

---

# OPTIMIZACIÓN

Primer Cuatrimestre 2025

---

## Ejercicios para pensar

### Gradiente Proyectado

Aplicaremos el método de Gradiente Proyectado a problemas de optimización con restricciones **lineales**:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{s.a.:} \quad & a_i^T x \leq b_i \quad i \in J_1 \\ & a_j^T x = b_j \quad j \in J_2 \end{aligned}$$

La idea de este método está motivada por el Método del Gradiente para problemas sin restricciones.

Comenzamos tomando un punto inicial factible  $\mathbf{x}_0$ . En nuestro punto inicial  $\mathbf{x}_0$  tendremos un conjunto de  $q$  condiciones activas que satisfacen  $a_i^T x = b_i$  y algunas restricciones inactivas  $a_i^T x < b_i$ .

Comenzamos tomando  $W = \{j : a_j^T x = b_j\}$  y consideramos la matriz  $A_w$  que tiene como filas a los  $a_j$  tales que  $j \in W$ .  $A_w$  es de  $q \times n$  de rango  $q < n$ .

Ahora buscamos  $\mathbf{d}$  una dirección de descenso, i.e., que satisfaga  $\nabla f(\mathbf{x}_0)^T \mathbf{d} < 0$ . Pero además queremos que  $a_j^T \mathbf{d} = 0 \quad \forall j \in W$  para que las restricciones activas sigan siéndolo. Queremos entonces que  $\mathbf{d} \in \langle a_j \rangle_{j \in W}^\perp$ .

**Ejercicio 1** Probar que  $\mathbf{d}$  está dada por  $\mathbf{d} = -(I - A_w^T(A_w A_w^T)^{-1} A_w) \nabla f(x_0)$  y comprobar que efectivamente es una dirección de descenso si  $\mathbf{d} \neq 0$ . *Sugerencia:* Tener en cuenta que  $\mathbb{R}^n = S \oplus S^\perp$ .

**Ejercicio 2** Asumiendo que tenemos solo restricciones de igualdad. Probar que si el algoritmo converge cuando  $\|P(\nabla f(x))\| < \varepsilon$ , donde  $P = I - A^T(A^T A)^{-1} A$ , entonces converge a una solución aproximada de las condiciones de KKT.

**Ejercicio 3** Escribir un posible algoritmo para implementar Gradiente Proyectado en caso de que las restricciones sean todas de igualdad.

**Ejercicio 4** Considerar el siguiente problema

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) = \frac{1}{2} x^T Q x + b^T x \\ \text{s.a.:} \quad & x \in \Omega \end{aligned}$$

donde  $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : a_i \leq x_i \leq b_i\}$ .

- (a) Calcular  $P_{\Omega}(x)$  la proyección de  $x$  sobre  $\Omega$ .
- (b) Mostrar como queda la iteración del método de gradiente proyectado.