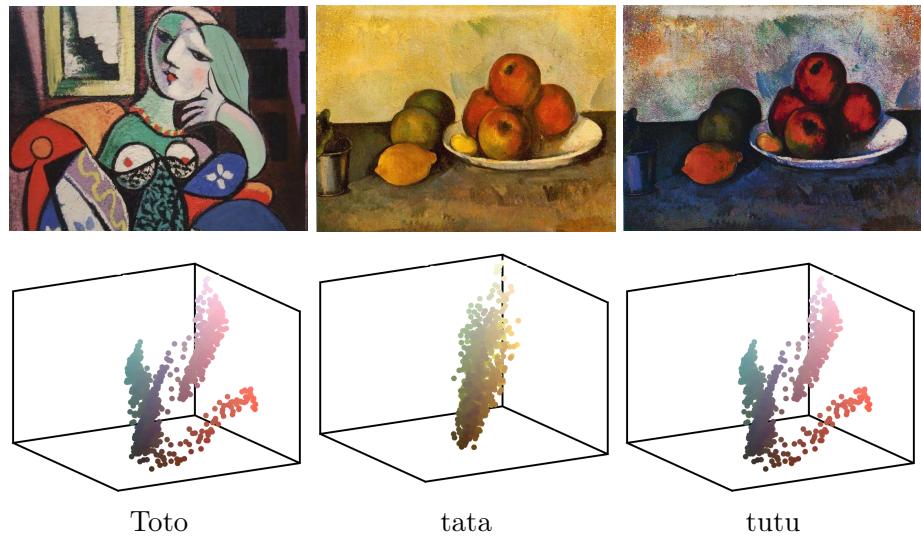


Figure 1.6: Exemple de transfert d'histogrammes à l'aide du transport optimal.

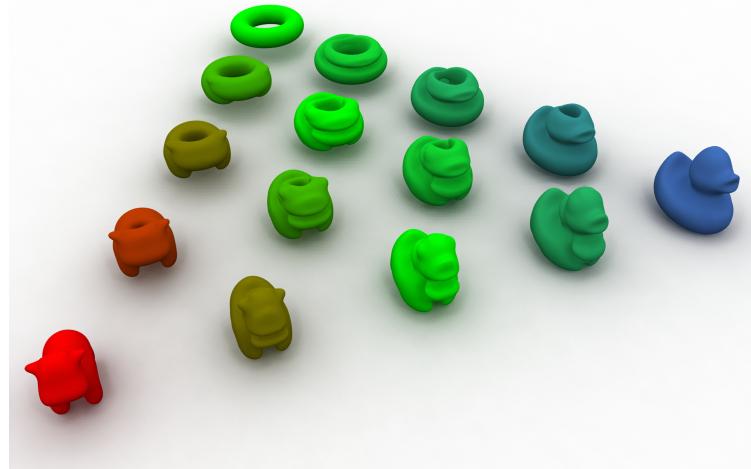


Figure 1.7: Exemple d'interpolation barycentrique entre des formes 3D.



Figure 1.8: Exemple d'interpolation barycentrique entre des formes 3D.

Bibliography

- [1] Garrett Birkhoff. Tres observaciones sobre el algebra lineal. *Universidad Nacional de Tucumán Revista Series A*, 5:147–151, 1946.
- [2] George B Dantzig. Application of the simplex method to a transportation problem. *Activity Analysis of Production and Allocation*, 13:359–373, 1951.
- [3] Leonid Kantorovich. On the transfer of masses (in russian). *Doklady Akademii Nauk*, 37(2):227–229, 1942.
- [4] Gaspard Monge. Mémoire sur la théorie des déblais et des remblais. *Histoire de l'Académie Royale des Sciences*, pages 666–704, 1781.
- [5] Cedric Villani. *Topics in Optimal Transportation*. Graduate Studies in Mathematics Series. American Mathematical Society, 2003.
- [6] John Von Neumann. A certain zero-sum two-person game equivalent to the optimal assignment problem. *Contributions to the Theory of Games*, 2:5–12, 1953.