Optimización

Primer Cuatrimestre 2025

Práctica N° 5: Gradiente proyectado

Ejercicio 1 Sea $C = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0, \forall i\}$ el ortante no negativo. Dado un vector $v \in \mathbb{R}^n$, determine su proyección $P_C(v)$ sobre C.

Ejercicio 2 Sea $C = \{x \in \mathbb{R}^n \mid l_i \leq x_i \leq u_i, \forall i\}$ un conjunto definido por restricciones de caja, donde $l_i \leq u_i$. Dado un vector $v \in \mathbb{R}^n$, determine su proyección $P_C(v)$ sobre C.

Ejercicio 3 Sea $C = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 \leq R\}$ la bola Euclidiana cerrada de radio $R > 0$ centrada en el origen. Dado un vector $v \in \mathbb{R}^n$, determine su proyección $P_C(v)$ sobre C.

Ejercicio 4 Sea $C = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a^T x = b\}$ un hiperplano, donde $a \in \mathbb{R}^n, a \neq 0$ y $b \in \mathbb{R}$. Dado un vector $v \in \mathbb{R}^n$, determine su proyección $P_C(v)$ sobre C.

Ejercicio 5 Sea $C = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a^T x \leq b\}$ un semiespacio, donde $a \in \mathbb{R}^n, a \neq 0$ y $b \in \mathbb{R}$. Dado un vector $v \in \mathbb{R}^n$, determine su proyección $P_C(v)$ sobre C.

Ejercicio 6 Sea $C = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i = 1, x_i \geq 0, \forall i\}$ el símplex estándar. Dado un vector $v \in \mathbb{R}^n$, determine su proyección $P_C(v)$ sobre C. (*Sug: Utilice las condiciones de KKT para encontrar un algoritmo basado en ordenar los elementos de* v *y encontrar un umbral* μ *tal que las componentes* $x_i = \max(0, v_i - \mu)$ *sumen 1.*

Ejercicio 7 Sea S^n_+ el cono de matrices simétricas semidefinidas positivas en $\mathbb{R}^{n\times n}$. Dada una matriz simétrica $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$, determine su proyección $P_{S^n_+}(V)$ sobre S^n_+. (*Sug: Utilice la descomposición en valores propios de la matriz simétrica* V*. Los valores propios de la matriz proyectada deben ser no negativos. ¿En qué norma se calculó la proyección?*

Ejercicio 8 Sea $C = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_\infty \leq R\}$ la bola L_∞ (o cubo) centrada en el origen con radio $R > 0$. Dado un vector $v \in \mathbb{R}^n$, determine su proyección $P_C(v)$ sobre C.

Ejercicio 9 Sean $a_1, a_2, \ldots, a_m$ vectores dados en $\mathbb{R}^n$. Considera el problema de minimizar la función $f(x) = \sum_{i=1}^m \|x - a_i\|^2$ sobre un conjunto convexo X. Muestre que este problema es equivalente al problema de proyectar el centro de gravedad $\bar{a} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^m a_i$ sobre X.

Ejercicio 10 Dados m conjuntos convexos cerrados $X_1, X_2, \ldots, X_m$ en $\mathbb{R}^n$, se busca encontrar un punto $x \in \bigcap_{i=1}^m X_i$. Este problema puede ser formulado como la siguiente tarea de optimización:

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & \frac{1}{2}\sum_{i=1}^m \|y_i - x\|^2 \\ \text{sujeto a} & x \in \mathbb{R}^n \\ & y_i \in X_i, \quad \text{para } i = 1, \ldots, m \end{array}$$

Donde x es el punto que buscamos, y y_i son variables auxiliares, cada una forzada a pertenecer a su respectivo conjunto X_i.

Derive un algoritmo de tipo "coordinate descent" para este problema, es decir, actualiza una variable por vez fijando las demás de forma independiente.

Ejercicio 11 Considere el problema de cuadrados mínimos con restricción de positividad:

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} f(x) = \|Ax-b\|_2^2 \quad \text{sujeto a} \quad x \geq 0,$$

Formule un método de gradiente proyectado para su resolución, con tamaños de paso constantes. ¿Cómo se pueden elegir dichos tamaños para garantizar la convergencia?

Ejercicio 12 (*) El problema de diseño D-óptimo para un conjunto de m candidatas x_i y un presupuesto total N se formula entonces, en términos de los pesos normalizados p_i, como:

$$\max_{p\in\mathbb{R}^m} \log\left(\det\left(\sum_{i=1}^m p_i x_i x_i^T\right)\right) \quad \text{sujeto a} \quad \sum_{i=1}^m p_i = 1, \quad p_i \geq 0 \text{ para } i = 1,\ldots,m.$$

(a) Obtenga un método de gradiente proyectado para la resolución de este problema.

(b) (Diseño A-Óptimo). Repita el análisis si la función a optimizar es

$$f_A(p) = \operatorname{tr}\left(\left(\sum_{i=1}^m p_i x_i x_i^T\right)^{-1}\right)$$

(c) (Diseño E-Óptimo). Considere la siguiente función

$$f_E(p) = \lambda_{\text{mín}}\left(\sum_{i=1}^m p_i x_i x_i^T\right)$$

En este caso, observe que la función a optimizar es convexa pero no-diferenciable cuando hay autovalores repetidos.