Taxas Relacionadas

- ▷ Saber o que são taxas relacionadas.
- ▷ Resolver problemas que envolvem taxas relacionadas.

Variáveis Relacionadas

Nesta seção vamos estudar problemas envolvendo variáveis que variam com o tempo. Quando duas variáveis estão relacionadas, suas taxas de variação em relação ao tempo também estão relacionadas.

Suponha, por exemplo, que x e y estejam relacionadas através da equação $y = 2x$. Se x e y estão variando com o tempo, também existe uma relação entre suas taxas de variação.

x e y estão relacionadas. | As taxas de variação de x e y estão relacionadas.

$$y = 2x \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dt} = 2\frac{dx}{dt}$$

Neste exemplo simples, podemos ver que, como y sempre tem um valor duas vezes maior que o valor de x, a taxa de variação de y em relação ao tempo também é sempre duas vezes maior que a taxa de variação de x em relação ao tempo.

EXEMPLO 1 Calculando a Relação entre Duas Taxas

As variáveis x e y são funções deriváveis de t e estão relacionadas pela equação $y = x^2 + 3$. Para $x = 1$, $dx/dt = 2$. Determine dy/dt para $x = 1$.

Solução Usamos a Regra da Cadeia para derivar os dois membros da equação *em relação a t*.

$y = x^2 + 3$	Equação dada
$\frac{d}{dt}[y] = \frac{d}{dt}[x^2 + 3]$	Derivar em relação a t.
$\frac{dy}{dt} = 2x\frac{dx}{dt}$	Aplicar a Regra da Cadeia.

Para $x = 1$ e dx/dt, temos:

$$2x\frac{dx}{dt} = 2(1)(2) = 4.$$

Roteiro para Resolver Problemas de Taxas Relacionadas

Identifique todas as grandezas *conhecidas* e todas as grandezas *a serem determinadas*. Se possível, faça um desenho e represente cada variável por uma letra.

Escreva uma equação que relacione todas as variáveis cujas taxas de variação são conhecidas ou devem ser determinadas.

Use a Regra da Cadeia para derivar ambos os membros da equação *em relação ao tempo*.

Substitua na equação resultante todos os valores conhecidos das variáveis e de suas taxas de variação. Em seguida, explicite a taxa de variação pedida.

EXEMPLO 3 Mudança de Volume

Um balão esférico está sendo enchido com ar à taxa de 4,5 centímetros cúbicos por minuto, como mostrado na Figura 2.38. Determine a taxa de variação do raio do balão quando o raio é de 2 centímetros.

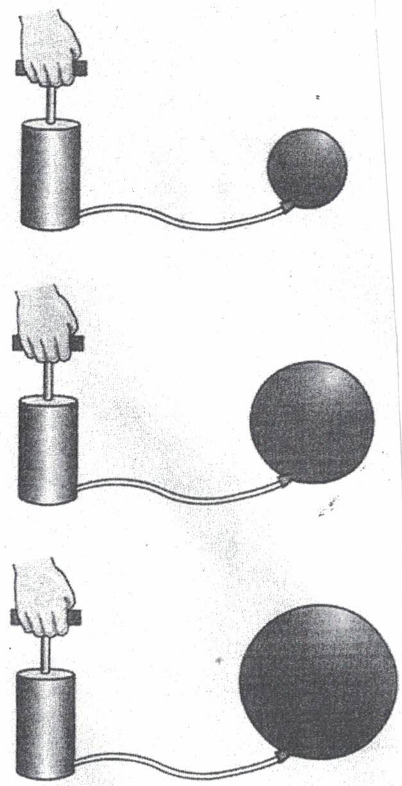


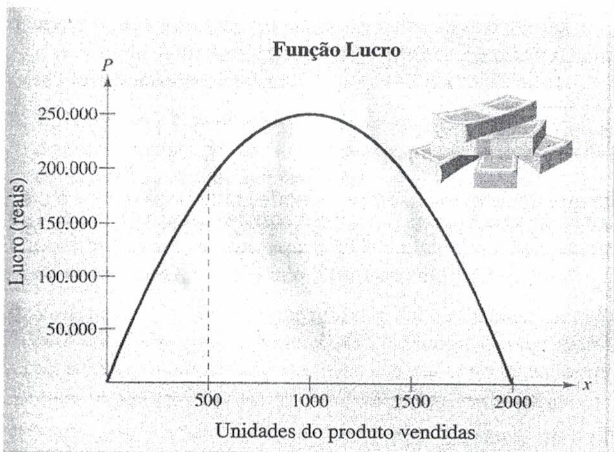
FIGURA 2.38 Expansão de um Balão

EMPLO 4 Analisando uma Função Lucro

lucro P de uma empresa (em reais) com a venda de x unidades de um produto pode ser odelado pela equação

$$P = 500x - \left(\frac{1}{4}\right)x^2. \qquad \text{Equação do lucro}$$

s vendas estão aumentando à taxa de dez unidades por dia. Determine a taxa de variação o lucro (em reais por dia) no momento em que a empresa acabou de vender 500 unidades.



Nos Exercícios 1 a 4, determine os valores indicados de dy/dt e dx/dt.

Equação	*Calcular*	*Dado*
1. $y = x^2 - \sqrt{x}$	(a) $\dfrac{dy}{dt}$	$x = 4, \dfrac{dx}{dt} = 8$
	(b) $\dfrac{dx}{dt}$	$x = 16, \dfrac{dy}{dt} = 12$
2. $y = x^2 - 3x$	(a) $\dfrac{dy}{dt}$	$x = 3, \dfrac{dx}{dt} = 2$
	(b) $\dfrac{dx}{dt}$	$x = 1, \dfrac{dy}{dt} = 5$
3. $xy = 4$	(a) $\dfrac{dy}{dt}$	$x = 8, \dfrac{dx}{dt} = 10$
	(b) $\dfrac{dx}{dt}$	$x = 1, \dfrac{dy}{dt} = -6$
4. $x^2 + y^2 = 25$	(a) $\dfrac{dy}{dt}$	$x = 3, y = 4, \dfrac{dx}{dt} = 8$
	(b) $\dfrac{dx}{dt}$	$x = 4, y = 3, \dfrac{dy}{dt} = -2$

5. ***Área*** O raio r de um círculo está aumentando à taxa de 2 centímetros por minuto. Determine a taxa de variação da área no instante em que (a) $r = 6$ cm; (b) $r = 24$ cm.

6. ***Volume*** O raio r de uma esfera está aumentando à taxa de 2 centímetros por minuto. Determine a taxa de variação da área no instante em que (a) $r = 6$ cm; (b) $r = 24$ cm.

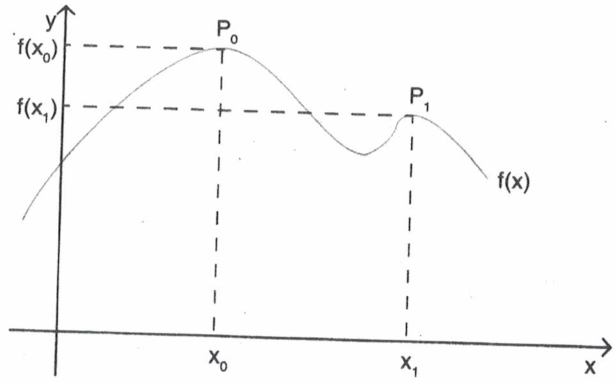
7. ***Área*** Seja A a área de um círculo de raio r que está variando com o tempo. Se dr/dt é constante, isto significa que dA/dt é constante? Justifique sua resposta.

8. ***Volume*** Seja V o volume de uma esfera de raio r que está variando com o tempo. Se dr/dt é constante, isto significa que dV/dt é constante? Justifique sua resposta.

9. ***Volume*** Um balão esférico é inflado com gás à taxa de 20 metros cúbicos por minuto. Com que rapidez o raio do balão está variando no instante em que o raio é (a) 1 metro; (b) 2 metros?

MÁXIMOS RELATIVOS

Consideremos os pontos P_0 e P_1 pertencentes ao gráfico da função f(x) indicado na figura.



Observe que, no ponto P_0, para valores próximos a x_0 a função assume valores menores que $f(x_0)$.

Da mesma forma, no ponto P_1, para valores próximos a x_1 a função assume valores menores que $f(x_1)$.

Daí, podemos dizer que $f(x_0)$ e $f(x_1)$ são os **máximos relativos** da função f(x) e que P_0 e P_1 são os pontos de máximos relativos.

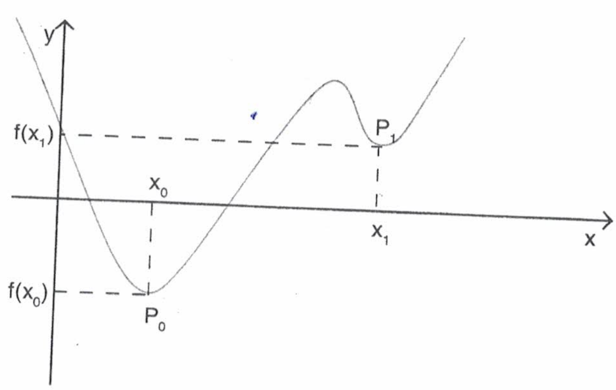
> A função f: [a, b] $\rightarrow \mathbb{R}$ possui um máximo relativo em $x_0 \in [a, b]$ se seu valor em x_0 é maior que em qualquer outro ponto x desse intervalo.
>
> $$\forall x \in [a, b] \Rightarrow f(x) < f(x_0)$$

Em que: x_0 é a abscissa do ponto de máximo relativo.

Se $f(x_0)$ é o valor máximo que a função f(x) alcança em todo o seu domínio, dizemos que $f(x_0)$ é o **máximo absoluto** da função.

MÍNIMOS RELATIVOS

Consideremos os pontos P_0 e P_1 pertencentes ao gráfico da função f(x) indicada na figura.



Observe que, no ponto P_0, para valores próximos a x_0 a função assume valores maiores que $f(x_0)$.

O mesmo ocorre no ponto P_1: para valores próximos a x_1 a função assume valores maiores que $f(x_1)$.

Por isso, dizemos que $f(x_0)$ e $f(x_1)$ são **mínimos relativos** da função f(x) e que P_0 e P_1 são os pontos de mínimos relativos.

Por outro lado, se $f(x_0)$ é o valor mínimo que alcança a função em todo o seu domínio, dizemos que $f(x_0)$ é o **mínimo absoluto** da função.

Portanto, podemos definir:

A função f: [a, b] $\rightarrow$ IR possui um mínimo relativo em $x_0 \in [a, b]$ se seu valor em x_0 é menor que em qualquer outro ponto x desse intervalo.

$$\forall\, x \in [a, b] \;\; \Rightarrow \;\; f(x) > f(x_0)$$

Em que: x_0 é a abscissa do ponto de mínimo relativo.

Observações:

1ª) Os **máximos** e os **mínimos relativos** de uma função denominam-se **extremos**.
2ª) Um máximo relativo pode ser menor que um mínimo relativo.
3ª) Em um intervalo podem existir vários valores para os quais a função tem valores extremos.
4ª) A abscissa x_0 onde a função tem um extremo denomina-se **extremante**.

EXISTÊNCIA DE UM VALOR EXTREMO

Se f(x) é uma função derivável, e tem um ponto de máximo relativo ou mínimo relativo em x_0, então $f'(x_0) = 0$.

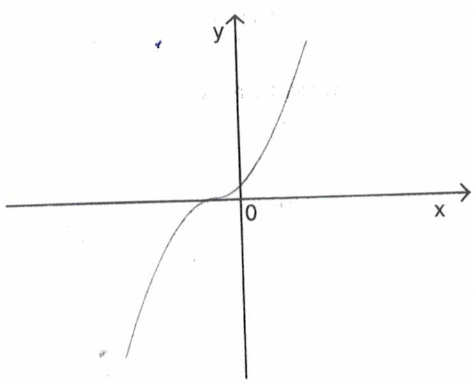
Concluímos que, se a função f(x) é derivável para todos os pontos do eixo x, esta só pode ter valores extremos (máximo ou mínimo) unicamente nos pontos em que f'(x) se reduz a zero.

A conclusão recíproca não é verdadeira, isto é, uma função pode não ter máximo nem mínimo no ponto em que a derivada se anula.

Por exemplo, a função $f(x) = x^3$ é crescente no campo dos números reais.

Sua derivada $f'(x) = 3x^2$ se anula para $x_0 = 0$, isto é, $f'(0) = 3 \cdot 0^2 = 0$.

Observe o gráfico de f(x):



Observe que $x_0 = 0$ não é extremante de f(x), embora a tangente à curva seja paralela ao eixo x.

As raízes (zeros) de f'(x) são possíveis extremantes de f(x). Esses zeros são denominados pontos críticos de f(x).

Por exemplo, consideremos a função $f(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 10$ e a sua derivada $f'(x) = x^2 - 4x + 3$.

Determinemos os zeros (raízes) de f'(x), isto é, fazendo-se f'(x) = 0, vem:

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \begin{cases} x = 1 \\ \text{ou} \\ x = 3 \end{cases}$$

Isto significa que os possíveis extremantes de f(x) devem estar nos pontos x = 1 ou x = 3.

EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM

1 Determine os pontos críticos da função $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 2$. x = 0, x = 1 e x = 2

2 Determine o ponto crítico da função $f(x) = x^2 - 4x + 1$. x = 2

3 Determine os pontos críticos das funções:

a) $f(x) = x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 6x$ — a) x = 1 ou x = 2

b) $f(x) = x^2 - x$ — b) $x = \frac{1}{2}$

DETERMINAÇÃO DOS EXTREMOS - CRITÉRIO DA DERIVADA PRIMEIRA

Consideremos a função f(x), definida e derivável num intervalo [a, b], e seja $x_0 \in [a, b]$ uma das raízes de f'(x), isto é, $f'(x_0) = 0$.

Sabemos que os possíveis extremantes de f(x) são os zeros (raízes) da equação f'(x) = 0.

PROBLEMAS SOBRE MÁXIMOS E MÍNIMOS

A teoria de máximos e mínimos permite resolver vários problemas concretos de Física, Geometria, Estatística etc., em que se procuram: o menor custo, a maior área, o maior volume, a máxima altura etc.

Para resolver esses problemas devemos proceder da seguinte forma:

1º) Transformar o problema numa função cujos máximos ou mínimos se procuram.

2º) Com os dados do problema, exprimir a função obtida numa só variável.

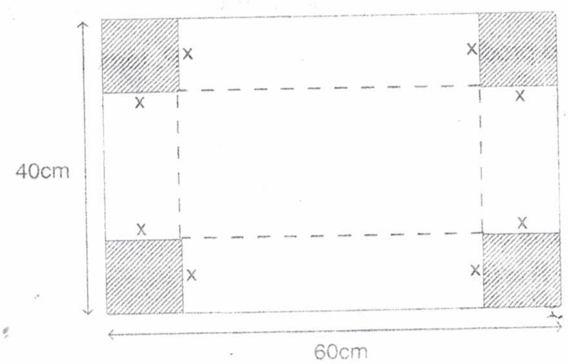
3º) Calcular os extremos relativos da função.

exemplo: Um corpo lançado verticalmente, do solo para cima, tem posições no decorrer do tempo dadas pela função horária $s = 40t - 5t^2$ (t em segundos e s em metros).

a) Qual o tempo gasto para atingir a altura máxima?

b) Qual a altura máxima atingida?

exemplo: Com uma folha retangular de cartolina se quer construir uma caixa de máximo volume possível, cortando um quadrado em cada canto, conforme indica a figura.



As dimensões da folha são 60cm e 40cm.

a) Calcular x.

b) Calcular o volume máximo da caixa.