Métodos Numéricos

Interpolação

Interpolação

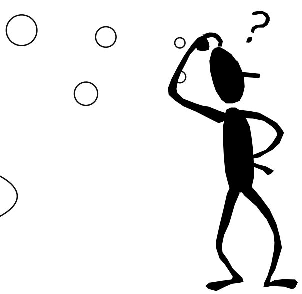
Interpolação

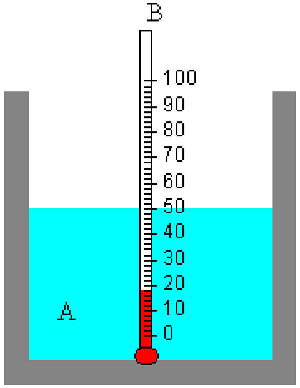
➢ A tabela abaixo relaciona calor específico da água e temperatura:

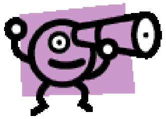
temperatura (°C)	20	25	30	35	40	45	50
calor específico	0.99907	0.99852	0.99826	0.99818	0.99828	0.99849	0.99878

o calor específico da água a 32.5°?

a temperatura para a qual o calor específico é 0.99837?







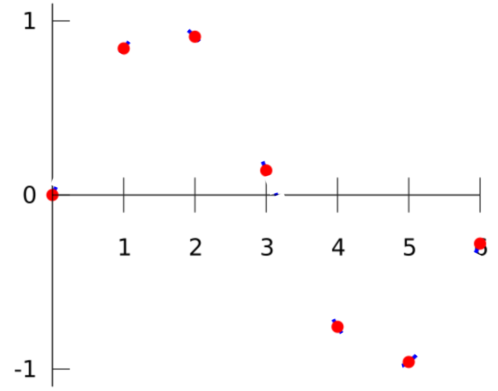
Interpolação !!

Interpolação

- *Interpolar* uma função $f(x)$ consiste em aproximar essa função por uma função $g(x)$, escolhida dentro de uma classe de funções definida a priori e que satisfaça algumas propriedades.

- A função $g(x)$ é então usada no lugar da função $f(x)$.

Interpolação é o método que permite construir um novo conjunto de dados a partir de um conjunto discreto de dados pontuais previamente conhecidos.



Interpolação - Quando usar!

- Quando temos os valores numéricos de uma função não conhecida para um conjunto de pontos e queremos o valor desta função em um ponto não tabelado.

- Aproximação de funções complexas por funções mais simples. Suponha que tenhamos uma função, mas que seja complicada demais para que seja possível avaliá-la de forma eficiente. Podemos, então, escolher alguns dados pontuais da função complicada e tentar interpolá-los com uma função mais simples.

Interpolação

Interpolação - O que é?

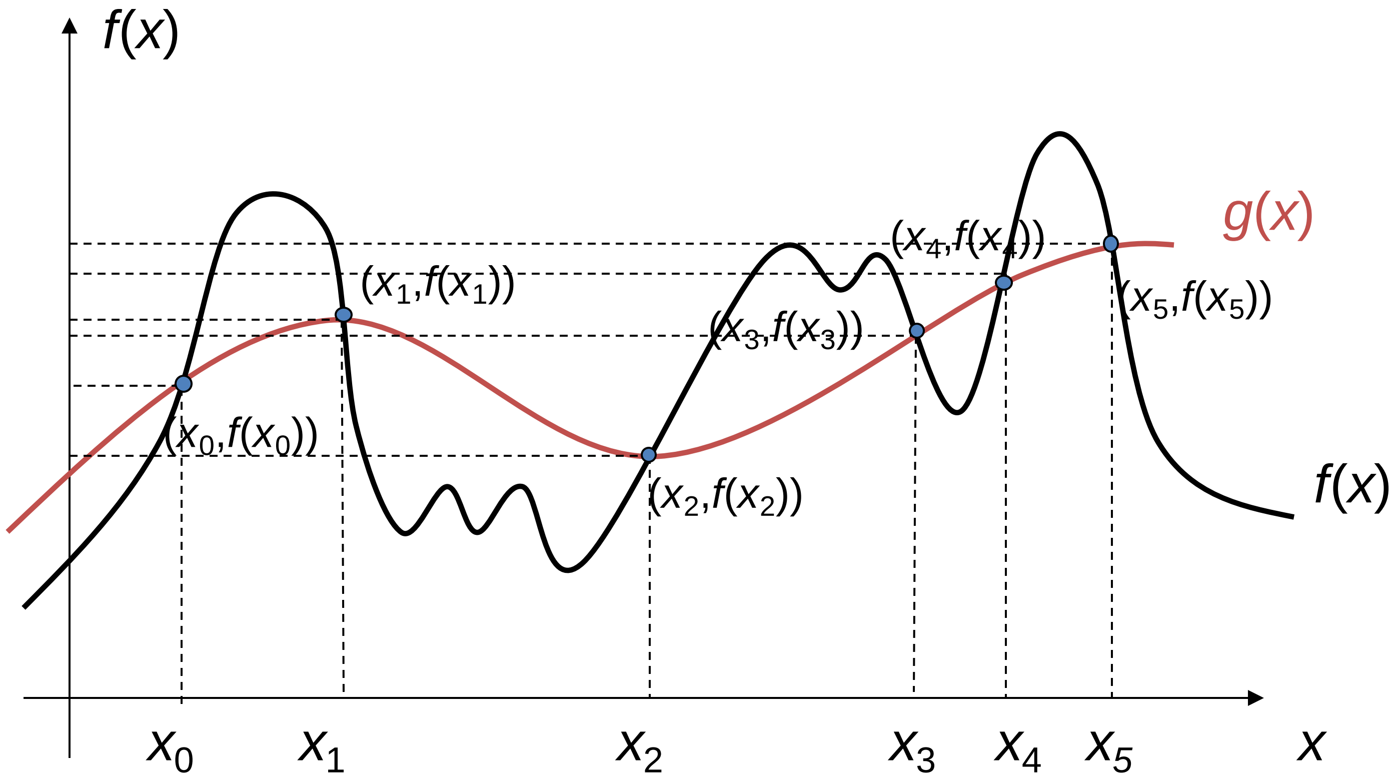
- Sejam $(n+1)$ pontos distintos: $x_0, x_1, \ldots, x_n$, chamados nós da interpolação, e os valores de $f(x)$: $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$.

- A interpolação de $f(x)$ que veremos consiste em obter uma função $g(x)$ tal que:

$$
\begin{gathered}
g(x_0) = f(x_0), \\
g(x_1) = f(x_1), \\
\vdots \\
g(x_n) = f(x_n).
\end{gathered}
$$

Interpolação - O que é?

➢ Graficamente:



Interpolação

- Consideraremos aqui que $g(x)$ é uma função polinomial. Contudo, a função $g(x)$ escolhida pode ser: racional, trigonométrica, etc.

- Existem outras formas de interpolação, por exemplo via fórmula de Taylor, via polinômios de Hermite, etc.

A aproximação de funções por polinômios é uma das idéias mais antigas da análise numérica, e ainda uma das mais usadas. É bastante fácil entender por que razão isso acontece. Os polinômios são facilmente computáveis, suas derivadas e integrais são novamente polinômios, suas raízes podem ser encontradas com relativa facilidade, etc.

Interpolação Polinomial

- Veremos aqui como aproximar uma função usando Métodos de Interpolação Polinomial.

- Tais métodos são usados como uma aproximação para uma função $f(x)$, principalmente, nas seguintes situações:

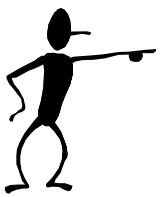
  a) não conhecemos a expressão analítica de $f(x)$, isto é, sabemos apenas seu valor em alguns pontos x_0, x_1, x_2, . . ., (esta situação ocorre muito frequentemente na prática, quando se trabalha com dados experimentais) e necessitamos manipular $f(x)$ como, por exemplo, calcular seu valor num ponto, sua integral num determinado intervalo, etc.

  b) $f(x)$ é extremamente complicada e de difícil manejo. Então, às vezes, é interessante sacrificar a precisão em benefício da simplificação dos cálculos.

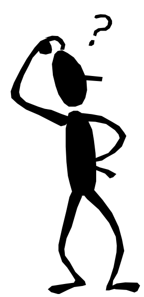
Interpolação Polinomial

- Dados os pontos: $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, \mathrm{f}(x_1))$, ..., $(x_n, f(x_n))$, queremos aproximar $f(x)$ por um polinômio $p_n(x)$, de grau menor ou igual a n, tal que

$$f(x_k) = p_n(x_k),\ k=0,1,2,\ldots,\ n$$



$$p_n(x) = \underline{a_0} + \underline{a_1}x + \underline{a_2}x^2 + \ldots. + \underline{a_n}x^n$$



Obter os coeficientes

Interpolação Polinomial

Teorema: Existe um único polinômio $p_n(x)$, de grau menor ou igual a n, tal que $f(x_k) = p_n(x_k)$, k=0,1,2,..., n desde que $x_k \neq x_j, j \neq k$

Demonstração do teorema:

Seja

$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$$

das condições de interpolação:

$$a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + ... + a_n x_0^n = f(x_0)$$

$$a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + ... + a_n x_1^n = f(x_1)$$

$$.......... ....$$

$$a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + ... + a_n x_n^n = f(x_n)$$

Interpolação Polinomial

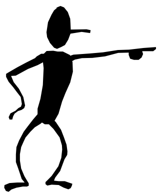
$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix}$$

A matriz dos coeficientes (A) é do tipo Vandermonde, logo desde que sejam pontos distintos, então o determinante da matriz dos coeficientes é não-nulo. Consequentemente o sistema admite solução única.

CONCLUSÃO:

Existem a_0, a_1, a_2, ..., a_n únicos que satisfazem as condições de interpolação.

Interpolação Polinomial



- Há várias maneiras para obter $p_n(x)$. Discutiremos três possibilidades:

  - ✓ Resolução de Sistema Linear
  - ✓ Forma de Lagrange
  - ✓ Forma de Newton

- Teoricamente as três formas conduzem ao mesmo polinômio. A escolha entre elas depende de condições como estabilidade do sistema linear, tempo computacional, etc.

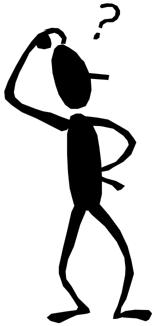
Métodos de Interpolação

- Resolução do Sistema Linear
- Forma de Lagrange
- Forma de Newton

Resolução do sistema linear

Uma das formas de obter o polinômio é a resolução do sistema linear obtido a partir das condições de interpolação:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ldots + a_n x_0^n = f(x_0) \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \ldots + a_n x_1^n = f(x_1) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \ldots + a_n x_n^n = f(x_n) \end{cases}$$



Obter os coeficientes:

$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$

Resolução do sistema linear

<u>Exemplo 1:</u> Encontrar o polinômio de grau menor ou igual a 2 que interpola os dados da tabela abaixo:

x	-1	0	2
$f(x)$	4	1	-1

Resolução:

Temos então $p_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$

$$\begin{aligned}
p_2(-1) &= f(-1) &\Rightarrow\quad & a_0 - a_1 + a_2 = 4 \\
p_2(0) &= f(0) &\Rightarrow\quad & a_0 = 1 \\
p_2(2) &= f(2) &\Rightarrow\quad & a_0 + 2a_1 + 4a_2 = -1
\end{aligned}$$

Resolução do sistema linear

$$\begin{cases} a_0 - a_1 + a_2 = 4 \\ a_0 = 1 \\ a_0 + 2a_1 + 4a_2 = -1 \end{cases}$$

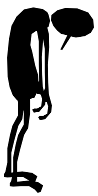
Resolvendo o sistema linear, temos:

$$a_0 = 1 \qquad a_1 = -7/3 \qquad a_2 = 2/3$$

$$\boxed{p_2(x) = 1 - \frac{7}{3}x + \frac{2}{3}x^2}$$

polinômio que interpola $f(x)$ em x_0, x_1 e x_2

Resolução do sistema linear



- Nem sempre a resolução do sistema linear para se obter $p_n(x)$ é simples e exato.

<u>Exemplo 2:</u> Encontrar o polinômio de grau menor ou igual a 3 que interpola os dados da tabela abaixo:

x	0.1	0.2	0.3	0.4
$f(x)$	5	13	-4	-8

Resolução:

Temos então

$$p_3(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

Resolução do sistema linear

x	0.1	0.2	0.3	0.4
f(x)	5	13	-4	-8

$$p_3(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

$$p_3(0.1) = f(0.1) \Leftrightarrow a_0 + 0.1\,a_1 + 0.01\,a_2 + 0.001\,a_3 = 5$$
$$p_3(0.2) = f(0.2) \Leftrightarrow a_0 + 0.2\,a_1 + 0.04\,a_2 + 0.008\,a_3 = 13$$
$$p_3(0.3) = f(0.3) \Leftrightarrow a_0 + 0.3\,a_1 + 0.09\,a_2 + 0.027\,a_3 = -4$$
$$p_3(0.4) = f(0.4) \Leftrightarrow a_0 + 0.4\,a_1 + 0.16\,a_2 + 0.064\,a_3 = -8$$

Sistema de 4 equações com 4 incógnitas

$$\begin{cases} a_0 + 0.1\,a_1 + 0.01\,a_2 + 0.001\,a_3 = 5 \\ a_0 + 0.2\,a_1 + 0.04\,a_2 + 0.008\,a_3 = 13 \\ a_0 + 0.3\,a_1 + 0.09\,a_2 + 0.027\,a_3 = -4 \\ a_0 + 0.4\,a_1 + 0.16\,a_2 + 0.064\,a_3 = -8 \end{cases}$$

Resolvendo por eliminação de Gauss, obtemos:

$$\boxed{p_3(x) = -0.66\times10^2 + (0.115\times10^4)x - (0.505\times10^4)x^2 + (0.633\times10^4)x^3}$$

Para *x*=0,4:

$$p_3(0.4) = -10$$

$$f(0.4) = -8$$

x	0.1	0.2	0.3	0.4
f(x)	5	13	-4	-8

Métodos de Interpolação

- 🕮 Resolução do Sistema Linear
- 🕮 Forma de Lagrange
- 🕮 Forma de Newton

Forma da Lagrange

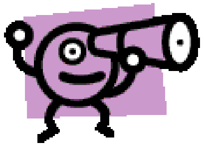
- Sejam (n+1) pontos distintos: x_0, x_1, ..., x_n, chamados nós da interpolação, e os valores de $f(x)$: $f(x_0)$, $f(x_1)$, ..., $f(x_n)$.

- A interpolação de $f(x)$ consiste em obter uma função $p_n(x)$ tal que:

$$p_n(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + \ldots\ldots + f(x_n)L_n(x)$$

onde os polinômios $L_k(x)$ são de grau n.

IMPORTANTE:



Como os $f(x_i)$são dados, devemos no Método de Lagrange determinar os $L_k(x)$.

Polinômios de Lagrange:

Forma da Lagrange

- Para cada *i*, queremos que a condição $p_n(x_i)=f(x_i)$seja satisfeita, ou seja:

$$p_n(x_i) = f(x_0)L_0(x_i) + f(x_1)L_1(x_i) + \ldots\ldots + f(x_n)L_n(x_i) = f(x_i)$$

Por exemplo:

$$p_n(x_0) = f(x_0)\underbrace{L_0(x_0)}_{1} + f(x_1)\underbrace{L_1(x_0)}_{0} + \ldots\ldots + f(x_n)\underbrace{L_n(x_0)}_{0} = f(x_0)$$

$$p_n(x_1) = f(x_0)\underbrace{L_0(x_1)}_{0} + f(x_1)\underbrace{L_1(x_1)}_{1} + \ldots\ldots + f(x_n)\underbrace{L_n(x_1)}_{0} = f(x_1)$$

$p(x)$ passe sobre os pontos $(x_i, f(x_i))$

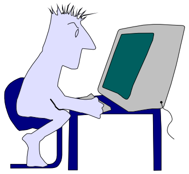
Forma da Lagrange

- A forma mais simples de se satisfazer esta condição é impor:

$$L_k(x_i) = \begin{cases} 0 & se \;\; k \neq i \\ 1 & se \;\; k = i \end{cases}$$

para isso, definimos $L_k(x)$ por:

$$L_k(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}$$



$$\begin{cases} L_k(x_k) = 1 \\ L_k(x_i) = 0 \quad se \quad i \neq k \end{cases}$$

Forma da Lagrange

- Então, a forma de lagrange para o polinômio interpolador é:

$$p_n(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + \ldots\ldots + f(x_n)L_n(x)$$

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)L_k(x)$$

onde,

$$L_k(x) = \frac{\prod\limits_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n}(x - x_j)}{\prod\limits_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n}(x_k - x_j)}$$

Forma da Lagrange

Exemplo 1: Encontrar o polinômio de grau menor ou igual a 2 que interpola os dados da tabela abaixo:

x	-1	0	2
$f(x)$	4	1	-1

Resolução:

Devemos interpolar os 3 pontos com uma forma de Lagrange. Segue:

$$p_2(x) = \sum_{k=0}^{2} f(x_k)\,L_k(x) = f(x_0)\,L_0(x) + f(x_1)\,L_1(x) + f(x_2)\,L_2(x)$$

Forma da Lagrange

$$L_k(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}$$

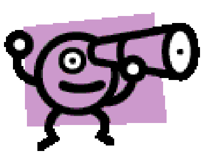
$$\begin{cases} L_0(x) = \dfrac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \dfrac{(x-0)(x-2)}{(-1-0)(-1-2)} = \dfrac{x^2-2x}{3} \\[2ex] L_1(x) = \dfrac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \dfrac{(x+1)(x-2)}{(0+1)(0-2)} = \dfrac{x^2-x-2}{-2} \\[2ex] L_2(x) = \dfrac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \dfrac{(x+1)(x-0)}{(2+1)(2-0)} = \dfrac{x^2+x}{6} \end{cases}$$

Forma da Lagrange

Enfim, a forma de Lagrange da interpolação:

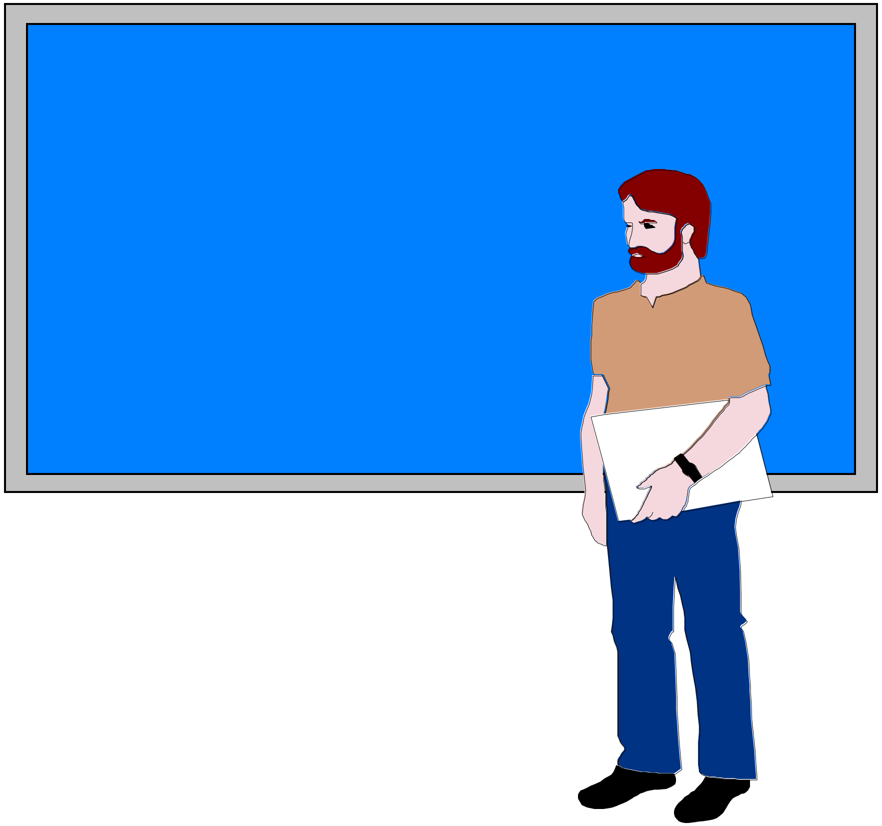
$$p_2(x) = 4\left(\frac{x^2 - 2x}{3}\right) + 1\left(\frac{x^2 - x - 2}{-2}\right) + (-1)\left(\frac{x^2 + x}{6}\right)$$

$$\Rightarrow \quad p_2(x) = 1 - \frac{7}{3}x + \frac{2}{3}x^2$$



Mesmo resultado à resolução do sistema linear!!!

Exercícios



Exercício 1:

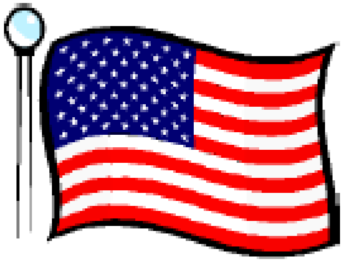
Para a função dada, seja $x_0 = 0$, $x_1 = 0,6$ e $x_2 = 0,9$. Construa polinômios de grau $n \leq 2$, para aproximar $f(0,45)$, e encontre o valor do erro verdadeiro.

(a) $f(x) = \cos x$

(b) $f(x) = \sqrt{(1 + x)}$

(c) $f(x) = \ln(x + 1)$

1. A tabela seguinte apresenta a população dos Estados Unidos da América (em milhões) de 1940 a 1980.



Ano	1940	1950	1960	1970	1980
População	132.165	151.326	179.323	203.302	226.542

Métodos de Interpolação

- Resolução do Sistema Linear
- Forma de Lagrange
- Forma de Newton

Forma de Newton

- A forma de Newton para o polinômio $p_n(x)$, que interpola em $(n+1)$ pontos distintos $x_0, x_1, \ldots, x_n$, é a seguinte:

$$p_n(x) = d_0 + d_1(x - x_0) + d_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots\ldots + \\ + d_n(x - x_0)(x - x_1)\ldots\ldots(x - x_{n-1})$$

- No Método de Newton, os valores de d_k são dados por diferenças divididas de ordem k.

Diferenças divididas

- Seja $f(x)$ definida em $(n+1)$ pontos distintos x_0, x_1, ..., x_n. O operador diferenças divididas é dado:

$$f[x_0] = f(x_0) \qquad \text{(Ordem 0)}$$

$$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \qquad \text{(Ordem 1)}$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} \qquad \text{(Ordem 2)}$$

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{x_3 - x_0} \qquad \text{(Ordem 3)}$$

$$\vdots$$

$$f[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n] = \frac{f[x_1, x_2, \ldots, x_n] - f[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}]}{x_n - x_0} \qquad \text{(Ordem } n\text{)}$$

Diferenças divididas

- Para auxiliar nos cálculos pode-se utilizar a seguinte tabela:

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	Ordem n
x_0	$f[x_0]$			
		$f[x_0, x_1]$		
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0, x_1, x_2]$	
		$f[x_1, x_2]$		
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1, x_2, x_3]$	
		$f[x_2, x_3]$		
.....	......	......	....	$f[x_0, x_1, .., x_n]$
		$f[x_{n-1}, x_n]$		
x_n	$f[x_n]$			

Forma de Newton

1. Mostra-se que $f\,[x_0, x_1, x_2,\ldots,x_k]$ é simétrica nos argumentos, ou seja,

$$f[x_0, x_1] = f[x_1, x_0]$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = f[x_1, x_0, x_2] = \ldots\ldots$$

2. Mostra-se que a forma de Newton para o polinômio de ordem n que interpola $f\,(x)$ é

$$p_n(x) = f[x_0] + (x - x_0)\,f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)\,f[x_0, x_1, x_2] + \ldots$$
$$+ \ldots + (x - x_0)(x - x_1)\ldots.(x - x_{n-1})\,f[x_0, x_1, x_2, .., x_n]$$

Forma de Newton

Exemplo 1: Encontrar o polinômio de grau menor ou igual a 2 que interpola os dados da tabela abaixo:

x	-1	0	2
$f(x)$	4	1	-1

Resolução:

Devemos interpolar os 3 pontos com a forma de Newton. Segue:

$$p_2(x) = f(x_0) + (x - x_0) f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1) f[x_0, x_1, x_2]$$

Forma de Newton

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2
x_0 =-1	$f[x_0]=4$		
x_1=0	$f[x_1]=1$		
x_2=2	$f[x_2]=-1$		

Ordem 0 $\Rightarrow$ $f[x_i]=f(x_i)$

Forma de Newton

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2
x_0 =-1	$f[x_0] = 4$		
		$f[x_0, x_1] = -3$	
x_1=0	$f[x_1] = 1$		
		$f[x_1, x_2] = -1$	
x_2=2	$f[x_2] = -1$		

Ordem 1 $\Rightarrow$ $f[x_i, x_j] = \dfrac{f(x_j) - f(x_i)}{x_j - x_i}$

Forma de Newton

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2
x_0 =-1	$f[x_0]=4$		
		$f[x_0,x_1]=-3$	
x_1=0	$f[x_1]=1$		$f[x_0,x_1,x_2]=2/3$
		$f[x_1,x_2]=-1$	
x_2=2	$f[x_2]=-1$		

Ordem 2 $\Rightarrow$ $$f[x_i,x_j,x_k]=\frac{f[x_j,x_k]-f[x_i,x_j]}{x_k-x_i}$$

Forma de Newton

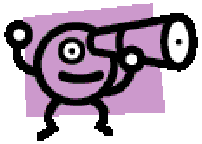
x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2
$x_0=-1$	$f[x_0]=4$		
		$f[x_0,x_1]=-3$	
$x_1=0$	$f[x_1]=1$		$f[x_0,x_1,x_2]=2/3$
		$f[x_1,x_2]=-1$	
$x_2=2$	$f[x_2]=-1$		

Logo,

$$p_2(x)=f(x_0)+(x-x_0)f[x_0,x_1]+(x-x_0)(x-x_1)f[x_0,x_1,x_2]$$

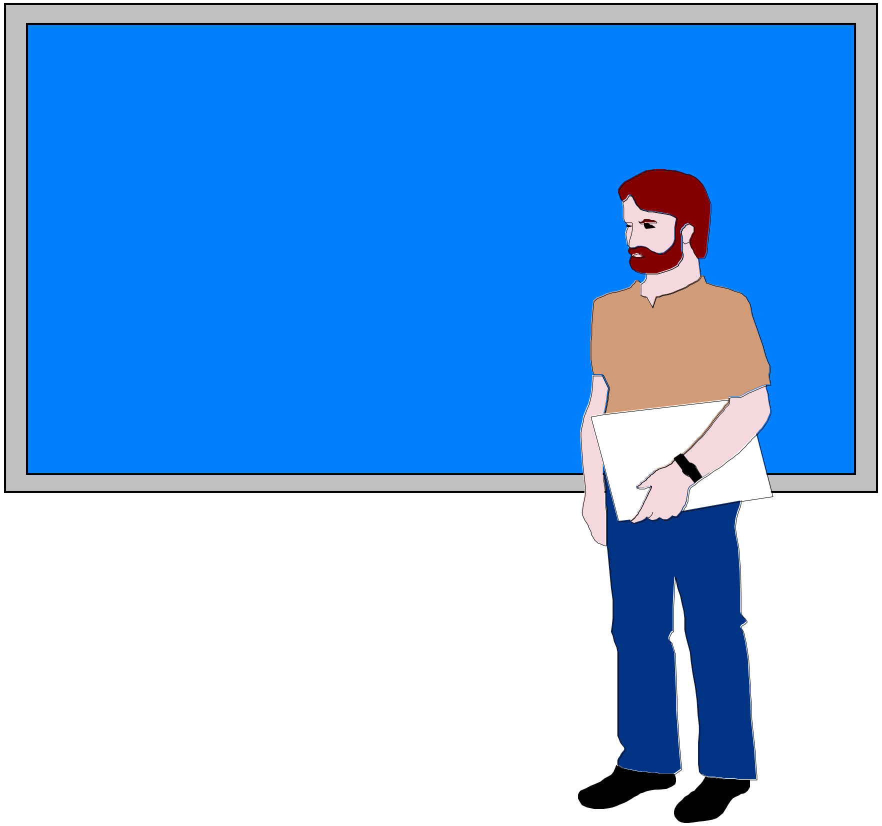
$$=4+(x+1)(-3)+(x+1)(x-0)\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$=\frac{2}{3}x^2-\frac{7}{3}x+1$$

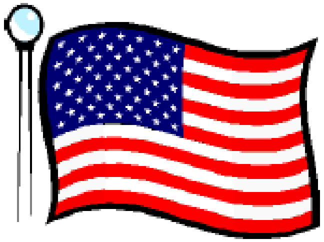


Mesmo resultado à resolução do sistema linear!!!

Exercícios



1. A tabela seguinte apresenta a população dos Estados Unidos da América (em milhões) de 1940 a 1980.



Ano	1940	1950	1960	1970	1980
População	132.165	151.326	179.323	203.302	226.542

a) Construa o polinómio interpolador de Newton de grau 4 para estimar a população no ano 1965.

b) A população em 1930 foi 123.203 Qual a precisão do valor calculado na alínea a)?

Diferenças divididas:

x_i	f_i	$dd1$	$dd2$	$dd3$	$dd4$
$x_0 = 1940$	132.165				
		1.916100			
$x_1 = 1950$	151.326		0.044180		
		2.799700		-0.002142	
$x_2 = 1960$	179.323		-0.020090		0.000067
		2.397900		0.000547	
$x_3 = 1970$	203.302		-0.003695		
		2.324000			
$x_4 = 1980$	226.542				

$$p_4(x) = 132.165 + (x-1940)1.916100 + (x-1940)(x-1950)0.044180 + (x-1940)(x-1950)(x-1960) \times (-0.002142) + (x-1940)(x-1950)(x-1960)(x-1970)0.000067$$

Para estimar a população no ano 1965, calcula-se $p_4(1965) \approx f(1965)$:

$$p_4(1965) = 132.165 + (1965-1940)1.916100 + (1965-1940)(1965-1950)0.044180 + (1965-1940)(1965-1950)(1965-1960) \times (-0.002142) + (1965-1940)(1965-1950)(1965-1960)(1965-1970)0.000067 = 191.987930$$

Em 1965, existiam aproximadamente 191.987930 milhões de habitantes nos Estados Unidos da América.

Estudo do Erro na Interpolação

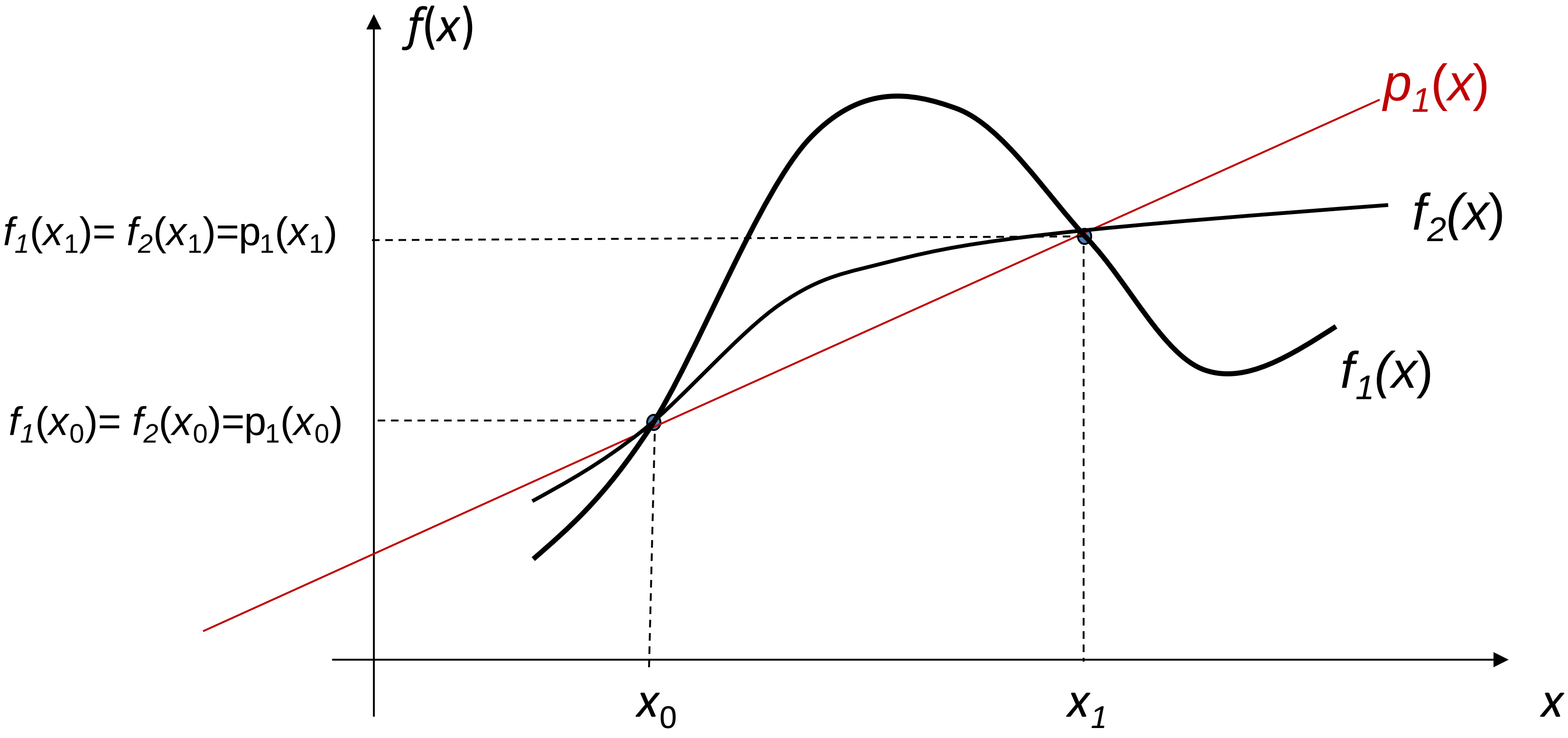
- O erro em aproximar a função $f(x)$ por um polinômio interpolador $p_n(x)$, de grau menor ou igual a n, é:

$$E_n(x) = f(x) - p_n(x) \quad para\, todo\, x\, de\, [x_0, x_n]$$

- Estudar o erro na interpolação significa saber o quão próximo $f(x)$ está de $p_n(x)$.

Estudo do Erro na Interpolação

➢ Interpolação linear de $f_1(x)$ e $f_2(x)$:



Estudo do Erro na Interpolação

- Interpolação linear de $f_1(x)$ e $f_2(x)$ por $p_1(x)$.

  - ✓ O mesmo polinômio $p_1(x)$ interpola $f_1(x)$ e $f_2(x)$ em x_0 e x_1.
  - ✓ O erro $E_1^1(x)=f_1(x)-p_1(x) > E_1^2(x)= f_2(x)- p_1(x)$ para todo x de (x_0 , x_1).
  - ✓ O erro depende da concavidade da curva, ou seja, de $f_1''(x)$ e $f_2''(x)$.

Estudo do Erro na Interpolação

<u>Teorema 1:</u>

"Sejam $x_0<x_1<x_2<...<x_n$, $(n+1)$ pontos. Seja $f(x)$ com derivadas até ordem $(n+1)$ para todo x em $[x_0,x_n]$. Seja $p_n(x)$ o polinômio interpolador de $f(x)$ nos pontos $x_0, x_1, x_2,...,x_n$. Então, em qualquer ponto do intervalo $[x_0,x_n]$ o erro é dado por:

$$E_n(x) = f(x) - p_n(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)\frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}$$

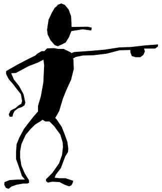
onde $\xi_x \in (x_0,x_n)$.

Estudo do Erro na Interpolação

- Se $f(x)$ e suas derivadas até ordem $(n+1)$ são contínuas em $I=[x_0, x_1]$, então pode-se escrever:

$$\left|E_n(x)\right| = \left|f(x) - p_n(x)\right|$$

$$\left|E_n(x)\right| = \left|\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)\right| \cdot \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}, \qquad onde\ M_{n+1} = \max_{x \in I}\left|f^{(n+1)}(x)\right|$$



Limitante Superior para o Erro

Estudo do Erro na Interpolação

<u>Exemplo:</u> Considere a função $f(x)=(3+x)/(1+x)$ definida nos pontos, conforme a tabela:

x	0,1	0,2	0,4
$f(x)$	2,82	2,67	2,43

Determine o polinômio interpolador de $f(x)$, usando a fórmula de lagrange, avalie $f(0{,}25)$ e um limitante superior para o erro.

Resolução:

$$P(x) = x^2 - 1{,}8x + 2{,}99$$ (Polinômio Interpolador)

$$f(0{,}25) \cong P(0{,}25) \cong 2{,}6025$$

Estudo do Erro na Interpolação

A partir da fórmula do limitante superior para o erro:

$$|E_n(x)| = \left|\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)\right| \cdot \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}, \qquad onde \;\; M_{n+1} = \max_{x \in I} \left| f^{(n+1)}(x) \right|$$

para n=2.

$$|E_2(x)| = |(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)| \cdot \frac{max\{|f^{(3)}(x)|\}}{(3)!},$$

como,

$$f^{(3)}(x) = \frac{-12}{(1+x)^4}$$

é uma função decrescente em módulo no intervalo [0,1 ; 0,4], temos que $|f^{(3)}(x)|$ assume o valor máximo em x=0,1, ou seja:

$$max|f^{(3)}(x)| = 8{,}1962$$

Estudo do Erro na Interpolação

Assim, temos um limitante para o erro no ponto interpolado x=0,25, como segue:

$$|E_2(x)| = |(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)| \cdot \frac{max\{|f^{(3)}(x)|\}}{(3)!},$$

$$|E_2(x)| = |(0{,}25-0{,}1)(0{,}25-0{,}2)(0{,}25-0{,}4)| \cdot \frac{8{,}1962}{6} = 0{,}0015$$

Estudo do Erro na Interpolação

- Na maioria dos problemas não conhecemos *f*(*x*). Nestes casos, deve-se construir a tabela de diferenças divididas até ordem *n*+1, e usar o maior valor em módulo desta ordem como aproximação para:

$$\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}$$

no intervalo $I=(x_0,x_n)$. Assim teremos um limitante para o erro igual a:

$$\left|E_n(x)\right| = \left|f(x) - p_n(x)\right| \leq (x - x_0)(x - x_1).....(x - x_n)\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}$$

onde,

$$\frac{M_{n+1}}{(n+1)!} = \max\left|f[x_0, x_1, ..., x_n, x]\right| \quad \text{com} \quad x \in \left(x_0, x_n\right).$$

Estudo do Erro na Interpolação

<u>Exemplo:</u> Seja $f(x)$ dada na forma:

x	0,2	0,34	0,4	0,52	0,6	0,72
$f(x)$	0,16	0,22	0,27	0,29	0,32	0,37

Obter $f(0{,}47)$ usando um polinômio de grau 2. Dar uma estimativa para o erro.

Resolução:

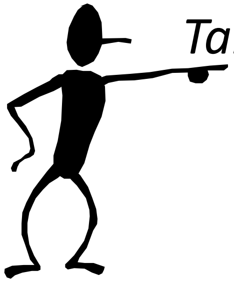
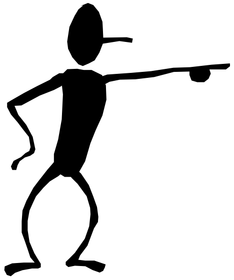


Tabela de Diferenças

Estudo do Erro na Interpolação

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	Ordem 3
0,2	0,16			
		0,4286		
0,34	0,22		2,0235	
		0,8333		-17,8963
0,4	0,27		-3,7033	
		0,1667		18,2494
0,52	0,29		1,0415	
		0,375		-2,6031
0,6	0,32		0,2085	
		0,4167		
0,72	0,37			

Estudo do Erro na Interpolação



Deve-se escolher três pontos de interpolação. Como $0{,}47 \in (0{,}4 \,;\, 0{,}52)$, dois pontos deverão ser 0,4 e 0,52. O outro pode ser 0,34 como 0,6. Escolheremos:

$$x_0 = 0{,}40$$

$$x_1 = 0{,}52$$

$$x_2 = 0{,}60$$

Estudo do Erro na Interpolação

	x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	Ordem 3
	0,2	0,16			
			0,4286		
	0,34	0,22		2,0235	
			0,8333		-17,8963
$x_0 \rightarrow$	0,4	0,27		-3,7033	
			0,1667		18,2494
$x_1 \rightarrow$	0,52	0,29		1,0415	
			0,375		-2,6031
$x_2 \rightarrow$	0,6	0,32		0,2085	
			0,4167		
	0,72	0,37			

Estudo do Erro na Interpolação

$$P_2(x) = f(x_0) + (x - x_0) f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1) f[x_0, x_1, x_2]$$

$$\boxed{P_2(x) = 0{,}27 + (x - 0{,}4) \cdot 0{,}1667 + (x - 0{,}4)(x - 0{,}52) \cdot 1{,}0415}$$

$$P_2(0{,}47) = 0{,}2780 \approx f(0{,}47)$$

$$|E_n(x)| \approx (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) max|f[x_0, x_1, x_2, x_3]|$$

Estudo do Erro na Interpolação

	x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	Ordem 3
	0,2	0,16			
			0,4286		
	0,34	0,22		2,0235	
			0,8333		-17,8963
$x_0 \rightarrow$	0,4	0,27		-3,7033	
			0,1667		18,2494
$x_1 \rightarrow$	0,52	0,29		1,0415	
			0,375		-2,6031
$x_2 \rightarrow$	0,6	0,32		0,2085	
			0,4167		
	0,72	0,37			

Estudo do Erro na Interpolação

$$P_2(x) = f(x_0) + (x - x_0) f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1) f[x_0, x_1, x_2]$$

$$\boxed{P_2(x) = 0{,}27 + (x - 0{,}4) \cdot 0{,}1667 + (x - 0{,}4)(x - 0{,}52) \cdot 1{,}0415}$$

$$P_2(0{,}47) = 0{,}2780 \approx f(0{,}47)$$

$$|E_n(x)| \approx (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) max |f[x_0, x_1, x_2, x_3]|$$

$$|E_n(0{,}47)| \approx |(0{,}47 - 0{,}4)(0{,}47 - 0{,}52)(0{,}47 - 0{,}6)||18{,}2492|$$

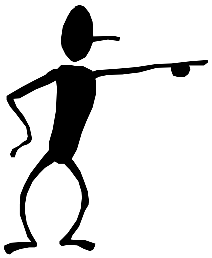
$$|E_n(0{,}47)| \approx 8{,}303 \times 10^{-3}$$

Interpolação Inversa

- Seja *f*(*x*) dada na tabela:

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$f(x)$	1	1,1052	1,2214	1,3499	1,4918	1,6478

obter *x* tal que *f*(*x*)=1,3165 e encontrar uma estimativa para o erro.



Este é o problema da interpolação inversa

Interpolação Inversa

- SOLUÇÃO 1:

  Obtenha $p_n(x)$ que interpola $f(x)$= 1,3165 e determine x.

  Problema: *não temos como estimar o erro cometido!!!!!!!*

- SOLUÇÃO 2:

  Se $f(x)$ for monotonicamente crescente ou decrescente no intervalo considerado ela pode ser invertida. Então faça a interpolação da função inversa e calcule o erro.

Interpolação Inversa

y	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	Ordem 3
1	0			
		0,9506		
1,1052	0,1		-0,4065	
		0,8606		0,1994
y_0 =1,2214	0,2		-0,3367	
		0,7782		0,1679
y_1 =1,3499	0,3		-0,2718	
		0,7047		0,1081
y_2 =1,4918	0,4		-0,2256	
		0,6373		
1,6487	0,5			

Interpolação Inversa

- Escolhendo x_0, x_1, x_2.

$$p_2(y) = f^{-1}(y_0) + (y - y_0) f^{-1}[y_0, y_1] + (y - y_0)(y - y_1) f[y_0, y_1, y_2]$$

$$= 0{,}2 + (y - 1{,}2214)(0{,}7782) + (y - 1{,}2214)(y - 1{,}3494)(-0{,}2718)$$

a) $p(1{,}3165) = 0{,}27487$

b) $|E(1{,}3165)| \approx |(1{,}3165 - 1{,}2214)(1{,}3165 - 1{,}3499)(1{,}3165 - 1{,}4918)||0{,}1994|$

$|E(1.3165)| \approx 1.1 \times 10^{-4}$

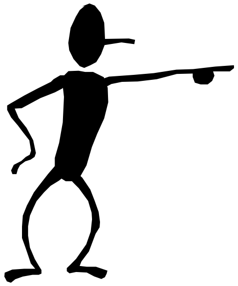
$$\boxed{x = 0.27487 \pm 0.00011}$$

Grau do Polinômio Interpolador

- Para a escolha do grau do polinômio interpolador:

  a) *Construir a tabela de diferenças divididas;*

  b) *Examinar as diferenças na vizinhança do ponto de interesse;*

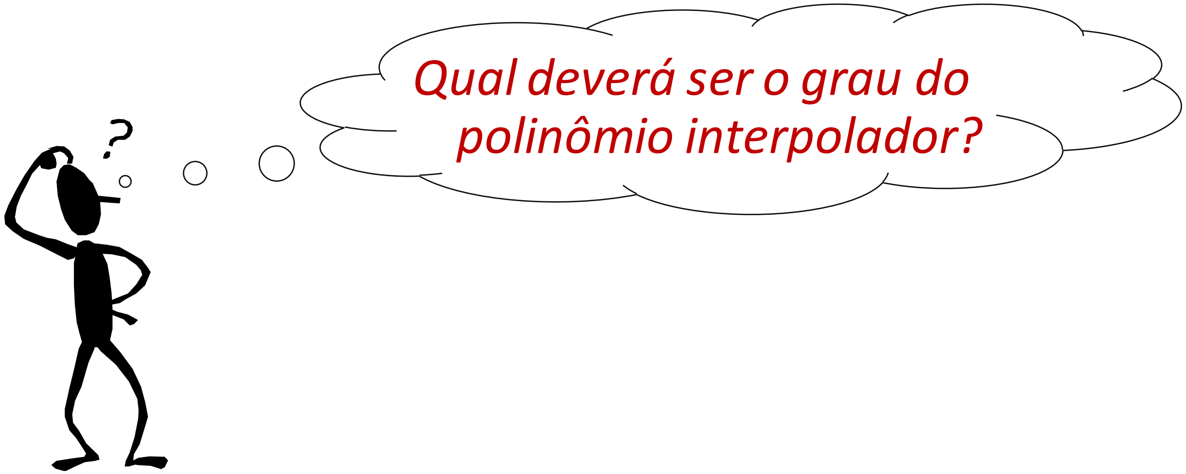


Se as diferenças de ordem k forem praticamente constantes, ou se as diferenças de ordem k+1 variarem em torno de zero, o polinômio de grau k será o que melhor aproximará a função na região considerada.

Grau do Polinômio Interpolador

- Seja $f(x) = \sqrt{x}$ com os valores da tabela:

x	1	1.01	1.02	1.03	1.04	1.05
$f(x)$	1	1.005	1.01	1.0149	1.0198	1.0247

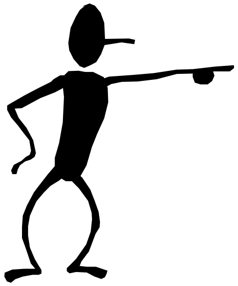


Grau do Polinômio Interpolador

x	**Ordem 0**	**Ordem 1**	**Ordem 2**
1	1		
		0.5	
1.01	1.005		0
		0.5	
1.02	1.01		-0.5
		0.49	
1.03	1.0149		0
		0.49	
1.04	1.0198		0
		0.49	
1.05	1.0247		

Grau do Polinômio Interpolador

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2
1	1		
		0.5	
1.01	1.005		0
		0.5	
1.02	1.01		-0.5
		0.49	
1.03	1.0149		0
		0.49	
1.04	1.0198		0
		0.49	
1.05	1.0247		



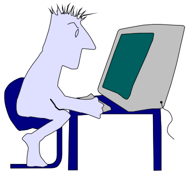
Um polinômio de grau 1 é uma boa aproximação para:

$$f(x) = \sqrt{x}$$

Fenômeno de Runge

- QUESTÃO: A seqüência $\{p_n(x)\}$ converge para $f(x)$ no intervalo $[a,b]$ se $\{x_0,x_1,...,x_n\}$ pertencem a $\{a,b]$ e n tende ao infinito?

Vamos interpolar a função:



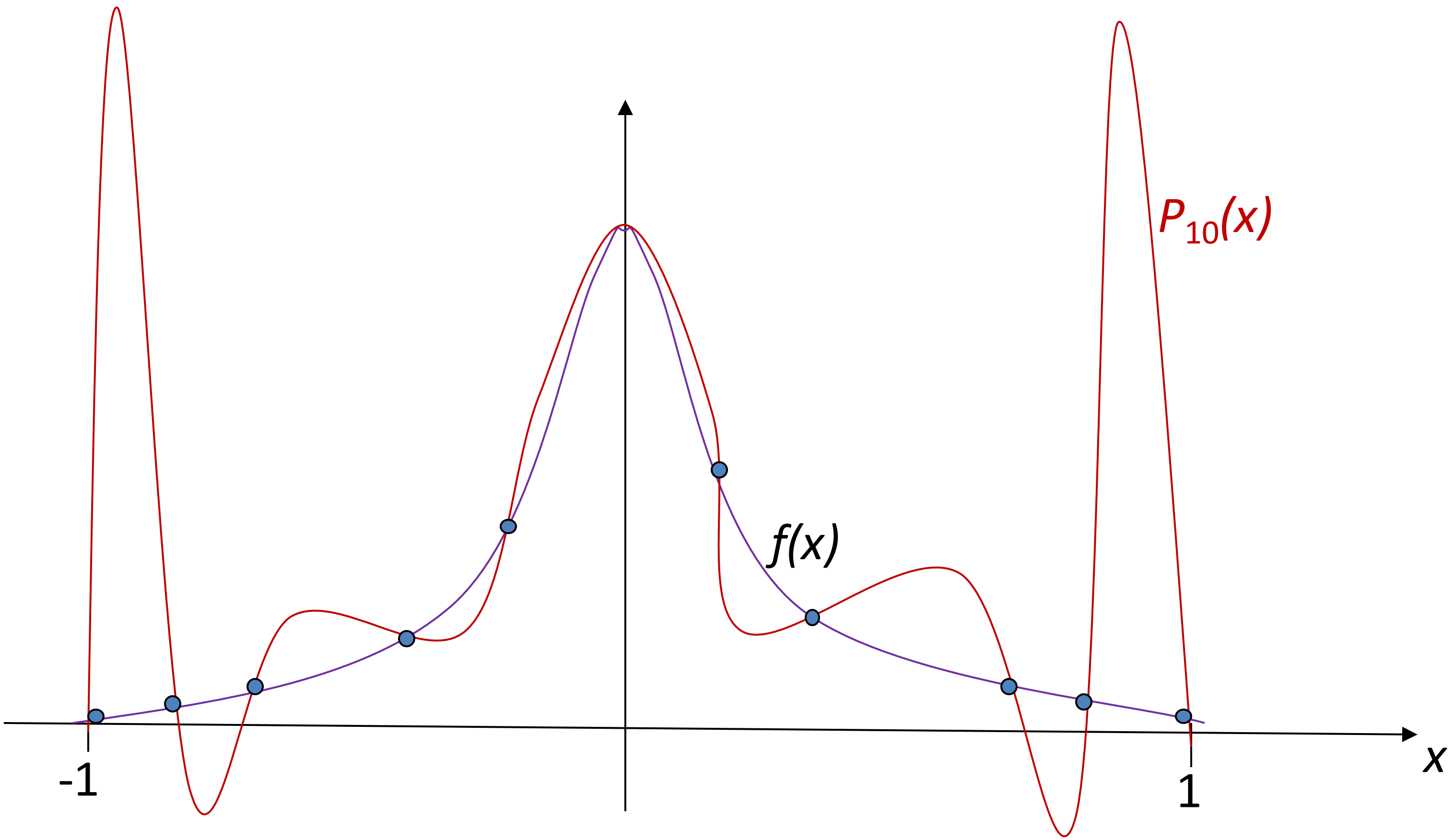
$$f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$$

no intervalo [-1,1] com:

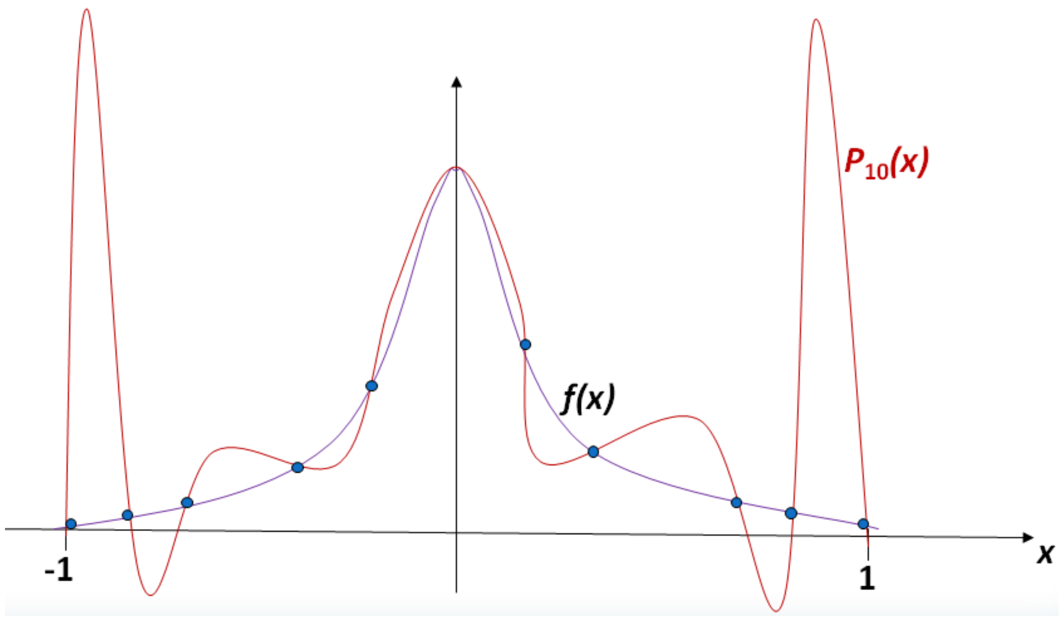
$$x_i = -1 + \frac{2i}{n} \quad para \quad i = 0,1,2,..,n.$$

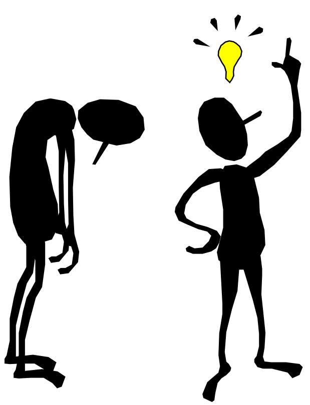
Fenômeno de Runge

- Para n=10 temos que:



Fenômeno de Runge





Utilizar funções Spline em Interpolação – convergência garantida!

Função Spline

- Fenômeno de Runge é superado pela função Spline.

<u>Definição</u>: Seja $f(x)$ tabelada para $x_0<x_1<x_2<...<x_n$. A função $S_p(x)$ é denominada *spline* de grau p se:

a) Em cada subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$, para i=0,1,2,...,(n-1), $S_p(x)$ é um polinômio de grau p.

b) $S_p(x)$ é contínua e tem derivadas contínuas até ordem (p-1) em $[a=x_0,x_n=b]$.

c) $S_p(x_i)=f(x_i)$ para i=1,2,...,n.

Função Spline

- A função spline linear interpolante de $f(x)$, ou seja $S_1(x)$ nos nós $x_1, x_2, \ldots, x_n$, pode ser escrita em cada subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$ como:

$$s_i(x) = f(x_{i-1})\frac{x_i - x}{x_i - x_{i-1}} + f(x_i)\frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \qquad \forall x \in [x_{i-1}, x_i]$$

- ✓ Note que $S_1(x)$ é polinômio de grau 1 no intervalo.
- ✓ $s_1(x)$ é contínua em todo intervalo $[x_i, x_{i+1}]$
- ✓ Nos pontos nós $s_1(x_i)=f(x_i)$.

➡ *Logo, $S_1(x)$ é a spline linear interpolante de $f(x)$.*

Função Spline

<u>Exemplo:</u> Achar a função *spline* linear que interpola $f(x)$.

k	0	1	2	3
x_k	1	2	5	7
$f(x_k)$	1	2	3	25

Resolução:

Da definição:

$$s_1(x) = f(x_0)\frac{x_1 - x}{x_1 - x_0} + f(x_1)\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

$$s_1(x) = 1\frac{2-x}{2-1} + 2\frac{x-1}{2-1} = 2 - x + 2x - 2 = x \quad \forall x \in [1,2]$$

Função Spline

Exemplo: Achar a função *spline* linear que interpola $f(x)$.

k	0	1	2	3
x_k	1	2	5	7
$f(x_k)$	1	2	3	25

Resolução:

$$s_1(x) = x \quad \forall x \in [1,2]$$

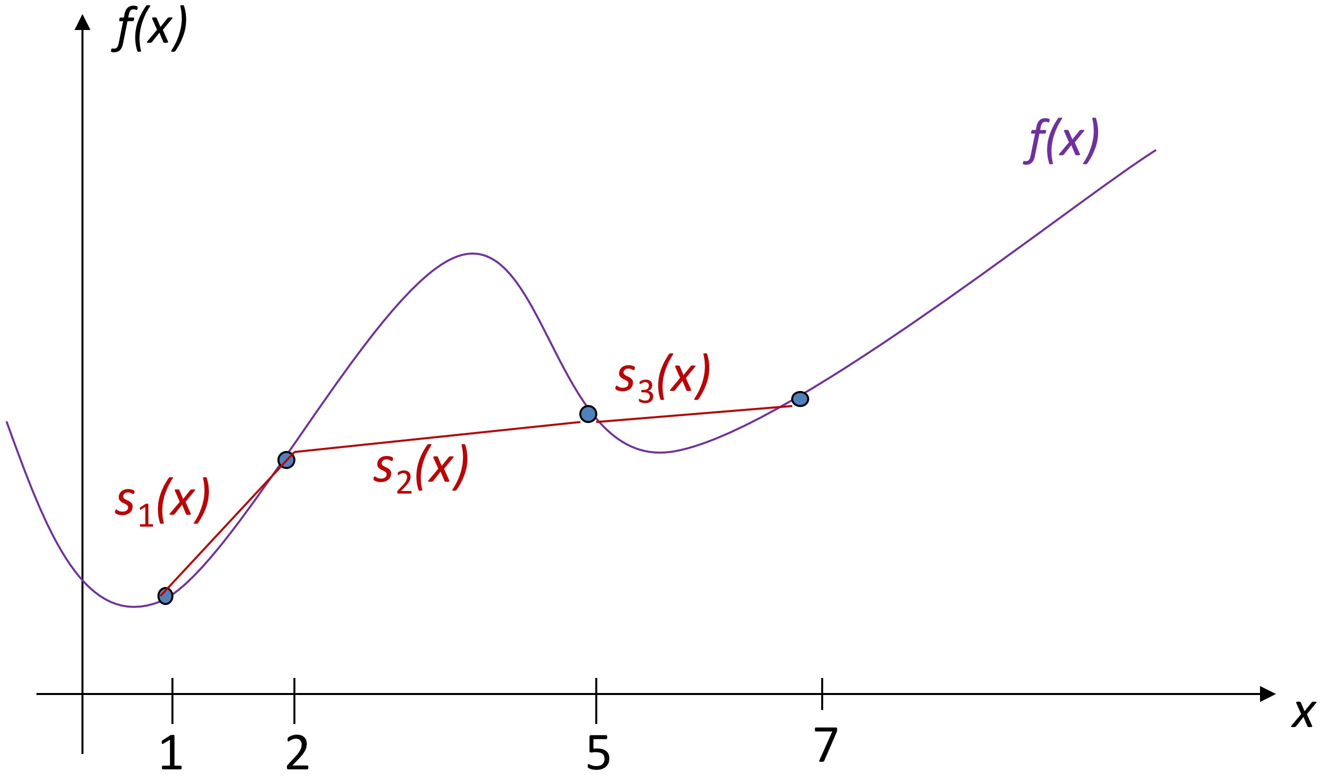
Analogamente,

$$s_2(x) = \frac{1}{3}(x+4) \quad \forall x \in [2,5]$$

$$s_3(x) = \frac{1}{2}(-0.5x+8.5) \quad \forall x \in [5,7]$$

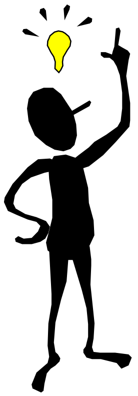
Função Spline

Graficamente,



Função Spline

- As *splines* cúbicas são as mais usadas,
- Uma spline cúbica $S_3(x)$ é uma função polinomial por partes, contínua, onde cada parte $s_k(x)$ é um polinômio de grau 3 nos intervalos $[x_{k-1},x_k]$.
- $S_3(x)$ tem derivadas primeira e segunda contínuas, logo não tem bicos e não troca abruptamente a curvatura nos nós.



A função spline cúbica interpolante de $f(x)$, ou seja $S_3(x)$, nos nós $x_1,x_2,...,x_n$, pode ser escrita em cada subintervalo como polinômios de grau 3.

Função Spline

Denotada por $s_k(x)$ para k=1,2,...,n, deve satisfazer:

1. $S_3(x) = s_k(x)$ para $x \in [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1,2,\ldots,n$.
2. $S_3(x_i) = f(x_i)$ para $i = 1,2,\ldots,n$.
3. $s_k(x_k) = s_{k+1}(x_k)$ para $k = 1,2,\ldots,n-1$.
4. $s_k'(x_k) = s_{k+1}'(x_k)$ para $k = 1,2,\ldots,n-1$.
5. $s_k''(x_k) = s_{k+1}''(x_k)$ para $k = 1,2,\ldots,n-1$.

Função Spline

Sejam as parte da *spline* cúbica dadas por,

$$s_k(x) = a_k(x - x_k)^3 + b_k(x - x_k)^2 + c_k(x - x_k) + d_k \quad , k = 1,2,\ldots.,n .$$

O Cálculo de $S_3(x)$ envolve a determinação de $4n$ coeficientes:

$$a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, b_2, c_2, d_2, \ldots\ldots, a_n, b_n, c_n, d_n \; .$$

Condições 1: satisfeitas por construção.
Condições 2: (n+1) condições nos nós.
Condições 3: (n-1) condições de continuidade de S3 nos nós.
Condições 4: (n-1) condições de continuidade de S'3 nos nós.
Condições 5: (n-1) condições de continuidade de S''3 nos nós.

Total de 4n-2 condições. Restam duas condições em aberto!!!

Função Spline

Notação:

$$h_k = x_k - x_{k-1} \quad , \quad s_k''(x_k) = g_k \quad , \quad f(x_k) = y_k \ .$$

Impondo as condições:

$$a_k = \frac{g_k - g_{k-1}}{6h_k} \quad , \quad b_k = \frac{g_k}{2} \quad , \quad d_k = y_k$$

$$c_k = \frac{y_k - y_{k-1}}{h_k} + \frac{2h_k\, g_k - g_{k-1}\, h_k}{6}$$

Sistema Linear

$$h_k\, g_{k-1} + 2(h_k + h_{k+1})g_k + h_{k+1}\, g_{k+1} = 6\left(\frac{y_{k+1} - y_k}{h_{k+1}} - \frac{y_k - y_{k-1}}{h_k}\right)$$

Note que o sistema linear tem (n-1) equações para g_0, g_1,...,g_n.

Função Spline

Resta impor mais duas condições:

Alternativas 1: Chamada spline natural

$$S_3''(x_0) = g_0 = 0 \quad \text{e} \quad S_3''(x_n) = g_n = 0$$

Alternativa 2: Chamada spline parabólica.

$$g_0 = g_1 \quad \text{e} \quad g_n = g_{n-1}$$

Alternativa 3: Impor inclinações nos extremos.

$$S_3'(x_0) = A \quad \text{e} \quad S_3'(x_n) = B$$

Geralmente quando temos informações físicas do problema

Função Spline

Exemplo: Achar a *spline* cúbica natural que interpola $f(0.25)$ dada

x	0	0,5	1,0	1,5	2,0
$f(x)$	3	1,8616	-0,5571	-4,1987	-9,0536

Resolução:

Temos 4 subintervalos iguais. Dadas $s_1(x)$, $s_2(x)$, $s_3(x)$, $s_4(x)$ resolvendo o sistema linear para $1 \leq k \leq 3$, pois $(n-1)=3$

Função Spline

$$h_k\, g_{k-1} + 2(h_k + h_{k+1})g_k + h_{k+1}\, g_{k+1} = 6\left(\frac{y_{k+1} - y_k}{h_{k+1}} - \frac{y_k - y_{k-1}}{h_k}\right)$$

$$\begin{cases} h\, g_0 + 4h\, g_1 + h\, g_2 = \dfrac{6}{h}(y_2 - 2y_1 + y_0) \\ h\, g_1 + 4h\, g_2 + h\, g_3 = \dfrac{6}{h}(y_3 - 2y_2 + y_1) \\ h\, g_2 + 4h\, g_3 + h\, g_4 = \dfrac{6}{h}(y_4 - 2y_3 + y_2) \\ +\, condições \;\; spline \;\; natural \quad g_0 = g_4 = 0 \end{cases}$$

Função Spline

Substituindo os valores de y_k=f(x_k) e h_k=h=0,5 resolvemos o sistema linear obtendo:

$$g_0 = g_4 = 0$$

$$g_1 = -6.654 \quad , \quad g_2 = -4.111 \quad , \quad g_3 = -6.252$$

Calculamos,

$$a_k, b_k, c_k, d_k, \quad \text{e} \quad s_1(x), s_2(x), s_3(x), s_4(x)$$

$$a_k = \frac{g_k - g_{k-1}}{6h_k} \quad , \quad b_k = \frac{g_k}{2} \quad , \quad d_k = y_k$$

$$c_k = \frac{y_k - y_{k-1}}{h_k} + \frac{2h_k g_k - g_{k-1} h_k}{6}$$

Função Spline

Como queremos *f*(0,25) fazemos:

$$f(0,25) \approx s_1(0,25)$$

$$s_1(0,25) = a_1(0,25 - x_1)^3 + b_1(0,25 - x_1)^2 + c_1(0,25 - x_1) + d_1$$

$$\Rightarrow s_1(0,25) = 2,5348$$