ベクトルのトレーニング

$\boxed{1}$ [改訂版青チャート数学B　早稲田大]

△OABにおいて，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とする。辺OAを3 : 2に内分する点をC，辺OBを3 : 4に内分する点をD，線分ADとBCとの交点をPとし，直線OPと辺ABとの交点をQとする。次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$　　　　(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$

$\boxed{2}$ [2015　近畿大]

平面上に4点O，A，B，Cがあり，点Cは線分OB上にある。$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=1$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=2$ であり，内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の値は1である。また，$\angle\mathrm{ACB}=135^\circ$ である。

(1)　$\angle\mathrm{AOB}=\boxed{\text{ア}}^\circ$ である。また，$|\overrightarrow{\mathrm{CA}}|=\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{イ}}}}{\boxed{\text{ウ}}}$，

$|\overrightarrow{\mathrm{CB}}|=\dfrac{\boxed{\text{エ}}-\sqrt{\boxed{\text{オ}}}}{\boxed{\text{カ}}}$ である。

(2)　点Pは $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=l\overrightarrow{\mathrm{OA}}+m\overrightarrow{\mathrm{OB}}+n\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ $(l\geqq 0,\ m\geqq 0,\ n\geqq 0,\ l+m+n=2)$ を満たしながら動く。このとき，点Pの存在範囲 D の面積は $\dfrac{\boxed{\text{キ}}\sqrt{\boxed{\text{ク}}}-\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$ である。

(3)　(2) で与えられた D 上の点で，点Oからの距離が最小になるような点をQとする。

このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\dfrac{\boxed{\text{サ}}+\sqrt{\boxed{\text{シ}}}}{\boxed{\text{ス}}}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{セ}}}}{\boxed{\text{ソ}}}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ である。

$\boxed{3}$ [2011 早稲田大]

3 点 A $(1,\ 0,\ 0)$，B$\left(0,\ \dfrac{1}{2},\ 0\right)$，C$\left(0,\ 0,\ \dfrac{1}{3}\right)$の定める平面を α とする。点 O を原点とし，点 P を $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を満たすようにとり，点 P から平面 α に垂線 PQ を下ろす。このとき，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を用いて表せ。

$\boxed{4}$ [2008 慶應義塾大]

空間において，原点 O を中心とする半径 5 の球面上に，$\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{PR}}\right|=4$ かつ $\left|\overrightarrow{\mathrm{QR}}\right|=3$ を満たすように 3 点 P，Q，R をとる。また，線分 QR の中点を M とする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ の内積は $^{ア}\boxed{}$ である。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ の大きさは $^{イ}\boxed{}$ である。

(3) $\overrightarrow{\mathrm{MP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ の内積は $^{ウ}\boxed{}$ である。

(4) 点 P と点 M を通る直線を ℓ とし，原点 O から ℓ に下ろした垂線の足を H とする。

このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ で表すと，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{^{エ}\boxed{}\,\overrightarrow{\mathrm{OP}}+{}^{オ}\boxed{}\,\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{^{カ}\boxed{}}$ である。