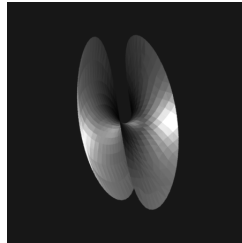
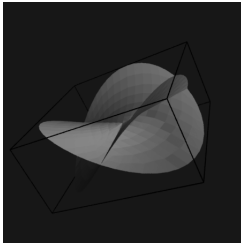


Diskrete Minimalflächen

Matthias Hofmann, Michael Rehme und Nadine Schlotz

20. Januar 2014

Die Aufgabenstellung



„Beschreiben Sie eine triangulierte Fläche in eine gegeben gekrümmte Raumkurve ein und versuchen Sie, eine Approximation an eine Minimalfläche zu berechnen.“

Vorgehensweise

- ▶ Einbeschreibung einer Fläche \implies Triangulierung.
- ▶ Einzelschrittverfahren zur Minimierung des Gesamtoberflächeninhalts
- ▶ Darstellung mittels `Geomview`

Hierfür benötigen wir noch eine geeignete Struktur.

klassen.h

```
1  #ifndef KLASSEN_H_
2  #define KLASSEN_H_
3
4  #include <iostream>
5  #include <fstream>
6  #include <list>
7  #include<vector>
8  #include<cstdlib>
9  #include<math.h>
10
11 using namespace std;
12
13 const unsigned int dim=3;
14
15 class Gitter; //forward declaration
```

```
1 //Vektor
2 class vector {
3     public:
4     bool isRand;
5         vector<double> v;
6         list<pair<int, int> > dreiecke;
7         vector();
8         vector(const vector<double> arg);
9
10        vector& operator+=(const vector& arg);
11        vector operator+(const vector& arg) const;
12
13        vector operator-(const vector& arg) const;
14        vector& operator-=(const vector& arg);
15
16        vector& operator*=(const double& arg);
17        vector operator*(const double& arg) const;
18
19        vector& operator/=(const double& arg);
20        vector operator/(const double& arg) const;
21
22
23        double operator*(const vector& arg) const;
24
25        void clear();
26
27        void ausgeben();
28    };
```

```
1 //Dreieck
2 class Dreieck
3 {
4     public:
5     Dreieck();
6         Dreieck(Gitter* vater);
7         Dreieck(Gitter* vater,int a, int b, int c);
8         virtual ~Dreieck();
9         int punkte[3];
10        Gitter* papa;
11 \begin{lstlisting}
12 //Dreieck
13 class Dreieck
14 {
15     public:
16     Dreieck();
17         Dreieck(Gitter* vater);
18         Dreieck(Gitter* vater,int a, int b, int c);
19         virtual ~Dreieck();
20         int punkte[3];
21         Gitter* papa;
```

```
1 //Dreieck
2 class Dreieck
3 {
4     public:
5     Dreieck();
6         Dreieck(Gitter* vater);
7         Dreieck(Gitter* vater,int a, int b, int c);
8         virtual ~Dreieck();
9         int punkte[3];
10        Gitter* papa;
11
12        // gibt die flaeche des dreiecks zurueck
13        double flaeche();
14        // gibt den gradienten an einer ecke (also 0 = 1. ecke, 1 = 2. ecke,
15        // 2 = 3. ecke) zurueck
16        victor gradient(int ecke);
17 };
```

```
1 //Punkteklasse
2 class Punkt
3 {
4     public:
5         Punkt();
6         Punkt(vector v, double t);
7         virtual ~Punkt();
8         Punkt& operator=(const Punkt& other);
9
10        vector Ort;
11        double parameter;
12};
```



```
1 //Gitter
2 class Gitter
3 {
4     public:
5         Gitter();
6         Gitter(const vector<Punkt> arg1,const vector<Dreieck> arg2 );
7         Gitter(int mode);
8         std::vector<Punkt> gib();
9         virtual ~Gitter();
10        std::vector<Punkt> punkte;
11        std::vector<Dreieck> dreiecke;
12
13        void finde();
14        victor gradient(Dreieck* arg, int ecke);
15        double Oberflaeche();
16        void verbessere();
17        void verbessere(int arg);
18        void Verfeinere(int mode);
19        void Verfeinere(int mode, int arg);
20 };
```

```
1 //Methods
2 double norm(const vector& arg);
3 void vcout(vector arg);
4 void Gcout(const Gitter& arg);
5 vector def(double a, double b);
6 vector def(double a, double b, double c);
7 vector cross(vector a, vector b);
8 vector randkurve(double t, int mode);
9 Punkt randpunkt();
```

Zusammenfassung

- ▶ Wir haben eine Vektorenklasse `vector` und verfügen über Grundrechenarten, Skalarprodukt und Kreuzprodukt.
- ▶ Die Punkteklasse `Punkt` basiert im wesentlichen aus einem Vektor und einem Parameter zur zugehörigen Parametrisierung.
- ▶ Wir unterscheiden zwischen Rand- und inneren Punkten. Randpunkte bleiben fest und sind durch den Wahrheitswert `isRand` zu erkennen.

- ▶ Unter Dreiecken verstehen wir ein Trippel aus Indizes der Punkteliste.
- ▶ Im Gitter sammeln wir eine Punkte- und Dreiecksliste. Insbesondere kann `Gitter::Oberflaeche()` die Oberfläche der Triangulierung berechnen.
- ▶ Zudem besitzt jeder Punkt über den Vektor `Ort` eine Liste sämtlicher anliegender Dreiecke. Die Erstellung dieser Liste erfolgt durch `Gitter::finde()`.
- ▶ Die Triangulierung wird in `Gitter::Verfeinere()` bewerkstelligt.
- ▶ Das Einzelschrittverfahren zur Minimierung wird in `Gitter::verbessere()` implementiert.

Triangulierung

Für gegebene Parametrisierung $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ einer geschlossenen Kurve erhält man eine Starttriangulatur, als das Dreieck gegeben durch $\gamma(\frac{1}{3}), \gamma(\frac{2}{3}), \gamma(1)$.

Verfeinerung

1. Halbiere jede Seite
2. Verschiebe ihn gegebenenfalls auf den Rand ($p_{\text{neu}} = \frac{p_1 + p_2}{2}$), falls es sich um eine Randkante handelt. (Trick: Betrachte Anzahl umliegender Dreiecke)
3. Erzeuge neue Dreiecke aus den eben definierten Punkten.

Gitter::Verfeinere()

```
1 //Sucht zu allen Punkten die zugehoerigen Dreiecke
2 void Gitter::finde() {
3     // leere Listen
4     for (unsigned int j = 0; j < punkte.size(); j++) {
5         punkte[j].Ort.dreiecke.clear();
6     }
7     for (unsigned int i = 0; i < dreiecke.size(); i++) {
8         punkte[dreiecke[i].punkte[0]].Ort.dreiecke.push_back(make_pair(i, 0));
9         punkte[dreiecke[i].punkte[1]].Ort.dreiecke.push_back(make_pair(i, 1));
10        punkte[dreiecke[i].punkte[2]].Ort.dreiecke.push_back(make_pair(i, 2));
11    }
12 }
```

```
1 //Verfeinerungsalgorithmus in Kooperation mit den anderen Gruppen, leicht modifiziert
2 void Gitter::Verfeinere(int mode) {
3     // enthaelt zu (a,b) den Punkt c.Ort = (a.Ort+b.Ort)/2, wobei a,b,c
4     //mithilfe von punktindices definiert werden
5     std::map<std::pair<int, int>, int> erstelltepunkte;
6     std::vector<Dreieck> neuendreiecke = std::vector<Dreieck>();
7     int pcnt = 0;
8     int dcnt = 0;
9     for (unsigned int i = 0; i < dreiecke.size(); ++i) {
10         int np[3];
11         for (int j = 0; j < 3; ++j) {
12             int a = dreiecke[i].punkte[j];
13             int b = dreiecke[i].punkte[(j + 1) % 3];
14
15             if (erstelltepunkte.find(std::pair<int, int>(a, b)) == erstelltepunkte.end()
16                 && erstelltepunkte.find(std::pair<int, int>(b, a))
17                     == erstelltepunkte.end()) {
18                 Punkt c = Punkt();
19                 c.Ort = (punkte[a].Ort + punkte[b].Ort) * 0.5;
20                 if (punkte[a].parameter < punkte[b].parameter)
21                     c.parameter = (punkte[a].parameter + punkte[b].parameter) * 0.5;
22                 else
23                     c.parameter = (1.0 + punkte[a].parameter + punkte[b].parameter)*0.5;
```



```
1      np[j] = punkte.size();
2      c.Ort.isRand = 0;
3      punkte.push_back(c);
4      pcnt++;
5      erstelltepunkte.insert(
6      std::pair<std::pair<int, int>, int>(std::pair<int, int>(a, b), np[j]));
7  } else {
8      if (erstelltepunkte.find(std::pair<int, int>(a, b))
9          == erstelltepunkte.end()) {
10         np[j] = erstelltepunkte[std::pair<int, int>(b, a)];
11     } else {
12         np[j] = erstelltepunkte[std::pair<int, int>(a, b)];
13     }
14 }
15 }
```

```
1 // neue dreiecke erstellen
2 for (int k = 0; k < 3; ++k) {
3     Dreieck d = Dreieck(this, dreiecke[i].punkte[k], np[k], np[(k + 2) % 3]);
4     neuendreiecke.push_back(d);
5     dcnt++;
6 }
7 Dreieck e = Dreieck(this, np[0], np[1], np[2]);
8 neuendreiecke.push_back(e);
9 dcnt++;
10 }
11 dreiecke = neuendreiecke;
12 std::cout << "Erstellte " << pcnt << " neue Punkte und " << dcnt
13     << " neue Dreiecke" << std::endl;
14
15 this->finde();
16 //Wenn ein Punkt in weniger als 6 Dreiecken vertreten ist, ist es ein Randpunkt
17 for (unsigned int i = 0; i < punkte.size(); i++) {
18     if (punkte[i].Ort.dreiecke.size() < 6) {
19         punkte[i].Ort = randpunkt(punkte[i].parameter, mode).Ort;
20         punkte[i].Ort.isRand=1;
21     }
22 }
23 }
```

Gradientenverfahren

- ▶ Zu einer gegebenen Triangulierung, soll an dieser Stelle das Gitter optimiert werden. \implies Minimierung des Flächeninhalts aller angrenzenden Dreiecke eines Punktes.
- ▶ Für diese Optimierungsaufgabe lässt sich ein Abstiegsverfahren/Näherungsverfahren ausnutzen.

Flächeninhalt eines Dreiecks

Der Flächeninhalt eines Dreiecks a, b, c berechnet sich zu:

$$A = \frac{1}{2} |(b - a) \times (c - a)|$$

Der Gradient zeigt in Richtung Höhe des Dreiecks. (ohne Beweis)
Also:

$$\nabla_a A \propto ((c - a) \times (c - b)) \times (c - b)$$

Die Gesamtgradientenrichtung ergibt sich dann durch Aufsummation. Für das Abstiegsverfahren negieren wir.

Gitter::verbessere()

```
1 //Berechnet den Gradienten an einem gegebenen Eck.
2 vector Dreieck::gradient(int ecke)
3 {
4     vector a = papa->punkte[punkte[(ecke+1)%3]].Ort-papa->punkte[punkte[ecke]].Ort;
5     vector b = papa->punkte[punkte[(ecke+1)%3]].Ort-papa->punkte[punkte[(ecke+2)%3]].Ort;
6
7     vector c = cross(cross(a,b),b);
8     return c;
9 }
10
11 //Berechnet die Oberflaeche der Gitterstruktur
12 double Gitter::Oberflaeche() {
13     double neugesamtflaeche=0;
14     for(int i = 0; i < dreiecke.size(); ++i)
15     {
16         neugesamtflaeche += dreiecke[i].flaeche();
17     }
18     return neugesamtflaeche;
19 }
```

```
1 // Verbessert das Gitter
2 void Gitter::verbessere() {
3     vector grad, grad_tmp, tmp;
4     double flaeche_ref;
5     double flaeche;
6     double faktor; //Schrittweite
7     double armijo=0.01; //Armijo-koeffizient
8     double neueflaeche=this->Oberflaeche();
9     double alteflaeche;
10    do {
11        alteflaeche=neueflaeche;
12        for (unsigned int i = 0; i < punkte.size(); i++) {
13            //Gradientenverfahren
14            flaeche_ref = 0;
15            grad.clear();
16
17            faktor = 2; //Schrittweite
18            //Berechne Gradienten
19            if (punkte[i].Ort.isRand == 0) {
20                for (list<pair<int, int> >::iterator it =
21                    punkte[i].Ort.dreiecke.begin();
22                    it != punkte[i].Ort.dreiecke.end(); ++it) {
23                    grad += dreiecke[it->first].gradient(it->second);
24                    flaeche_ref += dreiecke[it->first].flaeche();
25                }
```

```
1 //repeat-Schleife
2 do {
3 //double ngrad=grad*grad;
4 flaeche=0;
5
6 tmp=punkte[i].Ort;
7 faktor*=0.5;
8 punkte[i].Ort-=grad*faktor; //update Punkt
9 for (list<pair<int,int> >::iterator it = punkte[i].Ort.dreiecke.begin();
10 it != punkte[i].Ort.dreiecke.end(); ++it) {
11
12 flaeche+=dreiecke[it->first].flaeche();
13 }
14 punkte[i].Ort=tmp;
15 } while (flaeche>flaeche_ref-armijo*faktor*(grad*grad));
16 //Wir akzeptieren unsere Verbesserung nur wenn sie die Armijo-Bedingung erfuehlt
17 punkte[i].Ort-=grad*faktor;
18 }
19 }
20 neueflaeche=this->Oberflaeche();
21 //cout << alteflaeche-neueflaeche <<endl;
22 } while(fabs((alteflaeche-neueflaeche)/neueflaeche)>1e-4); //Berechne die Verbesserung
23 //Falls die relative Verbesserung einer gewissen Toleranz unterliegt brechen wir ab.
24 }
```

main.cpp

```
1 //Ausgabe fuer Geomview.
2 void Gcout(const Gitter& arg) {
3     ofstream file;
4     file.open("Test");
5     file << "OFF" << endl;
6     file << arg.punkte.size() << " " << arg.dreiecke.size() << " " << 4 << endl;
7     std::vector<Punkt> arg2 = arg.punkte;
8     for (unsigned int i = 0; i < arg2.size(); i++) {
9         file << arg2[i].Ort.v[0] << " " << arg2[i].Ort.v[1] << " "
10        << arg2[i].Ort.v[2] << endl;
11     }
12     std::vector<Dreieck> arg3 = arg.dreiecke;
13     for (unsigned int i = 0; i < arg3.size(); i++) {
14         file << 3 << " " << arg3[i].punkte[0] << " " << arg3[i].punkte[1] << " "
15        << arg3[i].punkte[2] << endl;
16     }
17     file.close();
18 }
```



```
1  int main(){
2  // Variablen
3  int mode, n;
4  double alteflaeche=0, neueflaeche=0;
5
6  // Nachkommastellen
7  cout.setf(ios::fixed, ios::floatfield);
8  cout.precision(8);
9
10 // Programmstruktur
11 cout << "Waehlen Sie eine Kurve aus:" << endl;
12 cout << "(1) Tennisballkurve" << endl;
13 cout << "(2) sich selbst schneidende Kurve" << endl;
14 cout << "(3) Kreiskurve" << endl;
15 cin >> mode;
16 cout << "Anzahl der Verfeinerungsschritte:" << endl;
17 cin >> n;
18 cout << "Initialisiere" << endl;
19 Gitter g=Gitter(mode);
20 }
```

```
1  g.finde();
2  cout << "Oberflaeche: (Anfangszustand) " << g.Oberflaeche()<<endl;
3  for(int i=0; i<n; i++){
4  g.Verfeinere(mode);
5  alteflaeche=g.Oberflaeche();
6  cout <<"Oberflaeche nach Verfeinerung: " << alteflaeche <<endl;
7  g.verbessere();
8  neueflaeche=g.Oberflaeche();
9  cout <<"Oberflaeche nach Minimierungsschritt: " << neueflaeche <<endl;
10 cout <<"relative Verbesserung nach Minimierungsschritt: " << fabs((alteflaeche-neueflaeche)/
11 }
12 cout <<"Ausgabe... Sie koennen nun mit Geomview die Datei 'Test' aufrufen" << endl;
13 Gcout(g);
14 return 0;
```