1 Motivation: das Newton-Verfahren

Die Newtoniteration ist gegeben durch die Abbildung

$$\Phi(z) = z - \frac{f(z)}{f'(z)}.$$

Dabei ist für einen Startwert z_0 folgendes Verhalten denkbar

- Die Newtoniteration konvergiert gegen eine Nullstelle von f,
- Die Newtoniteration konvergiert nicht.

Das Newton-Verfahren konvergiert lokal. Wie ist das Konvergenzverhalten außerhalb dieser Konvergenzumgebung? In Abbildung 1 wurde das Konvergenzverhalten für gegebene Startwerte durch unterschiedliche Farben hervorgehebt. Vergleichen wir benachbarte Werte auf ihre Dynamik so stellen wir fest, dass es Punkte gibt in denen in keiner Umgebung alle Punkte diesselbe Dynamik besitzen.

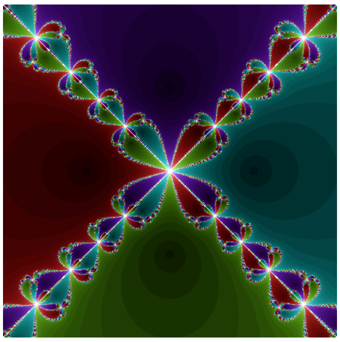

Abbildung 1: Newton-Fraktal für $f(z) = z^4 - 1$

Dies motiviert das Konzept der *Fatou-* bzw. *Juliamenge*:

Fatou-Menge Die Startwerte aus dieser Menge führen unter Iteration zu einer „stetigen“ Dynamik, das heißt, dass eine kleine Änderung des Startwert zu einer ähnlichen Dynamik führt.

Julia-Menge Beschreibt die Menge der Startpunkte, die zu den „instabilen“ Prozessen gehören. Jede noch so kleine Änderung des Startwerts führt zu einer komplett anderen Dynamik.

Notation: $F(f)$ bezeichnet die Fatoumenge von f und $J(f)$ analog die Juliamenge von f.

2 Allgemeine Definitionen

Sei im Folgenden $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ eine analytische Funktion auf $\mathbb{C}$ mit $f(\infty) = \infty$. Dabei setzen wir $f'(\infty) = \frac{d}{dz}\left[\frac{1}{f(1/z)}\right](0)$. Weiterhin bezeichne f^n die n-fache Verkettung von f.

Definition 1

Sei z_0 periodischer Punkt bzgl. f mit Periode n, d.h. $f^n(z_0) = z_0$. Dann heißt er

- *stark anziehend*, falls $|(f^n)'(z_0)| = 0$,
- *anziehend*, falls $0 < |(f^n)'(z_0)| < 1$,
- *indifferent*, wenn $|(f^n)'(z_0)| = 1$,
- *abstoßend*, wenn $|(f^n)'(z_0)| > 1$.

Definition 2 (Einzugsgebiet)
Ist z_0 ein anziehender periodischer Punkt von f, dann ist die Menge

$$A_f(z_0) = \{z \in \overline{\mathbb{C}} : \exists_{L \subset \mathbb{N}} \lim_{L \ni k \to \infty} f^k(z) = z_0\}$$

das *Einzugsgebiet* (engl. *basin of attraction*) von z_0 bzgl. f.

Definition 3 (Julia-Menge)
Wir definieren die Julia-Menge durch

$$J(f) := \overline{\{z \in \overline{\mathbb{C}} : z \text{ abstossender periodischer Punkt von } f\}}$$

Und die Fatou-Menge durch $F(f) = J(f)^c$

3 Normale Familien und exzeptionelle Punkte

Definition 4
Eine Familie $\{F_n\}$ analytischer Funktionen operiert *normal* auf einer Umgebung U, falls jede Folge $(F_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$ eine Teilfolge $(F_{n_{i_j}})_{j \in \mathbb{N}}$ besitzt, sodass einer der beiden Eigenschaften erfüllt ist:

- $F_{n_{i_j}}$ konvergiert gleichmäßig auf kompakten Mengen $K \subset U$.
- $F_{n_{i_j}}$ konvergiert gleichmäßig gegen ∞ auf U.

Eine Familie $\{F_n\}$ analytischer Funktionen operiert *nicht normal* bei z_0, falls er in keiner Umgebung *normal* operiert.

Beispiel 5
Betrachte die Funktion F, gegeben durch $F(x) = ax$. Definiere die Familie $\{F^n\}$.

Fall 1: $0 < |a| < 1$**.** so konvergiert für jede kompakte Teilmenge die Funktionenfolge $F^n(z) = a^n \cdot z$ gleichmäßig gegen 0. Also operiert $\{F^n\}$ normal auf jeder Umgebung $U \subset \mathbb{C}$.

$\longrightarrow J(f) = \{\infty\}, F(f) = \mathbb{C}$, $A_F(0) = \mathbb{C}$, $A_F(\infty) = \{\infty\}$.

Fall 2: $|a| > 1$**.** Die Familie $\{F\}$ operiert nicht normal bei 0, denn für $z \neq 0$ konvergiert jede beliebige Teilfolge gegen ∞. Nun konvergiert aber $F^{n_{i_j}}$ für beliebige Teilfolgen bei $z = 0$ gleichmäßig gegen 0.

$\longrightarrow J(F) = \{0\}$, $F(f) = \overline{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$, $A(0) = \{0\}$, $A(\infty) = \bar{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$.

Proposition 6
Sei F analytisch, z_0 ein abstoßender periodischer Punkt bzgl. F. Dann operiert die Familie $\{F^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ nicht normal bei z_0.

Korrolar 7
Sei F eine analytische Funktion. Die Familie $\{F^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ operiert nicht normal für $z \in J(F)$.

Theorem 8 (Montels Theorem)
Sei $\{F_n\}$ eine Familie analytischer Funktionen auf einer Umgebung U. Angenommen es gibt $a, b \in \mathbb{C}, a \neq b$, sodass $F_n(z) \neq a \wedge F_n(z) \neq b$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $z \in U$. Dann operiert $\{F_n\}$ normal auf $U \subset \mathbb{C}$. (ohne Beweis)

Korrolar 9
Sei F eine analytische Funktion. Sei $z_0 \in J(F)$ und sei U eine beliebige Umgebung von z_0. Dann existiert höchstens ein $a \in \mathbb{C}$ mit

$$a \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} F^n(U).$$

Wir nennen einen solchen Punkt *exzeptionellen Punkt.*

Theorem 10
Sei P ein Polynom mit Grad ≥ 2. Angenommen es gibt einen Punkt $z_0 \in J(P)$ samt einer Umgebung U von z_0 und ein $a \in \mathbb{C}$, sodass

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} P^n(U) = \mathbb{C} \setminus \{a\}$$

so folgt $P(z) = a + \lambda(z-a)^k$ für $\lambda \in \mathbb{C}, k \in \mathbb{N}$ geeignet. Insbesondere ist P mit Grad $n \geq 2$ topologisch konjugiert zu $Q : z \mapsto z^n$, d.h. das ein Homöomorphismus H existiert mit $Q \circ H = H \circ P$.

Beispiel 11
Für $Q(z) = z^n$, $n \geq 2$ folgt $J(Q) = S^1$. Sei U eine Umgebung um $z_0 \in S^1$ mit $0 \notin U$, dann folgt

$$0 \notin \bigcup_{k=0}^{\infty} Q^k(U).$$

Insbesondere ist $a = 0$ exzeptioneller Punkt.

4 Periodische Punkte

Theorem 12 (Koenigs Linearisationstheorem)
Sei f eine analytische Funktion mit $f(0) = 0$ und $f'(0) = \lambda$ mit $|\lambda| \notin \{0, 1\}$, dann existiert ein Diffeomorphismus $\varphi : U \to V$ mit $\varphi(0) = 0$, sodass

$$\varphi \circ f(z) = \lambda \cdot \varphi(z) \tag{$*$}$$

für $z \in U$, wobei U und V Umgebungen von 0 sind. Dieses φ ist bis auf Multiplikation mit einer Konstanten eindeutig.

Proposition 13
Sei z_0 ein anziehender periodischer Punkt bzgl. einer analytischen Funktion f, so existiert eine Umgebung U um z_0, sodass $U \subset A_f(z_0)$. Wir nennen die Zusammenhangskomponente von $z_0 \in A_f(z_0)$ auch das *unmittelbare Einzugsgebiet* (engl. *immediate basin of attraction*) von z_0 bzgl. f.

Beispiel 14
Sei P ein Polynom vom Grad $n \geq 2$, dann ist ∞ ein stark anziehender Fixpunkt bzgl. P. Tatsächlich ist

$$|P'(\infty)| = \lim_{z\to 0} \left| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \left[\frac{1}{P(1/z)} \right] \right| = \lim_{z\to 0} \left| \frac{P'(1/z)}{z^2 P(1/z)^2} \right| = \lim_{z\to 0} \underbrace{|z|^{n+1}}_{\to 0} \underbrace{\left| \frac{z^{n-1} P'(1/z)}{z^{2n-2} z^2 P(1/z)^2} \right|}_{\text{beschränkt}} = 0.$$

Theorem 15
Sei P ein Polynom vom Grad $n \geq 2$ und sei z_0 ein (stark) anziehender periodischer Punkt von P. Dann liegt im Einzugsgebiet von z_0 bzgl. P ein kritischer Punkt.