Optimización

Primer Cuatrimestre 2025

Práctica N° 7: Métodos de punto interior.

Ejercicio 1 Halle el punto central $x^*(\mu)$ para el problema de Programación Lineal:

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & 2x_1 - x_2 \\ \text{sujeto a} & x_1 + x_2 \leq 4 \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \geq 0 \end{array}$$

Formule la función barrera $\Phi(x,\mu)$, calcule su gradiente $\nabla\Phi(x,\mu)$, y plantee el sistema de ecuaciones $\nabla\Phi(x,\mu) = 0$ para encontrar $x^*(\mu)$.

Ejercicio 2 Halle el punto central $x^*(\mu)$ para el problema de Optimización Cuadrática:

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & x_1^2 + x_2^2 \\ \text{sujeto a} & x_1 - x_2 \leq 1 \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \leq 3 \end{array}$$

Formule la función barrera $\Phi(x,\mu)$, calcule su gradiente $\nabla\Phi(x,\mu)$, y plantee el sistema de ecuaciones $\nabla\Phi(x,\mu) = 0$ para encontrar $x^*(\mu)$.

Ejercicio 3 Halle el punto central $x^*(\mu)$ para el problema de Optimización No Lineal:

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & x_1 + 3x_2 \\ \text{sujeto a} & x_1^2 + x_2^2 \leq 9 \\ & x_1 \geq 0 \end{array}$$

Formule la función barrera $\Phi(x,\mu)$, calcule su gradiente $\nabla\Phi(x,\mu)$, y plantee el sistema de ecuaciones $\nabla\Phi(x,\mu) = 0$ para encontrar $x^*(\mu)$.

Ejercicio 4 Dado un triángulo en $\mathbb{R}^2$ definido por la intersección de tres inecuaciones lineales:

$$\begin{array}{rcl} a_1x_1 + a_2x_2 & \leq & b_1 \\ c_1x_1 + c_2x_2 & \leq & b_2 \\ d_1x_1 + d_2x_2 & \leq & b_3 \end{array}$$

Encuentre el "centro analítico" del conjunto, que se define como el punto en el interior que minimiza la suma de los logaritmos negativos de las distancias a las fronteras (expresiones de las restricciones).

Ejercicio 5 Para el problema de optimización cuadrática:

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & f(x_1,x_2) = x_1^2 + 2x_2^2 - 4x_1 - x_2 \\ \text{sujeto a} & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \geq 0 \end{array}$$

- Formule la función barrera logarítmica $\Phi(x, \mu)$.
- Calcule su gradiente $\nabla\Phi(x, \mu)$ y su matriz Hessiana $\nabla^2\Phi(x, \mu)$.
- Escriba explícitamente el sistema lineal de Newton $\nabla^2\Phi(x, \mu)\Delta x = -\nabla\Phi(x, \mu)$, el cual se usa para encontrar la dirección de búsqueda Δx en cada iteración del método de barrera.

Ejercicio 6 Considere el sistema $x_1 + x_2 - 2 = 0$ $x_1 x_2 - 2x_2^2 + 1 = 0$ Encuentre todas las soluciones de este sistema. Muestre que si la primera ecuación se multiplica por x_2, las soluciones no cambian, pero el paso de Newton tomado desde $(1, -1)$ no será el mismo que el del sistema original.

Ejercicio 7 Considere el siguiente problema de Programación Lineal en su forma estándar:

$$
\begin{array}{rl}
\text{minimizar} & x_1 + x_2 \\
\text{sujeto a} & x_1 + 2x_2 = 3 \\
& x_1 \geq 0 \\
& x_2 \geq 0
\end{array}
$$

- Identifique los vectores y matrices c, A, b del problema.
- Escriba las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) perturbadas para este problema, incorporando el parámetro de barrera $\mu > 0$. Las condiciones deben incluir:
  - Dual Factibilidad ($A^T y + s = c$)
  - Primal Factibilidad ($Ax = b$)
  - Holgura Complementaria Perturbada ($XSe = \mu e$, donde $X = \text{diag}(x_i)$ y $S = \text{diag}(s_i)$)
  - No Negatividad ($x \geq 0, s \geq 0$, aunque estas no se incluyen en el sistema de ecuaciones no lineales que se resuelve directamente).
- Defina el vector de funciones $F(x, y, s)$ cuyas raíces buscamos con el método de Newton.
- Calcule la matriz Jacobiana $J(x, y, s) = \nabla F(x, y, s)$.
- Escriba explícitamente el sistema lineal de Newton para encontrar la dirección de búsqueda $(\Delta x, \Delta y, \Delta s)$ en un punto dado (x, y, s):

$$
J(x, y, s) \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta s \end{pmatrix} = -F(x, y, s)
$$

Ejercicio 8 Considere el siguiente problema de Programación Cuadrática:

$$
\begin{array}{rl}
\text{minimizar} & \frac{1}{2}x_1^2 + x_2 \\
\text{sujeto a} & x_1 + x_2 = 1 \\
& x_1 \geq 0 \\
& x_2 \geq 0
\end{array}
$$

- Identifique los vectores y matrices Q, c, A, b del problema.

- Escriba las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) perturbadas para este problema, incorporando el parámetro de barrera $\mu > 0$. Recuerde que la condición de dual factibilidad cambia debido al término cuadrático en el objetivo.

- Defina el vector de funciones $F(x, y, s)$ cuyas raíces buscamos con el método de Newton.

- Calcule la matriz Jacobiana $J(x, y, s) = \nabla F(x, y, s)$.

- Escriba explícitamente el sistema lineal de Newton para encontrar la dirección de búsqueda $(\Delta x, \Delta y, \Delta s)$ en un punto dado (x, y, s):

$$J(x, y, s) \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta s \end{pmatrix} = -F(x, y, s)$$