Dynamische Systeme

Matthias Hofmann

6. Januar 2014

Inhaltsverzeichnis

Motivation: das Newton-Verfahren

Die Newtoniteration ist gegeben durch die Abbildung

$$\Phi(x) = z - \frac{f(z)}{f'(z)}$$

Dabei ist für einen Startwert z_0 folgendes Verhalten denkbar

- Das Newton-Verfahren konvergiert gegen eine Nullstelle von f
- Das Newton-Verfahren konvergiert nicht.

Das Newton-Verfahren konvergiert lokal. Wie ist das Konvergenzverhalten außerhalb dieser Konvergenzumgebung?
$\longrightarrow$ Newton-Fraktale.

Abbildung : Newton-Fraktal für $f(z) = z^4 - 1$

Dies motiviert das Konzept der *Fatou-* bzw. *Juliamenge*:

Fatou-Menge
: Die Startwerte aus dieser Menge führen unter Iteration zu einer ,,stetigen" Dynamik, das heißt, eine kleine Änderung des Startwert führt zu einer ähnlichen Dynamik.

Julia-Menge
: Beschreibt die Menge der Startpunkte, die zu den ,,instabilen" Prozessen gehören. Jede noch so kleine Änderung des Startwerts führt zu einer komplett anderen Dynamik.

Notation: $F(f)$ bezeichnet die Fatoumenge von f und $J(f)$ analog die Juliamenge von f.

Charakterisierung periodischer Punkte

Definition 1

Sei z_0 periodischer Punkt bzgl. f mit Periode n, d.h. $f^n(z_0) = z_0$.
Dann heißt er

- *stark anziehend*, falls $|(f^n)'(z_0)| = 0$,
- *anziehend*, falls $0 < |(f^n)'(z_0)| < 1$,
- *indifferent*, wenn $|(f^n)'(z_0)| = 1$,
- *abstoßend*, wenn $|(f^n)'(z_0)| > 1$.

Definition 2 (Einzugsgebiet)

Ist z_0 ein anziehender periodischer Punkt von f, dann ist die Menge

$$A(z_0) = \{z \in \overline{\mathbb{C}} : \lim_{L \ni k \to \infty} f^k(z) = z_0, L \subset \mathbb{N}\}$$

das *Einzugsgebiet* (engl. *basin of attraction*) von z_0.

Definition 3 (Julia-Menge)

Wir definieren die Julia-Menge durch

$$J(f) := \overline{\{z \in \overline{\mathbb{C}} : z \text{ abstossender periodischer Punkt von } f\}}$$

Und die Fatou-Menge durch $F(f) = J(f)^c$

Normale Familie und exzeptionelle Punkte

Definition 4

Eine Familie $\{F_n\}$ analytischer Funktionen operiert *normal* auf U, falls jede Folge $(F_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge $(F_{n_{i_j}})_{j\in\mathbb{N}}$ besitzt, sodass einer der beiden Eigenschaften erfüllt ist:

- $F_{n_{i_j}}$ konvergiert gleichmäßig auf kompakten Mengen $K \subset U$.
- $F_{n_{i_j}}$ divergiert gleichmäßig gegen ∞ auf U.

Eine Familie $\{F_n\}$ analytischer Funktionen operiert *nicht normal* bei z_0, falls er in keiner Umgebung *normal* operiert.

Beispiel 5

Betrachte die Funktion F, gegeben durch $F(x) = ax$. Definiere die Familie $\{F^n\}$.
Fall 1: $|a| < 1$. so konvergiert für jede kompakte Teilmenge die Funktionenfolge $F^n(z) = a^n \cdot z$ gleichmäßig gegen 0.
$\longrightarrow F(f) = \overline{\mathbb{C}}$, $A(0) = \mathbb{C}$, $A(\infty) = \{\infty\}$.
Fall 2: $|a| > 1$. Die Familie $\{F\}$ operiert nicht normal bei 0, denn für $z \neq 0$ divergiert jede beliebige Teilfolge.
$\longrightarrow J(F) = \{0\}$, $A(0) = \{0\}$, $A(\infty) = \overline{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$.

Proposition 6

Sei F analytisch, z_0 ein abstoßender periodischer Punkt. Dann operiert die Familie $\{F^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ nicht normal bei z_0.

Korrolar 7

Sei F analytische Funktion. Die Familie $\{F^n\}$ operiert nicht normal für $z \in J(F)$.

Theorem 8 (Montels Theorem)

Sei $\{F_n\}$ eine Familie analytischer Funktionen auf einer Umgebung U. Angenommen es gibt $a, b \in \mathbb{C}, a \neq b$, sodass $F_n(z) \neq a \wedge F_n(z) \neq b$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $z \in U$. Dann operiert $\{F_n\}$ normal auf U. (ohne Beweis)

Korrolar 9

Sei F eine analytische Funktion. Sei $z_0 \in J(F)$ und sei U eine beliebige Umgebung von z_0. Dann existiert höchstens ein $a \in \mathbb{C}$ mit

$$a \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} F^n(U).$$

Wir nennen einen solchen Punkt *exzeptionellen Punkt.*

Theorem 10

Sei P ein Polynom. Angenommen es gibt einen Punkt $z_0 \in J(P)$ und ein $a \in \mathbb{C}$, sodass

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} = \mathbb{C} \setminus \{a\}$$

so folgt $P(z) = a + \lambda(z-a)^k$ für $\lambda \in \mathbb{C}, k \in \mathbb{N}$ geeignet. Insbesondere ist P mit Grad $n \geq 2$ konjugiert zu $Q : z \mapsto z^n$, d.h. das ein Homöomorphismus H existiert mit $Q \circ H = H \circ P$.

Bemerkung 11

Für $Q(z) = z^n, n \geq 2$ folgt $J(Q) = S^1$. Außerdem ist $a = 0$ exzeptioneller Punkt.

periodische Punkte

Theorem 12 (Koenigs Linearisationstheorem)

Sei f eine analytische Funktion mit $f(0) = 0$ und $f'(0) = \lambda$ mit $|\lambda| \neq 0, 1$, dann existiert ein lokaler Diffeomorphismus $\varphi : U \to U$ mit $\varphi(0) = 0$, sodass

$$\varphi \circ f(z) = \lambda \cdot \varphi(z)$$

für $z \in U$. Dieses φ ist bis auf einen Multiplikation mit einer Konstanten eindeutig.

Korrolar 13

Sei $f : S \to S$ eine holomorphe Abbildung und S eine Riemannsche Fläche mit anziehendem Fixpunkt z_0 mit $f'(z_0) = \lambda$. Sei $\Omega := A(z_0) \cap S$ das Einzugsgebiet von z_0, dann gibt es eine holomorphe Abbildung φ, so dass das Diagram

$$\begin{tikzcd} \Omega \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] & \Omega \arrow[d, "\varphi"] \\ \mathbb{C} \arrow[r, "\lambda\cdot"'] & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

kommutiert, und φ eine Umgebung U von z_0 auf eine Umgebung von 0 diffeomorph abbildet.

Proposition 14

Sei z_0 ein anziehender periodischer Punkt, so existiert eine Umgebung U um z_0, sodass $U \subset A(z_0)$. Wir nennen die Zusammenhangskomponente von $z_0 \in A(z_0)$ auch das *immediate Einzugsgebiet*.

Theorem 15

Sei P ein Polynom vom Grad $n \geq 2$ und sei z_0 ein anziehender periodischer Punkt von P. Dann liegt im Einzugsgebiet von z_0 ein kritischer Punkt.

Proposition 16

- Sei P ein Polynom vom Grad $n \geq 2$. Dann ist $J(P) \neq \emptyset$.
- Für beliebige $n \in \mathbb{N}$ ist $J(P) = J(P^n)$.

Theorem 17

$J(P) = \{z | \{P^n\}$ operiert nicht normal auf $z\}$.

Korrolar 18

- $J(P)$ ist perfekt.
- $J(P)$ ist komplett invariant
- Die Menge der homoclinic Punkte sind dicht in $J(P)$

Proposition 19

Sei $z_0 \in J(P)$. Es ist

$$J(P) = \overline{\bigcup_{k=0}^{\infty} P^{-k}(z_0)}.$$

Korrolar 20

$J(P)$ ist nirgends dicht.

Theorem 21

P ist chaotisch auf $J(P)$