Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

MS512 Análise Numérica

Projeto Computacional II

Autores:
Marcos Cesar Manente Jr.
Miguel da Silva Araújo
Matheus Feres Turcheti

Campinas

Junho/2022

1 Fundamentação Teórica

Imagens no ambiente digital são representadas em forma de matrizes. Caso se trate de imagens em preto e branco, cada posição i, j da matriz que representa uma imagem é um pixel, cada valor na posição i, j representa a saturação do pixel i, j com valor que varia entre 0 e 255. Caso a imagem em questão seja colorida, há diferentes registros de saturação para as cores vermelho, verde e azul associados a cada pixel.

Pode-se concluir das afirmações acima que uma imagem colorida tem três que a representam conjuntamente: uma para a cor vermelho, uma para a cor verde, e uma para a azul. Dessa forma, cada pixel i, j de uma imagem colorida pode tem três valores associados: $Vermelho_{i,j}$, $Verde_{i,j}$ e $Azul_{i,j}$; representando a saturação de cada uma das três cores que o pixel da imagem final deve apresentar.

Dito isso, é intuitivo que a memória necessária para representar imagens digitalmente torna-se cada vez maior à medida que a complexidade de referidas imagens aumenta, em especial no caso de imagens coloridas. Exemplificando, uma publicação de formato padrão na plataforma *instagram* tem tamanho padronizado 1080×1080 pixels; ou seja, $1080 \times 1080 = 1.166.400$ valores associados se tratamos de uma imagem preto e branco, 3.499.200, se tratamos de imagens coloridas.

Sendo assim, o interesse em reduzir a memória necessária para representar imagens digitalmente torna-se compreensível. Isso pode ser feito por meio da implementação da decomposição em valores singulares. A intuição é simples, o posto da(s) matriz(es) obtidas pela decomposição representa quanto da informação original é trazida para a versão reduzida por SVD; na prática, quanto maior o posto da decomposição, melhor a qualidade da imagem à ela associada.

1.1 Decomposição em Valores Singulares

A decomposição em valores singulares (também chamada de descomposição SVD) é um método para decompor uma matriz $A_{n\times m}$ não nula com posto r da seguinte forma:

$$A = U\Sigma V^T$$

em que U é uma matriz quadrada $n\times n$ ortogonal, V também é uma matriz quadrada $m \times m$ ortogonal e Σ é uma matriz $n \times m$ de certa forma diagonal e que é do seguinte tipo:

$$\Sigma_{n\times m} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & & & \\ & \sigma_2 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \sigma_r & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

sendo que as entradas σ_i são valores únicos chamados de valores singulares da matriz A, obedecendo a seguinte regra: $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq ...\sigma_r > 0$. Ou seja, temos que $\Sigma_{ii} = \sigma_i$ para $i = 1 : r$ e $\Sigma_{ii} = 0$ para $i = r + 1 : min\{m, n\}$. Além disso, temos também que as colunas da matriz U constituem vetores ortonormais chamados de vetores singulares a direita de A (u_i) enquanto que os vetores constituídos pelas colunas da matriz V são chamados de vetores singulares a esquerda de A (v_i). Dessa forma, também é possível descrever a matriz A da seguinte forma:

$$A = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i u_i v_i^t$$

Além disso, outra observação importante em relação aos valores singulares da matriz A é o de que $||A||_2 = \sigma_1 = ||A^t||_2$, ou seja, a norma da matriz A corresponde ao maior valor singular dessa mesma matriz.

1.2 Deduzindo SVD

Seja $A_{m\times n}$ com posto r sabe-se que A^tA é simétrica, positiva semi-definida. De modo que A é diagonalizável com decomposição

$A^tA = V\Lambda V^t = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^t = \sum_{i=1}^{n} (\sigma_i)^2 \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^t$ em que V é uma matriz ortonormal cujas colunas são os autovetores de A^tA e $r \leq n$ é o posto de A e de A^tA. Observação: a soma de matrizes vale porque Λ é ortogonal.

Define-se σ_i como a raiz-quadrada do i-ésimo autovalor, que pode ser tomada porque os autovalores de matrizes positivas semi-definidas são não-negativas. Assim, temos $A^tA\mathbf{v}_i = (\sigma_i)^2\mathbf{v}_i$ se assumirmos uma matriz de posto completo, pode-se definir o autovetor unitário $\mathbf{u}_i = \frac{A\mathbf{v}_i}{\sigma_i}$.

Seja $V_{n\times n} \because A^tA_{n\times n}$ com i-ésima coluna $\mathbf{v}_i$ e seja $U_{m\times m} \because A\mathbf{v}_i$ tem dimensão m, em que $\mathbf{u}_i$ é a i-ésima coluna de U. Σ é uma matriz diagonal com i-ésimo elemento σ_i. $U = AV\Sigma^{-1} \Rightarrow U\Sigma = AV \Rightarrow A = U\Sigma V^t$. Obs.: $VV^t = I$ e $\Sigma^{-1} : \Sigma_{ii} = \frac{1}{\sigma_1}$ diagonal

2 Implementação

Nesta seção será explicado o funcionamento do código desenvolvido para mostrar os diferentes níveis de compressão de uma imagem. A primeira etapa consistiu em desenvolver uma função, chamada svd_img, a qual recebesse como entrada dois parâmetros diferentes: o primeiro consistindo em uma matriz A do tipo $n \times m \times 3$ (sendo essa matriz uma representação de uma imagem colorida escolhida) e o segundo sendo um valor r para o posto da matriz que a função retorna.

É importante ressaltar que essa matriz A fornecida inicialmente para a função pode ser "dividida" em 3 matrizes $n \times m$, cada uma representando a intensidade de cada cor da escala RGB em cada ponto da imagem original. Em seguida, a função realiza essa divisão da matriz A original nas 3 matrizes citadas acima, realizando a decomposição SVD em cada uma delas até restarem exatamente r valores singulares em suas diagonais. Dessa forma, a matriz as matrizes são descompostas e obtemos as matrizes U, S, V. Juntando os resultados obtidos, obtemos uma nova matriz representando a matriz A mas com apenas r vetores singulares.

3 Resultados

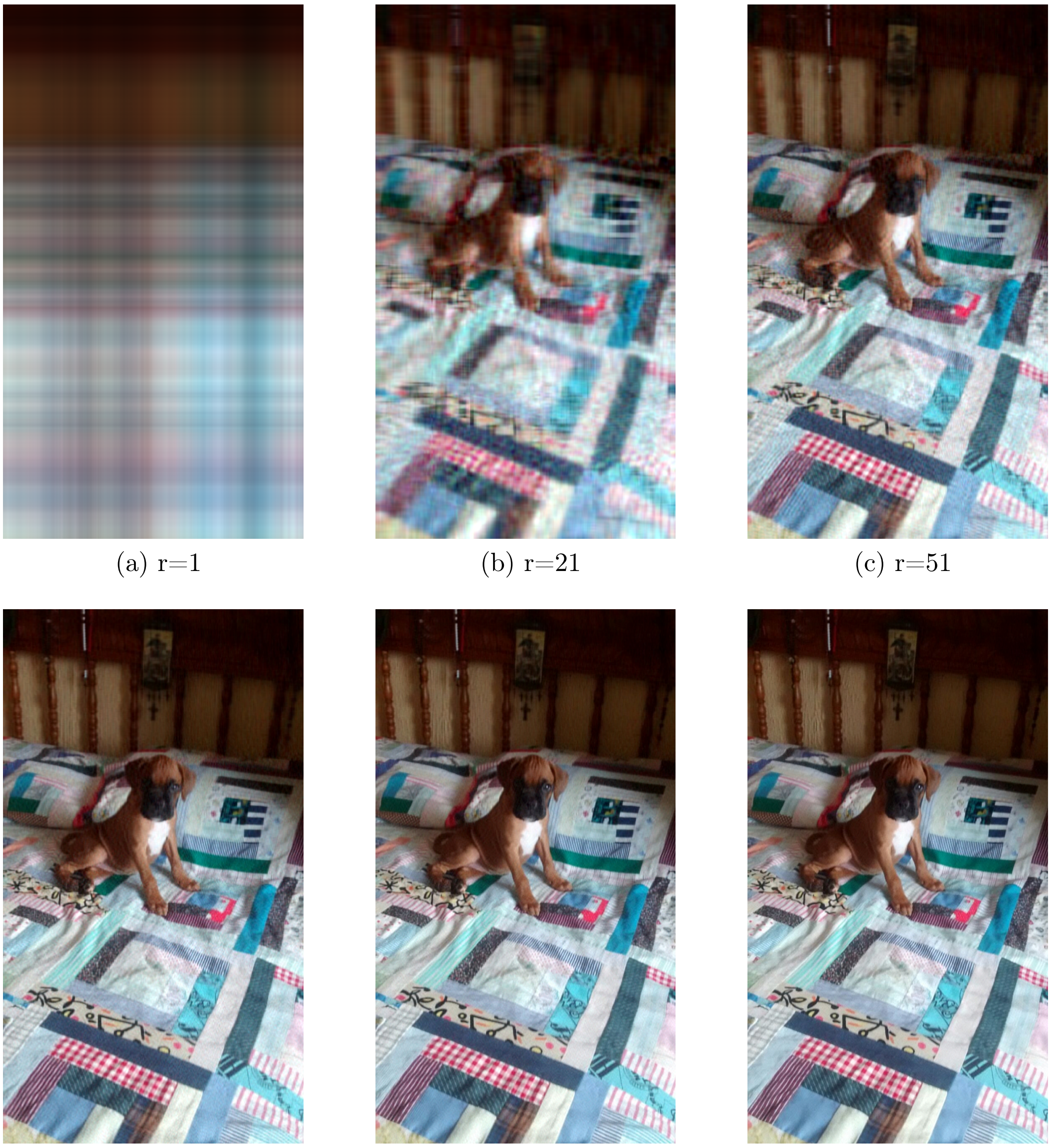
Os resultados da implementação descrita na seção anterior tornam visíveis as diferenças em qualidade de definição de imagem quando o posto da decomposição é variado. A imagem escolhida, visível em 1, será decomposta utilizando a técnica proposta. As imagens obtidas por meio de suscetivas decomposições da imagem original têm entre si uma diferença: a definição.

Como é possível verificar em 2, à medida que o posto utilizado na decomposição aumenta, também aumenta a definição da imagem representada. Dessa forma, pode-se compreender o posto da decomposição (valor de r) como uma medida da qualidade de representação da imagem.

A conclusão a que se pode chegar ao analisar os resultados da implementação da decomposição em valores singulares para a compressão de imagens é: apesar de seu alto custo computacional, a estabilidade numérica da decomposição garante que, mesmo que se perca definição ao utilizar um posto menor, a imagem resultante de sua implementação é - na medida do permitido pela intensidade de compressão - fiel à original e, mesmo com posto sig-

Figura 1: Cachorrinho na Cama

nificativamente menor (ou seja, menos dados para serem armazenados) é possível recuperar uma imagem com qualidade, a olho nu, igual à original (no nosso caso, posto 201 reproduz satisfatoriamente a original, de posto 719).



(a) r=1 (b) r=21 (c) r=51

(d) r=101 (e) r=151 (f) r=201

Figura 2: Decomposições da imagem inicial com diferentes valores de r (posto)