Universität Stuttgart

Masterseminar Funktionalanalysis

Schrödingeroperatoren mit inversquadratischem Potential

Matthias Hofmann

1. Juli 2015

1 Einführung

Wir betrachten im Folgenden die Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = 0, t \geq 0, x \in \mathbb{R}^N, \\ u(x,0) = u_0 \geq 0. \end{cases} \tag{1}$$

Dann ist die Lösung der Wärmeleitungsgleichung eindeutig durch

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^N} K(x-y,t) u_0(y) \, \mathrm{d}y,$$

gegeben ist, wobei $K(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-|x|^2/4t}$. Dann ist $u(x,t)$ die klassische Lösung des Problems (1) und

$$T(t)\phi := e^{\Delta t}\phi := \int_{\mathbb{R}^N} K(x-y,t)\phi(y) \, \mathrm{d}y$$

definiert eine stark stetige Halbgruppe auf $L^2(\mathbb{R}^N)$ (vgl. [5] Beispiel II.2.12). Sie erhält Positivität, sodass für $\phi \geq 0$ auch $T(t)\phi \geq 0$, und ist analytisch für $t > 0$.

Sei $A_V = -\Delta - V(\cdot)$ ein Schrödinger-Operator auf $L^2(\mathbb{R}^N)$, sodass

$$0 \leq V \in L^\infty(\{x : |x| \geq \varepsilon\})$$

für jedes $\varepsilon > 0$. Wie verhalten sich Lösungen der gestörten Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{cases} \partial_t u - A_V u = 0, t \geq 0, x \in \mathbb{R}^N, \\ u(x,0) = u_0 \geq 0. \end{cases} \tag{2}$$

Für $V \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ definiert V einen beschränkten Multiplikationsoperator und die Existenz von klassischen Lösungen folgt aus Satz 7 (s. Appendix) für beschränkte Störungen. Was passiert, wenn V zu singulär wird?

Wir erlauben im Folgenden auch schwache Lösungen von (2).

Definition 1. *u ist schwache Lösung von (2) falls, für jedes $T, R > 0$, gilt*

$$u \in L^1(B(0,R) \times (0,T)), Vu \in L^1(B(0,R) \times (0,T)) \text{ und}$$
$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} u(-\partial_t \phi - L\phi) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t - \int_{\mathbb{R}^N} f\phi(\cdot,0) \, \mathrm{d}x = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} Vu\phi \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t$$

für alle $\phi \in C_c^2(\mathbb{R}^N \times [0,T))$.

H. Brezis und J. L. Lions vermuteten, dass für $V(x) \leq \frac{C}{|x|^{2-\varepsilon}}$ mit $C, \varepsilon > 0$ keine positive Lösungen besitzt. P. Baras und A. Goldstein lösten die Problemstellung. Sei dazu $C^*(N) = (\frac{N-2}{2})^2$ und $V_c(x) = \frac{c}{|x|^2}$.

Theorem 2 (BARAS–GOLDSTEIN **1984**, [3])**.** *Die Gleichung $\partial_t u + A_{V_c} u = 0, (x \in \mathbb{R}^N, t \geq 0)$ besitzt positive Lösungen (z.B. für $u(x,0) = u_0(x)$ für jedes $0 \leq u_0 \in L^2(\mathbb{R}^N)$) falls $c \leq C^*(N)$ und keine positive Lösungen falls $c > C^*(N)$.*

2 Das Cabré–Martel Theorem

Wir definieren den Grundzustand von $-(\Delta + V)$ durch

$$\lambda_1(\Delta + V) := \inf_{\phi \in H^1(\mathbb{R}^N)\setminus\{0\}} \left(\frac{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \phi|^2 \,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N} V\phi^2 \,\mathrm{d}x}{\int_{\mathbb{R}^N} \phi^2 \,\mathrm{d}x} \right). \tag{3}$$

X. Cabré und Y. Martel zeigten den Zusammenhang zwischen Existenz von schwachen Lösungen von (1) und der Existenz eines Grundzustands.

Theorem 3 (Cabré–Martel **1999**, [4]). *Sei* $0 \le V \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N), N \ge 3$. *Es folgt:*

(i) Falls $\lambda_1(\Delta + V) > -\infty$, *dann existiert eine postive Lösung* $u \in C([0,\infty), L^2(\mathbb{R}^N))$, *sodass*

$$\|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \le e^{\omega t}\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}, t \ge 0 \tag{4}$$

für ein $\omega \in \mathbb{R}$.

(ii) Falls $\lambda_1(\Delta + V) = -\infty$, *dann folgt für* $0 \le u_0 \in L^2(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$, *dann gibt es keine positive Lösung von* (1), *sodass* (4) *erfüllt wird.*

Bemerkung 4. *Die Bedingung* (4) *in der Nichtexistenz ist tatsächlich nicht notwendig. Dies hängt mit dem Maximumsprinzip* (6) *zusammen. In [3] wurde mittels eines Blowup-Arguments gezeigt, dass die Lösungen* $u_n(x,t)$ *für* $t > 0$ *überall und zu allen Zeiten unbeschränkt sind.*

3 Hardy-Ungleichung und das Baras–Goldstein-Theorem

Mittels Theorem 3 in Verbindung mit Bemerkung 4 können wir Theorem 2 beweisen. Tatsächlich hängt die Existenz von Lösungen stark mit der Hardy-Ungleichung und Optimalität der Konstanten in dieser zusammen.

Lemma 5 (Hardy-Ungleichung). *Sei* $N \ge 3$. *Dann gilt*

$$C^*(N) \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\phi^2(x)}{|x|^2} \,\mathrm{d}x \le \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \phi|^2 \,\mathrm{d}x, \quad \phi \in H^1(\mathbb{R}^N). \tag{5}$$

Bemerkung 6. *Theorem 3 wurde in [6] für gestörte Kolmogorov-Gleichungen*

$$\begin{cases} \partial_t u - (\Delta + V)u + \nabla\rho \cdot \nabla u = 0, t \ge 0, x \in \mathbb{R}^N, \\ u(x,0) = u_0 \ge 0 \end{cases}$$

studiert (für eine geeignete Einführung verweisen wir auf [8]) und für $\rho(x) = \frac{1}{2}Bx \cdot x$, *wobei* $B \in \mathbb{R}^{N\times N}$ *positive definite Matrix, beschreibt dies gerade einen* Ornstein–Uhlenbeck-*Prozess. Für solche wurde in [6] ein Analogon zum Baras–Goldstein-Theorem zur Existenz von Lösung durch den Beweis einer gewichteten Hardy-Ungleichung gezeigt.*

A Appendix

In diesem Teil geben wir einige relevante Aussagen mit Referenz an. Wir beginnen mit einem elementaren Satz aus der Störungstheorie:

Theorem 7. *Sei $(A, D(A))$ erzeugt von einer stark stetigen Halbgruppe $(T(t))_{t\geq 0}$ auf einem Banachraum X, sodass*

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$$

für alle $t \geq 0$ und $w \in \mathbb{R}$, $M \geq 1$. Falls $B \in \mathcal{L}(X)$, dann erzeugt $C := A + B$ mit $D(C) = D(A)$ eine stark stetige Halbgruppe $(S(t))_{t\geq 0}$ mit

$$\|S(t)\| \leq Me^{(w+M\|B\|)t}$$

für alle $t \geq 0$. Diese erfüllt das Duhamel-Prinzip*:*

$$S(t)x = T(t)x + \int_0^t T(t-s)BS(s)x \,\mathrm{d}s \tag{6}$$

für alle $t \geq 0$ und $x \in X$. Außerdem lässt sich diese schreiben durch die stark konvergente Dyson–Phillips-*Reihe*

$$S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{S}_n(t),$$

wobei $\tilde{S}_0(t) := T(t)$ und

$$\tilde{S}_{n+1} := \int_0^t T(t-s)B\tilde{S}_n(s) \,\mathrm{d}x.$$

Insbesondere übertragen sich Eigenschaften wie Postivität (falls $B \geq 0$) und Analytizität.

Lemma 8. *Seien u_n Lösungen von (5), dann gilt*

$$0 < u_n \leq u_{n+1}.$$

Als nächstes wollen wir das Maximumsprinzip zeigen:

Lemma 9. *Seien u_n Lösungen von (5) und positive Lösung von (2), dann gilt*

$$0 < u_n(t) \leq u(t), \quad t \geq 0.$$

Als Letztes wollen wir einen Beweis zu einer Variation des Trotter–Never–Kato-Theorems angeben. Der Folgende mit Verallgemeinerung ist zum Beispiel für kontraktive Halbgruppen zu finden als Proposition 3.6 in [2], der aber aus [10] stammt.

Theorem 10 (Trotter–Neveu–Kato)**.** *Seien T_k stark stetige, quasikontraktive Halbgruppe auf L^2, so dass $0 \leq T_k(t) \leq T_{k+1}(t)$ und*

$$\|T_k(t)\| \leq e^{\omega t}, \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

Dann existiert $T(t)f = \lim_{k\to\infty} T_k(t)f$ für alle $f \in L^2, t \geq 0$, und definiert eine stark stetige Halbgruppe T auf L^2.

Literatur

[1] Arendt, Wolfgang; Batty, Charles J. K.; Hieber, Matthias; Neubrander, Frank: *Vector-valued Laplace transforms and Cauchy problems.* Monographs in Mathematics, 96. Birkhäuser Verlag, Basel, 2001. xii+523 pp.

[2] Arendt, Wolfgang; Goldstein, Gisèle Ruiz; Goldstein, Jerome A.: *Outgrowths of Hardy's inequality.* Recent advances in differential equations and mathematical physics, 51–68, Contemp. Math., 412, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006.

[3] Baras, Pierre; Goldstein, Jerome A: *The heat equation with a singular potential.* Trans. Amer. Math. Soc. 284 (1984), no. 1, 121-139.

[4] Cabré, Xavier; Martel, Yvan: *Existence versus explosion instantanée pour des équations de la chaleur linéaires avec potentiel singulier.* (French. English, French summary) [Existence versus instantaneous blowup for linear heat equations with singular potentials] C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 329 (1999), no. 11, 973-978.

[5] Engel, Klaus-Jochen; Nagel, Rainer: *A short course on operator semigroups.* Universitext. Springer, New York, 2006.

[6] Goldstein, G. R.; Goldstein, J. A.; Rhandi, A.: *Weighted Hardy's inequality and the Kolmogorov equation perturbed by an inverse-square potential.* Appl. Anal. 91 (2012), no. 11, 2057-2071.

[7] Ladyženskaja, O. A.; Solonnikov, V. A.; Ural'ceva, N. N. *Linear and quasilinear equations of parabolic type.* (Russian) Translated from the Russian by S. Smith. Translations of Mathematical Monographs, Vol. 23 American Mathematical Society, Providence, R.I. 1968 xi+648 pp.

[8] Lorenzi, Luca; Bertoldi, Marcello *Analytical methods for Markov semigroups.* Pure and Applied Mathematics (Boca Raton), 283. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2007. xxxii+526 pp.

[9] Rhandi, Abdelaziz: *Heat and Ornstein-Uhlenbeck semigroups perturbed by an inverse-square potential.* Unpublished, 2015.

[10] Voigt, Jürgen: *Absorption semigroups, their generators, and Schrödinger semigroups.* J. Funct. Anal. 67 (1986), no. 2, 167–205.