

# Dynamische Systeme

Matthias Hofmann

19. Januar 2014

# Inhaltsverzeichnis

Motivation: das Newton-Verfahren

Allgemeine Definitionen

Normale Familien und exzeptionelle Punkte

Periodische Punkte

# Motivation: das Newton-Verfahren

Die Newtoniteration ist gegeben durch die Abbildung

$$\Phi(x) = z - \frac{f(z)}{f'(z)}.$$

Dabei ist für einen Startwert  $z_0$  folgendes Verhalten denkbar

- ▶ Die Newtoniteration konvergiert gegen eine Nullstelle von  $f$ ,
- ▶ Das Newton-Verfahren konvergiert nicht.

Das Newton-Verfahren konvergiert lokal. Wie ist das Konvergenzverhalten außerhalb dieser Konvergenzumgebung?

→ Newton-Fraktale.

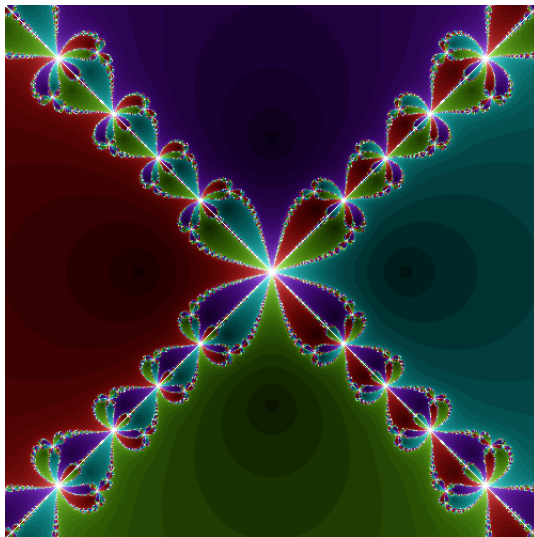


Abbildung : Newton-Fraktal für  $f(z) = z^4 - 1$

Dies motiviert das Konzept der *Fatou-* bzw. *Juliamenge*:

**Fatou-Menge** Die Startwerte aus dieser Menge führen unter Iteration zu einer „stetigen“ Dynamik, das heißt, eine kleine Änderung des Startwert führt zu einer ähnlichen Dynamik.

**Julia-Menge** Beschreibt die Menge der Startpunkte, die zu den „instabilen“ Prozessen gehören. Jede noch so kleine Änderung des Startwerts führt zu einer komplett anderen Dynamik.

Notation:  $F(f)$  bezeichnet die Fatoumenge von  $f$  und  $J(f)$  analog die Juliamenge von  $f$ .

# Charakterisierung periodischer Punkte

## Definition 1

Sei  $z_0$  periodischer Punkt bzgl.  $f$  mit Periode  $n$ , d.h.  $f^n(z_0) = z_0$ .  
Dann heißt er

- ▶ *stark anziehend*, falls  $|(f^n)'(z_0)| = 0$ ,
- ▶ *anziehend*, falls  $0 < |(f^n)'(z_0)| < 1$ ,
- ▶ *indifferent*, wenn  $|(f^n)'(z_0)| = 1$ ,
- ▶ *abstoßend*, wenn  $|(f^n)'(z_0)| > 1$ .

## Definition 2 (Einzugsgebiet)

Ist  $z_0$  ein anziehender periodischer Punkt von  $f$ , dann ist die Menge

$$A_f(z_0) = \{z \in \overline{\mathbb{C}} : \exists_{L \subset \mathbb{N}} \lim_{L \ni k \rightarrow \infty} f^k(z) = z_0\}$$

das *Einzugsgebiet* (engl. *basin of attraction*) von  $z_0$  bzgl.  $f$ .

## Definition 3

Eine Familie  $\{F_n\}$  analytischer Funktionen operiert *normal* auf einer Umgebung  $U$ , falls jede Folge  $(F_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$  eine Teilfolge  $(F_{n_{i_j}})_{j \in \mathbb{N}}$  besitzt, sodass einer der beiden Eigenschaften erfüllt ist:

- ▶  $F_{n_{i_j}}$  konvergiert gleichmäßig auf kompakten Mengen  $K \subset U$ .
- ▶  $F_{n_{i_j}}$  konvergiert gleichmäßig gegen  $\infty$  auf  $U$ .

Eine Familie  $\{F_n\}$  analytischer Funktionen operiert *nicht normal* bei  $z_0$ , falls er in keiner Umgebung *normal* operiert.



# Normale Familie und exzeptionelle Punkte

## Definition 4

Eine Familie  $\{F_n\}$  analytischer Funktionen operiert *normal* auf  $U$ , falls jede Folge  $(F_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$  eine Teilfolge  $(F_{n_{i_j}})_{j \in \mathbb{N}}$  besitzt, sodass einer der beiden Eigenschaften erfüllt ist:

- ▶  $F_{n_{i_j}}$  konvergiert gleichmäßig auf kompakten Mengen  $K \subset U$ .
- ▶  $F_{n_{i_j}}$  divergiert gleichmäßig gegen  $\infty$  auf  $U$ .

Eine Familie  $\{F_n\}$  analytischer Funktionen operiert *nicht normal* bei  $z_0$ , falls er in keiner Umgebung *normal* operiert.

## Beispiel 5

Betrachte die Funktion  $F$ , gegeben durch  $F(x) = ax$ . Definiere die Familie  $\{F^n\}$ .

**Fall 1:**  $0 < |a| < 1$ . so konvergiert für jede kompakte Teilmenge die Funktionenfolge  $F^n(z) = a^n \cdot z$  gleichmäßig gegen 0. Also operiert  $\{F^n\}$  normal auf jeder Umgebung  $U \subset \mathbb{C}$ .

→  $J(f) = \{\infty\}$ ,  $F(f) = \mathbb{C}$ ,  $A_F(0) = \mathbb{C}$ ,  $A_F(\infty) = \{\infty\}$ .

**Fall 2:**  $|a| > 1$ . Die Familie  $\{F\}$  operiert nicht normal bei 0, denn für  $z \neq 0$  konvergiert jede beliebige Teilfolge gegen  $\infty$ . Nun konvergiert aber  $F^{n_j}$  für beliebige Teilfolgen bei  $z = 0$  gleichmäßig gegen 0.

→  $J(F) = \{0\}$ ,  $F(f) = \overline{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$ ,  $A(0) = \{0\}$ ,  $A(\infty) = \overline{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$ .

## Proposition 6

Sei  $F$  analytisch,  $z_0$  ein abstoßender periodischer Punkt bzgl.  $F$ .  
Dann operiert die Familie  $\{F^n\}_{n \in \mathbb{N}}$  nicht normal bei  $z_0$ .

## Korrolar 7

Sei  $F$  eine analytische Funktion. Die Familie  $\{F^n\}_{n \in \mathbb{N}}$  operiert nicht normal für  $z \in J(F)$ .

## Theorem 8 (Montels Theorem)

Sei  $\{F_n\}$  eine Familie analytischer Funktionen auf einer Umgebung  $U$ . Angenommen es gibt  $a, b \in \mathbb{C}$ ,  $a \neq b$ , sodass  $F_n(z) \neq a \wedge F_n(z) \neq b$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $z \in U$ . Dann operiert  $\{F_n\}$  normal auf  $U \subset \mathbb{C}$ . (ohne Beweis)

## Korrolar 9

Sei  $F$  eine analytische Funktion. Sei  $z_0 \in J(F)$  und sei  $U$  eine beliebige Umgebung von  $z_0$ . Dann existiert höchstens ein  $a \in \mathbb{C}$  mit

$$a \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} F^n(U).$$

Wir nennen einen solchen Punkt *exzeptionellen Punkt*.

## Theorem 10

Sei  $P$  ein Polynom mit  $\text{Grad} \geq 2$ . Angenommen es gibt einen Punkt  $z_0 \in J(P)$  samt einer Umgebung  $U$  von  $z_0$  und ein  $a \in \mathbb{C}$ , sodass

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} P^n(U) = \mathbb{C} \setminus \{a\}$$

so folgt  $P(z) = a + \lambda(z - a)^k$  für  $\lambda \in \mathbb{C}, k \in \mathbb{N}$  geeignet.  
Insbesondere ist  $P$  mit  $\text{Grad } n \geq 2$  topologisch konjugiert zu  $Q : z \mapsto z^n$ , d.h. das ein Homöomorphismus  $H$  existiert mit  $Q \circ H = H \circ P$ .

## Beispiel 11

Für  $Q(z) = z^n$ ,  $n \geq 2$  folgt  $J(Q) = S^1$ . Sei  $U$  eine Umgebung um  $z_0 \in S^1$  mit  $0 \notin U$ , dann folgt

$$0 \notin \bigcup_{k=0}^{\infty} Q^k(U).$$

Insbesondere ist  $a = 0$  exzeptioneller Punkt.

# periodische Punkte

## Theorem 12 (Koenigs Linearisationstheorem)

Sei  $f$  eine analytische Funktion mit  $f(0) = 0$  und  $f'(0) = \lambda$  mit  $|\lambda| \notin \{0, 1\}$ , dann existiert ein Diffeomorphismus  $\varphi : U \rightarrow V$  mit  $\varphi(0) = 0$ , sodass

$$\varphi \circ f(z) = \lambda \cdot \varphi(z) \quad (*)$$

für  $z \in U$ , wobei  $U$  und  $V$  Umgebungen von 0 sind. Dieses  $\varphi$  ist bis auf Multiplikation mit einer Konstanten eindeutig.

## Proposition 13

Sei  $z_0$  ein anziehender periodischer Punkt bzgl. einer analytischen Funktion  $f$ , so existiert eine Umgebung  $U$  um  $z_0$ , sodass  $U \subset A_f(z_0)$ . Wir nennen die Zusammenhangskomponente von  $z_0 \in A_f(z_0)$  auch das *unmittelbare Einzugsgebiet* (engl. *immediate basin of attraction*) von  $z_0$  bzgl.  $f$ .



## Beispiel 14

Sei  $P$  ein Polynom vom Grad  $n \geq 2$ , dann ist  $\infty$  ein stark anziehender Fixpunkt bzgl.  $P$ . Tatsächlich ist

$$\begin{aligned}
 |P'(\infty)| &= \lim_{z \rightarrow 0} \left| \frac{d}{dz} \left[ \frac{1}{P(1/z)} \right] \right| \\
 &= \lim_{z \rightarrow 0} \left| \frac{P'(1/z)}{z^2 P(1/z)^2} \right| \\
 &= \lim_{z \rightarrow 0} \underbrace{|z|^{n+1}}_{\rightarrow 0} \underbrace{\left| \frac{z^{n-1} P'(1/z)}{z^{2n-2} z^2 P(1/z)^2} \right|}_{\text{beschränkt}} = 0.
 \end{aligned}$$

## Theorem 15

Sei  $P$  ein Polynom vom Grad  $n \geq 2$  und sei  $z_0$  ein (stark) anziehender periodischer Punkt von  $P$ . Dann liegt im Einzugsgebiet von  $z_0$  bzgl.  $P$  ein kritischer Punkt.

## Bemerkung

$z_0 = \infty$  ist ein stark anziehender Punkt. Insbesondere ist  $z_0$  kritisch nach Beispiel 14.