

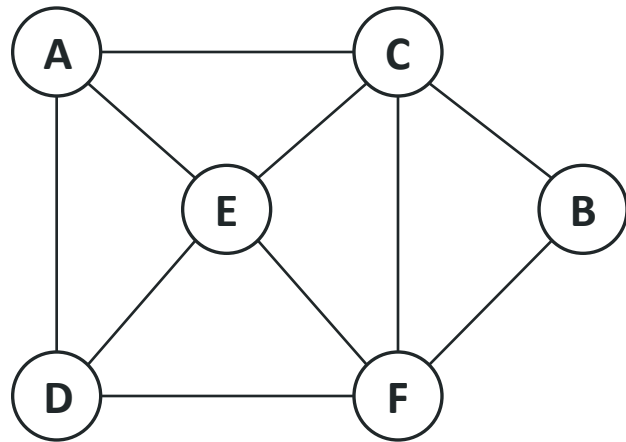
S09 – Árvore Geradora Mínima

GRAFOS

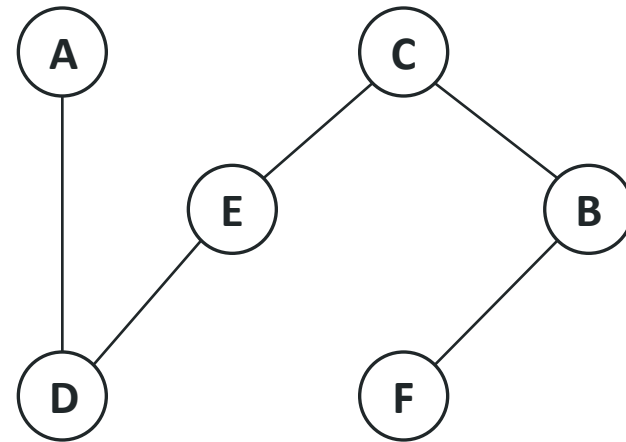
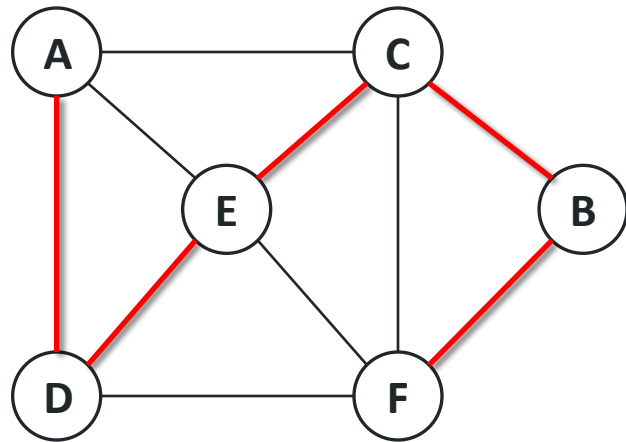
Árvore Geradora

- Uma Árvore Geradora (Spanning Tree) é um subgrafo de um grafo **não orientado** G onde contém todos os vértices de G e não apresenta ciclos.

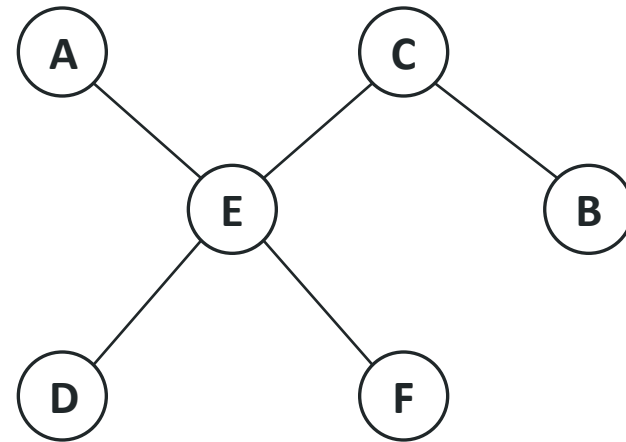
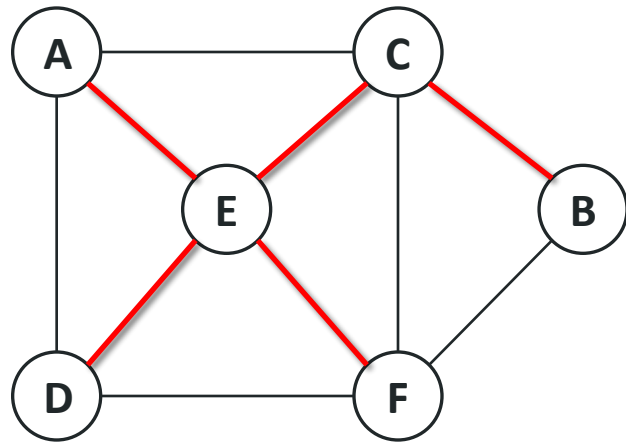
Grafo



Árvore Geradora



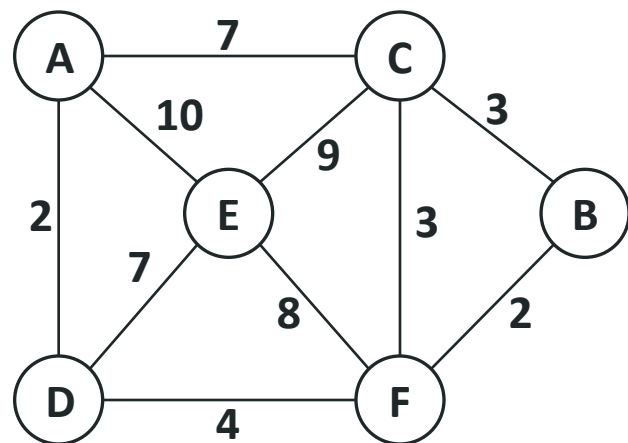
Árvore Geradora



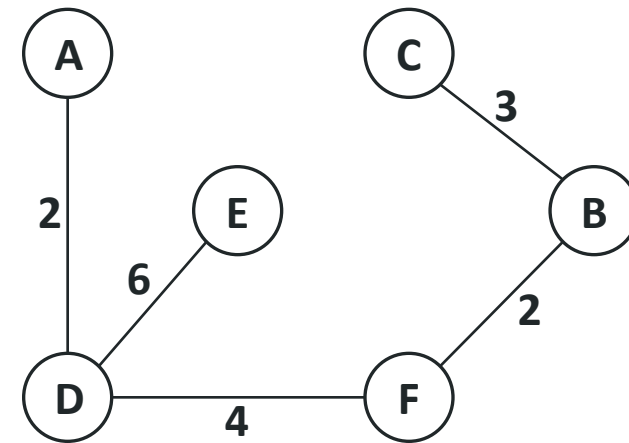
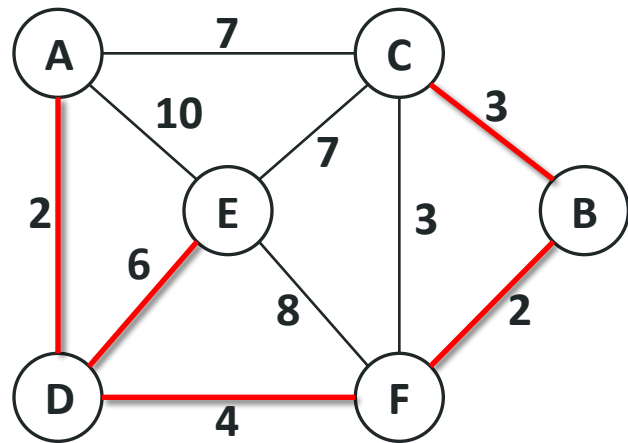
Árvore Geradora Mínima

- Dado um grafo **não orientado** e **ponderado** G , a árvore geradora mínima (Minimum Spanning Tree) é a árvore geradora do grafo com menor custo total de arestas.

Grafo



Árvore Geradora Mínima



Aplicações

- Design de Redes:
 - Elétrica
 - Telefonia
 - Esgoto

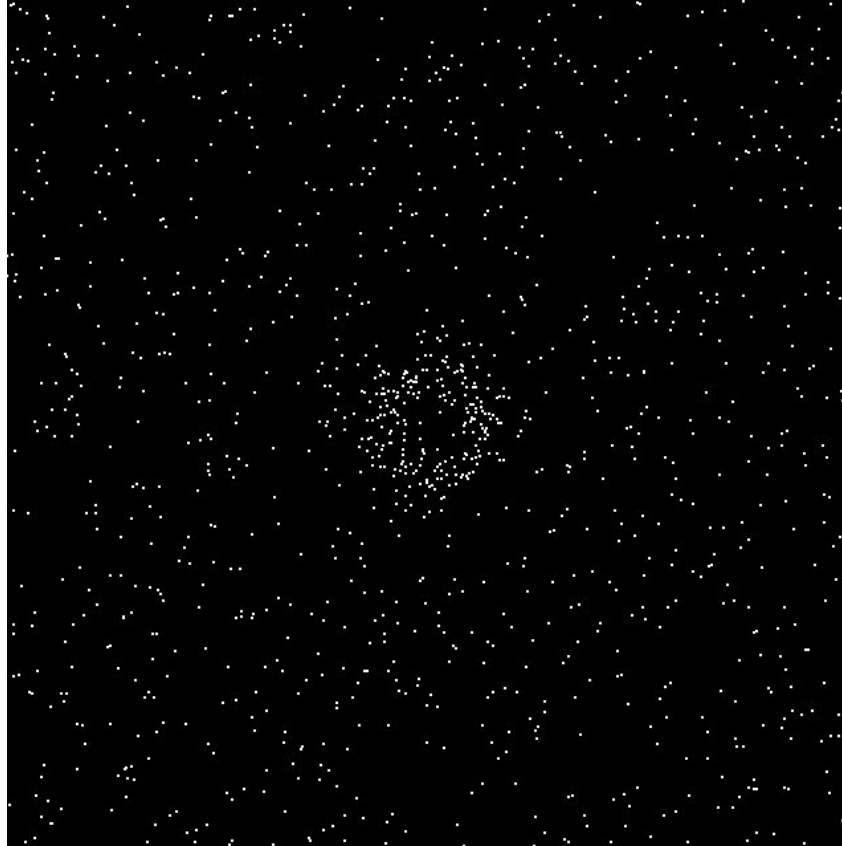
Aplicações

- Auxílio em problemas mais complexos, como o caixeiro viajante.

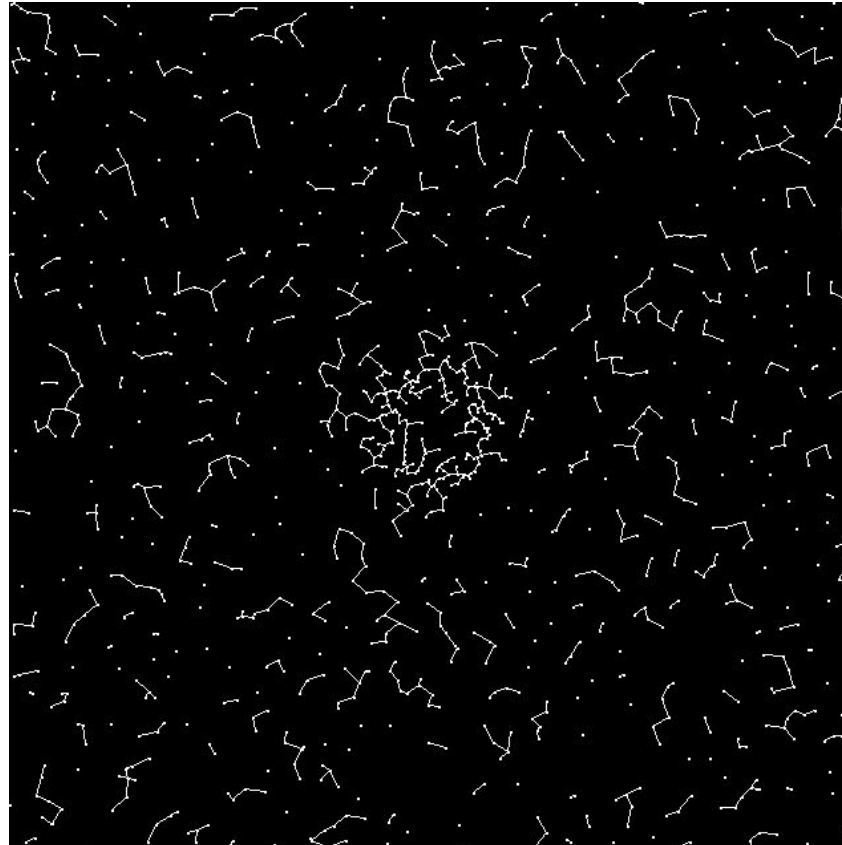
Aplicações

- Identificação de aglomerados
 - Depois de conseguir a árvore, os maiores ramos são “podados”

Aplicações



Aplicações



Algoritmos

- Existem diferentes algoritmos para conseguir a árvore geradora mínima de um grafo, aqui em aula abordaremos dois desses algoritmos:
 - Kruskal: O algoritmo funciona melhor com grafos esparsos (poucas arestas em relação a vértices).
 - Prim: O algoritmo funciona melhor em grafos densos (muitas arestas em relação ao número de vértices).

Prim - Pseudocódigo

Inicia um conjunto **S** vazio de arestas para a solução

Inicia um conjunto **Q** com todos os vértices do grafo para o controle

Escolhe um vértice arbitrário **A** do grafo como vértice inicial

Remove **A** do conjunto **Q**

Enquanto **Q** não estiver vazio{

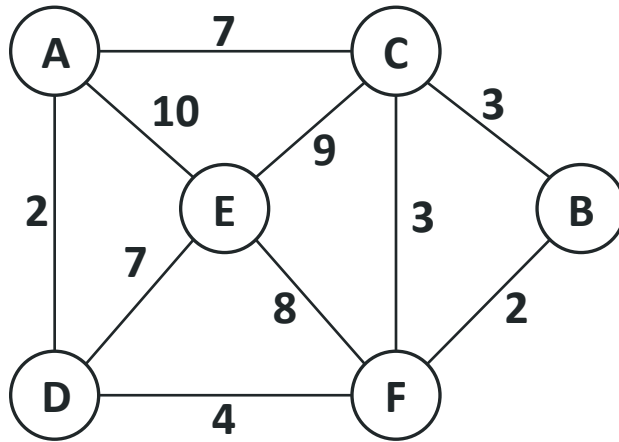
 Encontra a menor aresta **{u, v}**, onde um deles (**u** ou **v**) pertence ao conjunto **Q** e o outro não pertence ao conjunto **Q**,

 Adiciona a aresta **{u, v}** para o conjunto solução **S**

 Remove do conjunto **Q** o vértice desta aresta (**u** ou **v**) que pertencia a ele

}

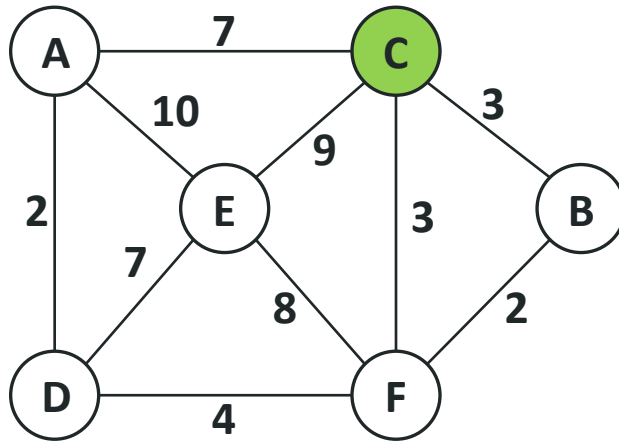
Prim



Solução {}

Controle {A, B, C, D, E, F}

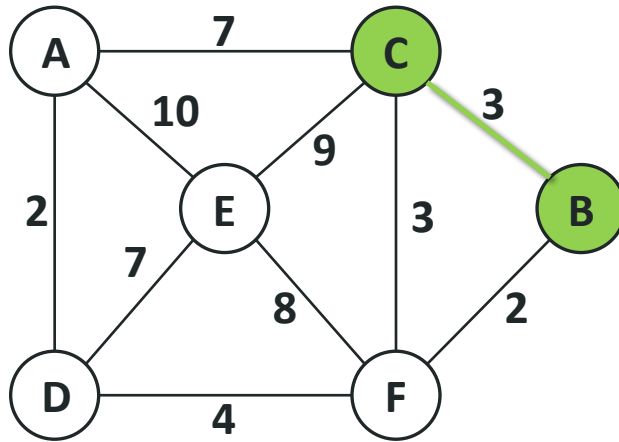
Prim



Solução {}

Controle {A, B, D, E, F}

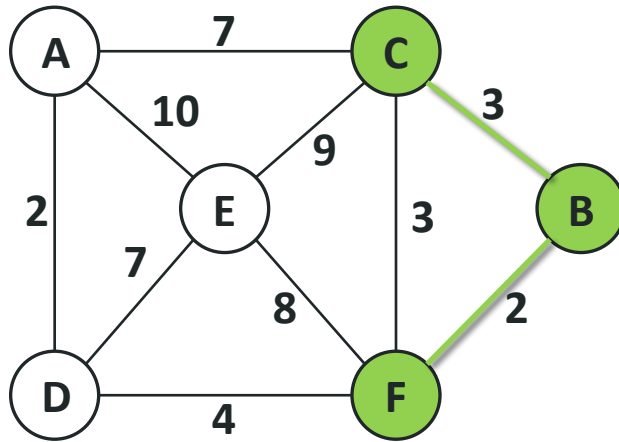
Prim



Solução {CB}

Controle {A, D, E, F}

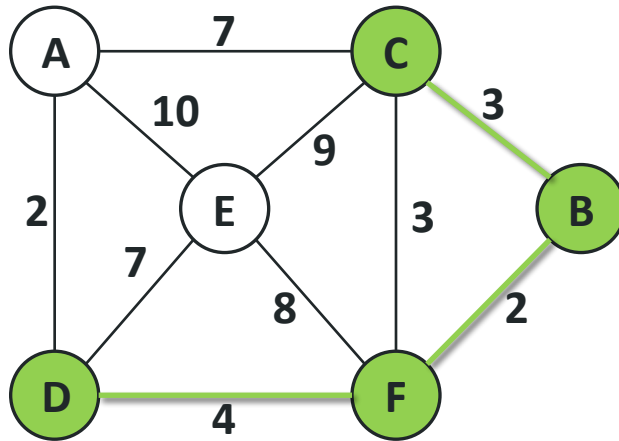
Prim



Solução {CB, BF}

Controle {A, D, E}

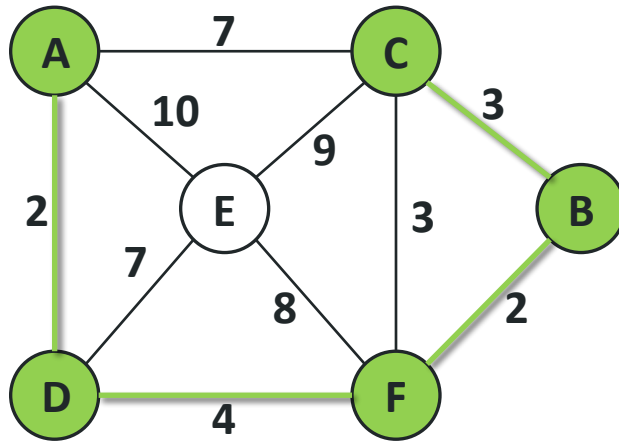
Prim



Solução {CB, BF, DF}

Controle {A, E}

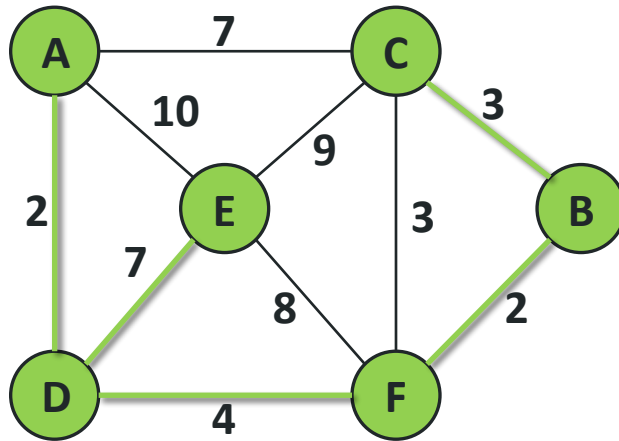
Prim



Solução {CB, BF, DF, AD}

Controle {E}

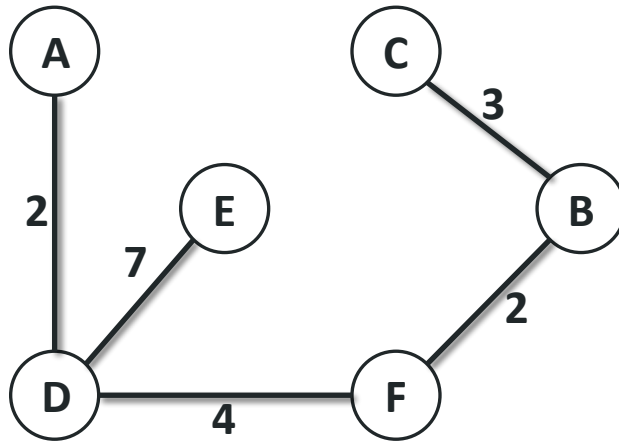
Prim



Solução {CB, BF, DF, AD, DE}

Controle {}

Prim

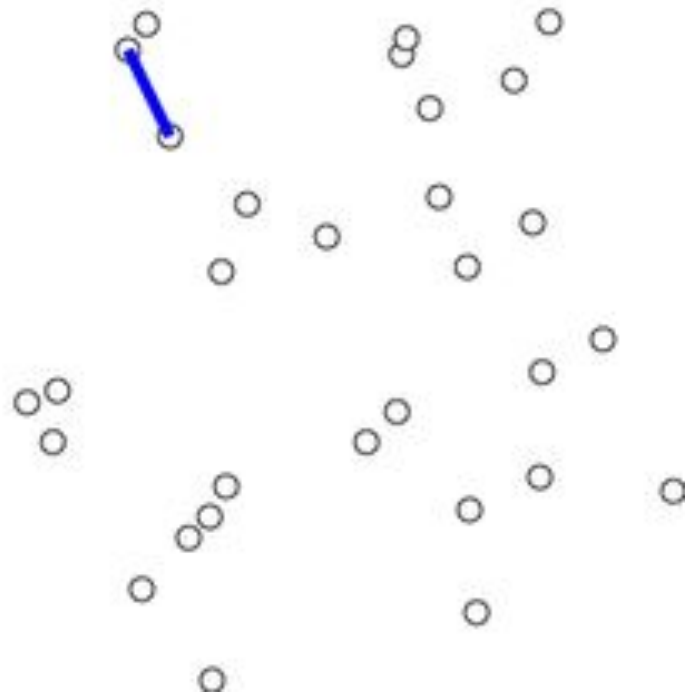


Peso Total = 18

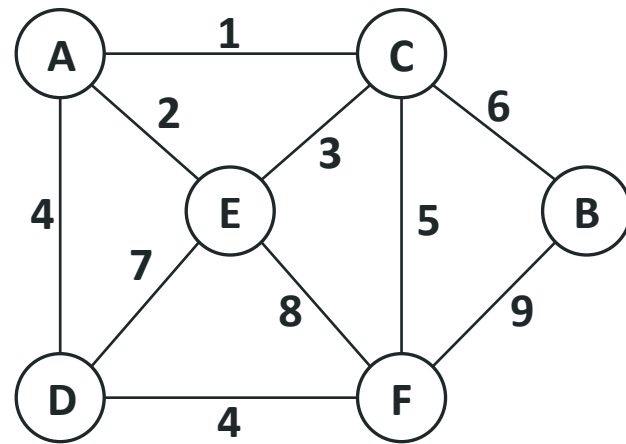
Solução {CB, BF, DF, AD, DE}

Controle {}

Prim



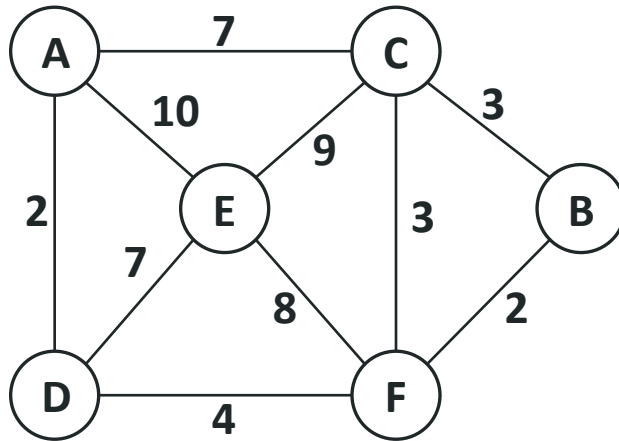
Prim - Exercício



Kruskal - Pseudocódigo

- Inicia um conjunto **S** vazio de arestas para a solução
- Inicia um conjunto **Q** com todas as arestas do grafo para o controle
- Inicia uma floresta (um conjunto de árvores) **F** com cada vértice isolado sendo uma árvore
- Enquanto **Q** não estiver vazio{
 - Seleciona a menor aresta **{u, v}** do conjunto **Q**
 - Remove a aresta **{u, v}** do conjunto **Q**
 - Se **u** e **v** pertencem a árvores diferentes no conjunto **F**{
 - Adiciona a aresta **{u, v}** para o conjunto **S**
 - Une o conjunto das árvores que contém **u** e que contém **v** no conjunto **F**
 - }
- }

Kruskal

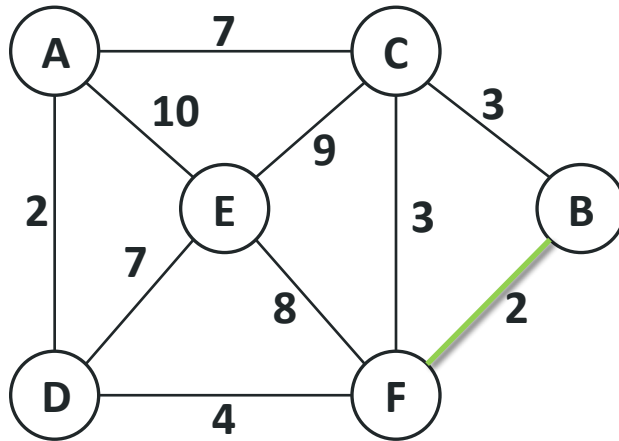


Solução {}

Controle {AC, AD, AE, BC, BF, CE, CF, DE, DF, EF}

Floresta {{A}, {B}, {C}, {D}, {E}, {F}}

Kruskal

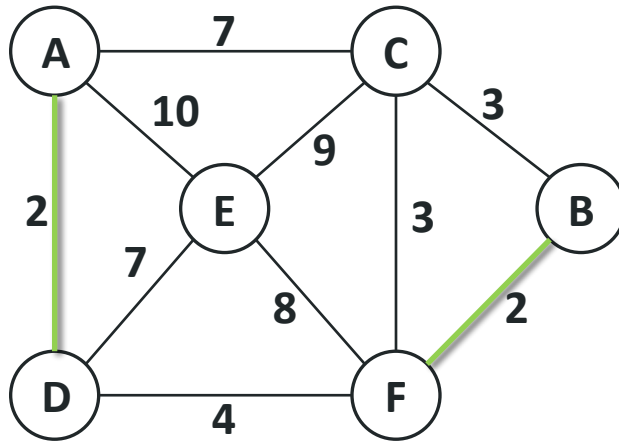


Solução {BF}

Controle {AC, AD, AE, BC, CE, CF, DE, DF, EF}

Floresta {{A}, {B, F}, {C}, {D}, {E}}

Kruskal

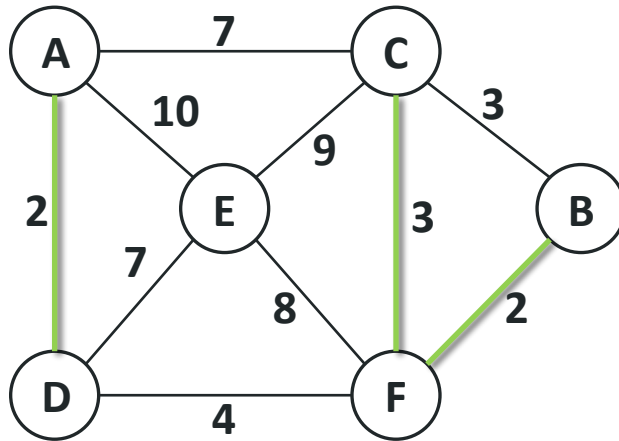


Solução {BF, AD}

Controle {AC, AE, BC, CE, CF, DE, DF, EF}

Floresta {{A, D}, {B, F}, {C}, {E}}

Kruskal

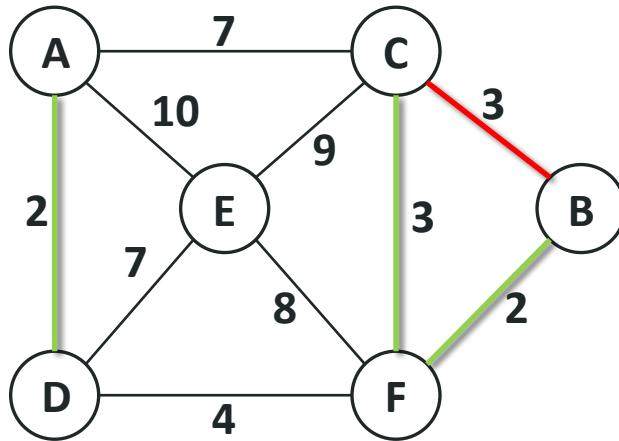


Solução {BF, AD, CF}

Controle {AC, AE, BC, CE, DE, DF, EF}

Floresta {{A, D}, {B, C, F}, {E}}

Kruskal

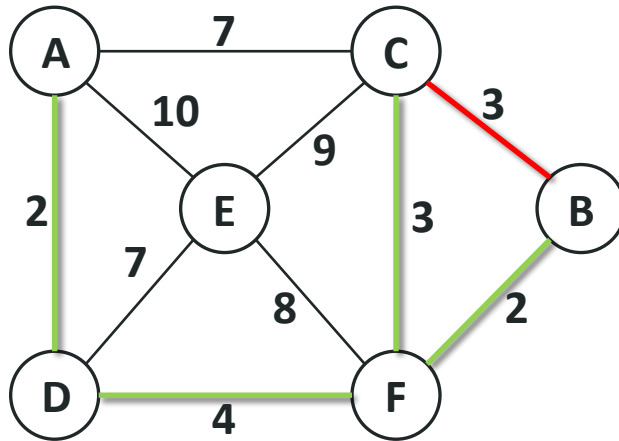


Solução {BF, AD, CF}

Controle {AC, AE, CE, DE, DF, EF}

Floresta {{A, D}, {B, C, F}, {E}}

Kruskal

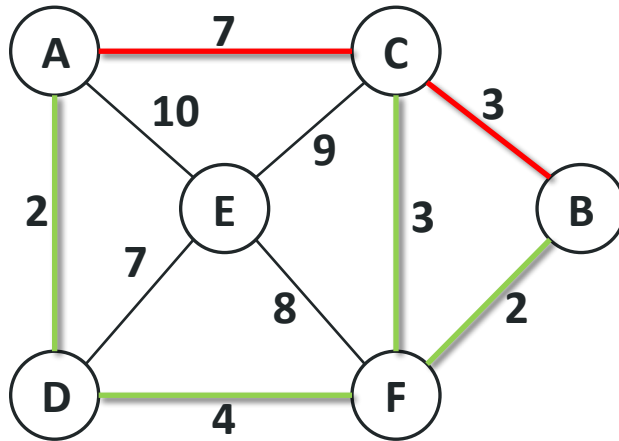


Solução {BF, AD, CF, DF}

Controle {AC, AE, CE, DE, EF}

Floresta {{A, B, C, D, F}, {E}}

Kruskal

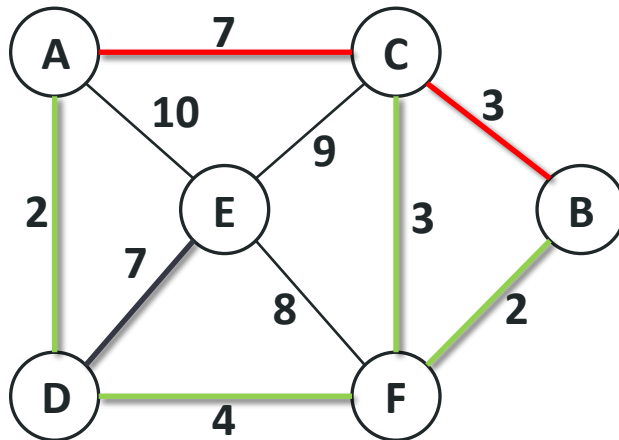


Solução {BF, AD, CF, DF}

Controle {AE, CE, DE, EF}

Floresta {{A, B, C, D, F}, {E}}

Kruskal



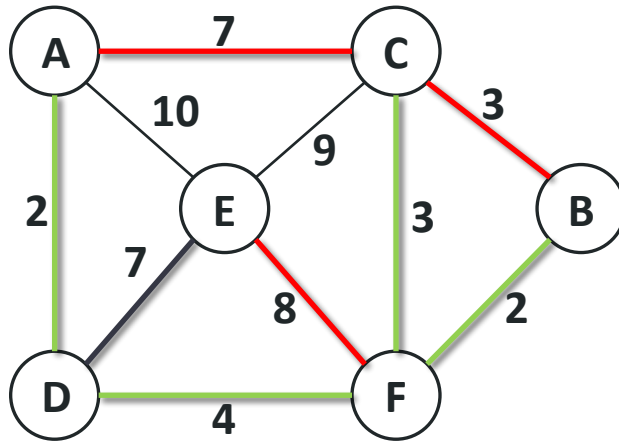
Solução {BF, AD, CF, DF, DE}

Controle {AE, CE, EF}

Floresta {{A, B, C, D, E, F}}

Poderíamos parar o algoritmo quando a floresta tem somente uma árvore.

Kruskal

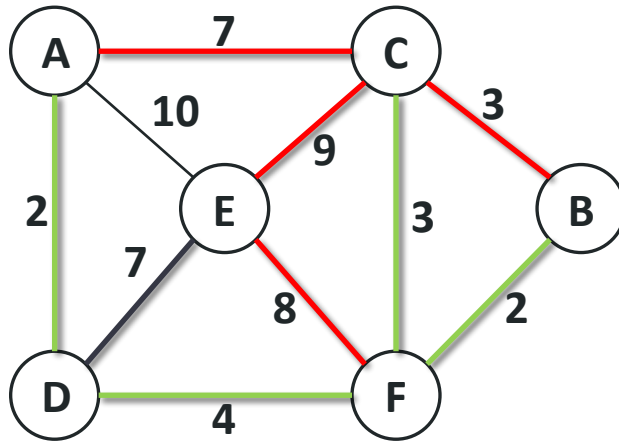


Solução {BF, AD, CF, DF, DE}

Controle {AE, CE}

Floresta {{A, B, C, D, E, F}}

Kruskal

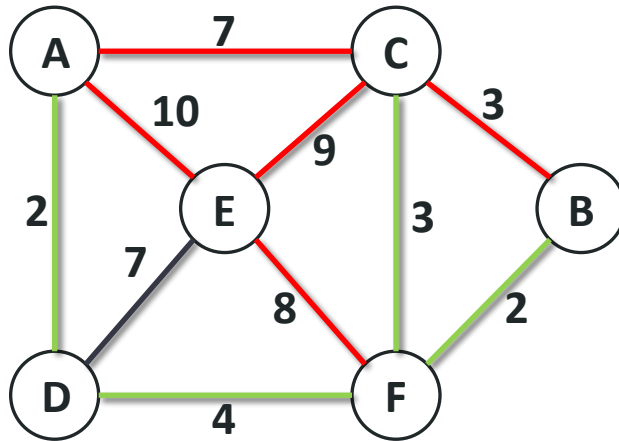


Solução {BF, AD, CF, DF, DE}

Controle {AE}

Floresta {{A, B, C, D, E, F}}

Kruskal

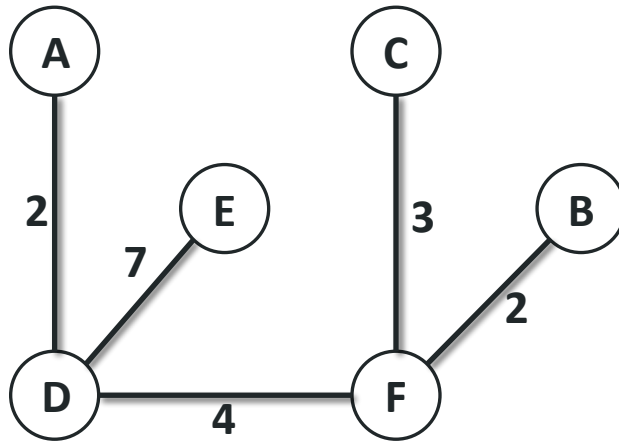


Solução {BF, AD, CF, DF, DE}

Controle {}

Floresta {{A, B, C, D, E, F}}

Kruskal



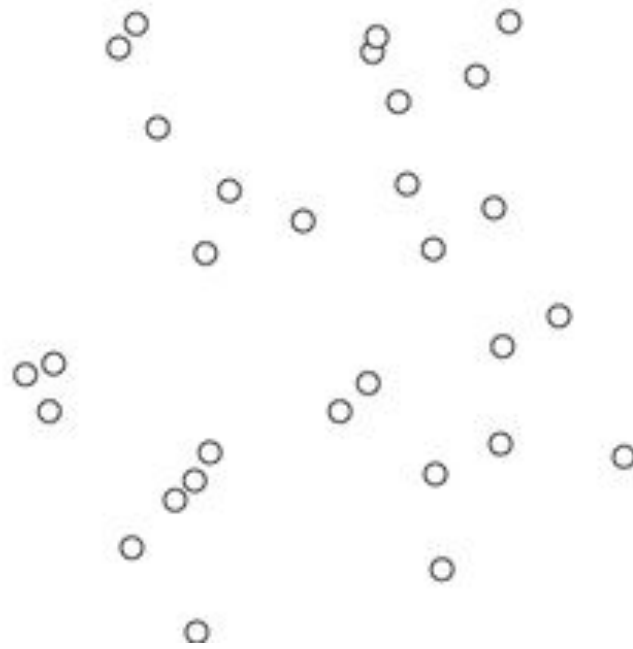
Peso Total = 18

Solução {BF, AD, CF, DF, DE}

Controle {}

Floresta {{A, B, C, D, E, F}}

Kruskal



Kruskal - Exercício

