Derivacion del Gradiente Funcional en Control optimo

1. Planteamiento del Problema

Nuestro objetivo es encontrar una funcion de control $u^*(t)$ que minimice el funcional $S(u, x)$:

$$S(u, x) = G(x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} M(x(t), u(t), t) dt$$

sujeto a las siguientes condiciones:

1. **Ecuacion de Estado (Restriccion Dinamica):** $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$ para $t \in [t_0, t_f]$
2. **Condicion Inicial:** $x(t_0) = x_0$ (estado inicial fijo)
3. **Restriccion de Control:** $u(t) \in U_{ad}$ para todo $t \in [t_0, t_f]$ (por ejemplo, $u(t) \geq 0$).

Aqui, las variables y funciones tienen las siguientes dimensiones (utilizando vectores columna para estados y controles):

- t: Tiempo (escalar).
- t_0, t_f: Tiempos inicial y final, respectivamente (escalares, fijos).
- $x(t) \in \mathbb{R}^n$: Vector de estado (un vector columna de $n \times 1$). x_0 es el estado inicial conocido.
- $u(t) \in \mathbb{R}^m$: Vector de control (un vector columna de $m \times 1$). U_{ad} es el conjunto de valores de control admisibles.
- $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$: Funcion de costo terminal (una funcion escalar del estado final).
- $M : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: Funcion de costo de trayectoria (una funcion escalar del estado, el control y el tiempo).
- $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$: Funcion de dinamica (una funcion vectorial columna de $n \times 1$ que define como cambia el estado con el tiempo).

Asumimos que todas las funciones G, M y f son suficientemente suaves (continuamente diferenciables) para que existan sus derivadas.

2. La Funcion Aumentada del Lagrangiano

El metodo estandar para manejar restricciones de igualdad en problemas de optimizacion es incorporar estas restricciones a la funcion objetivo mediante multiplicadores de Lagrange. Para restricciones dinamicas, estos multiplicadores son funciones del tiempo y se conocen como **variables adjuntas** o **variables de costo**.

Introducimos una variable adjunta $\lambda(t) \in \mathbb{R}^n$ (un vector columna de $n \times 1$).

$$\mathcal{L}(u, x, \lambda) = G(x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} \left[M(x(t), u(t), t) + \lambda(t)^T (f(x(t), u(t), t) - \dot{x}(t)) \right] dt$$

Nota sobre dimensiones: * $\lambda(t)^T$ es un vector fila de $1 \times n$. * $(f(x(t), u(t), t) - \dot{x}(t))$ es un vector columna de $n \times 1$. * El producto $\lambda(t)^T(f(x(t), u(t), t) - \dot{x}(t))$ es un escalar, por lo que puede ser integrado.

En una solucion optima, donde la ecuacion de estado se satisface (es decir, $f - \dot{x} = 0$), el termino integral que contiene $\lambda(t)$ es cero. En este caso, $\mathcal{L}$ se reduce al funcional original S. Por lo tanto, minimizar $\mathcal{L}$ es equivalente a minimizar S bajo las restricciones.

3. Derivacion de las Condiciones Necesarias de Primer Orden (Calculo Variacional)

Para encontrar las funciones optimas $u^*(t)$, $x^*(t)$ y $\lambda^*(t)$, aplicamos el calculo de variaciones. Consideramos una pequeña variacion (perturbacion) en u, x y λ, denotadas por δu, δx y $\delta\lambda$, respectivamente. La condicion necesaria de primer orden para la optimizacion es que la primera variacion de $\mathcal{L}$ debe ser cero para variaciones admisibles arbitrarias.

La primera variacion de $\mathcal{L}$, $\delta\mathcal{L}$, se calcula considerando $\mathcal{L}(u + \epsilon\delta u, x + \epsilon\delta x, \lambda + \epsilon\delta\lambda)$ y tomando la derivada con respecto a ϵ evaluada en $\epsilon = 0$.

$$\delta\mathcal{L} = \frac{d}{d\epsilon}\bigg|_{\epsilon=0} \mathcal{L}(u + \epsilon\delta u, x + \epsilon\delta x, \lambda + \epsilon\delta\lambda)$$

Descomponemos la diferenciacion termino por termino:

a. Variacion de $G(x(t_f))$:

$$\delta G(x(t_f)) = \left(\frac{\partial G}{\partial x}(x_f)\right)^T \delta x_f$$

* $\frac{\partial G}{\partial x}$ es el vector columna de $n \times 1$ del gradiente de G con respecto a x. Su transpuesta es un vector fila de $1 \times n$. δx_f es el vector columna de $n \times 1$ de la variacion del estado final. El producto es un escalar.

b. Variacion del Termino Integral $\int_{t_0}^{t_f} [\dots] dt$: El integrando es $L_I = M(x, u, t) + \lambda^T(f(x, u, t) - \dot{x}(t))$. La variacion del integrando es:

$$\delta L_I = \left(\frac{\partial M}{\partial x}\right)^T \delta x + \left(\frac{\partial M}{\partial u}\right)^T \delta u + \delta\lambda^T(f - \dot{x}) + \lambda^T(\delta f - \delta\dot{x})$$

* $\frac{\partial M}{\partial x}$ es un vector columna de $n \times 1$, y $\frac{\partial M}{\partial u}$ es un vector columna de $m \times 1$. Sus transpuestas son vectores fila. * $\delta\lambda^T$ es un vector fila de $1 \times n$. * $\delta\dot{x}$ es un vector columna de $n \times 1$. * δf es la variacion de la funcion de dinamica f. Usando la regla de la cadena para funciones vectoriales:

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f}{\partial u}\delta u$$

donde $\frac{\partial f}{\partial x}$ es la matriz Jacobiana de $n \times n$ de f con respecto a x, y $\frac{\partial f}{\partial u}$ es la matriz Jacobiana de $n \times m$ de f con respecto a u.

Sustituimos δf en δL_I:

$$\delta L_I = \left(\frac{\partial M}{\partial x}\right)^T \delta x + \left(\frac{\partial M}{\partial u}\right)^T \delta u + \delta\lambda^T(f - \dot{x}) + \lambda^T \left(\frac{\partial f}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f}{\partial u}\delta u\right) - \lambda^T\delta\dot{x}$$

$$\delta L_I = \left(\frac{\partial M}{\partial x}\right)^T \delta x + \left(\frac{\partial M}{\partial u}\right)^T \delta u + \delta\lambda^T(f - \dot{x}) + \lambda^T\frac{\partial f}{\partial x}\delta x + \lambda^T\frac{\partial f}{\partial u}\delta u - \lambda^T\delta\dot{x}$$

Ahora, abordamos el termino $\int_{t_0}^{t_f} -\lambda^T \delta\dot{x} dt$ utilizando la **integracion por partes**. La formula para integrales definidas es $\int_a^b u\,dv = [uv]_a^b - \int_a^b v\,du$. Aqui, sea $u = -\lambda^T$ y $dv = \delta\dot{x}dt$. Entonces $du = -\dot{\lambda}^T dt$ y $v = \delta x$.

$$\int_{t_0}^{t_f} -\lambda(t)^T \delta\dot{x}(t) dt = [-\lambda(t)^T \delta x(t)]_{t_0}^{t_f} - \int_{t_0}^{t_f} -\dot{\lambda}(t)^T \delta x(t) dt$$

$$= -\lambda(t_f)^T \delta x(t_f) + \lambda(t_0)^T \delta x(t_0) + \int_{t_0}^{t_f} \dot{\lambda}(t)^T \delta x(t) dt$$

Dado que el estado inicial $x(t_0) = x_0$ es fijo, su variacion $\delta x(t_0) = 0$. Por lo tanto, el termino de frontera se simplifica a:

$$[-\lambda(t)^T \delta x(t)]_{t_0}^{t_f} = -\lambda(t_f)^T \delta x_f$$

Sustituimos este resultado de nuevo en la expresion para $\delta\mathcal{L}$:

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L} = &\left(\frac{\partial G}{\partial x}(x_f)\right)^T \delta x_f - \lambda(t_f)^T \delta x_f + \int_{t_0}^{t_f} \dot{\lambda}^T \delta x\, dt \\ &+ \int_{t_0}^{t_f} \left[\left(\frac{\partial M}{\partial x}\right)^T \delta x + \left(\frac{\partial M}{\partial u}\right)^T \delta u + \delta\lambda^T (f - \dot{x}) + \lambda^T \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \lambda^T \frac{\partial f}{\partial u} \delta u \right] dt\end{aligned}$$

Ahora, agrupamos los terminos segun δx_f, $\delta x(t)$, $\delta u(t)$ y $\delta\lambda(t)$:

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L} = &\left(\left(\frac{\partial G}{\partial x}(x_f)\right)^T - \lambda(t_f)^T\right) \delta x_f \\ &+ \int_{t_0}^{t_f} \left[\left(\left(\frac{\partial M}{\partial x}\right)^T + \dot{\lambda}^T + \lambda^T \frac{\partial f}{\partial x}\right) \delta x(t) \right. \\ &+ \left(\left(\frac{\partial M}{\partial u}\right)^T + \lambda^T \frac{\partial f}{\partial u}\right) \delta u(t) \\ &\left. + (f - \dot{x})^T \delta\lambda(t) \right] dt\end{aligned}$$

Para que $\mathcal{L}$ este en un extremo (minimo o maximo), su primera variacion $\delta\mathcal{L}$ debe ser cero para variaciones δx, δu y $\delta\lambda$ arbitrarias (dentro de sus respectivos espacios y respetando x_0 fijo). Esto implica que cada coeficiente debe ser cero de forma independiente.

a) Condicion de $\delta\lambda$ (La Ecuacion de Estado): Al establecer el coeficiente de $\delta\lambda(t)$ en cero, obtenemos:

$$f(x(t), u(t), t) - \dot{x}(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$$

Esto nos recupera la **Ecuacion de Estado** original. Esto confirma que en una solucion optima, la restriccion dinamica debe ser satisfecha.

b) Condiciones de δx (El Sistema Adjoint/Coestado): Al establecer los coeficientes de δx_f y $\delta x(t)$ en cero, se define el sistema adjunto (ecuacion de coestado y su condicion de frontera).

* **Condicion de Transversalidad (Condicion Terminal para λ):** Estableciendo el coeficiente de δx_f en cero:

$$\left(\frac{\partial G}{\partial x}(x_f)\right)^T - \lambda(t_f)^T = 0$$

Transponiendo de nuevo a la forma de vector columna:

$$\lambda(t_f) = \frac{\partial G}{\partial x}(x_f)$$

Esta es la condicion terminal necesaria para la variable adjunta.

* **Ecuacion de Coestado (Adjunta):** Estableciendo el coeficiente del integrando de $\delta x(t)$ en cero:

$$\left(\frac{\partial M}{\partial x}(x,u,t)\right)^T + \dot{\lambda}(t)^T + \lambda(t)^T \frac{\partial f}{\partial x}(x,u,t) = 0$$

Reorganizando para resolver $\dot{\lambda}(t)^T$:

$$\dot{\lambda}(t)^T = -\left(\frac{\partial M}{\partial x}(x,u,t)\right)^T - \lambda(t)^T \frac{\partial f}{\partial x}(x,u,t)$$

Tomando la transpuesta de ambos lados para obtener $\dot{\lambda}(t)$ como un vector columna:

$$\dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial M}{\partial x}(x,u,t) - \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,u,t)\right)^T \lambda(t)$$

Esta es la **Ecuacion de Coestado**

c) Condicion de δu (La Condicion de Optimalidad): Estableciendo el coeficiente del integrando de $\delta u(t)$ en cero se obtiene la condicion sobre el control optimo.

$$\left(\frac{\partial M}{\partial u}(x,u,t)\right)^T + \lambda(t)^T \frac{\partial f}{\partial u}(x,u,t) = 0$$

Transponiendo esta ecuacion de vector fila de $1 \times m$ para obtener un vector columna de $m \times 1$:

$$\frac{\partial M}{\partial u}(x,u,t) + \left(\frac{\partial f}{\partial u}(x,u,t)\right)^T \lambda(t) = 0$$

4. El Hamiltoniano y el Principio de Minimo de Pontryagin

El **Hamiltoniano** $H(x,u,\lambda)$ es una funcion fundamental en el Principio de Minimo de Pontryagin (PMP). Se define para consolidar elegantemente el costo de trayectoria y la dinamica del sistema. La definicion estandar que usaremos es:

$$H(x,u,\lambda) = M(x,u,t) + \lambda(t)^T f(x,u,t)$$

Donde M es la funcion de costo de trayectoria, f es la funcion de dinamica, y λ es el vector columna de $n \times 1$ de la variable adjunta.

Las condiciones necesarias para la optimalidad, segun el Principio de Minimo de Pontryagin, son:

1. **Ecuacion de Estado:**

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial H}{\partial \lambda}(x, u, \lambda) = f(x, u, t)$$

con la condicion inicial $x(t_0) = x_0$. (Esta es consistente con nuestra derivacion, ya que $\frac{\partial}{\partial \lambda}(\lambda^T f) = f$).

2. **Ecuacion de Coestado (Adjunta):**

$$\dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(x, u, \lambda)$$

Para ser explicitos, usando la definicion del Hamiltoniano $H(x, u, \lambda) = M(x, u, t) + \lambda(t)^T f(x, u, t)$: $\frac{\partial H}{\partial x}$ es el gradiente de H con respecto a x, un vector columna de $n \times 1$.

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial x} + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^T \lambda$$

Por lo tanto, la ecuacion de coestado en la forma estandar del PMP es:

$$\dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial M}{\partial x}(x, u, t) - \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, u, t)\right)^T \lambda(t)$$

con la condicion terminal (transversalidad):

$$\lambda(t_f) = \frac{\partial G}{\partial x}(x(t_f))$$

3. **Principio de Minimo:** El control optimo $u^*(t)$ debe minimizar el Hamiltoniano H puntualmente para todo $t \in [t_0, t_f]$, sujeto a las restricciones del control:

$$H(x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t), t) = \min_{u \in U_{ad}} H(x^*(t), u, \lambda^*(t), t)$$

Para el caso de un control no restringido, esto implica que $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$. Si existen restricciones (por ejemplo, $u \in U_{ad}$), se aplican las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) a H con respecto a u.

4. **Condicion de Hamiltoniano Constante (si el tiempo no aparece explicitamente en H):** Si el Hamiltoniano no depende explicitamente del tiempo ($H(x, u, \lambda)$ en lugar de $H(x, u, \lambda, t)$), entonces el valor del Hamiltoniano a lo largo de la trayectoria optima es constante.

$$H(x(t), u(t), \lambda(t)) = \text{constante } \forall t \in [t_0, t_f]$$

5. Calculo del Gradiente del Funcional S con Respecto a u

Para algoritmos numericos como el descenso de gradiente, necesitamos calcular el gradiente del funcional S con respecto al control u. Este gradiente nos indica la direccion de ascenso mas pronunciado de S. La utilidad del metodo adjunto es que, una vez que las ecuaciones de estado y de coestado son satisfechas, la variacion del costo funcional S se puede expresar unicamente en terminos de la variacion del control.

El gradiente funcional $\frac{\delta S}{\delta u}(t)$ se obtiene directamente de la derivada parcial del Hamiltoniano con respecto a u, evaluada a lo largo de las trayectorias $x(t)$ y $\lambda(t)$ que satisfacen las ecuaciones de estado y coestado.

Calculemos $\frac{\partial H}{\partial u}$:

$$H(x, u, \lambda, t) = M(x, u, t) + \lambda(t)^T f(x, u, t)$$

El gradiente $\frac{\partial H}{\partial u}$ es un vector columna de $m \times 1$. Su j-esimo componente es:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial H}{\partial u}\right)_j &= \frac{\partial M}{\partial u_j} + \frac{\partial}{\partial u_j}\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(x, u, t)\right) \\ &= \frac{\partial M}{\partial u_j} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial u_j}\end{aligned}$$

En forma de matriz/vector, esto se puede expresar como:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \frac{\partial M}{\partial u} + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^T \lambda$$

Donde:

- $\frac{\partial M}{\partial u}$: Es el vector columna de $m \times 1$ del gradiente de la funcion escalar M con respecto al vector de control u.
- $\frac{\partial f}{\partial u}$: Es la matriz Jacobiana de $n \times m$ de la funcion vectorial f con respecto al vector u.
- $\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^T$: Es la transpuesta de la matriz Jacobiana, una matriz de $m \times n$.
- λ: Es el vector columna de $n \times 1$ de las variables adjuntas.
- El producto $\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^T \lambda$ sera una matriz de $m \times n$ multiplicada por un vector columna de $n \times 1$, lo que resultara en un vector columna de $m \times 1$.

Por lo tanto, el gradiente funcional de S con respecto al control u, en un instante de tiempo t, se calcula como:

$$\frac{\delta S}{\delta u}(t) = \frac{\partial H}{\partial u}(x(t), u(t), \lambda(t), t) = \frac{\partial M}{\partial u}(x(t), u(t), t) + \left(\frac{\partial f}{\partial u}(x(t), u(t), t)\right)^T \lambda(t)$$

Este es el termino $g(t)$ que se utilizara en un algoritmo de descenso de gradiente. Esta formula es una consecuencia directa de la definicion del Hamiltoniano y el Principio de Minimo de Pontryagin.

6. Esquema del Algoritmo de Descenso de Gradiente (Recapitulando)

Para minimizar $S(u,x)$ sujeto a las restricciones, un enfoque iterativo de descenso de gradiente es el siguiente:

Dada una estimacion inicial para el control $u^{(0)}(t)$:

Para la iteracion $k = 0, 1, 2, \ldots$:

1. **Paso Adelante (Resolver Ecuacion de Estado):** Utilizando $u^{(k)}(t)$ y la condicion inicial $x(t_0) = x_0$, integrar numericamente la ecuacion de estado hacia adelante desde t_0 hasta t_f:
$$\dot{x}^{(k)}(t) = f(x^{(k)}(t), u^{(k)}(t), t)$$
Almacenar la trayectoria $x^{(k)}(t)$.

2. **Paso Atras (Resolver Ecuacion de Coestado):** Utilizando $x^{(k)}(t)$ y la condicion terminal $\lambda(t_f) = \frac{\partial G}{\partial x}(x^{(k)}(t_f))$, integrar numericamente la ecuacion de coestado hacia atras desde t_f hasta t_0:
$$\dot{\lambda}^{(k)}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(x^{(k)}(t), u^{(k)}(t), \lambda^{(k)}(t), t)$$
(Recordar: $\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial x} + (\frac{\partial f}{\partial x})^T \lambda$) Almacenar la trayectoria $\lambda^{(k)}(t)$.

3. **Calcular el Gradiente:** En cada instante de tiempo t, calculaar el gradiente (direccion de descenso) utilizando la formula derivada anteriormente:
$$g^{(k)}(t) = \frac{\partial H}{\partial u}(x^{(k)}(t), u^{(k)}(t), \lambda^{(k)}(t), t) = \frac{\partial M}{\partial u}(x^{(k)}, u^{(k)}, t) + \left(\frac{\partial f}{\partial u}(x^{(k)}, u^{(k)}, t)\right)^T \lambda^{(k)}(t)$$

4. **Actualizar el Control (Descenso de Gradiente Proyectado):** Actualizar la funcion de control utilizando un tamaño de paso $\alpha^{(k)}$:
$$u_{temp}^{(k+1)}(t) = u^{(k)}(t) - \alpha^{(k)} g^{(k)}(t)$$
Aplicar la restriccion de control, por ejemplo, $u(t) \geq 0$ (proyeccion):
$$u^{(k+1)}(t) = \max(0, u_{temp}^{(k+1)}(t)) \quad \text{(componente a componente)}$$
Asegurar de que el tamaño de paso $\alpha^{(k)}$ sea apropiado para garantizar la convergencia.

5. **Verificar Convergencia:** Evaluar el cambio en el control $\|u^{(k+1)} - u^{(k)}\|$ o el cambio en el costo $S(u^{(k+1)}, x^{(k+1)}) - S(u^{(k)}, x^{(k)})$. Si el cambio es menor que una tolerancia predefinida, nos detenemos. De lo contrario, continuar con la siguiente iteracion.

Esta es la derivacion completa y el metodo para calcular el gradiente funcional para problemas de control optimo.

7. Aplicacion al Problema de Trayectoria optima de un Cohete con Masa Variable

Consideremos el problema de controlar un cohete para que alcance una posicion objetivo especifica $P_F = [p_{xF}, p_{yF}, p_{zF}]^T$ en un tiempo final t_f fijo, comenzando desde una posicion inicial $P_0 = [p_{x0}, p_{y0}, p_{z0}]^T$ y velocidad inicial $V_0 = [v_{x0}, v_{y0}, v_{z0}]^T$. El objetivo principal es minimizar el consumo de combustible.

7.1 Definicion del Problema Especifico

a. Variables de Estado (x): El estado del cohete en 3D se define por su posicion, velocidad y masa.

$$x(t) = \begin{pmatrix} p_x(t) \\ p_y(t) \\ p_z(t) \\ v_x(t) \\ v_y(t) \\ v_z(t) \\ m(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^7$$

donde (p_x, p_y, p_z) son las coordenadas de posicion, (v_x, v_y, v_z) son las componentes de la velocidad, y $m(t)$ es la masa instantanea del cohete, que disminuye a medida que se consume combustible.

b. Variables de Control (u): El control es la fuerza de empuje aplicada al cohete. Asumimos que podemos controlar directamente las componentes de esta fuerza en cada direccion.

$$u(t) = \begin{pmatrix} F_x(t) \\ F_y(t) \\ F_z(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

La aceleracion debida a la gravedad g actua en la direccion negativa del eje z. Se introducira el concepto de impulso especifico I_{sp} y la gravedad estandar g_0 para relacionar el empuje con el consumo de masa.

c. Dinamica del Sistema ($f(x, u, t)$): Las ecuaciones de movimiento del cohete se rigen por las leyes de Newton y la ecuacion de Tsiolkovsky para la masa variable:

$$\begin{aligned}
\dot{p_x} &= v_x \\
\dot{p_y} &= v_y \\
\dot{p_z} &= v_z \\
\dot{v_x} &= F_x/m \\
\dot{v_y} &= F_y/m \\
\dot{v_z} &= F_z/m - g \\
\dot{m} &= -\frac{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}{I_{sp} g_0}
\end{aligned}$$

Asi, la funcion $f(x, u, t)$ es:

$$f(x, u, t) = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ F_x/m \\ F_y/m \\ F_z/m - g \\ -\|u\|/(I_{sp}g_0) \end{pmatrix}$$

donde $\|u\| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$.

d. Costo Terminal ($G(x(t_f))$): Queremos que el cohete llegue lo mas cerca posible de la posicion objetivo P_F al tiempo t_f. La funcion de costo terminal G penaliza la distancia cuadratica entre la posicion final del cohete y la posicion objetivo.

$$G(x(t_f)) = \frac{1}{2}\left((p_x(t_f) - p_{xF})^2 + (p_y(t_f) - p_{yF})^2 + (p_z(t_f) - p_{zF})^2\right)$$

Donde p_{xF}, p_{yF}, p_{zF} son las coordenadas de la posicion objetivo.

e. Costo de Trayectoria ($M(x, u, t)$): Para minimizar el consumo de combustible, la funcion de costo de trayectoria M debe penalizar la tasa de consumo de masa. Introducimos un factor de peso $k_M > 0$.

$$M(x, u, t) = k_M \frac{\|u\|}{I_{sp}g_0}$$

Integrar M sobre el tiempo nos dara una medida del combustible total consumido.

f. Condiciones Iniciales: El estado inicial del cohete es fijo:

$$x(t_0) = \begin{pmatrix} p_{x0} \\ p_{y0} \\ p_{z0} \\ v_{x0} \\ v_{y0} \\ v_{z0} \\ m_0 \end{pmatrix}$$

donde m_0 es la masa inicial del cohete (combustible + estructura).

7.2 Aplicacion de las Ecuaciones del Control optimo

a. El Hamiltoniano (H): Sustituyendo M y f en la definicion del Hamiltoniano. Notamos que H depende de x, u y λ.

$$H(x, u, \lambda, t) = M(x, u, t) + \lambda^T f(x, u, t)$$

$$H = k_M \frac{\|u\|}{I_{sp}g_0} + \lambda_1 v_x + \lambda_2 v_y + \lambda_3 v_z + \lambda_4 \frac{F_x}{m} + \lambda_5 \frac{F_y}{m} + \lambda_6 \left(\frac{F_z}{m} - g\right) - \lambda_7 \frac{\|u\|}{I_{sp}g_0}$$

Reagrupando terminos:

$$H = \left(\frac{k_M - \lambda_7}{I_{sp}g_0}\right) \|u\| + \lambda_1 v_x + \lambda_2 v_y + \lambda_3 v_z + \frac{1}{m}(\lambda_4 F_x + \lambda_5 F_y + \lambda_6 F_z) - \lambda_6 g$$

Aqui, $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6, \lambda_7]^T$ son las variables adjuntas correspondientes a $p_x, p_y, p_z, v_x, v_y, v_z, m$ respectivamente. Sea $C_0(t) = \frac{k_M - \lambda_7(t)}{I_{sp} g_0}$. Entonces el Hamiltoniano es:

$$H = C_0\|u\| + \lambda_1 v_x + \lambda_2 v_y + \lambda_3 v_z + \frac{1}{m}(\lambda_4 F_x + \lambda_5 F_y + \lambda_6 F_z) - \lambda_6 g$$

b. Ecuaciones de Estado (ya definidas, se obtienen de $\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \lambda}$):

$$\dot{p_x} = \frac{\partial H}{\partial \lambda_1} = v_x$$
$$\dot{p_y} = \frac{\partial H}{\partial \lambda_2} = v_y$$
$$\dot{p_z} = \frac{\partial H}{\partial \lambda_3} = v_z$$
$$\dot{v_x} = \frac{\partial H}{\partial \lambda_4} = F_x/m$$
$$\dot{v_y} = \frac{\partial H}{\partial \lambda_5} = F_y/m$$
$$\dot{v_z} = \frac{\partial H}{\partial \lambda_6} = F_z/m - g$$
$$\dot{m} = \frac{\partial H}{\partial \lambda_7} = -\|u\|/(I_{sp} g_0)$$

Estas recuperan las ecuaciones de dinamica del cohete.

c. Ecuaciones de Coestado ($\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x}$): Recordamos que $x = [p_x, p_y, p_z, v_x, v_y, v_z, m]^T$.

$$\frac{\partial H}{\partial p_x} = 0$$
$$\frac{\partial H}{\partial p_y} = 0$$
$$\frac{\partial H}{\partial p_z} = 0$$
$$\frac{\partial H}{\partial v_x} = \lambda_1$$
$$\frac{\partial H}{\partial v_y} = \lambda_2$$
$$\frac{\partial H}{\partial v_z} = \lambda_3$$
$$\frac{\partial H}{\partial m} = -\frac{1}{m^2}(\lambda_4 F_x + \lambda_5 F_y + \lambda_6 F_z)$$

Aplicando el signo negativo para obtener las ecuaciones de coestado:

$$\dot{\lambda}_1 = -\frac{\partial H}{\partial p_x} = 0$$
$$\dot{\lambda}_2 = -\frac{\partial H}{\partial p_y} = 0$$
$$\dot{\lambda}_3 = -\frac{\partial H}{\partial p_z} = 0$$
$$\dot{\lambda}_4 = -\frac{\partial H}{\partial v_x} = -\lambda_1$$
$$\dot{\lambda}_5 = -\frac{\partial H}{\partial v_y} = -\lambda_2$$
$$\dot{\lambda}_6 = -\frac{\partial H}{\partial v_z} = -\lambda_3$$
$$\dot{\lambda}_7 = -\frac{\partial H}{\partial m} = \frac{1}{m^2}(\lambda_4 F_x + \lambda_5 F_y + \lambda_6 F_z)$$

Las tres primeras ecuaciones implican que $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ son constantes. Las siguientes tres implican que $\lambda_4, \lambda_5, \lambda_6$ son funciones lineales en el tiempo. La ultima ecuacion para $\dot{\lambda}_7$ esta acoplada con las fuerzas de empuje, las cuales dependen de otras λ.

d. Condicion de Optimalidad ($\frac{\partial H}{\partial u} = 0$ para control no restringido): Calculamos las derivadas parciales de H con respecto a las componentes del control (F_x, F_y, F_z). Sea $\|u\| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$.

$$\frac{\partial H}{\partial F_x} = C_0 \frac{F_x}{\|u\|} + \frac{\lambda_4}{m} = 0$$
$$\frac{\partial H}{\partial F_y} = C_0 \frac{F_y}{\|u\|} + \frac{\lambda_5}{m} = 0$$
$$\frac{\partial H}{\partial F_z} = C_0 \frac{F_z}{\|u\|} + \frac{\lambda_6}{m} = 0$$

De estas ecuaciones, podemos deducir la direccion del empuje optimo y su magnitud. Las ecuaciones implican que el vector de empuje $[F_x, F_y, F_z]^T$ es proporcional al vector $[-\lambda_4/m, -\lambda_5/m, -\lambda_6/m]^T$. Es decir, el empuje optimo debe apuntar en la direccion opuesta al vector $[\lambda_4, \lambda_5, \lambda_6]^T$.

Para encontrar la magnitud del empuje optimo $\|u\|^*$: De las ecuaciones, tenemos: $\frac{F_x}{\|u\|} = -\frac{\lambda_4}{mC_0}$ $\frac{F_y}{\|u\|} = -\frac{\lambda_5}{mC_0}$ $\frac{F_z}{\|u\|} = -\frac{\lambda_6}{mC_0}$ Elevando al cuadrado y sumando estas relaciones: $\left(\frac{F_x}{\|u\|}\right)^2 + \left(\frac{F_y}{\|u\|}\right)^2 + \left(\frac{F_z}{\|u\|}\right)^2 = \frac{F_x^2+F_y^2+F_z^2}{\|u\|^2} = 1$

$$1 = \frac{\lambda_4^2 + \lambda_5^2 + \lambda_6^2}{(mC_0)^2}$$

Sea $\Lambda = \sqrt{\lambda_4^2 + \lambda_5^2 + \lambda_6^2}$. Entonces, $1 = \frac{\Lambda^2}{(mC_0)^2} \Rightarrow m|C_0| = \Lambda$. Asumiendo que C_0 (relacionado con el costo k_M y λ_7) es positivo, tenemos $mC_0 = \Lambda$. Recordando que $C_0 = \frac{k_M - \lambda_7}{I_{sp} g_0}$, podemos escribir: $m\frac{k_M - \lambda_7}{I_{sp} g_0} = \Lambda$ De aqui, la magnitud optima del empuje $\|u\|^*$ se puede determinar. En este caso, el control optimo se vuelve un problema de empuje bang-bang o empuje maximo si C_0 no es cero. Si C_0 puede ser cero, el problema se vuelve singular.

La magnitud del empuje optimo no se determina directamente como una funcion de las lambdas de esta ecuacion a menos que haya restricciones en la magnitud del empuje. Sin embargo, si no hay limites explicitos para el empuje, y se penaliza la masa final (es decir, el objetivo es maximizar la masa final, lo que es equivalente a minimizar la masa consumida, y $M = 0$), el problema se convierte en un control "bang-bang" donde el cohete empuja al maximo o nada. La inclusion de $M(x, u, t) = k_M \frac{\|u\|}{I_{sp} g_0}$ ayuda a suavizar este comportamiento.

Volvamos a la derivacion de $\frac{\partial H}{\partial u}$ para el gradiente a usar en el descenso de gradiente.

$$\frac{\partial H}{\partial F_x} = \frac{k_M - \lambda_7}{I_{sp} g_0} \frac{F_x}{\|u\|} + \frac{\lambda_4}{m}$$
$$\frac{\partial H}{\partial F_y} = \frac{k_M - \lambda_7}{I_{sp} g_0} \frac{F_y}{\|u\|} + \frac{\lambda_5}{m}$$
$$\frac{\partial H}{\partial F_z} = \frac{k_M - \lambda_7}{I_{sp} g_0} \frac{F_z}{\|u\|} + \frac{\lambda_6}{m}$$

Entonces, el gradiente funcional $g(t) = \frac{\delta S}{\delta u}(t)$ sera:

$$g(t) = \begin{pmatrix} \frac{k_M - \lambda_7(t)}{I_{sp} g_0} \frac{F_x(t)}{\|u(t)\|} + \frac{\lambda_4(t)}{m(t)} \\ \frac{k_M - \lambda_7(t)}{I_{sp} g_0} \frac{F_y(t)}{\|u(t)\|} + \frac{\lambda_5(t)}{m(t)} \\ \frac{k_M - \lambda_7(t)}{I_{sp} g_0} \frac{F_z(t)}{\|u(t)\|} + \frac{\lambda_6(t)}{m(t)} \end{pmatrix}$$

Este gradiente es lo que se usaria en el paso de actualizacion del control del algoritmo de descenso de gradiente.

e. Condiciones de Transversalidad ($\lambda(t_f) = \frac{\partial G}{\partial x}(x(t_f))$): Calculamos las derivadas parciales de G con respecto a las componentes del estado en el tiempo final t_f.

$$\frac{\partial G}{\partial p_x(t_f)} = (p_x(t_f) - p_{xF})$$
$$\frac{\partial G}{\partial p_y(t_f)} = (p_y(t_f) - p_{yF})$$
$$\frac{\partial G}{\partial p_z(t_f)} = (p_z(t_f) - p_{zF})$$
$$\frac{\partial G}{\partial v_x(t_f)} = 0$$
$$\frac{\partial G}{\partial v_y(t_f)} = 0$$
$$\frac{\partial G}{\partial v_z(t_f)} = 0$$
$$\frac{\partial G}{\partial m(t_f)} = 0$$

Por lo tanto, las condiciones terminales para las variables adjuntas son:

$$\lambda_1(t_f) = p_x(t_f) - p_{xF}$$
$$\lambda_2(t_f) = p_y(t_f) - p_{yF}$$
$$\lambda_3(t_f) = p_z(t_f) - p_{zF}$$
$$\lambda_4(t_f) = 0$$
$$\lambda_5(t_f) = 0$$
$$\lambda_6(t_f) = 0$$
$$\lambda_7(t_f) = 0$$

Aqui, la explicacion '(dado que G solo depende de la posicion, la masa final es "libre")'.

7.3 Resumen del Sistema a Resolver

Para encontrar la trayectoria y el control optimos, se debe resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales y algebraicas (un problema de punto de frontera de dos puntos). El algoritmo de descenso de gradiente (Seccion 6) es aplicable.

Ecuaciones de Estado (integracion hacia adelante con $x(t_0)$):

$$\dot{p_x} = v_x$$
$$\dot{p_y} = v_y$$
$$\dot{p_z} = v_z$$
$$\dot{v_x} = F_x(t)/m(t)$$
$$\dot{v_y} = F_y(t)/m(t)$$
$$\dot{v_z} = F_z(t)/m(t) - g$$
$$\dot{m} = -\|u(t)\|/(I_{sp}g_0)$$

Donde $F_x(t), F_y(t), F_z(t)$ son las componentes del control actual $u(t)$ en la iteracion del algoritmo.

Ecuaciones de Coestado (integracion hacia atras con $\lambda(t_f)$):

$$\dot{\lambda}_1 = 0$$
$$\dot{\lambda}_2 = 0$$
$$\dot{\lambda}_3 = 0$$
$$\dot{\lambda}_4 = -\lambda_1$$
$$\dot{\lambda}_5 = -\lambda_2$$
$$\dot{\lambda}_6 = -\lambda_3$$
$$\dot{\lambda}_7 = \frac{1}{m^2}(\lambda_4 F_x(t) + \lambda_5 F_y(t) + \lambda_6 F_z(t))$$

Aqui, $F_x(t), F_y(t), F_z(t)$ tambien son las componentes del control $u(t)$ de la iteracion actual.

Condiciones de Frontera:

- $p_x(t_0) = p_{x0}, p_y(t_0) = p_{y0}, p_z(t_0) = p_{z0}$
- $v_x(t_0) = v_{x0}, v_y(t_0) = v_{y0}, v_z(t_0) = v_{z0}$

- $m(t_0) = m_0$
- $\lambda_1(t_f) = p_x(t_f) - p_{xF}$
- $\lambda_2(t_f) = p_y(t_f) - p_{yF}$
- $\lambda_3(t_f) = p_z(t_f) - p_{zF}$
- $\lambda_4(t_f) = 0$
- $\lambda_5(t_f) = 0$
- $\lambda_6(t_f) = 0$
- $\lambda_7(t_f) = 0$

El gradiente funcional para actualizar el control $u(t)$ en cada iteracion es:

$$g(t) = \begin{pmatrix} \frac{k_M - \lambda_7(t)}{I_{sp} g_0} \frac{F_x(t)}{\|u(t)\|} + \frac{\lambda_4(t)}{m(t)} \\ \frac{k_M - \lambda_7(t)}{I_{sp} g_0} \frac{F_y(t)}{\|u(t)\|} + \frac{\lambda_5(t)}{m(t)} \\ \frac{k_M - \lambda_7(t)}{I_{sp} g_0} \frac{F_z(t)}{\|u(t)\|} + \frac{\lambda_6(t)}{m(t)} \end{pmatrix}$$

Este sistema acoplado de ecuaciones diferenciales ordinarias, junto con las condiciones de frontera divididas, puede resolverse numericamente utilizando el algoritmo de descenso de gradiente descrito en la Seccion 6.