

Forward Algorithm

	!	@	@
X	$0.2 * 0.1$ $= 0.02$	$0.02 * 0.5 * 0.9$ $+ 0.25 * 0.2 * 0.9$ $+ 0.21 * 0.1 * 0.9$ $= 0.0729$	$.0729 * 0.5 * 0.9$ $+ .052 * 0.2 * 0.9$ $+ .0885 * 0.1 * 0.9$ $= 0.05013$
Y	$0.5 * 0.5$ $= 0.25$	$0.02 * 0.4 * 0.5$ $+ 0.25 * 0.3 * 0.5$ $+ 0.21 * 0.1 * 0.5$ $= 0.052$	$.0729 * 0.4 * 0.5$ $+ .052 * 0.3 * 0.5$ $+ .0885 * 0.1 * 0.5$ $= 0.026805$
Z	$0.3 * 0.7$ $= 0.21$	$0.02 * 0.1 * 0.3$ $+ 0.25 * 0.5 * 0.3$ $+ 0.21 * 0.8 * 0.3$ $= 0.0885$	$.0729 * 0.1 * 0.3$ $+ .052 * 0.5 * 0.3$ $+ .0885 * 0.8 * 0.3$ $= 0.031227$

Sum: 0.108162

Backward Algorithm

	!	@	@
X	$0.68 * 0.5 * 0.9$ $+ 0.48 * 0.4 * 0.5$ $+ 0.38 * 0.1 * 0.3$ $= 0.4134$	$1 * 0.5 * 0.9$ $+ 1 * 0.4 * 0.5$ $+ 1 * 0.1 * 0.3$ $= 0.68$	1
Y	$0.68 * 0.2 * 0.9$ $+ 0.48 * 0.3 * 0.5$ $+ 0.38 * 0.5 * 0.3$ $= 0.2514$	$1 * 0.2 * 0.9$ $+ 1 * 0.3 * 0.5$ $+ 1 * 0.5 * 0.3$ $= 0.48$	1
Z	$0.68 * 0.1 * 0.9$ $+ 0.48 * 0.1 * 0.5$ $+ 0.38 * 0.8 * 0.3$ $= 0.1764$	$1 * 0.1 * 0.9$ $+ 1 * 0.1 * 0.5$ $+ 1 * 0.8 * 0.3$ $= 0.38$	1

$$\begin{aligned} P(\text{seq}) = & 0.2 * 0.4134 * 0.1 \\ & + 0.5 * 0.2514 * 0.5 \\ & + 0.3 * 0.1764 * 0.7 = 0.108162 \end{aligned}$$

Viterbi Algorithm

	!	@	@
X	$0.2 * 0.1$ = 0.02	$\max(0.02 * 0.5 * 0.9,$ $0.25 * 0.2 * 0.9,$ $0.21 * 0.1 * 0.9)$ = 0.045	$\max(\textbf{.045} * .5 * .9,$ $.0375 * .2 * .9,$ $.0504 * .1 * .9)$ = 0.02025
Y	$0.5 * 0.5$ = 0.25	$\max(0.02 * 0.4 * 0.5,$ $0.25 * 0.3 * 0.5,$ $0.21 * 0.1 * 0.5)$ = 0.0375	$\max(\textbf{.045} * .4 * .5,$ $.0375 * .3 * .5,$ $.0504 * .1 * .5)$ = 0.009
Z	$0.3 * 0.7$ = 0.21	$\max(0.02 * 0.1 * 0.3,$ $0.25 * 0.5 * 0.3,$ $0.21 * 0.8 * 0.3)$ = 0.0504	$\text{Max}(.045 * .1 * .3,$ $.0375 * .5 * .3,$ $.0504 * .8 * .3)$ = 0.012096

Backtrack to get optimal state sequence: Y X X