

Errata

(Mathematische Einführung in Data Science von Sven-Ake Wegner)

1. Juni 2025

- Seite 10, Zeile −1:

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \sum_{i=1}^n x_i y_i - \bar{y} \sum_{i=1}^n x_i - \bar{x} \sum_{i=1}^n y_i + n \bar{x} \bar{y} = \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right) - n \bar{x} \bar{y}.$$

- Seite 11, Zeile −1:

$$0 = \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i) = a \sum_{i=1}^n x_i + nb - \sum_{i=1}^n y_i = an\bar{x} + n\mathbf{b} - n\bar{y},$$

- Seite 13, Zeile 22: Seitenlänge

- Seite 15, Zeile −10: ... konstante Zufallsvariable \mathbf{av} .

- Seite 15, Zeile −3 und Seite 16, Zeile 2: $\mathbf{Var}(\overline{x\mathcal{E}})^{(n)}$

- Seite 15, Zeile −2: $\dots + \frac{2}{n^2} \sum_{i < j} x_i x_j \mathbb{E}(\mathcal{E}_i) \mathbb{E} \mathcal{E}_j)$

- Seite 16, Zeile 3: da $\overline{x^{(n)^2}} = \mathbf{var}(x^{(n)}) + \overline{x^{(n)}}^2$ als Summe ...

- Seite 17, Zeile 8: Ist Letzteres der Fall, so ist $\text{sign}(r_{xy}) = \text{sign}(\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle) = \dots$

- Seite 17, Zeile 11: r_{xy}

- Seite 18, Zeile −3: $\dots f^*(x) = \langle a^*, x \rangle + b^* \dots$

- Seite 19, Zeile −6: ... berechnen wir (mit nur für den Moment $\phi(\tilde{a}) = \langle \tilde{a}, X^T X \tilde{a} \rangle$):

- Seite 25, Zeile −5: Im Bild muss es die z -Achse sein.

- Page 26, Zeile 9: ... und $(w, b) = (w_1, \dots, w_d, b)$ für ...

- Seite 26, Zeile 18: $f(\mathbf{z}) = \text{sig}(\langle w, \cdot \rangle)$

- Seite 26, Zeile −1: $\mathbb{P}[Y_i(\mathbf{f}) = y_i \text{ für alle } i] = \dots$

- Seite 27, Zeile 2: $L: \{f: \mathbb{R}^d \rightarrow (0, 1) \mid f \text{ logistische Funktion}\} \rightarrow \mathbb{R}$

- Seite 26, Zeile −1: $h'(t) = \text{sig}(t) + 1$

- Seite 30, Seite 6: ... überlappen, wenn für jedes $w \in \mathbb{R}^{d+1} \setminus \{0\}$ ein k existiert, ...

- Seite 30, Zeile 9: falls $\text{sig}(\langle w, \hat{x} \rangle) \geq 1/2$

- Seite 31, Zeile 12: ... und $\langle w, \hat{w}_k \rangle < 0$ gelten.

- Seite 38, Zeile 13: ... und $x_1, \dots, x_k \in D_1 := \{\mathbf{x} \mid (x, y) \in D\}$ gelten.

- Seite 38, Zeile 14: $x_1 \in \underset{z \in D_1}{\text{argmin}} \rho(x, z)$ sowie $x_j \in \underset{z \in D_1 \setminus \{x_1, \dots, x_{j-1}\}}{\text{argmin}} \rho(x, z)$ für $j \geq 2$

- Seite 38, Zeile 20: $f(x) \in \underset{y \in Y}{\text{argmax}} N(y)$

- Page 37, Line 1–9:

```
1: function K-NN KLASSIFIZIERER( $D, k, x$ )
2:    $D' \leftarrow D, A \leftarrow \emptyset$ 
3:   for  $j \leftarrow 1$  to  $k$  do
4:      $z^* \leftarrow \underset{z \in D'}{\text{argmin}} \rho(x, \pi_1(z))$ 
5:      $A \leftarrow A \cup \{z^*\}, D' \leftarrow D' \setminus \{z^*\}$ 
6:   for  $y$  in  $Y$  do
7:      $N(y) \leftarrow \#\{a \in A \mid \pi_2(a) = y\}$ 
8:    $\ell \leftarrow \underset{y \in Y}{\text{argmax}} N(y)$ 
9:   return  $\ell$ 
```

Hierbei bezeichnet $\pi_2(x, y) = y$ die Projektion auf den zweiten Eintrag von $(x, y) \in D$ und y^* das Label von z^* .

- Seite 39, Zeile −2: ... vorgenannten grauen Punkt \mathbf{x} mit ...

- Seite 41, Zeile 6–7: ... Trainingsdaten D_{Train} und Testdaten D_{Test} . Dann bestimmt man einen Klassifizierer $f: X \rightarrow Y$ anhand von D_{Train} , und stellt fest, welcher Anteil der Punkte aus D_{Test} durch f korrekt klassifiziert wird.

- Seite 41, Zeile 16: ..., sowie $k < n$.
- Seite 41, Zeile 17: Die Berechnung der k -nächsten Nachbarn von x kann so implementiert werden, dass dabei höchstens $(n \cdot d \cdot k)$ -viele Multiplikationen anfallen.
- Seite 41, Zeile 21: In der euklidischen Metrik müssen für eine solche Distanz $(d-1)$ -viele Multiplikationen ausgeführt werden, wenn wir für die Berechnung des Argmin die Wurzel weglassen. Dies führt auf

$$(d-1) \cdot (n + (n-1) + \dots + (n-k+1)) \leq C \cdot d \cdot k \cdot n$$

Multiplikationen mit einem geeigneten $C \in \mathbb{N}$.

- Seite 42, Zeile 7: ..., wählen wir k -nächste Nachbarn x_1, \dots, x_k von x und bezeichnen mit y_1, \dots, y_k deren Label.

- Seite 42, Zeile 13: $f: X \rightarrow Y, f(x) = \frac{\sum_{i=1}^k w(x_i, x) \cdot y_i}{\sum_{i=1}^k w(x_i, x)}$

- Seite 43, Zeile 11: $\tilde{x}^{(i)} = \left(a + \frac{(x_1^{(i)} - \min_{j=1, \dots, n} x_1^{(j)})(b-a)}{\max_{j=1, \dots, n} x_1^{(j)} - \min_{j=1, \dots, n} x_1^{(j)}}, \dots \right)$

- Seite 43, Zeile 13: $\tilde{x}^{(i)} = \left(\frac{x_1^{(i)} - x_1^{(c)}}{\sigma_1}, \dots \right)$

- Seite 44, Zeile -9: $\rho(x^{(1)}, x^{(4)}) = 3.681$

- Seite 48, Zeile 5-6: ..., dass sich die Texte 1 und 2 deutlich kosinusähnlicher sind als 1 und 3 bzw. 2 und 3.

- Seite 48, Zeile 16: Einige solcher Methoden diskutieren wir in Aufgabe 3.10.

- Seite 48, Zeile 26: ~~Der Kosinusabstand wird hingegen immer kleiner, je öfter das Wort im zweiten Text auftritt.~~ Der Kosinusabstand verhält sich hier natürlicher, weil sich der Skalarprodukt vergrößert, wenn sich die Häufigkeit des fixierte Wortes im zweiten Text erhöht.

- Seite 52, Zeile -14: D

- Seite 54, Zeile 12: Für endliche Teilmengen $A, B \subseteq X$ definieren wir ...

- Seite 55, Zeile 21-23: ...bevor der minimale Abstand zwischen den Clustern in der nächsten Runde erstmalig über einen einzugebenden Wert $\delta > 0$ wachsen würde.

- Seite 55, Zeile 24:

```

1: function VERKNÜPFUNGSBASIERTES CLUSTERING ( $X, \rho, D, \delta$ )
2:    $k \leftarrow \#D$ 
3:   for  $i \leftarrow 1$  to  $k$  do
4:      $C_i \leftarrow \{x_i\}$ 
5:   while  $\min_{i \neq j} \rho(C_i, C_j) \leq \delta$  and  $k \geq 2$  do
6:      $m \leftarrow 0$ 
7:      $(i^*, j^*) \leftarrow \operatorname{argmin}_{i \neq j} \rho(C_i, C_j)$ 
8:     for  $\ell \leftarrow 1$  to  $k-1$  do
9:       if  $\ell = \min(i^*, j^*)$  then
10:         $C_\ell \leftarrow C_{i^*} \cup C_{j^*}$ 
11:       if  $\ell = \max(i^*, j^*)$  then
12:         $m \leftarrow 1$ 
13:         $C_\ell \leftarrow C_{\ell+m}$ 
14:       else
15:         $C_\ell \leftarrow C_{\ell+m}$ 
16:      $k \leftarrow k-1$ 
17:   return  $C_1, \dots, C_k$ 

```

- Seite 56, Zeile 4: ..., wie in Definition 4.2, ...

- Seite 56, Zeile 8: Aufgabe 4.2

- Seite 56, Zeile -2: $K: \mathbb{C}_k \rightarrow \mathbb{R}$

- Seite 58, Zeile –16: Der folgende Pseudocode **approximiert** einen Minimierer der k -means-Kostenfunktion.
- Seite 58, Pseudocode:

```

1: function K-MEANS ( $D, k, X, \rho$ )
2:    $\mu_1, \dots, \mu_k \leftarrow$  pairwise different points from  $X$ 
3:   for  $i \leftarrow 1$  to  $k$  do
4:      $C_i \leftarrow \{x \in D \mid i \in \operatorname{argmin}_{j=1, \dots, k} \rho(x, \mu_j)\}$ 
5:    $U \leftarrow \text{True}$ 
6:   while  $U = \text{True}$  do
7:      $U \leftarrow \text{False}$ 
8:     for  $i \leftarrow 1$  to  $k$  do
9:        $\mu_i \leftarrow \mu(C_i)$ 
10:    for  $i \leftarrow 1$  to  $k$  do
11:       $C'_i \leftarrow \{x \in D \mid i \in \operatorname{argmin}_{j=1, \dots, k} \rho(x, \mu_j)\}$ 
12:      if  $C'_i \neq C_i$ 
13:         $C_i \leftarrow C'_i$ 
14:       $U \leftarrow \text{True}$ 
15:  return  $C_1, \dots, C_k$ 

```

Hierbei ist in den Zeilen 4 und 9 darauf zu achten, dass man jeweils ein i im Argmin auswählt, falls dieses nicht eindeutig ist.

- Seite 59, Zeile 8:

$$\mu(A) \in \operatorname{argmin}_{\mu \in A} \sum_{x \in A} \rho(x, \mu)^2 \quad \text{bzw.} \quad \mu(A) \in \operatorname{argmin}_{\mu \in X} \sum_{x \in A} \rho(x, \mu)$$

- Seite 59, Zeile –5: Beweis. Für $j \geq 1$ bezeichne $(C_1^{(j)}, \dots, C_k^{(j)})$ das Clustering, welches in der j -ten Runde des Algorithmus definiert wird.
- Seite 59, Zeile –2: $K(C_1^{(j)}, \dots, C_k^{(j)}) = \min_{\mu_1, \dots, \mu_k \in X} \sum_{i=1}^k \sum_{x \in C_i^{(j)}} \rho(x, \mu_i)^2$
- Seite 60, Zeile 5: ... Zeile 11 von Algorithmus ...
- Dort entspricht Bild 1b der vorletzten Zeile in der Abschätzung und Bild 2a der darüber.
- Seite 60, Zeile 13: weil wir ja gerade wegen $\rho(x_3, \mu_1) < \rho(x_3, \mu_2)$ den Punkt x_3 vom Cluster C_2 in Bild 1b zu Cluster C_1 in Bild 2a verschoben haben.
- Seite 62, Zeile 4: **Mittelpunkten Startwerten**
- Seite 62, Zeile 5: $\operatorname{argmin}_{i=1,2} \|x - \mu_i\|$
- Seite 64, Zeile 7: ... sondern ~~nur~~ z.B. nur durch eine Liste ...
- Seite 64, Zeile 10: $A = (a_{ij})_{i,j=1, \dots, n}$
- Seite 64, Zeile 12: $L = (\ell_{ij})_{i,j=1, \dots, n}$
- Seite 65, Zeile 11: Wir beginnen mit zwei Beispielen.
- Seite 66, Zeile 2: ... In Beispiel 5.7 ist $\lambda_2 \neq 0$ und es gibt keine Cluster (oder anders ausgedrückt nur ein einziges), in Beispiel 5.8 ...
- Seite 69, Zeile 15: Für die andere Richtung sei $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis aus Eigenvektoren zu den λ_i und $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Unterraum mit $\dim U = n - k + 1$. Dann ist aus Dimensionsgründen $U \cap \operatorname{span}\{v_1, \dots, v_k\} \neq \{0\}$ und wir können $0 \neq x = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k \in U$ wählen. Dann folgt

$$\frac{\langle x, Mx \rangle}{\langle x, x \rangle} = \frac{\sum_{i=1}^k \lambda_i \alpha_i^2}{\sum_{i=1}^k \alpha_i^2} \leq \frac{\lambda_k \sum_{i=1}^k \alpha_i^2}{\sum_{i=1}^k \alpha_i^2} = \lambda_k,$$

weil die λ_i wachsend sind. Damit erhalten wir $\min_{0 \neq x \in U} \frac{\langle x, Mx \rangle}{\langle x, x \rangle} \leq \lambda_k$ und es folgt

$$\max_{\substack{U \subseteq \mathbb{R}^n \\ \dim U = n - k + 1}} \min_{\substack{x \in U \\ x \neq 0}} \frac{\langle x, Mx \rangle}{\langle x, x \rangle} \leq \lambda_k.$$

- Seite 70, Zeile 3–4: Wir wählen $v_1 = \mathbf{1}$ als Eigenvektor zum Eigenwert λ_1 . Dann gelten für Eigenwert und Eigenvektor λ_2 bzw. v_2 mit $\|v_2\| = 1 \dots$
- Seite 70, Zeile 7: $v_2 \in \dots$
- Seite 70, Zeile –3: Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit $\deg(v) > 0$ für alle $v \in V$.
- Seite 71, Zeile 5: $\emptyset \neq S \subset V$
- Seite 72, Zeilen 6 und 8: $\emptyset \neq S \subset V$
- Seite 72, Zeile –4:

$$\lambda_2(\mathcal{L}) = \min_{\substack{x \neq 0 \\ \langle Dx, \mathbf{1} \rangle = 0}} \frac{\sum_{\{i,j\} \in E} (x_i - x_j)^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2 d_i}.$$

- Seite 73, Zeile 2:

$$\mathcal{L}D^{1/2}\mathbf{1} = D^{-1/2}LD^{-1/2}D^{1/2}\mathbf{1} = D^{-1/2}L\mathbf{1} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Proposition} \\ 5.6}}{=} D^{-1/2}0\mathbf{1} = 0D^{1/2}\mathbf{1}.$$

- Seite 73, Zeile 4:

$$\begin{aligned} \lambda_2(\mathcal{L}) &\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Satz} \\ 5.13}}{=} \min_{\substack{x \neq 0 \\ \langle x, D^{1/2}\mathbf{1} \rangle = 0}} \frac{\langle x, \mathcal{L}x \rangle}{\langle x, x \rangle} \stackrel{(*)}{=} \min_{\substack{y \neq 0 \\ \langle D^{1/2}y, D^{1/2}\mathbf{1} \rangle = 0}} \frac{\langle D^{1/2}y, \mathcal{L}D^{1/2}y \rangle}{\langle D^{1/2}y, D^{1/2}y \rangle} \\ &= \min_{\substack{y \neq 0 \\ \langle y, D\mathbf{1} \rangle = 0}} \frac{\langle y, Ly \rangle}{\langle y, Dy \rangle} = \min_{\substack{y \neq 0 \\ \langle Dy, \mathbf{1} \rangle = 0}} \frac{\sum_{\{i,j\} \in E} (y_i - y_j)^2}{\sum_{i=1}^n y_i^2 d_i} \end{aligned}$$

- Seite 73, Zeile 10: Ist G d -regulär (d.h., es gilt $\deg(v) = d$ für alle Vertices $v \in V$ mit einem $d \in \mathbb{N}$), so gilt ...
- Seite 73, Zeile –9: (ii) Für $r \leq k \leq n-1$ gelten ...
- Seite 73, Zeile –2:

$$\text{vol } S_k^c - \text{vol } S_{k+1}^c = \sum_{i=k+1}^n d_i - \sum_{i=k+2}^n d_i = d_{k+1}$$

- Seite 74, Zeile 15: $\emptyset \neq S \subset V$
- Seite 74, Zeile 16: $\text{Cheeg}(G) = \frac{\#\partial S}{\text{vol } S}$
- Seite 74, Zeile 20:

$$\langle Dx, \mathbf{1} \rangle = \sum_{i=1}^n d_i x_i = \dots$$

- Seite 75, Zeile 7–8:

$$\begin{aligned} \dots &= \text{vol } S - \text{vol } S \cdot \frac{\text{vol } S}{\text{vol } S + \text{vol } S^c} \\ &\geq \text{vol } S - \text{vol } S \cdot \frac{\text{vol } S}{2 \text{vol } S}, \end{aligned}$$

- Seite 75, Zeile –6 (Gleichung (5.2)):

$$\dots \text{ und } \langle Dx, \mathbf{1} \rangle = \sum_{i=1}^n d_i x_i = 0$$

- Seite 75, Zeile –5: ..., zu zeigen, dass $\lambda_2 \geq \alpha^2/2$ ist, ...
- Seite 76, Zeile 4:

$$\begin{bmatrix} x_1 - x_r \\ \vdots \\ x_{r-1} - x_r \\ 0 \\ x_{r+1} - x_r \\ \vdots \\ x_n - x_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - x_r \\ \vdots \\ x_{r-1} - x_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x_r - x_{r+1} \\ \vdots \\ x_r - x_n \end{bmatrix} =: p - n.$$

- Seite 77, Zeile 4:

$$\begin{aligned}
\lambda_2 &= \frac{\sum_{\{i,j\} \in E} (x_i - x_j)^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2 d_i} \\
&\geq \frac{\sum_{\{i,j\} \in E} ((p_i - p_j)^2 + (n_i - n_j)^2)}{\sum_{i=1}^n (p_i^2 + n_i^2) d_i} \\
&\stackrel{(5.3)}{\geq} \frac{\sum_{\{i,j\} \in E} (p_i - p_j)^2 + \sum_{\{i,j\} \in E} (n_i - n_j)^2}{\sum_{i=1}^n p_i^2 d_i + \sum_{i=1}^n n_i^2 d_i} \\
&\stackrel{(5.4)}{=} \min \left(\frac{\sum_{\{i,j\} \in E} (p_i - p_j)^2}{\sum_{i=1}^n p_i^2 d_i}, \frac{\sum_{\{i,j\} \in E} (n_i - n_j)^2}{\sum_{i=1}^n n_i^2 d_i} \right) \\
&\stackrel{(5.5)}{\geq} \min \left(\frac{\sum_{\{i,j\} \in E} (p_i - p_j)^2}{\sum_{i=1}^n p_i^2 d_i}, \frac{\sum_{\{i,j\} \in E} (p_i + p_j)^2}{\sum_{\{i,j\} \in E} (p_i + p_j)^2}, \dots \right) \\
&=: \min \left(\frac{Z}{N}, \dots \right).
\end{aligned}$$

- Seite 77, Zeile 14:

$$N = \sum_{i=1}^n p_i^2 d_i \cdot \sum_{\{i,j\} \in E} (p_i + p_j)^2 \geq \sum_{i=1}^n p_i^2 d_i \cdot \sum_{\{i,j\} \in E} 2(p_i^2 + p_j^2)$$

- Seite 78, Zeile 10:

$$\dots = \left(\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \mathbb{1}_E(i, j) \sum_{k=i}^{j-1} (p_k^2 - p_{k+1}^2) \right)^2$$

↑
Teleskop-
summe

- Seite 79, Zeile 13: Als Letztes wollen wir noch notieren, dass Satz 5.21 **zusammen mit Bemerkung 5.17(i)** eine obere Schranke für den Eigenwert $\lambda_2(\mathcal{L})$ liefert.

Korollar 5.22. Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit $\deg(i) > 0$ für alle $i \in V$. Dann gilt für den zweitkleinsten Eigenwert λ_2 der normalisierten Laplacematrix von G die Abschätzung $\lambda_2 \leq 2$. □

- Seite 84, Zeile -3: Sei eine Datenmenge $D = \{x_1, \dots, x_n\} \subseteq \mathbb{R}^d$ optimieren, ...
- Seite 85, Line 5:

$$\sum_{j=1}^k \|Xv_j\|^2 \geq \sum_{j=1}^k \|Xw_j\|^2$$

- Seite 85, Zeile -5:

$$\{v_1, \dots, v_k\} \in \underset{\substack{\{\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_k\} \subseteq \mathbb{R}^d \\ \text{Orthonormal-} \\ \text{system}}}{\operatorname{argmax}} \sum_{j=1}^n \|X\tilde{v}_j\|^2.$$

- Seite 86, Zeile 16: Sei $D = \{x_1, \dots, x_n\} \subseteq \mathbb{R}^d$ gegeben und ...
- Seite 86, Zeile 19: sukzessive für $j = 1, \dots, k$ wählen, wobei ...
- Seite 87, Zeile 5: $\langle w_{k+1}, v_i \rangle = \langle w_{k+1}, \underbrace{v_i - \pi_W(v_i)}_{\perp W} \rangle + \langle w_{k+1}, \underbrace{\pi_W(v_i)}_{\in U} \rangle = 0 + 0 = 0$
- Seite 87, Zeilen 11 und 14: $\mathcal{A}X$
- Seite 88, Line -11: Sei $D = \{x_1, \dots, x_n\} \subseteq \mathbb{R}^d$ gegeben und ...
- Seite 88, Zeile -7: ..., falls $r = \dim \operatorname{span} D > 0$. Falls $r = 0$, so sind alle σ_k Null.
- Seite 88, Zeile -5: Für $k \geq r + 1$ wenden wir die Gleichung aus dem Beweis von Lemma 6.2 zweimal an. Einerseits auf V_k mit ONB $\{v_1, \dots, v_k\}$, und andererseits auf V_{k-1} mit ONB $\{v_1, \dots, v_{k-1}\}$. Durch Umstellen erhalten wir

$$\sigma_k^2 = \|Xv_k\|^2 = \sum_{i=1}^n \operatorname{dist}(x_i, V_{k-1})^2 - \sum_{i=1}^n \operatorname{dist}(x_i, V_k)^2.$$

Weil $V_r \subseteq V_{k-1} \subseteq V_k$ gilt, impliziert Lemma 6.4 dass beide Terme auf der rechten Seite verschwinden, also $\sigma_{r+1}, \dots, \sigma_d = 0$ gilt.

- Seite 89, Zeile –9: Bestimmen Sie, durch Anwendung von Theorem 6.3 in Kombination mit einem Python Paket zur Maximierung unter nichtlinearen Nebenbedingungen, einen 1-bestpassenden Unterraum zu ...
- Seite 91, Zeile 12: ... Singulärwert von A , ...
- Seite 92, Zeile 8: $\|u\|^2 = \|Av\|^2 = \langle Av, Av \rangle = \dots$
- Seite 95, Zeile 6: Ist $1 \leq k < p$ und haben wir $\sigma_{k+1} = \dots = \sigma_p = 0$, ...
- Seite 96, Zeile –9: $V \in \mathbb{R}^{d \times d}$
- Seite 96, Zeile –8: Dann sind genau r -viele der σ_i ungleich Null. Dies sind die Singulärwerte von A ...
- Seite 98, Zeile 8: ... und $\{v_1, \dots, v_r\}$ irgendein Orthonormalsystem ...
- Seite 98, Zeile 11: Per Konstruktion sind die im Satz angegebenen v_1, \dots, v_r ein Orthonormalsystem.
- Seite 98, Zeile 20:

$$\|Av\|^2 = \langle v, A^T Av \rangle = \langle v, B \operatorname{diag}(\dots) B^T v \rangle = \langle B^T v, \operatorname{diag}(\dots) B^T v \rangle = \sum_{j=1}^r \lambda_j^2 (B^T v)_j^2$$

Im gesamten restlichen Beweis müssen die Quadrate an den Eigenwerten λ_j ebenfalls gestrichen werden!

- Seite 101, Zeile –8: ~~Multiplikation mit V^T von links in~~ Proposition 7.14 liefert also genau eine ...
- Seite 102, Zeile 17: $r = \operatorname{rk}(A)$
- Seite 104, Zeile 15: Beweis. Sei $B \in \mathbb{R}^{n \times d}$ beliebig. Setze

$$V_k := \operatorname{span}\{v_1, \dots, v_k\}, \quad W := \operatorname{span}\{b_1, \dots, b_n\} \quad \text{and} \quad \check{V} := \operatorname{span}\{\check{a}_1, \dots, \check{a}_n\},$$

wobei $b_i \in \mathbb{R}^d$ derjenige Vektor ist, der durch die Einträge der i -ten Zeile von B gegeben ist. Nach Satz 7.12 ist V_k ein k -bestpassender Unterraum für $\{a_1, \dots, a_n\}$. Wir behaupten, dass $\check{V} = V_k$ gilt. Nach Satz 7.17(ii) haben wir $\check{a}_i \in V_k$ für $i = 1, \dots, n$, also $\check{V} \subseteq V_k$. Die Gleichheit folgt dann aus $\dim \check{V} = \operatorname{rk} \check{A} = k = \dim V_k$. Wir erhalten damit für jedes $i = 1, \dots, n$ die Abschätzungen

$$\begin{aligned} \|A - B\|_F^2 &= \sum_{i=1}^n \|a_i - b_i\|^2 \geq \sum_{i=1}^n \|a_i - \pi_W(a_i)\|^2 \geq \sum_{i=1}^n \|a_i - \pi_{V_k}(a_i)\|^2 \\ &\quad \begin{array}{c} \uparrow \\ b_i \in W \end{array} \quad \begin{array}{c} \uparrow \\ V_k \text{ } k\text{-best} \\ \text{passend für} \\ a_1, \dots, a_n \end{array} \\ &= \sum_{i=1}^n \|a_i - \pi_{\check{V}}(a_i)\|^2 \stackrel{\substack{\uparrow \\ V_k = \check{V}}}{=} \sum_{i=1}^n \|a_i - \check{a}_i\|^2 \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{Satz} \\ 7.17(ii)}}{=} \|A - \check{A}\|_F^2 \end{aligned} \quad (1)$$

was den Beweis abschließt. □

- Seite 106, Zeile 3: $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}: \|T_{V_k} a_i - T_{V_k} a_j\| - \|a_i - a_j\| \leq 2 \left(\sum_{\ell=k+1}^r \sigma_\ell \right)^{1/2}$
- Seite 107, Zeile –1 bis Seite 108, Zeile 1:

$$\begin{aligned} A &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0.07 & 0.29 & 0.32 & 0.51 & 0.66 & 0.18 & -0.23 \\ 0.13 & -0.02 & -0.01 & -0.79 & 0.59 & -0.02 & -0.06 \\ 0.68 & -0.11 & -0.05 & -0.05 & -0.24 & 0.56 & -0.35 \\ 0.15 & 0.59 & 0.65 & -0.25 & -0.33 & -0.09 & 0.11 \\ 0.41 & -0.07 & -0.03 & 0.10 & -0.02 & -0.78 & -0.43 \\ 0.07 & 0.73 & -0.67 & 0.00 & -0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.55 & -0.09 & -0.04 & 0.17 & 0.17 & -0.11 & 0.78 \end{bmatrix}}_U \underbrace{\begin{bmatrix} 12.4 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 9.5 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.3 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix}}_\Sigma \underbrace{\begin{bmatrix} 0.56 & 0.09 & 0.56 & 0.09 & 0.59 \\ -0.12 & 0.69 & -0.12 & 0.69 & 0.02 \\ -0.40 & -0.09 & -0.40 & -0.09 & 0.80 \\ -0.41 & -0.09 & -0.40 & -0.09 & -0.80 \\ 0.51 & 0.48 & -0.51 & -0.48 & -0.00 \\ 0.48 & -0.51 & -0.48 & 0.51 & -0.00 \end{bmatrix}}_{V^T} \\ &= \begin{bmatrix} 0.07 & 0.29 & 0.32 \\ 0.13 & -0.02 & -0.01 \\ 0.68 & -0.11 & -0.05 \\ 0.15 & 0.59 & 0.65 \\ 0.41 & -0.07 & -0.03 \\ 0.07 & 0.73 & -0.67 \\ 0.55 & -0.09 & -0.04 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12.4 & & \\ & 9.5 & \\ & & 1.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.56 & 0.09 & 0.56 & 0.09 & 0.59 \\ -0.12 & 0.69 & -0.12 & 0.69 & 0.02 \\ -0.40 & -0.09 & -0.40 & -0.09 & 0.80 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

- Seite 108, Zeile 5:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0.15 & 1.97 & 0.15 & 1.97 & 0.56 \\ 0.92 & 0.01 & 0.92 & 0.01 & \mathbf{0.94} \\ 4.84 & 0.03 & 4.84 & 0.03 & 4.95 \\ 0.36 & 4.03 & 0.36 & 4.03 & 1.20 \\ 2.92 & \mathbf{-0.00} & 2.92 & \mathbf{-0.00} & 2.98 \\ -0.34 & 4.86 & -0.34 & 4.86 & 0.65 \\ \mathbf{3.92} & \mathbf{0.02} & \mathbf{3.92} & \mathbf{0.02} & \mathbf{4.00} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.07 & 0.29 \\ 0.13 & -0.02 \\ 0.68 & -0.11 \\ 0.15 & 0.59 \\ 0.41 & -0.07 \\ 0.07 & 0.73 \\ 0.55 & \mathbf{-0.09} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12.4 & & & & \\ & 9.5 & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.56 & 0.09 & 0.56 & 0.09 & 0.59 \\ -0.12 & 0.69 & -0.12 & 0.69 & 0.02 \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{bmatrix}$$

- Seite 109, Zeile 16:

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.07 & 0.29 & \dots & -0.23 \\ 0.13 & -0.02 & & -0.06 \\ 0.68 & -0.11 & & -0.35 \\ 0.15 & 0.59 & & 0.11 \\ 0.41 & -0.07 & & -0.43 \\ 0.07 & 0.73 & & 0.00 \\ 0.55 & \mathbf{-0.09} & & 0.78 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12.4 & & & & \\ & 9.5 & & & \\ & & 1.3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.56 & 0.09 & 0.56 & 0.09 & 0.59 \\ -0.12 & 0.69 & -0.12 & 0.69 & 0.02 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0.48 & -0.51 & -0.48 & 0.51 & 0.00 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Seite 109, Zeile -2:

$$u_2 = 0.29 \cdot \text{Antje} - 0.02 \cdot \text{Birgit} + \dots \mathbf{-0.09} \cdot \text{Gül},$$

- Seite 111, Zeile 12:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \text{Antje} \rightarrow 0.07 & 0.29 \\ \text{Birgit} \rightarrow 0.13 & -0.02 \\ \text{Constanze} \rightarrow 0.68 & -0.11 \\ \text{Dorothee} \rightarrow 0.15 & 0.59 \\ \text{Eleonore} \rightarrow 0.41 & -0.07 \\ \text{Fatema} \rightarrow 0.07 & 0.73 \\ \text{Gül} \rightarrow 0.55 & \mathbf{-0.09} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12.4 & & & & \\ & 9.5 & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{Alien} \rightarrow 0.56 & 0.09 & 0.56 & 0.09 & 0.59 \\ \text{Casablanca} \rightarrow -0.12 & 0.69 & -0.12 & 0.69 & 0.02 \\ \text{Star Wars} \rightarrow & & & & \\ \text{Titanic} \rightarrow & & & & \\ \text{Matrix} \rightarrow & & & & \end{bmatrix}$$

- Seite 110, Zeile 7: $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}^5$
- Seite 112, Zeile 1: \dots und $\tilde{V} = \{v_1, v_2\} \dots$
- Seite 112, Zeile 5: $(\text{Film})_{\mathcal{F}} \quad \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \xrightarrow{A} \mathbb{R}_{\mathcal{B}} \quad (\text{Bewerterin})_{\mathcal{B}}$
- Seite 111, Zeile 4: \mathbf{R} (statt R)
- Seite 112, Zeilen 14 und 25: \mathbf{R} (statt R)
- Seite 112, Zeile -3: \dots die Daten ~~erst~~ einem geeigneten Pre- ~~oder~~ Postprocessing zu unterziehen \dots
- Seite 122, Zeile 3 in Gleichung (8.2): $d \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} x^4 \exp(-x^2/2) dx - V(X_1)^2 \right)$
- Seite 123, Zeile 13: erhalten wir $E(S_d) = 0$
- Seite 123, Zeile -5: $= 2\sqrt{d} E(\|X\| - \sqrt{d})$
- Page 124, Line 8: **Satz 8.2.** Seien $X, Y \sim \mathcal{N}(0, 1, \mathbb{R}^d)$ **unabhängig**. Dann gelten
(i) $\forall d \in \mathbb{N}: |E(\|X - Y\| - \sqrt{2d})| \leq 1/\sqrt{2d}$,
- Seite 125, Zeile -3: $H_d(\mathbf{1})$
- Seite 129, Zeile -1: $0 < \varepsilon < 1$
- Seite 131, Zeile 9: $H_{\delta, x_1} = \{(x_2, \dots, x_d \in \mathbb{R}^{d-1} \mid (x_1, x_2, \dots, x_d) \in H_{\delta})\}$
- Seite 134, Zeile 9: Für solche Zufallsvektoren erhält man \dots
- Seite 139, Zeile -1: $\|X^{(i)}\| \approx 1$
- Seite 142, Zeile -7: *Beweis.* Wir setzen $Y_1 + \dots + Y_d$ und \dots
- Seite 142, letzter Ausdruck in Gleichung (10.1): $= e^{-ta} \prod_{i=1}^d E(e^{tY_i})$
- Seite 145, Zeilen 4 - 8:

$$\begin{aligned} P[|\|X\| - \sqrt{d}| > \varepsilon] &\leq P[|\|X\| - \sqrt{d}| \cdot (\|X\| + \sqrt{d}) \geq \varepsilon \cdot \sqrt{d}] \\ &= P[|X_1^2 + \dots + X_d^2 - d| \geq \varepsilon \sqrt{d}] \\ &= P[|(X_1^2 - 1) + \dots + (X_d^2 - 1)| \geq \varepsilon \sqrt{d}] \\ &= P\left[\left|\frac{X_1^2 - 1}{2} + \dots + \frac{X_d^2 - 1}{2}\right| \geq \frac{\varepsilon \sqrt{d}}{2}\right] \\ &= P[|Y_1 + \dots + Y_d| \geq a], \end{aligned}$$

- Seite 145, Zeile 12: ① Die Y_i sind paarweise unabhängig nach Fakt 10.1(i).
- Seite 146, Zeile 5: $P[|\|X\| - \sqrt{d}| \geq \varepsilon]$
- Seite 154, Zeile -10:

$$P\left[\left|\left\langle \frac{u_i}{\|u_i\|}, \frac{u_j}{\|u_j\|} \right\rangle\right| \leq \varepsilon\right] \geq 1 - \frac{2/\varepsilon + 7}{\sqrt{d}}.$$

- Seite 164, Zeile -17: ... der Abstand der Mittelpunkte, ...
- Seite 167, Zeile 5-7: ~~Im Fall der Varianz sind diese eher technisch, und wir formulieren daher im Satz für die Varianz nur die sich ergebende qualitative asymptotische Aussage.~~
- Seite 183, Zeile -1: Wenn D linear trennbar ist, ...
- Seite 186, Zeile 8: ~~—~~ return $w^{(j)}$
- Seite 189, Zeile -5: $(x, y) \in D$
- Seite 190, Zeile 14-15: ... die Worte „Bonus“, „Vertrag“, „das“ und „Mensa“ ...
- Seite 193, Zeile 6: $\dots = \langle w', x_0 - (\langle w', x_0 \rangle + b')w' \rangle + b'$
- Seite 193, Zeile 12: $\geq \|x_0 - x_1\|^2 + 2\langle (\langle w', x_0 \rangle + b')w', x_1 - x \rangle$
- Seite 193, Zeile 13: $= \|x_0 - x_1\|^2 + 2(\langle w', x_0 \rangle + b')\langle w', x_1 - x \rangle$
- Seite 194, Zeilen -2 und -1: $\mathcal{R}(D)$, $\mathcal{K}(D)$
- Seite 194, Zeile -1: $h: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$
- Seite 195, Zeilen 2, 4, 5, 9, 10, 12, 15 und 20: $\mathcal{R}(D)$, $\mathcal{K}(D)$
- Seite 196, Zeilen 6-8, 12 und 13: $\mathcal{R}(D)$, $\mathcal{K}(D)$
- Seite 198, Zeile 6: $(w^*, b^*) \in M$
- Seite 198, Zeile 11-16: Es folgt also nach Proposition 17.14, dass $w_1^* = w_2^* =: w^*$ ist. Gelte ohne Einschränkung $b_1^* < b_2^*$. Dann wählen wir für ~~(w^*, b_1^*) und (w^*, b_2^*) jeweils i_1 und einen Index i wie in Teil ②~~ und erhalten

$$y_i(\langle w^*, x_i \rangle + b_1^*) = \langle w^*, x_i \rangle + b_1^* < \langle w^*, x_i \rangle + b_2^* = 1$$

im Widerspruch dazu, dass (w^*, b_1^*) in M liegt. ~~Ist $b_1^* > b_2^*$, so vertauschen wir die Rollen von i_1 und i_2 .~~

- Seite 198, Zeile -11, -8 und -4: $\mathcal{R}(D)$, $\mathcal{K}(D)$
- Seite 199, Zeile 13: ... über die im Satz angegebene Menge zu minimieren, ...
- Seite 200, Zeile 7: $L(x, \theta, \mu) := f(x) - \sum_{i=1}^q \theta_i g_i(x) + \# \sum_{j=r}^q \mu_j h_j(x)$
- Seite 200, Zeile 18: ..., ist x^* ein Minimierer des oben angegebenen Optimierungsproblems ...
- Seite 203, Zeile 17: ... ist es möglich, i_0 mit $\lambda_{i_0} \neq 0$...
- Seite 206, Zeile 7: $D_1 = \{(x_i, y_i) \mid i = 1, 6, 7\}$ und $D_2 = \{(x_i, y_i) \mid i = 1, 6, 11\}$
- Seite 206, Zeile 8: ~~Durch Streichen von Nullen in Beispiel 14.15(i) und Lösung des Optimierungsproblems für D_2 erhalten wir ...~~
- Seite 206, Zeile 12: ~~0.349~~ 0.439
- Seite 207, Zeile 4 (in den Bildern): $D_1 \cdots D_2$
- Seite 207, Zeilen 12 und 13: λ_i^*
- Seite 208, Zeile 13: ... und Satz 14.12(ii) ist [GK02, Satz 2.46].
- Seite 209, Zeile -6: ..., wenn man einen der Punkte x_6^* , x_7^* , oder x_{11}^* weglässt?
- Seite 216, Zeile -14: ..., sodass $y_i(\langle w, x_i \rangle + b) \geq 1$ für
- Seite 220, Zeile 16: ... mit $\lambda_{i_0}^* \neq 0$ ist ...
- Seite 220, Zeile 18: ... Wahl von λ^* und ...
- Seite 224, Zeile 6: Haben wir also $\langle f, f \rangle = 0$ ~~für alle $x \in X$~~ , so ist ...
- Seite 224, Zeile -10: ... positive Semidefinitheit der Gram-Matrix ...
- Seite 226, Zeile 12: Geben Sie an, welche $x \in \mathbb{R}$ vom zurückgezogenen Klassifizierer ...

- Seite 230, Zeile 15: **die Rectified Linear Unit**
- Seite 231, Zeile -4: ... Neuronen aus Proposition 16.2 zusammensetzen
- Seite 232, Zeile 3: ... sonst,
- Seite 232, Zeile 6 – 7: ... ist es manchmal von Vorteil ...
- Seite 233, Zeile 14: Alternativ erhält man mit **Sigmoid**-Aktivierung, ...
- Seite 236, Zeile 9: B ist die Matrix ohne das $(\cdot)^{-1}$.
- Seite 239, Zeile 15: $\mathcal{F}(f_1 * f_2) = \mathcal{F}f_1 \cdot \mathcal{F}f_2$
- Seite 241, Zeile 10: $\forall w \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}: \int_{\Omega} \sigma(wx + b) + \ell d\mu(x) = 0$
- Seite 241, Zeile -5: $\forall w \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}: \int_{\Omega} \sigma(wx + b) d\mu(x) = 0$
- Seite 246, Zeile 3: Da Ω kompakt ist, existiert $c_0 \geq 0$ mit $a_1 f_1 + \dots + a_\ell f_\ell + c_0 \geq 0$ auf Ω für alle $i = 1, \dots, \ell$. Wir konstruieren ...
- Seite 262, Zeile 1–4: Den Rieszschen Darstellungssatz in der Version 16.19 kann man in [Wer18, Theorem II.2.5] nachlesen, die andere Version 16.16, oft auch Riesz-Markov-Theorem genannt, findet man in [Rud87, Theorem 6.19].
- Seite 270, Zeile 14: Dann gilt $h'(t) = \langle \nabla f(y + t(x - y)), x - y \rangle$...
- Seite 270, Zeile 16: $\dots = \int_0^1 \langle \nabla f(y + t(x - y)), x - y \rangle dt$
- Seite 270, Zeile 18: $\dots = \int_0^1 \langle \nabla f(y + t(x - y)), x - y \rangle - \langle f(y), x - y \rangle dt$
- Seite 270, Zeile -1: ... mithilfe von Proposition 17.4 ...
- Seite 271, Zeile 14: **Folgerung 17.10.** Sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und konvex.
- Seite 271, Zeile 18–19: (i) \implies (ii): Aus der Konvexität folg die erste Ungleichung mit Proposition 17.4 und ...
- Seite 271, Zeile 20: (ii) \implies (i): Die erste Ungleichung impliziert Konvexität mit Proposition 17.4 und ...
- Seite 272, Zeile 16: Aus Lemma 17.9 und Proposition 17.4 folgern wir
- Seite 272, Zeile 20: \geq
 \uparrow
Prop. 17.4
- Seite 273, Zeile 10: \leq
 \uparrow
Prop. 17.4
- Seite 275, Zeile -2: Dann gilt wegen
- Seite 277, Zeile -10: mit Proposition 17.4
- Seite 278, Zeile 8: Dies ist nach Proposition 17.4 äquivalent zu
- Seite 278, Zeile 18: Ein Vergleich der Abschätzung in Proposition 17.4 zeigt nochmal ...
- Seite 279, Zeile 13: \geq
 \uparrow
Lem. 17.18 u.
Prop. 17.4
- Seite 283, Zeile -9: 4: $x^{(k+1)} \leftarrow x^{(k)} - \gamma_k \nabla f(x^{(k)})$.
- Seite 286, Zeile 6: (ii) Für $A, B \in \Sigma$ mit $P(B) \neq 0$ heißt $P(A|B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$
- Seite 287, Zeile 19:

$$\rho(x) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{d/2}} e^{-\frac{\|x-\mu\|^2}{2\sigma^2}} \quad \text{bzw.} \quad \rho(x) = \frac{1}{\lambda^d(B)} \cdot \mathbb{1}_B(x),$$

- Seite 290, Zeile -5: Für $A = A_1 \times \dots \times A_d \subseteq \mathbb{R}^d$ mit $A_i \in \mathcal{B}^d$ berechnen wir
- Seite 292, Zeile 2:

$$\begin{aligned} (\rho_1 * \rho_2)(s) &= \frac{1}{2\pi\sqrt{ab}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{(s-t)^2}{2a}\right) \exp\left(-\frac{t^2}{2b}\right) dt \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{ab}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{b(s^2 - 2st + t^2) + at^2}{2ab}\right) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{ab}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{t^2(b+a) - 2stb + bs^2}{2ab}\right) dt \\
&= \frac{1}{\color{red}{2\pi\sqrt{ab}}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{t^2(b+a)/c - 2stb/c + bs^2/c}{2ab/c}\right) dt \\
&= \frac{1}{\color{red}{\sqrt{2\pi c}\sqrt{2\pi(ab/c)}}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{(t - (bs)/c)^2 - (sb/c)^2 + s^2(b/c)}{2ab/c}\right) dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi c}} \exp\left(\color{red}{+}\frac{(sb/c)^2 - s^2(b/c)}{2ab/c}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi(ab/c)}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{(t - (bs)/c)^2}{2ab/c}\right) dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi c}} \exp\left(\color{red}{+}\frac{(sb/c)^2 c^2 - s^2(b/c)c^2}{2abc}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi c}} \exp\left(\color{red}{+}\frac{s^2(b^2 - bc)}{2abc}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi c}} \exp\left(-\frac{s^2}{2c}\right),
\end{aligned}$$

- Seite 296, Zeile -14: S. Shalev-Shwartz und S. Ben-David, [Understanding](#)