Optimización

Primer Cuatrimestre 2025

Ejercicios para pensar

Subgradientes

Ejercicio 1 Sea $f(x) = |x-2| + 3x$

(a) Probar que f es convexa.

(b) Calcular $\partial f(x)$ para todo x.

(c) Como definirían un método de descenso en este caso.

Ejercicio 2 Sea $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$. Caracterizar el conjunto $\partial f(0,0)$.

Ejercicio 3 Sea f convexa, no necesariamente diferenciable, y acotada inferiormente. Se considera el método de descenso

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k g_k$$

donde $\alpha_k > 0$ y $g_k \in \partial f(x_k)$. Supongamos que existe $G > 0$ tal que $\|g_k\| \leq G$. Supongamos que f tiene un mínimo x^*.

(a) Probar que

$$\|x_{k+1} - x^*\|^2 \leq \|x_k - x^*\|^2 - 2\alpha_k(f(x_k) - f(x^*)) + \alpha_k^2\|g_k\|^2.$$

(b) Teniendo en cuenta lo probado en el ítem previo probar que

$$\sum_{i=0}^{k} 2\alpha_i(f(x_i) - f(x^*)) \leq \|x_0 - x^*\|^2 + \sum_{i=0}^{k} \alpha_i^2\|\nabla f(x_i)\|^2.$$

(c) Probar que si se toma α_k tal que $\sum_k \alpha_k^2 < \infty$ y $\sum_k \alpha_k = \infty$ entonces $\min_{0\leq i<k} f(x_i) \to f(x^*)$ si $k \to \infty$.