

1 Motivation: das Newton-Verfahren

Die Newtoniteration ist gegeben durch die Abbildung

$$\Phi(x) = z - \frac{f(z)}{f'(z)}.$$

Dabei ist für einen Startwert z_0 folgendes Verhalten denkbar

- Die Newtoniteration konvergiert gegen eine Nullstelle von f ,
- Die Newtoniteration konvergiert nicht.

Das Newton-Verfahren konvergiert lokal. Wie ist das Konvergenzverhalten außerhalb dieser Konvergenz Umgebung? In Abbildung 1 wurde das Konvergenzverhalten für gegebene Startwerte durch unterschiedliche Farben hervorgehoben. Vergleichen wir benachbarte Werte auf ihre Dynamik so stellen wir fest, dass es Punkte gibt in denen in keiner Umgebung alle Punkte diesselbe Dynamik besitzen.

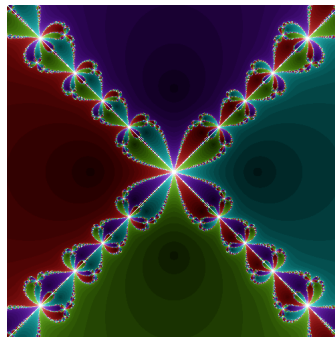


Abbildung 1: Newton-Fraktal für $f(z) = z^4 - 1$

Dies motiviert das Konzept der *Fatou*- bzw. *Juliamenge*:

Fatou-Menge Die Startwerte aus dieser Menge führen unter Iteration zu einer „stetigen“ Dynamik, das heißt, dass eine kleine Änderung des Startwert zu einer ähnlichen Dynamik führt.

Julia-Menge Beschreibt die Menge der Startpunkte, die zu den „instabilen“ Prozessen gehören. Jede noch so kleine Änderung des Startwerts führt zu einer komplett anderen Dynamik.

Notation: $F(f)$ bezeichnet die Fatoumenge von f und $J(f)$ analog die Juliamenge von f .

2 Allgemeine Definitionen

Sei im Folgenden $f : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ eine analytische Funktion auf \mathbb{C} mit $f(\infty) = \infty$. Dabei setzen wir $f'(\infty) = \frac{d}{dz} \left[\frac{1}{f(1/z)} \right] (0)$. Weiterhin bezeichne f^n die n -fache Verkettung von f .

Definition 1

Sei z_0 periodischer Punkt bzgl. f mit Periode n , d.h. $f^n(z_0) = z_0$. Dann heißt er

- *stark anziehend*, falls $|(f^n)'(z_0)| = 0$,
- *anziehend*, falls $0 < |(f^n)'(z_0)| < 1$,
- *indifferent*, wenn $|(f^n)'(z_0)| = 1$,
- *abstoßend*, wenn $|(f^n)'(z_0)| > 1$.

Definition 2 (Einzugsgebiet)

Ist z_0 ein anziehender periodischer Punkt von f , dann ist die Menge

$$A_f(z_0) = \{z \in \overline{\mathbb{C}} : \exists_{L \subset \mathbb{N}} \lim_{L \ni k \rightarrow \infty} f^k(z) = z_0\}$$

das *Einzugsgebiet* (engl. *basin of attraction*) von z_0 bzgl. f .

Definition 3 (Julia-Menge)

Wir definieren die Julia-Menge durch

$$J(f) := \overline{\{z \in \overline{\mathbb{C}} : z \text{ abstossender periodischer Punkt von } f\}}$$

Und die Fatou-Menge durch $F(f) = J(f)^c$

3 Normale Familien und exzeptionelle Punkte

Definition 4

Eine Familie $\{F_n\}$ analytischer Funktionen operiert *normal* auf einer Umgebung U , falls jede Folge $(F_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$ eine Teilfolge $(F_{n_{i_j}})_{j \in \mathbb{N}}$ besitzt, sodass einer der beiden Eigenschaften erfüllt ist:

- $F_{n_{i_j}}$ konvergiert gleichmäßig auf kompakten Mengen $K \subset U$.
- $F_{n_{i_j}}$ konvergiert gleichmäßig gegen ∞ auf U .

Eine Familie $\{F_n\}$ analytischer Funktionen operiert *nicht normal* bei z_0 , falls er in keiner Umgebung *normal* operiert.

Beispiel 5

Betrachte die Funktion F , gegeben durch $F(x) = ax$. Definiere die Familie $\{F^n\}$.

Fall 1: $0 < |a| < 1$. so konvergiert für jede kompakte Teilmenge die Funktionenfolge $F^n(z) = a^n \cdot z$ gleichmäßig gegen 0. Also operiert $\{F^n\}$ normal auf jeder Umgebung $U \subset \mathbb{C}$.

$$\longrightarrow J(f) = \{\infty\}, F(f) = \mathbb{C}, A_F(0) = \mathbb{C}, A_F(\infty) = \{\infty\}.$$

Fall 2: $|a| > 1$. Die Familie $\{F\}$ operiert nicht normal bei 0, denn für $z \neq 0$ konvergiert jede beliebige Teilfolge gegen ∞ . Nun konvergiert aber $F^{n_{i_j}}$ für beliebige Teilfolgen bei $z = 0$ gleichmäßig gegen 0.

$$\longrightarrow J(F) = \{0\}, F(f) = \overline{\mathbb{C}} \setminus \{0\}, A(0) = \{0\}, A(\infty) = \overline{\mathbb{C}} \setminus \{0\}.$$

Proposition 6

Sei F analytisch, z_0 ein abstoßender periodischer Punkt bzgl. F . Dann operiert die Familie $\{F^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ nicht normal bei z_0 .

Beweis (Für Fixpunkte $z_0 \in \mathbb{C}$)

Angenommen $\{F^n\}$ operiert normal auf einer Umgebung U von z_0 . Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $F^n(z_0) = z_0$, also folgt insbesondere, dass F^n nicht (gleichmäßig) gegen ∞ auf U konvergiert. Also gibt es zu der Folge $(F^n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Teilfolge $(F^{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$ die auf allen kompakten Teilmengen $K \subset U$ gleichmäßig konvergiert. Insbesondere ist die Grenzfunktion G holomorph und es gilt $(F^{n_i})'(z_0) \rightarrow G'(z_0)$. Nun ist z_0 abstoßender Fixpunkt und damit folgt induktiv

$$|(F^{n_i})'(z_0)| = (F^{n_i-1} \circ F)'(z_0) = |(F^{n_i-1})'(F(z_0))| \cdot |F'(z_0)| \stackrel{\text{ind.}}{=} \underbrace{|F'(z_0)|}_{>1} \stackrel{n \rightarrow \infty}{\rightarrow} \infty.$$

Es ergibt sich der Widerspruch zur Beschränktheit von $\left((F^{n_i})'(z_0)\right)_{i \in \mathbb{N}}$. □

Korollar 7

Sei F eine analytische Funktion. Die Familie $\{F^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ operiert nicht normal für $z \in J(F)$.

Beweis

Die Menge der abstoßenden periodischen Punkte bzgl. F liegt dicht in $J(F)$. Also finden wir in jeder Umgebung einen abstoßenden, periodischen Punkt bzgl. F . Nach Proposition 6 operiert $\{F^n\}$ nicht normal in sämtlichen Umgebungen von $z \in J(F)$. Insbesondere operiert $\{F^n\}$ nicht normal bei $z \in J(F)$. \square

Theorem 8 (Montels Theorem)

Sei $\{F_n\}$ eine Familie analytischer Funktionen auf einer Umgebung U . Angenommen es gibt $a, b \in \mathbb{C}, a \neq b$, sodass $F_n(z) \neq a \wedge F_n(z) \neq b$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $z \in U$. Dann operiert $\{F_n\}$ normal auf $U \subset \mathbb{C}$. (ohne Beweis)

Korollar 9

Sei F eine analytische Funktion. Sei $z_0 \in J(F)$ und sei U eine beliebige Umgebung von z_0 . Dann existiert höchstens ein $a \in \mathbb{C}$ mit

$$a \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} F^n(U).$$

Wir nennen einen solchen Punkt *exzeptionellen Punkt*.

Beweis

Angenommen es gibt $a \neq b, a, b \in \mathbb{C}$ mit $a, b \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} F^n(U)$. Also gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ und für alle $z \in U$ $F^n(z) \neq a$ und $F^n(z) \neq b$. Aus Theorem 8 (Montels Theorem) folgt, dass $\{F^n\}$ normal auf U operiert. Nach Korollar 7 operiert $\{F^n\}$ nicht normal bei z_0 und damit insbesondere auf U . Es ergibt sich der Widerspruch. \square

Theorem 10

Sei P ein Polynom mit $\text{Grad} \geq 2$. Angenommen es gibt einen Punkt $z_0 \in J(P)$ samt einer Umgebung U von z_0 und ein $a \in \mathbb{C}$, sodass

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} P^n(U) = \mathbb{C} \setminus \{a\}$$

so folgt $P(z) = a + \lambda(z-a)^k$ für $\lambda \in \mathbb{C}, k \in \mathbb{N}$ geeignet. Insbesondere ist P mit $\text{Grad} n \geq 2$ topologisch konjugiert zu $Q : z \mapsto z^n$, d.h. das ein Homöomorphismus H existiert mit $Q \circ H = H \circ P$.

Beweis

Wähle $b \in \mathbb{C}$, sodass $P(b) = a$. Es folgt, dass für beliebige $z \in U$ und $n \in \mathbb{N}$ folgt $P^n(z) \neq b$, denn sonst würde folgen $P^{n+1}(z) = P(b) = a$. Also ist b ein exzeptioneller Punkt nach Korollar 9 folgt $a = b$. Also ist $a \in \mathbb{C}$ Fixpunkt. Insbesondere ist a das einzige Urbild von a , d.h. $P(b) \neq a$ für $b \neq a$, und es existiert ein $k \in \mathbb{N}$, sodass

$$G(z) = \frac{P(z) - a}{(z - a)^k},$$

wobei G ein Polynom mit $G(a) \neq 0$. Da a einziger Fixpunkt von P ist folgt $P(z) - a \neq 0$ für $z \neq a$ und insbesondere gilt

$$G(z) = \frac{P(z) - a}{(z - a)^k} \neq 0, \text{ für } z \neq a.$$

G besitzt keine Nullstellen und ist nach dem Fundamentalsatz damit konstant $G \equiv \lambda \neq 0$. Also ist $P(z) = \lambda(z - a)^k + a$.

Definiere im Folgenden $H(z) := \sqrt[k]{\lambda}(z - a)$. Es ist leicht nachzurechnen, dass $Q \circ H = H \circ P$. \square

Beispiel 11

Für $Q(z) = z^n$, $n \geq 2$ folgt $J(Q) = S^1$. Sei U eine Umgebung um $z_0 \in S^1$ mit $0 \notin U$, dann folgt

$$0 \notin \bigcup_{k=0}^{\infty} Q^k(U).$$

Insbesondere ist $a = 0$ exzeptioneller Punkt.

4 Periodische Punkte

Theorem 12 (Koenigs Linearisationstheorem)

Sei f eine analytische Funktion mit $f(0) = 0$ und $f'(0) = \lambda$ mit $|\lambda| \notin \{0, 1\}$, dann existiert ein Diffeomorphismus $\varphi : U \rightarrow V$ mit $\varphi(0) = 0$, sodass

$$\varphi \circ f(z) = \lambda \cdot \varphi(z) \quad (*)$$

für $z \in U$, wobei U und V Umgebungen von 0 sind. Dieses φ ist bis auf Multiplikation mit einer Konstanten eindeutig.

Beweis

Eindeutigkeit: Seien φ und ψ analytische Funktionen die (*) erfüllen. Dann finden wir wegen Analytizität eine eindeutige Potenzreihendarstellung

$$\psi \circ \varphi^{-1}(w) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k w^k, \quad \psi \circ \varphi^{-1}(0) = 0.$$

Es folgt

$$\lambda \psi(\varphi^{-1}(w)) \stackrel{\lambda \psi = \psi \circ f}{=} \psi \circ f \circ \varphi^{-1}(w) = \psi \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}(w) \stackrel{\varphi \circ f \circ \varphi^{-1} = \lambda \cdot}{=} \psi \circ \varphi^{-1}(\lambda w).$$

Und damit

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda b_k w^k = \lambda \psi \circ \varphi^{-1}(w) = \psi \circ \varphi^{-1}(\lambda w) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \lambda^k w^k.$$

Mit Eindeutigkeit der Potenzreihendarstellung folgt $\lambda b_n = b_n \lambda^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und wegen $|\lambda| \notin \{0, 1\}$ folgt $b_n = 0$ für $n \geq 2$. Insbesondere ist

$$\psi \circ \varphi^{-1}(w) = b_1 w, \text{ bzw. } \psi(z) = b_1 \varphi(z).$$

Existenz: Fall $0 < |\lambda| < 1$. Wähle $c < 1$, sodass $c^2 < |\lambda| < c$. Wähle $r > 0$, sodass $|f(z)| \leq c|z|$. Induktiv folgt $|f^n(z)| \leq c^n r$. Mit Taylor folgt die Existenz einer Konstanten $k > 0$, sodass $|f(z) - \lambda z| \leq k|z|^2$, $|z| < r$. Es ist $|f(z)| \leq c|z| \leq cr < r$. So folgt

$$|f^{n+1}(z) - \lambda f^n(z)| = |f(f^n(z)) - \lambda f^n(z)| \leq k|f^n(z)|^2 \stackrel{\text{s.o.}}{\leq} kc^{2n}r^2.$$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Für hinreichend große m, n ist

$$\left| \frac{f^m(z)}{\lambda^m} - \frac{f^n(z)}{\lambda^n} \right| = \left| \sum_{i=n}^{m-1} \frac{f^{i+1}(z)}{\lambda^{i+1}} - \frac{f^i(z)}{\lambda^i} \right| \leq \sum_{i=n}^{m-1} \left| \frac{f^{i+1}(z)}{\lambda^{i+1}} - \frac{f^i(z)}{\lambda^i} \right| \stackrel{\text{s.o.}}{\leq} \underbrace{\frac{kr^2}{|\lambda|}}_{:=k'} \sum_{i=n}^{m-1} \left(\frac{c^2}{|\lambda|} \right)^i < \varepsilon.$$

Und mit dem Cauchy-Kriterium für gleichmäßige Konvergenz, folgt dass $\left(\frac{f^n}{\lambda^n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergiert mit holomorpher Grenzfunktion φ . Dabei gilt

$$\varphi(f(z)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(f^n(z)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^n(f(z))}{\lambda^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda \underbrace{\frac{f^{n+1}(z)}{\lambda^{n+1}}}_{\rightarrow \varphi(z)} = \lambda \varphi(z).$$

Und es gilt

$$\varphi'(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(f^n)'(0)}{\lambda^n} \stackrel{\text{ind.}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\prod_{i=0}^{n-1} f'(f^i(0))}{\lambda^n} \stackrel{f^i(0)=0}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f'(0)^n}{\lambda^n} = 1.$$

Also folgt aus dem Satz von der inversen Abbildung, dass die Abbildung φ eine Umgebung von 0 diffeomorph abbildet und $\varphi \circ f = \lambda \cdot \varphi$.

Fall $|\lambda| > 1$. Mit dem Satz von der Umkehrabbildung folgt, dass f^{-1} lokal bei $z = 0$ definiert ist, wobei

$$|(f^{-1})'(0)| = \left| \frac{1}{f'(f^{-1}(0))} \right| \stackrel{f^{-1}(0)=0}{=} \frac{1}{|f'(0)|} = \lambda^{-1} < 1.$$

Mit obigem Argument folgt die Existenz von φ und einer Umgebung U von 0 mit

$$f^{-1}(z) = \varphi^{-1}(\lambda^{-1}\varphi(z)) \implies f(z) = \varphi(\lambda\varphi^{-1}(z)).$$

für $z \in U$. Also gilt $\tilde{\varphi}(f(z)) = \lambda \cdot \tilde{\varphi}(z)$, mit $\tilde{\varphi} = \varphi^{-1}$. □

Proposition 13

Sei z_0 ein anziehender periodischer Punkt bzgl. einer analytischen Funktion f , so existiert eine Umgebung U um z_0 , sodass $U \subset A_f(z_0)$. Wir nennen die Zusammenhangskomponente von $z_0 \in A_f(z_0)$ auch das *unmittelbare Einzugsgebiet* (engl. *immediate basin of attraction*) von z_0 bzgl. f .

Beweis

Sei z_0 anziehender periodischer Punkt mit Periode m . Setze $F(z) := f^m(z + z_0) - z_0$ für eine Umgebung von 0. Offenbar gilt $F^n(z) = f^{nm}(z + z_0) - z_0$. Insbesondere ist 0 anziehender Fixpunkt, denn

$$F^n(0) = \underbrace{f^{nm}(z_0)}_{=z_0} - z_0 = 0$$

mit $(F^n)'(0) = (f^{mn})'(z_0) < 1$. Nach Theorem 12 findet sich eine Umgebung U' von 0 und eine Abbildung φ , so dass $F(z) = \varphi^{-1}(\lambda\varphi(z))$ und damit

$$f^{nm}(z + z_0) - z_0 = F^n(z) = \varphi^{-1}(\lambda^n\varphi(z))$$

Und es folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^{nm}(\underbrace{z + z_0}_{=:z'}) \stackrel{\text{s.o.}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^{-1}(\lambda^n\varphi(z)) + z_0 \stackrel{\text{Stet.}}{=} \varphi^{-1}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda^n\varphi(z)\right) + z_0 = \varphi^{-1}(0) + z_0 = z_0.$$

für $z' \in z_0 + U' := U$. Insbesondere gilt $U \subset A_f(z_0)$. □

Beispiel 14

Sei P ein Polynom vom Grad $n \geq 2$, dann ist ∞ ein stark anziehender Fixpunkt bzgl. P . Tatsächlich ist

$$|P'(\infty)| = \lim_{z \rightarrow 0} \left| \frac{d}{dz} \left[\frac{1}{P(1/z)} \right] \right| = \lim_{z \rightarrow 0} \left| \frac{P'(1/z)}{z^2 P(1/z)^2} \right| = \lim_{z \rightarrow 0} |z|^{n+1} \left| \frac{z^{n-1} P'(1/z)}{z^{2n-2} z^2 P(1/z)^2} \right| = 0.$$

Theorem 15

Sei P ein Polynom vom Grad $n \geq 2$ und sei z_0 ein (stark) anziehender periodischer Punkt von P . Dann liegt im Einzugsgebiet von z_0 bzgl. P ein kritischer Punkt.

Beweis

1) Setze $F(z) = P^m(z + z_0) - z_0$, wobei m die Periode des anziehenden periodischen Punkts z_0 von P ist. Im Beweis zu Proposition 13 wurde bereits gezeigt dass 0 ein anziehender Fixpunkt ist. Es genügt zu zeigen, dass F im Einzugsgebiet von 0 einen kritischen Punkt besitzt, denn sei $F'(z_{\text{crit}}) = 0$, so folgt

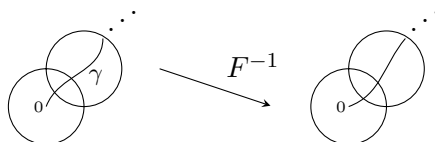
$$\prod_{k=0}^{m-1} P'(P^{k-1}(z_{\text{crit}} + z_0)) = 0.$$

Also finden wir ein $k \in \{0, \dots, m-1\}$ mit $P'(P^k(z_{\text{crit}} + z_0)) = 0$.

2) Angenommen $F'(0) = 0$, dann sind wir fertig. Sei also $F'(0) \neq 0$. Wähle r^* , sodass $F(B_{r^*}(0)) \subset B_{r^*}(0)$ injektiv und $B_{r^*}(0)$ im Einzugsgebiet von 0 bzgl. F liegt. Dies lässt sich so realisieren wegen dem Satz von der lokalen Umkehrabbildung und Proposition 13. Setze nun $V := F^{-1}(B_{r^*}(0))$. Dann wird F als Abbildung von V nach U surjektiv.

Behauptung: Falls F keine kritischen Punkte in $B_{r^*}(0)$ besitzt, so besitzt F eine analytische Umkehrabbildung $F^{-1} : B_{r^*}(0) \rightarrow U$, sodass $U \subset V$ ein Gebiet und $F^{-1}(0) = 0$.

Beweis. Nach Konstruktion existiert ein analytisches Inverse $F^{-1} : F(B_{r^*}(0)) \rightarrow B_{r^*}(0)$. Also können wir F^{-1} über Wege von 0 durch lokale Umkehrfunktionen analytisch fortsetzen.



Dadurch erhalten wir eine analytische Abbildung $F^{-1} : B_{r^*}(0) \rightarrow U$, die surjektiv ist. Diese ist mit dem Monodromiesatz wohldefiniert. Es bleibt zu zeigen, dass F^{-1} injektiv ist. Angenommen $F^{-1}(z_1) = F^{-1}(z_2)$. Dann ist $F(F^{-1}(z_1)) = F(F^{-1}(z_2))$ und da F^{-1} gerade lokal die Umkehrabbildung beschreibt auch $z_1 = z_2$.

3) Angenommen im Einzugsgebiet von 0 bzgl. F gibt es keine kritischen Punkte, so können wir F^{-1} auf sukzessiv größer werdenden Gebieten definieren, die selbst wieder im Einzugsgebiet sind. Dabei gilt

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}_0} F^{-k}(B_{r^*}(0)) \subset \mathbb{C} \setminus \{z \mid |z| > R\}$$

für hinreichend großes $R > r^*$. Tatsächlich gilt für R hinreichend groß $|F(z)| \geq |z|$ und insbesondere folgt damit auch $|F^n(z)| > R > r^*$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Nach Konstruktion gilt dabei

$$|(F^{-k})'(0)| = \left| \frac{1}{(F^k)'(F^{-k}(0))} \right| \stackrel{F^{-k}(0)=0}{=} \frac{1}{|(F^k)'(0)|} > 1.$$

Also ist 0 ein abstoßender Fixpunkt bzgl. F^{-1} . Nach Korollar 9 gibt es aber höchstens einen exzeptionellen Punkt. Es ergibt sich der Widerspruch. Also finden wir im Einzugsgebiet von 0 bzgl. F einen kritischen Punkt. Mit dem vorigen Resultat folgt, dass im Einzugsgebiet von z_0 bzgl. P ein kritischer Punkt zu finden ist. \square