Universität Stuttgart

Masterseminar Funktionalanalysis

Schrödingeroperatoren mit inversquadratischem Potential

Matthias Hofmann

2. Juli 2015

1 Einführung

Wir betrachten im Folgenden die Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = 0, t \geq 0, x \in \mathbb{R}^N, \\ u(x,0) = u_0 \geq 0. \end{cases} \tag{1}$$

Dann ist die Lösung der Wärmeleitungsgleichung eindeutig durch

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^N} K(x-y,t) u_0(y) \, \mathrm{d}y,$$

gegeben, wobei $K(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-|x|^2/4t}$. Dann ist $u(x,t)$ die klassische Lösung des Problems (1) und

$$T(t)\phi := e^{\Delta t}\phi := \int_{\mathbb{R}^N} K(x-y,t)\phi(y) \, \mathrm{d}y$$

definiert eine stark stetige Halbgruppe auf $L^2(\mathbb{R}^N)$ (vgl. [5] Beispiel II.2.12). Sie erhält Positivität, sodass für $\phi \geq 0$ auch $T(t)\phi \geq 0$, und ist analytisch für $t > 0$.

Sei $A_V = -\Delta - V(\cdot)$ ein Schrödinger-Operator auf $L^2(\mathbb{R}^N)$, sodass

$$0 \leq V \in L^\infty(\{x : |x| \geq \varepsilon\})$$

für jedes $\varepsilon > 0$. Wie verhalten sich Lösungen der gestörten Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{cases} \partial_t u - A_V u = 0, t \geq 0, x \in \mathbb{R}^N, \\ u(x,0) = u_0 \geq 0. \end{cases} \tag{2}$$

Für $V \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ definiert V einen beschränkten Multiplikationsoperator und die Existenz von klassischen Lösungen folgt aus Satz 7 (s. Appendix) für beschränkte Störungen. Was passiert, wenn V zu singulär wird?

Wir erlauben im Folgenden auch schwache Lösungen von (2).

Definition 1. *u ist schwache Lösung von (2) falls, für jedes $T, R > 0$, gilt*

$$u \in L^1(B(0,R) \times (0,T)), Vu \in L^1(B(0,R) \times (0,T)) \text{ und}$$
$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} u(-\partial_t \phi - L\phi) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t - \int_{\mathbb{R}^N} f\phi(\cdot,0) \, \mathrm{d}x = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} Vu\phi \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t$$

für alle $\phi \in C_c^2(\mathbb{R}^N \times [0,T))$.

H. Brezis und J. L. Lions vermuteten, dass für $V(x) \leq \frac{C}{|x|^{2-\varepsilon}}$ mit $C, \varepsilon > 0$ keine positive Lösungen besitzt. P. Baras und A. Goldstein lösten die Problemstellung. Sei dazu $C^*(N) = (\frac{N-2}{2})^2$ und $V_c(x) = \frac{c}{|x|^2}$.

Theorem 2 (Baras–Goldstein **1984**, [3])**.** *Die Gleichung $\partial_t u + A_{V_c} u = 0, (x \in \mathbb{R}^N, t \geq 0)$ besitzt positive Lösungen (z.B. für $u(x,0) = u_0(x)$ für jedes $0 \leq u_0 \in L^2(\mathbb{R}^N)$) falls $c \leq C^*(N)$ und keine positive Lösungen falls $c > C^*(N)$.*

Beweisidee. Sei $V_n(x) = \inf\{V_c(x), n\}$ das *cutoff*-Potential. Bezeichne u_n die Lösung von

$$\begin{cases} \partial_t u_n - \Delta u_n - V_n u_n = 0, t \geq 0, x \in \mathbb{R}^N, \\ u_n(x,0) = u(x,0) = f(x) \geq 0. \end{cases}$$

Dann falls $c \leq C^*(N)$ können wir zum Grenzwert $n \to \infty$ übergehen und erhalten eine Lösung. Die Schwierigkeit liegt im Erhalt der Konvergenz. □

2 Das Cabré–Martel Theorem

Wir definieren den Grundzustand von $-(\Delta + V)$ durch

$$\lambda_1(\Delta + V) := \inf_{\phi \in H^1(\mathbb{R}^N)\setminus\{0\}} \left(\frac{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \phi|^2 \,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N} V\phi^2 \,\mathrm{d}x}{\int_{\mathbb{R}^N} \phi^2 \,\mathrm{d}x} \right). \tag{3}$$

X. Cabré und Y. Martel zeigten den Zusammenhang zwischen Existenz von schwachen Lösungen von (1) und der Existenz eines Grundzustands.

Theorem 3 (Cabré–Martel **1999**, [4]). *Sei* $0 \leq V \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N), N \geq 3$. *Es folgt:*

(i) Falls $\lambda_1(\Delta + V) > -\infty$, *dann existiert eine postive Lösung* $u \in C([0,\infty), L^2(\mathbb{R}^N))$, *sodass*

$$\|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq e^{\omega t}\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}, t \geq 0 \tag{4}$$

für ein $\omega \in \mathbb{R}$.

(ii) Falls $\lambda_1(\Delta + V) = -\infty$, *dann folgt für* $0 \leq u_0 \in L^2(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$, *dann gibt es keine positive Lösung von* (1), *sodass* (4) *erfüllt wird.*

Beweis. (i) Betrachte im Folgenden die Lösungen u_n von

$$\begin{cases} \partial_t u_n - \Delta u_n - V_n u_n = 0, t \geq 0, x \in \mathbb{R}^N, \\ u_n(x,0) = u(x,0) = f(x) \geq 0. \end{cases} \tag{5}$$

Nach Theorem 7 erzeugt $\Delta + V_n$ eine positive, analytische, stark stetige Halbgruppe $S_n(\cdot)$ auf $L^2(\mathbb{R}^N)$. Es folgt mit (8) (vgl. Appendix)

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Multiplizieren wir (5) mit u_n und integrieren, dann folgt

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \partial_t (u_n)^2 \,\mathrm{d}x \leq -\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 + \int_{\mathbb{R}^N} V u_n^2 \,\mathrm{d}\mu.$$

So erhalten wir mit der Definition von (3)

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \partial_t (u_n)^2 \,\mathrm{d}x \leq -\lambda_1(\Delta + V)\int_{\mathbb{R}^n} u_n^2 dx.$$

Und somit

$$\|u_n(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq e^{-\lambda_1(\Delta+V)t}\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}, t \geq 0.$$

Daher folgt die lokal gleichmäßige Beschränktheit der zugehörigen Halbgruppen mit

$$\|S_n(t)\| \leq e^{-\lambda_1(\Delta+V)}t$$

Nach dem Trotter–Neveu–Kato Theorem (vgl. Appendix) folgt die Existenz einer stark stetigen Halbgruppe $S(t)$, sodass $S_n(t) \to S(t), t \geq 0$ im staken Sinne konvergiert. Dann folgt im Grenzwert für $u(t) = S(t)u_0 \in C([0,T], L^2(\mathbb{R}^N))$, dass dies eine schwache Lösung zu (2) ist.

(ii) Angenommen es gäbe eine postive schwache Lösung zu (2) mit Anfangswert $u_0 \geq 0$. Sei u_n die eindeutige positive Lösung zu (5). Dann gilt das Maximumsprinzip (vgl. Appendix)

$$0 < u_n \leq u. \tag{6}$$

Mit monotoner Konvergenz folgt die Existenz eines punktweisen Grenzwerts $u_n(t) \to \tilde{u}(t), t \geq 0$, die sogenannte milde Lösung des Problems.

Multiplizieren wir (5) mit $\frac{\phi^2}{u_n}$ und integrieren wir, so ergibt sich

$$\int_{\mathbb{R}^N} V_n\phi^2 \,\mathrm{d}x \leq \partial_t \left(\int_{\mathbb{R}^N} (\log u_n)\phi^2 \,\mathrm{d}x \right) + \int_{\mathrm{R}^N} |\nabla\phi|^2 \,\mathrm{d}x.$$

Integrieren wir für $t \in (1, \infty)$, so folgt

$$(t-1)\int_{\mathbb{R}^N} V_n\phi^2 \,\mathrm{d}x \leq \int_{\mathbb{R}^N} \log\left(\frac{u_n}{u_0}\right)\phi^2 \,\mathrm{d}x + (t-1)\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\phi|^2 \,\mathrm{d}x$$

für jedes $t > 1$. Lassen wir $n \to \infty$ folgt mit Lebesgue

$$\int_{\mathbb{R}^N} V\phi^2 \,\mathrm{d}\mu - \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\phi|^2 \,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{t-1}\left[\int_{\mathbb{R}^N} \log(\tilde{u}(t))\phi^2 \,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N} \log(\tilde{u}(1))\phi^2 \,\mathrm{d}x\right]$$

für jedes $t > 1$. Mit Jensenscher und Hölderscher Ungleichungen folgt

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^N} V\phi^2 \,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\phi|^2 \,\mathrm{d}x \\ &\qquad\leq \frac{1}{2(t-1)}\left\{2\log(M) + 2\omega t + 2\log\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} + 2\log\|\phi\|_\infty - 2\int_{\mathbb{R}^N} \log(\tilde{u}(1))\phi^2 \,\mathrm{d}x\right\}.\end{aligned}$$

Im Grenzwert $t \to \infty$, erhalten wir

$$\int_{\mathbb{R}^N} V\phi^2 \,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\phi|^2 \,\mathrm{d}x \leq \omega\int_{\mathbb{R}^N} \phi^2 \,\mathrm{d}x.$$

Mit Dichtheit von $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ in $H_0^1(\mathbb{R}^N)$ folgt $\lambda_1(\Delta + V) > -\infty$. Ein Widerspruch zur Voraussetzung. □

Bemerkung 4. *Die Bedingung* (4) *in der Nichtexistenz ist tatsächlich nicht notwendig. Dies hängt mit dem Maximumsprinzip* (6) *zusammen. In [3] wurde mittels eines Blowup-Arguments gezeigt, dass die Lösungen $u_n(x,t)$ für $t > 0$ überall und zu allen Zeiten unbeschränkt sind.*

3 Hardy-Ungleichung und das Baras–Goldstein-Theorem

Mittels Theorem 3 in Verbindung mit Bemerkung 4 können wir Theorem 2 beweisen. Tatsächlich hängt die Existenz von Lösungen stark mit der Hardy-Ungleichung und Optimalität der Konstanten in dieser zusammen.
Lemma 5 (Hardy-Ungleichung)**.** *Sei $N \geq 3$. Dann gilt*

$$C^*(N) \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\phi^2(x)}{|x|^2} \, \mathrm{d}x \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \phi|^2 \, \mathrm{d}x, \quad \phi \in H^1(\mathbb{R}^N). \tag{7}$$

Beweis. Es genügt die Hardy-Ungleichung für $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ zu zeigen. Die allgemeine Hardy-Ungleichung folgt durch ein Dichtheitsargument. Tatsächlich finden wir eine Folge $\phi_n \to \phi$ in H^1 mit $\phi_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, die fast überall punktweise konvergiert. Dann folgt mit dem Lemma von Fatou die Ungleichung in allgemeiner Form.

Sei $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$. Es folgt

$$\phi(x) = -\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \phi(tx) \, \mathrm{d}t = -\int_1^\infty x \cdot (\nabla \phi(tx)) \, \mathrm{d}t.$$

Mit der Miskowskischen Integralungleichung folgt

$$\left\| \frac{\phi}{|x|} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq \int_1^\infty \|\nabla \phi(t \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \, \mathrm{d}t = \left(\int_1^\infty t^{-N/2} \, \mathrm{d}t \right) \|\nabla \phi\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \sqrt{C^*(N)} \|\nabla \phi\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

Alternativ: Für $x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ folgt

$$\operatorname{div} \left(\frac{\lambda x}{|x|^2} \right) = \frac{\lambda(N-2)}{|x|^2}$$

wobei $\lambda > 0$ noch frei wählbar sei.

Sei $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$. Multiplizieren wir beide Seiten mit ϕ^2 und integrieren wir partiell erhalten wir

$$-2 \int_{\mathbb{R}^N} \phi \frac{\lambda x}{|x|^2} \cdot \nabla \phi \, \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\phi^2 \lambda (N-2)}{|x|^2} \, \mathrm{d}x.$$

Mit der Youngschen Ungleichung folgt dann

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{\phi^2 \lambda(N-2)}{|x|^2} \, \mathrm{d}x \leq 2 \int_{\mathbb{R}^N} \left| \frac{\lambda \phi}{|x|} \right| |\nabla \phi(x)| \, \mathrm{d}x \leq \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{\lambda \phi}{|x|} \right)^2 \mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \phi|^2 \, \mathrm{d}x.$$

Es folgt somit

$$(\lambda(N-2) - \lambda^2) \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\phi^2}{|x|^2} \, \mathrm{d}x \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \phi|^2 \, \mathrm{d}x.$$

$\lambda \mapsto \lambda(N-2) - \lambda^2$ nimmt sein Maximum bei $\lambda = \frac{N-2}{2}$ an und es ergibt sich (7). Die Aussage überträgt sich mit Dichtheit wegen $H^1(\mathbb{R}^N) = H_0^1(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$.

Alternative 2: Wie bereits erwähnt genügt es die Gleichung für $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$ zu zeigen. Sei $\mathcal{R}$ das radiale Vektorfeld $\mathcal{R} = \sum_{i=1}^d x_i \partial_i$. Da $\mathcal{R}|x|^{-2} = -2|x|^{-2}$ führt partielle Integration zu

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|f(x)|^2}{|x|^2} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{2f(x)\mathcal{R}f(x)}{|x|^2} \, \mathrm{d}x + \frac{N}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|f(x)|^2}{|x|^2} \, \mathrm{d}x.$$

Mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung folgt

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|f(x)|^2}{|x|^2}\,\mathrm{d}x &= \frac{2}{2-N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(x)\mathcal{R}f(x)}{|x|^2}\,\mathrm{d}x \\ &\le \frac{2}{N-2}\left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|f(x)|^2}{|x|^2}\,\mathrm{d}x\right)^{1/2}\left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\mathcal{R}f(x)|^2}{|x|^2}\,\mathrm{d}x\right)^{1/2},\end{aligned}$$

und damit

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|f(x)|^2}{|x|^2}\right)^{1/2} \le \frac{2}{N-2}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla f(x)|^2\,\mathrm{d}x\right)^{1/2}.$$

□

Beweis von Theorem 2. Die Existenz von Lösungen folgt für $c \le C^*(N)$ direkt aus Theorem 3, da mit der Hardy-Ungleichung (7) folgt

$$\lambda_1(\Delta + \frac{c}{|x|^2}) = \inf_{0\neq\phi\in H^1(\mathbb{R}^N)}\left(\frac{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\phi|^2\,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N} c\frac{\phi^2}{|x|^2}\,\mathrm{d}x}{\int_{\mathbb{R}^N}\phi^2\,\mathrm{d}x}\right) \ge 0.$$

Sei $c > C^*(N)$. Um die Nichtexistenz von Lösungen zu zeigen, wählen wir für $\frac{2-N}{2} < \gamma < 0$ geeignete $\phi_\gamma \in H^1(\mathbb{R}^N)$, sodass

$$\lambda_1(\Delta + \frac{c}{|x|^2}) \le \lim_{\gamma\to(\frac{2-N}{N})+}\left(\frac{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\phi_\gamma|^2\,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N} c\frac{\phi_\gamma^2}{|x|^2}\,\mathrm{d}x}{\int_{\mathbb{R}^N}\phi_\gamma^2\,\mathrm{d}x}\right) = -\infty.$$

Die Aussage folgt dann aus Theorem 3. Dies zeigt insbesondere die Optimalität der Konstanten $C^*(N)$ in (7).

Sei also $\phi_\gamma = |x|^\gamma\eta(x)$, wobei $x \in \mathbb{R}^N$ und $\eta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, sodass $\eta = 1$ auf $B_1(0)$ und $\eta = 0$ auf $\mathbb{R}^N \setminus B_2(0)$. Es folgt

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} \phi_\gamma^2(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{B_1} |x|^{2\gamma}\,\mathrm{d}x + \int_{B_2\setminus B_1} |x|^{2\gamma}\eta^2\,\mathrm{d}x \\ &\ge \frac{\sigma_{N-1}}{2\gamma+N} + 2^{2\gamma}c_1, \\ \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\phi_\gamma|^2(x)\,\mathrm{d}x &\le \frac{\gamma^2\sigma_{N-1}}{2\gamma+N-2} + 2(\gamma^2 c_1 + \|\nabla\eta\|_\infty^2), \\ \int_{\mathbb{R}^N} \frac{c\phi_\gamma^2(x)}{|x|^2}\,\mathrm{d}x &\ge \frac{c\sigma_{N-1}}{2\gamma+N-2} + c2^{\gamma-2}c_1,\end{aligned}$$

wobei σ_{N-1} der Flächeninhalt der Einheitskugel im $\mathbb{R}^N$ ist und $c_1 = \int_{B_2\setminus B_1}\eta^2(x)\,\mathrm{d}x$. Damit folgt

$$\lambda_1(\Delta + \frac{c}{|x|^2}) \le \lim_{\gamma\to(\frac{2-N}{N})+}\left(\frac{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\phi_\gamma|^2\,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N} c\frac{\phi_\gamma^2}{|x|^2}\,\mathrm{d}x}{\int_{\mathbb{R}^N}\phi_\gamma^2\,\mathrm{d}x}\right) = -\infty,$$

was den Beweis abschließt.

□

Bemerkung 6. *Theorem 3 wurde in [6] für gestörte Kolmogorov-Gleichungen*

$$\begin{cases} \partial_t u - (\Delta + V)u + \nabla\rho \cdot \nabla u = 0, t \geq 0, x \in \mathbb{R}^N, \\ u(x,0) = u_0 \geq 0 \end{cases}$$

studiert (für eine geeignete Einführung verweisen wir auf [8]) und für $\rho(x) = \frac{1}{2}Bx \cdot x$, wobei $B \in \mathbb{R}^{N\times N}$ positive definite Matrix, beschreibt dies gerade einen Ornstein–Uhlenbeck-*Prozess. Für solche wurde in [6] ein Analogon zum Baras–Goldstein-Theorem zur Existenz von Lösung durch den Beweis einer gewichteten Hardy-Ungleichung gezeigt.*

A Appendix

In diesem Teil geben wir einige relevante Aussagen mit Referenz an. Wir beginnen mit einem elementaren Satz aus der Störungstheorie:

Theorem 7. *Sei $(A, D(A))$ erzeugt von einer stark stetigen Halbgruppe $(T(t))_{t\geq 0}$ auf einem Banachraum X, sodass*

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$$

für alle $t \geq 0$ und $w \in \mathbb{R}$, $M \geq 1$. Falls $B \in \mathcal{L}(X)$, dann erzeugt $C := A + B$ mit $D(C) = D(A)$ eine stark stetige Halbgruppe $(S(t))_{t\geq 0}$ mit

$$\|S(t)\| \leq Me^{(w+M\|B\|)t}$$

für alle $t \geq 0$. Diese erfüllt das Duhamel-Prinzip*:*

$$S(t)x = T(t)x + \int_0^t T(t-s)BS(s)x \,\mathrm{d}s \tag{8}$$

für alle $t \geq 0$ und $x \in X$. Außerdem lässt sich diese schreiben durch die stark konvergente Dyson–Phillips-*Reihe*

$$S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{S}_n(t),$$

wobei $\tilde{S}_0(t) := T(t)$ und

$$\tilde{S}_{n+1} := \int_0^t T(t-s)B\tilde{S}_n(s)\,\mathrm{d}x.$$

Insbesondere übertragen sich Eigenschaften wie Postivität (falls $B \geq 0$) und Analytizität.

Beweis. Wir verweisen auf [5] Satz III.1.3, Korollar III.1.7 und Satz III.1.10. □

Lemma 8. *Seien u_n Lösungen von (5), dann gilt*

$$0 < u_n \leq u_{n+1}.$$

Beweis. In direkter Konsequenz zu vorigem Theorem folgt $u_n \geq e^{\Delta t}u_0 > 0$ für $t > 0$. Dann folgt mit (8)

$$u_{n+1}(t) - u_n(t) = \int_0^t e^{\Delta + V_n}(V_{n+1} - V_n)u_n(s)\,\mathrm{d}s \geq 0.$$

□

Als nächstes wollen wir das Maximumsprinzip zeigen:
Lemma 9. *Seien u_n Lösungen von* (5) *und positive Lösung von* (2)*, dann gilt*

$$0 < u_n(t) \leq u(t), \quad t \geq 0.$$

Beweis. Mit der Definition von schwachen Lösungen folgt

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} (u_n - u)(-\partial_t \phi - \Delta\phi - V_n\phi)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} (V_n - V)u\phi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \leq 0$$

für alle $0 \leq \phi \in H_0^2(B_R \times [0,T))$ und $T, R > 0$. Sei $0 \leq \psi \in C_c^\infty(B_R \times (0,T))$, so können wir $0 \leq \phi$ derart wählen, dass

$$\begin{cases} \partial_t\phi + \Delta\phi + V_n\phi = -\psi. \\ \phi|_{\partial B_R \times (0,T)} = 0, \\ \phi(\cdot, T) = 0 \end{cases}$$

Wir können Diese ist äquivalent zur Existenz von $\tilde{\phi}(x,t) = \phi(x, T-t)$ mit

$$\begin{cases} \partial_t\tilde{\phi}(x,t) = \Delta\tilde{\phi}(x,t) + V_n\tilde{\phi}(x,t) + \psi(x,t), \\ \tilde{\phi}|_{\partial B_R \times (0,T)} = 0, \\ \tilde{\phi}(\cdot, 0) = 0 \end{cases}$$

die aus der Existenz von Lösungen von diesen Problemen zurückzuführen sind. Dafür kann man analog wie in [1] Theorem 6.2.8 verfahren oder allgemeiner auf [7] Theorem 2.2.5 zurückgreifen. und somit folgt

$$0 < u_n \leq u, \quad t \geq 0.$$

□

Als Letztes wollen wir einen Beweis zu einer Variation des Trotter–Never–Kato-Theorems angeben. Der Folgende mit Verallgemeinerung ist zum Beispiel für kontraktive Halbgruppen zu finden als Proposition 3.6 in [2], der aber aus [10] stammt.

Theorem 10 (Trotter–Neveu–Kato)**.** *Seien T_k stark stetige, quasikontraktive Halbgruppe auf L^2, so dass $0 \leq T_k(t) \leq T_{k+1}(t)$ und*

$$\|T_k(t)\| \leq e^{\omega t}, \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

Dann existiert $T(t)f = \lim_{k\to\infty} T_k(t)f$ für alle $f \in L^2, t \geq 0$, und definiert eine stark stetige Halbgruppe T auf L^2.

Beweis. Die Existenz des starken Grenzwerts folgt mit monotoner Konvergenz und $T(t) \in \mathcal{L}(L^2)$ und $T(t+s) = T(t)T(s)$ für $t, s \geq 0$. Es bleibt starke Stetigkeit des Grenzwerts zu zeigen. Sei $t_n \downarrow 0$, $0 \leq f \in L^2$. Dann ist zu zeigen: $f_n := T(t_n)f \to f$ wenn $n \to \infty$. Sei $g_n := T_1(t_n)f$. Dann $0 \leq g_n \leq f_n$ und $g_n \to f$ wenn $n \to \infty$. Weiter folgt $\|g_n\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2}$.

Es genügt zu zeigen, dass jede Teilfolge von (f_n) eine gegen f konvergente Teilfolge besitzt. OBdA können wir annehmen, dass f_n schwach gegen $h \in L^2$ konvergiert (sonst wähle eine Teilfolge). Da $g_n \leq f_n$ und $g_n \to f$ folgt, dass $f \leq h$. Damit ergibt sich $\|f\|_{L^2} \leq \|h\|_{L^2}$. Insbesondere $g_n \to f$ in L^2 und wir folgern

$$\|h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \liminf_{n\to\infty} e^{\omega t_n}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

und daher $f_n \to f$ in $L^2(\mathbb{R}^n)$. □

Literatur

[1] Arendt, Wolfgang; Batty, Charles J. K.; Hieber, Matthias; Neubrander, Frank: *Vector-valued Laplace transforms and Cauchy problems.* Monographs in Mathematics, 96. Birkhäuser Verlag, Basel, 2001. xii+523 pp.

[2] Arendt, Wolfgang; Goldstein, Gisèle Ruiz; Goldstein, Jerome A.: *Outgrowths of Hardy's inequality.* Recent advances in differential equations and mathematical physics, 51–68, Contemp. Math., 412, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006.

[3] Baras, Pierre; Goldstein, Jerome A: *The heat equation with a singular potential.* Trans. Amer. Math. Soc. 284 (1984), no. 1, 121-139.

[4] Cabré, Xavier; Martel, Yvan: *Existence versus explosion instantanée pour des équations de la chaleur linéaires avec potentiel singulier.* (French. English, French summary) [Existence versus instantaneous blowup for linear heat equations with singular potentials] C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 329 (1999), no. 11, 973-978.

[5] Engel, Klaus-Jochen; Nagel, Rainer: *A short course on operator semigroups.* Universitext. Springer, New York, 2006.

[6] Goldstein, G. R.; Goldstein, J. A.; Rhandi, A.: *Weighted Hardy's inequality and the Kolmogorov equation perturbed by an inverse-square potential.* Appl. Anal. 91 (2012), no. 11, 2057-2071.

[7] Ladyženskaja, O. A.; Solonnikov, V. A.; Ural'ceva, N. N. *Linear and quasilinear equations of parabolic type.* (Russian) Translated from the Russian by S. Smith. Translations of Mathematical Monographs, Vol. 23 American Mathematical Society, Providence, R.I. 1968 xi+648 pp.

[8] Lorenzi, Luca; Bertoldi, Marcello *Analytical methods for Markov semigroups.* Pure and Applied Mathematics (Boca Raton), 283. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2007. xxxii+526 pp.

[9] Rhandi, Abdelaziz: *Heat and Ornstein-Uhlenbeck semigroups perturbed by an inverse-square potential.* Unpublished, 2015.

[10] Voigt, Jürgen: *Absorption semigroups, their generators, and Schrödinger semigroups.* J. Funct. Anal. 67 (1986), no. 2, 167–205.