Integração Numérica

Introdução

- Seja f uma função contínua no intervalo $[a,b]$ da qual se conhece uma primitiva F. Então o valor da **integral definida de *f*** pode ser calculada usando a fórmula de Newton-Leibnitz:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

onde $F'(x)=f(x)$.

- ***Problema 1:*** Em muitos casos a determinação de uma primitiva de $f(x)$ é muito difícil ou às vezes até impossível.

- ***Problema 2:*** Em problemas práticos, quase sempre conhece-se apenas uma tabela da função $f(x)$ e para estes casos a idéia de primitiva carece de significado.

Introdução

- Seja f uma função contínua no intervalo $[a,b]$ da qual se conhece uma primitiva F. Então o valor da **integral definida de f** pode ser calculada usando a fórmula de Newton-Leibnitz:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

onde $F'(x)=f(x)$.

Para esses casos os métodos de <u>integração numérica</u> são as ferramentas adequadas para determinar aproximações para os valores das integrais definidas.

Introdução

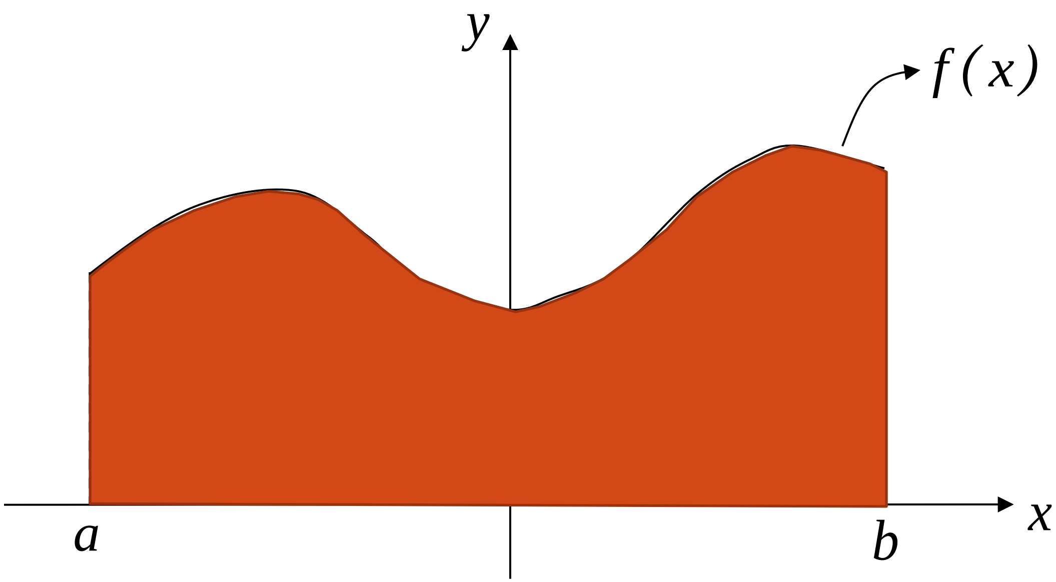
A idéia básica da integração numérica é a substituição da função f(x) por um polinômio que a aproxime no intervalo [a,b]. Assim o problema fica resolvido pela integração de polinômios, o que é trivial de se fazer.

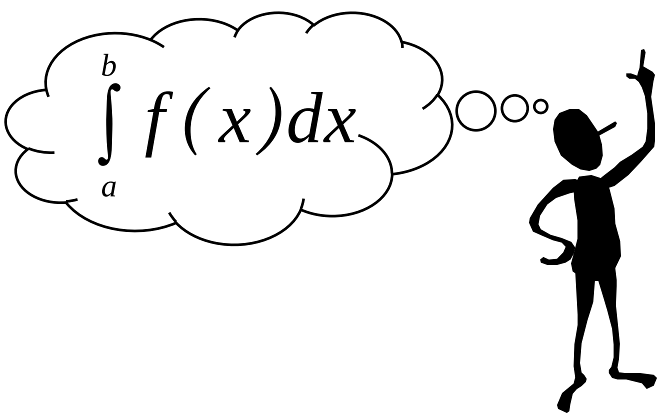
- Os métodos mais utilizados são classificados em dois grupos:

1) **Fórmulas de Newton-Cotes** – empregam valores de $f(x)$, onde os valores de x são igualmente espaçados.

2) **Fórmulas de Quadratura Gaussiana** – utilizam pontos diferentemente espaçados, onde este espaçamento é determinado por certas propriedades de polinômios ortogonais.

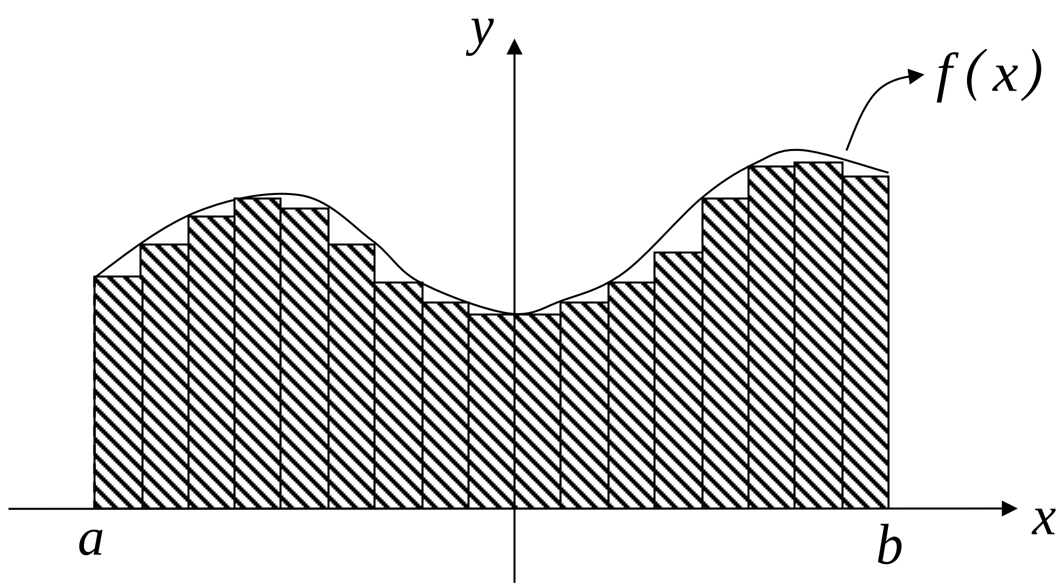
Introdução – Interpretação Geométrica da Integral





O valor numérico da integral é igual à área entre a função e o eixo *x* no intervalo [a, b].

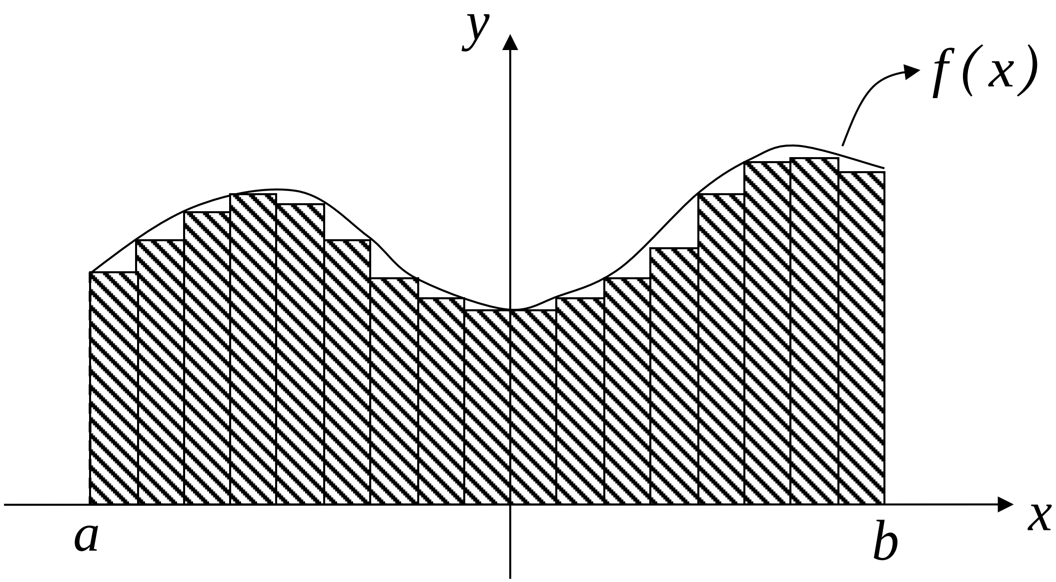
Introdução – Interpretação Geométrica da Integral



- Para calcular a integral divide-se o intervalo [a,b] em N sub-intervalos iguais $\Delta x=(b-a)/N$, e escreve-se

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ N\to\infty}} \sum_{n=0}^{N-1} f(x_n)\Delta x$$

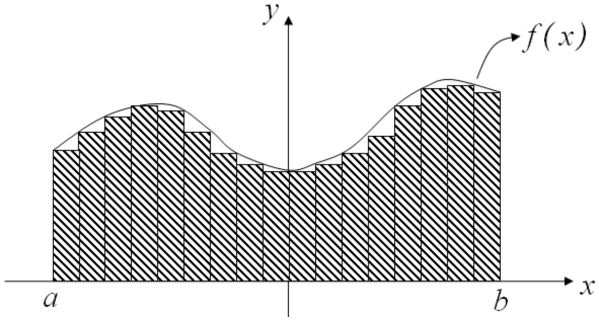
Introdução – Interpretação Geométrica da Integral



- Numericamente, toma-se Δx pequeno o suficiente para que o erro do cálculo seja inferior a um certo valor pré-determinado.

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{n=0}^{N-1} f(x_n)\Delta x \pm \varepsilon = (f_0 + f_1 + f_2 + \cdots + f_{N-1})\Delta x \pm \varepsilon$$

Introdução – Interpretação Geométrica da Integral



- É evidente na figura que, a não ser que tomemos Δx muito pequeno, os erros serão grandes:

*"as **áreas** que faltam do retângulo"*

- O erro pode ser minimizado, sem diminuir o tamanho de Δx:

*"escolhendo uma figura geométrica mais adequada para calcular a área sob a função, como um **trapézio**, por exemplo"*

- É interessante observar que aproximar a área sob a função pela soma de áreas de trapézios é o equivalente a:

*"realizar **interpolação linear** de f(x), ou seja, ligar os pontos* $\{x_n, y_n\}$ *com retas"*

Fórmulas de Newton-Cotes

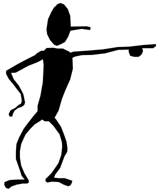
Newton-Cotes

- Neste caso, o polinômio que interpola $f(x)$ o faz em pontos igualmente espaçados de $[a,b]$. Se os subintervalos têm comprimento $\boldsymbol{h}$, então as fórmulas fechadas de Newton-Cotes para integração têm a forma:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + \cdots + A_n f(x_n) \approx \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)}$$

onde $x_{i+1} - x_i = h = (b-a)/m$.

Newton-Cotes



- **Comentário 1**: Os coeficientes A_i das formas fechadas de Newton-Cotes são determinados de acordo com o grau do polinômio aproximador de $f(x)$.

- **Comentário 2**: Existem ainda as formas abertas de Newton-Cotes, construídas de forma análoga às fechadas, diferem pelo fato que x_0 e $x_n \in (a,b)$

Regra dos TRAPÉZIOS

- Se usarmos a fórmula de Lagrange para expressar o polinômio $p_1(x)$ que interpola $f(x)$ em x_0 e x_1 temos:

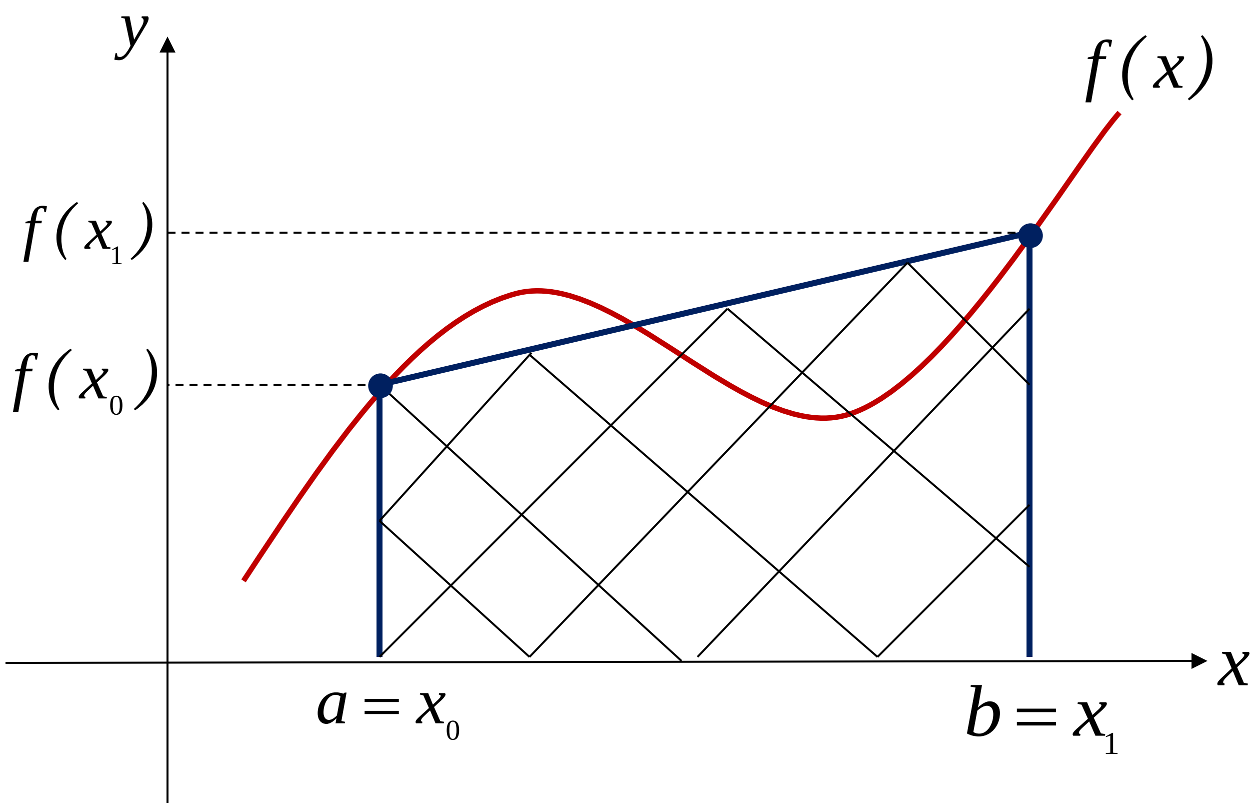
$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_{x_0=a}^{x_1=b} p_1(x)$$

$$\approx \int_{x_0}^{x_1}\left[\frac{(x-x_1)}{-h}f(x_0)+\frac{(x-x_0)}{h}f(x_1)\right]dx = I_T$$

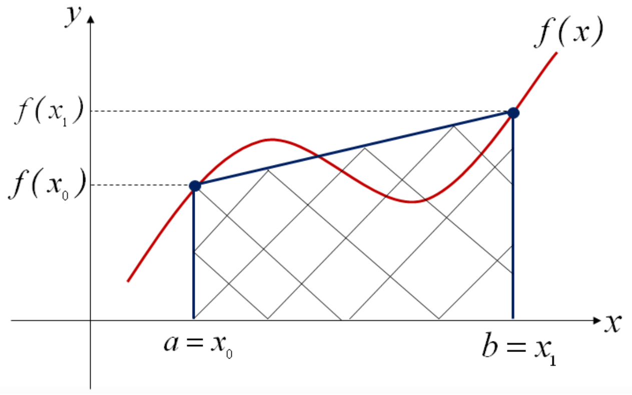
$$\Rightarrow I_T = \frac{h}{2}\left[f(x_0)+f(x_1)\right]$$

Regra dos TRAPÉZIOS

- Note que I_T é a área do trapézio de altura $h=x_1-x_0$ e de base $f(x_0)$ e $f(x_1)$.



Regra dos TRAPÉZIOS



- Ao substituir a área delimitada pelas curvas $y=f(x)$, $x=x_0$, $x=x_1$ e $y=0$ pela área do trapézio estamos realizando uma aproximação e cometendo um erro. Verifica-se que este erro é dado por,

$$\int_{x_0=a}^{x_1=b} f(x) = \frac{h}{2}\left[f(x_0)+f(x_1)\right]+E_T$$

$$E_T = -\frac{h^3}{12} f''(c) \quad ou \quad \left|E_T\right| \leq \frac{h^3}{12} \max_{x\in[a,b]} \left|f''(x)\right|$$

Regra dos TRAPÉZIOS REPETIDA

- Quando o intervalo [a,b] é grande, devemos fazer várias subdivisões e aplicar a regra do trapézio repetidas vezes. Sendo

$$x_{i+1} - x_i = h \quad com \quad i = 0,1,2,\ldots,m$$

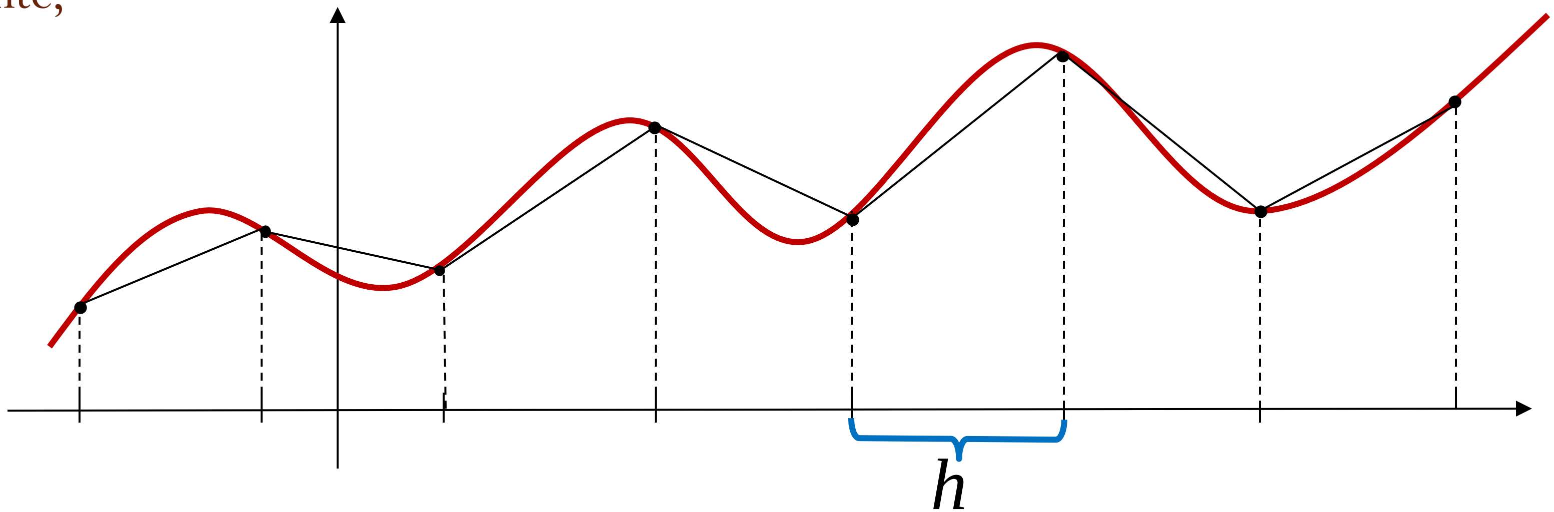
$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{m} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx$$

$$\approx \sum_{i=0}^{m} \left(\frac{h}{2}\left[f(x_i) + f(x_{i+1})\right] - \frac{h^3 f''(c_i)}{12} \right)$$

$$onde \;\; c_i \in (x_i, x_{i+1})$$

Regra dos TRAPÉZIOS REPETIDA

Graficamente,



O erro cometido em aplicar m vezes a regra do trapézio é:

$$E_{TR} = -m\frac{h^3}{12} f''(\xi) \quad ou \quad \left|E_{TR}\right| \le \frac{mh^3}{12} \max_{x\in[a,b]} \left| f''(x) \right|$$

$$m = \frac{b-a}{h}$$

Regra dos TRAPÉZIOS REPETIDA

- Em resumo:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_m} f(x)dx$$

$$= \underbrace{\frac{h}{2}\left[f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+\ldots+2f(x_{m-1})+f(x_m)\right]}_{I_{TR}} \underbrace{-\,mh^3\frac{f''(\xi)}{12}}_{E_{TR}}$$

$$|E_{TR}| \le \frac{(b-a)h^2}{12}\max_{x\in[a,b]}|f''(x)|$$

Regra dos TRAPÉZIOS REPETIDA (Exemplo)

Exemplo 1: Considere a integral,

$$\int_0^1 e^x dx$$

a) Calcule uma aproximação para a integral utilizando 10 subintervalos e a regra do trapézio repetida. Estime o erro cometido.

b) Qual é o número mínimo de subdivisões, de modo que o erro seja inferior a 10^{-3} ?

Resolução:

a) Fazendo 10 subintervalo no intervalo [0,1] temos,

$$h = \frac{b-a}{10} = \frac{1-0}{10} = 0{,}1 \quad \Rightarrow x_i = 0{,}1 \times i \quad para \;\; i = 0, 1, 2, \ldots, 10.$$

Regra dos TRAPÉZIOS REPETIDA (Exemplo)

Aplicando a regra do trapézio repetida,

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \ldots + 2f(x_{m-1}) + f(x_m)\right]$$

$$\int_0^1 e^x dx = \frac{0{,}1}{2}\left[e^0 + 2e^{0,1} + 2e^{0,2} + 2e^{0,3} + \ldots + 2e^{0,9} + e^{1,0}\right] = 1{,}719713$$

Estimativa do erro:

$$\left|E_{TR}\right| \leq \frac{(b-a)h^2}{12}\max_{x \in [a,b]}\left|f''(x)\right| = \frac{(1-0)0{,}1^2}{12}e^1 = 0{,}0023$$

$$\int_0^1 e^x = 1{,}720 \pm 0{,}0023$$

Regra dos TRAPÉZIOS REPETIDA (Exemplo)

b) Para obter o erro de 10^{-3} temos que:

$$|E_{TR}| \leq \frac{(b-a)h^2}{12} \max_{x\in[a,b]} |f''(x)| \leq 10^{-3}$$

$$ou\ seja \quad \frac{(1-0)h^2}{12} e^1 \leq 10^{-3} \quad \Rightarrow \quad h^2 \leq \frac{12\times 10^{-3}}{e} \quad \Rightarrow \quad h \leq 0,06644$$

assim,

$$m = \frac{1}{h} = 15.051 \quad \Rightarrow \quad m \geq 16$$

Portanto, para obter um erro de 10^{-3} temos que dividir o intervalo [0,1] em 16 subintervalos.

Exercício

1) Considere a função $f(x) = \dfrac{1}{4+x^2}$. Encontre a $\int_0^2 f(x)dx$, com cinco subintervalos, pela *Regra do Trapézio* e faça uma estimativa do erro, sabendo que $f^{(2)}(x) = \dfrac{6x^2-8}{(4+x^2)^3}$ é estritamente decrescente no intervalo [0,2].

2. Um carro de corrida demora 79 segundos a percorrer uma pista. A velocidade do carro (em m/seg) é determinada através de um radar e é apresentada desde o início da volta na seguinte tabela

Tempo	0	0.5	1	1.5	48	48.5	49	59	69	79
Velocidade	62	74	73.5	60.5	49.5	42.5	39	44.5	58	61.5

Qual o comprimento da pista?

2. Um carro de corrida demora 79 segundos a percorrer uma pista. A velocidade do carro (em m/seg) é determinada através de um radar e é apresentada desde o início da volta na seguinte tabela

Tempo	0	0.5	1	1.5	48	48.5	49	59	69	79
Velocidade	62	74	73.5	60.5	49.5	42.5	39	44.5	58	61.5

Qual o comprimento da pista?

1) Considere a função $f(x) = \dfrac{1}{4+x^2}$. Encontre a $\int_0^2 f(x)dx$, com cinco subintervalos, pela *Regra do Trapézio* e faça uma estimativa do erro, sabendo que $f^{(2)}(x) = \dfrac{6x^2-8}{(4+x^2)^3}$ é estritamente decrescente no intervalo [0,2].

$$\left|E_{TR}\right| \leq \frac{(b-a)h^2}{12} \max_{x\in[a,b]} \left|f''(x)\right|$$

Regra 1/3 de SIMPSON

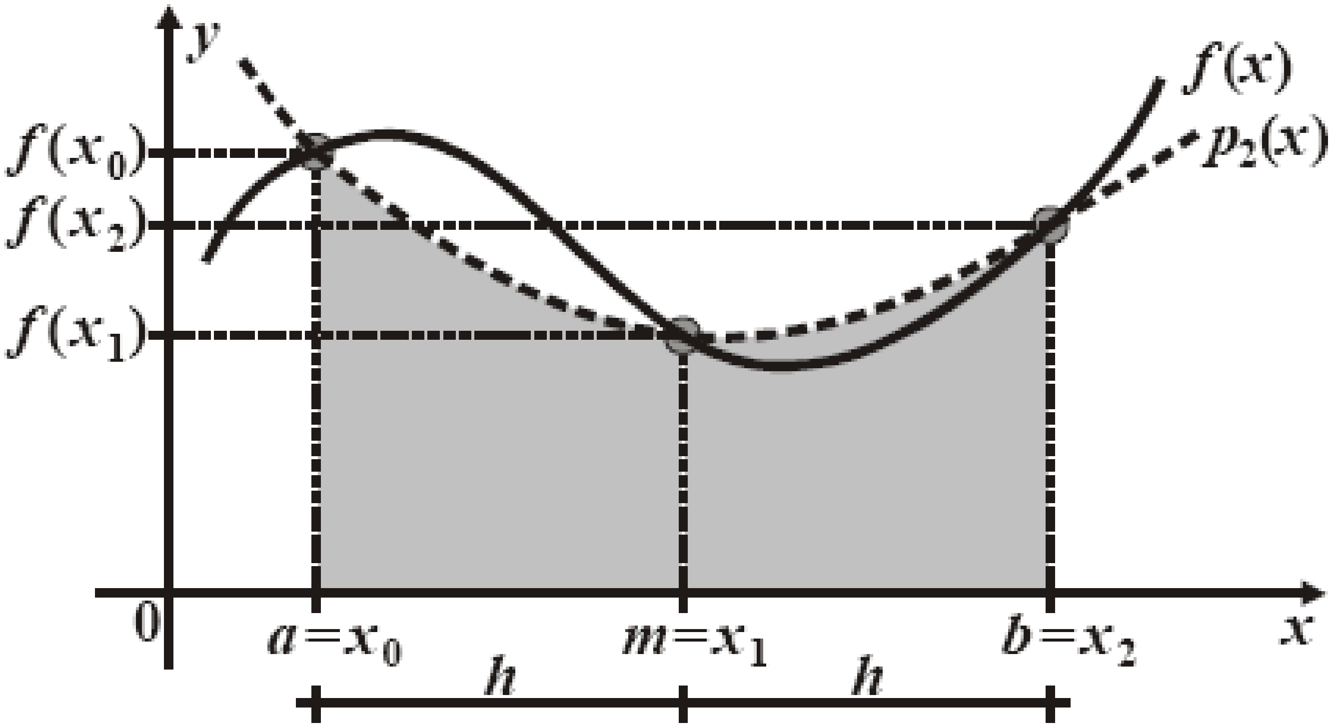
- Novamente, podemos usar a fórmula de Lagrange para estabelecer a fórmula de integração resultante da aproximação de $f(x)$ por um polinômio interpolador de grau 2.

- Seja $p_2(x)$ que interpola $f(x)$ nos pontos $x_0=a$, $x_1=x_0+h$ e $x_2=x_0+2h=b$:

$$p_2(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}f(x_0)+\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}f(x_1)+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}f(x_2)$$

$$p_2(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(-h)(-2h)}f(x_0)+\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(h)(-h)}f(x_1)+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(2h)(h)}f(x_2)$$

Regra 1/3 de SIMPSON



$$p_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(-h)(-2h)} f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(h)(-h)} f(x_1) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(2h)(h)} f(x_2)$$

Regra 1/3 de SIMPSON

$$p_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(-h)(-2h)} f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(h)(-h)} f(x_1) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(2h)(h)} f(x_2)$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \approx \int_{x_0=a}^{x_2=b} p_2(x)\,dx = I_S$$

$$I_S = \frac{f(x_0)}{2h^2} \int_{x_0}^{x_2} (x-x_1)(x-x_2)\,dx - \frac{f(x_1)}{h^2} \int_{x_0}^{x_2} (x-x_0)(x-x_2)\,dx +$$

$$+ \frac{f(x_2)}{2h^2} \int_{x_0}^{x_2} (x-x_0)(x-x_1)\,dx$$

$$I_s = \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right]$$

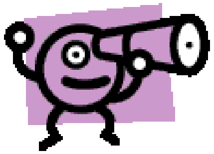
Regra 1/3 de Simpson

Regra 1/3 de SIMPSON

- De modo análogo à Regra do Trapézio, na Regra 1/3 de Simpson estamos realizando uma aproximação e cometendo um erro. Verifica-se que este erro é dado por:

$$\int_{x_0=a}^{x_2=b} f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left[f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)\right]+E_S$$

$$com \quad E_S = -\frac{h^5}{90} f^{(iv)}(c) \quad onde \quad c \in (x_0, x_2)$$



Note o ganho no erro ao passar da aproximação linear para a quadrática

Regra 1/3 de SIMPSON REPETIDA

- Novamente, quando o intervalo $[a,b]$ é grande, a solução é fazer várias subdivisões e aplicar a regra 1/3 de Simpson repetidas vezes. Sendo

$$x_{i+1} - x_i = h \quad com \quad i = 0,1,2,\ldots,m$$

aplicando Simpson 1/3 em um subintervalo :

$$\int_{x_{i-2}}^{x_i} f(x)dx = \left(\frac{h}{3}\left[f(x_{i-2}) + 4f(x_{i-1}) + f(x_i) \right] - \frac{h^5 f^{(iv)}(c_i)}{90} \right)$$

$$onde \;\; c_i \in (x_{i-2}, x_i)$$

Regra 1/3 de SIMPSON REPETIDA

- Considerando todos os subintervalos temos:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\{[f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)]+[f(x_2)+4f(x_3)+f(x_4)]+$$

$$\ldots\ldots+[f(x_{m-2})+4f(x_{m-1})+f(x_m)]\}-\sum_{i=1}^{m/2}\frac{h^5 f^{(iv)}(c_i)}{90}=I_{SR}+E_{SR}$$

$$I_{SR}=\frac{h}{3}\{f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+2f(x_4)+$$
$$\ldots+2f(x_{m-2})+4f(x_{m-1})+f(x_m)\}$$

$$E_{SR}=-\frac{m}{2}\left(\frac{h^5 f^{(iv)}(c_i)}{90}\right) \Longrightarrow E_{SR}\leq\frac{(b-a)h^4}{180}\max_{x\in[x_0,x_m]}\left|f^{iv}(x)\right|$$

Regra 1/3 de SIMPSON REPETIDA (Exemplo)

Exemplo 1: Considere a integral,

$$\int_0^1 e^x dx$$

a) Calcule uma aproximação para a integral utilizando 10 subintervalos e a regra 1/3 de Simpson repetida. Estime o erro cometido.

b) Qual é o número mínimo de subdivisões, de modo que o erro seja inferior a 10^{-3} ?

Resolução:

a) Fazendo 10 subintervalo no intervalo [0,1] temos,

$$h = \frac{b-a}{10} = \frac{1-0}{10} = 0{,}1 \Rightarrow x_i = 0{,}1 \times i \quad para \;\; i = 0, 1, 2, \ldots, 10.$$

Regra 1/3 de SIMPSON REPETIDA (Exemplo)

Aplicando a regra 1/3 de Simpson repetida,

$$\int_{x_0}^{x_m} f(x)dx = \frac{h}{3}\left[f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+\ldots+4f(x_{m-1})+f(x_m)\right]$$

$$\int_0^1 e^x dx = \frac{0,1}{3}\left[e^0+4e^{0,1}+2e^{0,2}+4e^{0,3}+\ldots+4e^{0,9}+e^{1,0}\right]=1,718283$$

Estimativa do erro:

$$|E_{TR}| \leq \frac{(b-a)h^4}{180}\max_{x\in[x_0,x_m]}\left|f^{iv}(x)\right| = \frac{(1-0)0,1^4}{180}e^1 = 2\times10^{-6}$$

$$\boxed{\int_0^1 e^x = 1.718283 \pm 0.000002}$$

Regra 1/3 de SIMPSON REPETIDA (Exemplo)

b) Para obter o erro de 10^{-3} temos que:

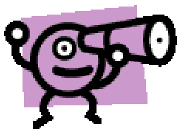
$$|E_{TR}| \leq \frac{(b-a)h^4}{180} \max_{x \in [x_0, x_m]} |f^{iv}(x)| \leq 10^{-3}$$

$$ou\ seja \quad \frac{(1-0)h^4}{180} e^1 \leq 10^{-3} \quad \Rightarrow \quad h^4 \leq \frac{180 \times 10^{-3}}{e} \quad \Rightarrow \quad h \leq 0{,}50728$$

assim,

$$m = \frac{1}{h} = 1{,}9713 \quad \Rightarrow \quad m \geq 2$$

Portanto, para obter um erro de 10^{-3} temos que dividir o intervalo [0,1] em 2 subintervalos.



Note a convergência rápida da regra 1/3 de Simpson

Regra de 1/3 Simpson Versus Trapézio

a) A convergência da regra 1/3 de Simpson é mais rápida do que a convergência da regra do Trapézio.

b) As demais fórmulas fechadas de integração de Newton-Cotes trabalham com polinômios de graus $n=3$, $n=4$,...

c) Para um n qualquer, a fórmula de Newton–Cotes é apresentada no próximo slide.

Regra de 1/3 Simpson Versus Trapézio

- Fórmula de Newton-Cotes para *n* qualquer:

$$\int_{a=x_0}^{b=x_n} f(x)\,dx \approx \int_{x_0}^{x_n} p_n(x)\,dx = utilizando\ forma\ de\ Lagrange =$$

$$= \int_{x_0}^{x_n} \left[f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + \ldots + f(x_n)L_n(x) \right] dx =$$

$$= f(x_0)\int_{x_0}^{x_n} L_0(x)\,dx + f(x_1)\int_{x_0}^{x_n} L_1(x)\,dx + \ldots + f(x_n)\int_{x_0}^{x_n} L_n(x)\,dx =$$

$$= A_0\, f(x_0) + A_1\, f(x_1) + \ldots. + A_n\, f(x_n)$$

$$\Rightarrow A_i = \int_{x_0}^{x_n} L_i(x)\,dx$$

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = A_0\, f(x_0) + A_1\, f(x_1) + \ldots. + A_n\, f(x_n)}$$

A velocidade vertical (m/s) de um foguete é dada por

$$v(t)\begin{cases} 10t^2 \rightarrow 0 \le t \le 10 \\ 1050 - 5t \rightarrow 10 < t \le 20 \\ 47,5t + (t-20)^2 \rightarrow 20 < t \le 30 \end{cases}$$

Calcule, usando um método numerico, a distância percorrida ao fim de 30s com base nos seguintes pontos (apresentar em tabelas todos os pontos usados na resolução, assim como o método e o resultado usado em cada trecho)

0	5	10	12	14	16	18	20	22.5	25	27.5	30

Teorema Geral do Erro

- O erro na integração numérica, utilizando fórmulas de Newton-Cotes, é

$$\textit{caso 1}: \begin{cases} E_n = -\dfrac{h^{n+2}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c_i)\displaystyle\int_0^n u(u-1)\ldots(u-n)\,du \\ \quad para \quad c_i \in [a,b] \;\; se \;\; n \; é \; impar \end{cases}$$

$$\textit{caso 2}: \begin{cases} E_n = -\dfrac{h^{n+3}}{(n+2)!} f^{(n+2)}(c_i)\displaystyle\int_0^n \left(u-\dfrac{n}{2}\right) u(u-1)\ldots(u-n)\,du \\ \quad para \quad c_i \in [a,b] \;\; se \;\; n \; é \; par \end{cases}$$

Lista de Exercícios – Integração

Exercício 1:

Calcule as integrais abaixo pela regra dos trapézios e pela regra 1/3 de Simpson, usando 4 e 6 divisões do intervalo $[a, b]$:

(a) $\int_1^2 e^{-x}\, dx$, (b) $\int_1^4 \sqrt{x}\, dx$, (c) $\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$, (d) $\int_0^{0.6} \frac{1}{1+x}\, dx$.

Exercício 2:

Determine o número mínimo de subintervalos necessários para que cada uma das integrais do exercício 1, tenham precisão $\varepsilon \leq 1.10^{-5}$

Considere a função $f(x) = \frac{1}{4+x^2}$ Encontre a $\int_0^2 f(x)dx$

, com cinco subintervalos, pela *Regra do Trapézio* e faça uma estimativa do erro, sabendo que $f^{(2)}(x) = \frac{6x^2-8}{(4+x^2)^3}$

é estritamente decrescente no intervalo [0,2].