

# Coloração

---

GRAFOS

# Introdução

- Quantas cores são necessárias para colorir o mapa do Brasil, sendo que estados adjacentes não podem ter a mesma cor?



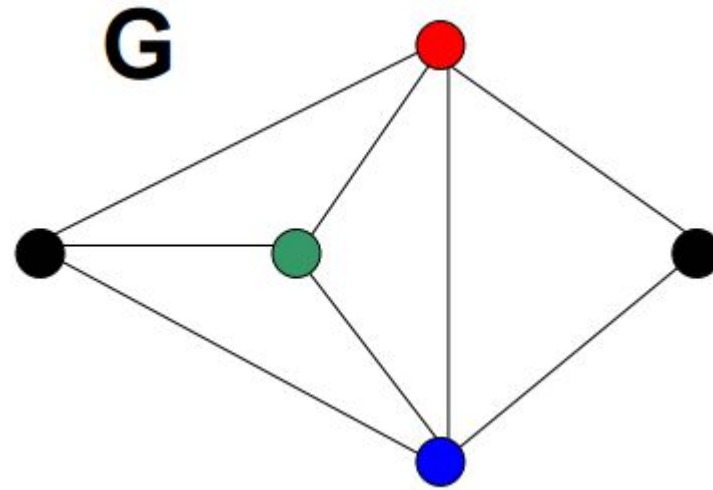
# Coloração de Grafos

- Colorir vértices de forma que vértices adjacentes possuam cores diferentes.
- Relacionar a coloração de vértices com a coloração de mapas.
- Se  $G$  é um grafo simples, então uma coloração para  $G$  é uma atribuição de cores para cada vértice de forma que vértices adjacentes tenham diferentes cores.

# Colorindo Vértices

- Dizemos que  $G$  é  $k$ -colorível se podemos atribuir uma das  $k$  cores para colorir  $G$
- O número cromático de um grafo  $G$  é o menor número de cores que é necessário para colorir  $G$ .
- Seja  $c$  o número cromático de  $G$ , denotamos por  $\chi(G) = c$ .

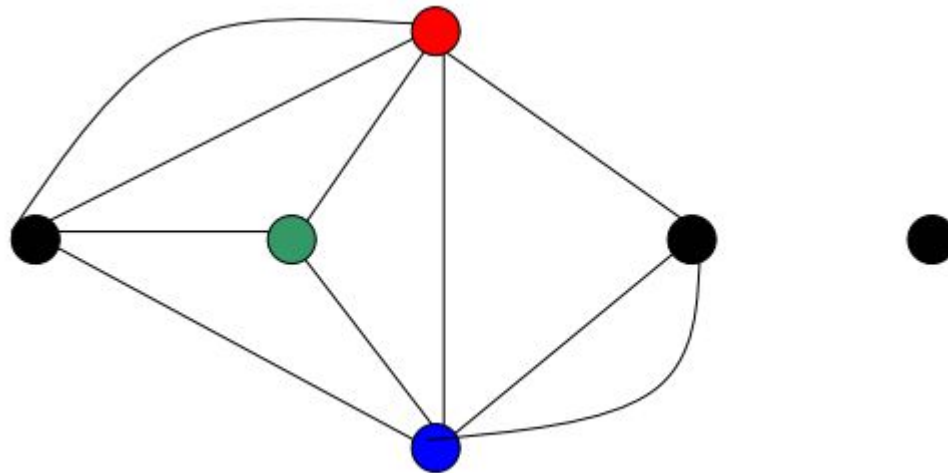
# Colorindo Vértices



$$\text{crom}(G) = 4$$

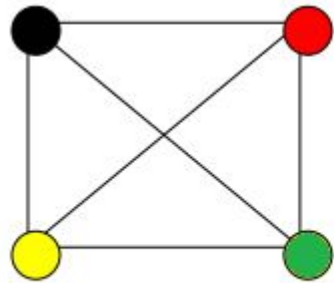
# Colorindo Vértices

- Podemos assumir que todos os grafos, para fins de coloração, são simples e conectados, já que arestas múltiplas e vértices isolados são irrelevantes para coloração de vértices.

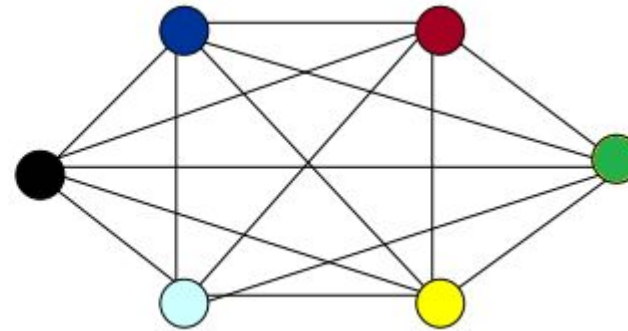


# Colorindo Vértices

- Está claro que  $\chi(K_n) = n$ , então existem grafos com número cromático arbitrariamente grande.



crom(G) = 4



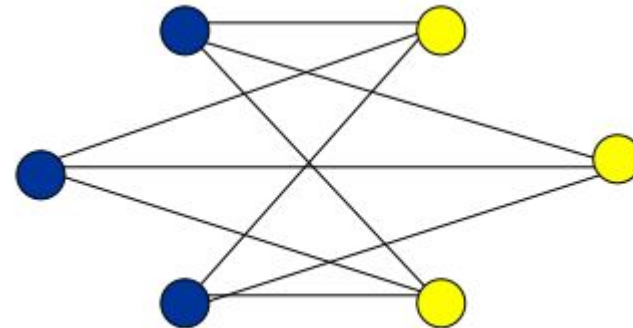
crom(G) = 6

# Colorindo Vértices

- No outro final da escala,  $\chi(G) = 1$  se e somente se  $G$  é um grafo nulo e  $\chi(G) = 2$  se e somente se  $G$  é um grafo bipartido não nulo.



$$\text{crom}(G) = 1$$

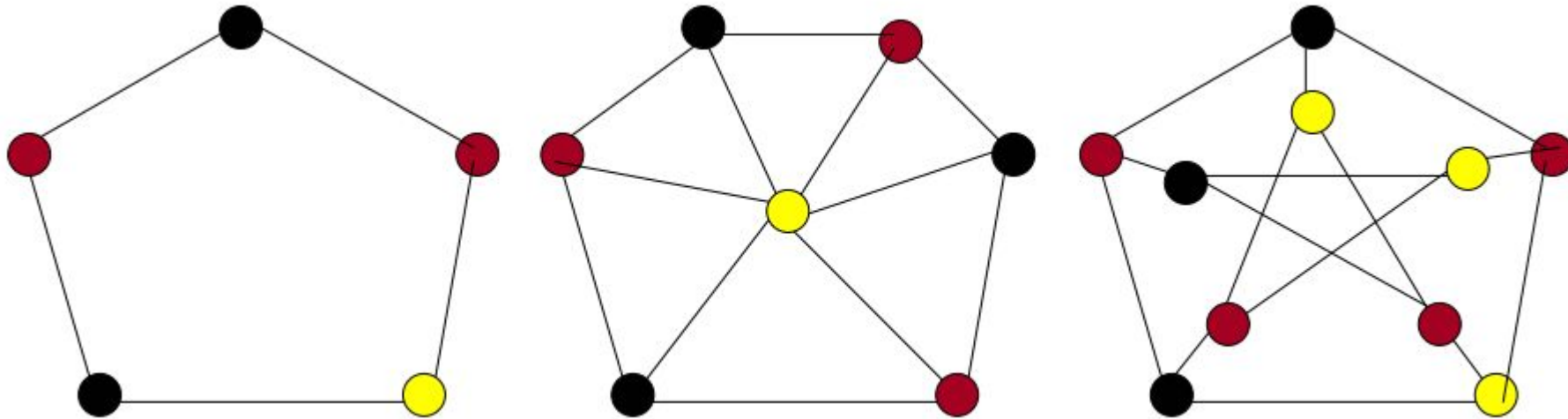


$$\text{crom}(G) = 2$$



# Colorindo Vértices

- Não se sabe quais são os grafos 3-cromáticos, embora seja fácil dar exemplo deles.



$$\text{crom}(G) = 3$$

# Colorindo Vértices

- Pouco se pode dizer sobre o número cromático de um grafo arbitrário:
  - Se o grafo tem  $n$  vértices, então seu número cromático é  $\chi(G) \leq n$ .
  - Se o grafo contém  $K_r$  como subgrafo, então o número cromático é  $\chi(G) \geq r$ .

# Teorema das 4 cores

- Se restringirmos a atenção a grafos planares, obtemos melhores resultados:
- TEOREMA. Todo grafo planar simples é 6-colorível.
- Esse teorema pode ser estendido.
- TEOREMA. Todo grafo planar simples é 5-colorível.

# Teorema das 4 cores

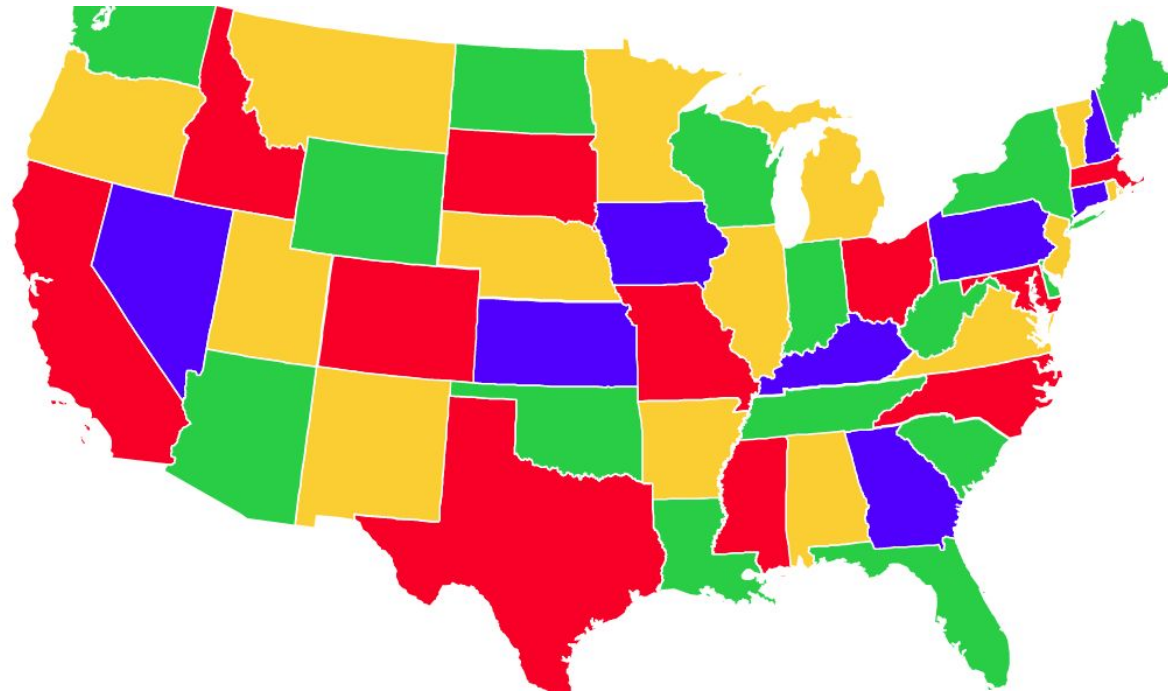
- Um dos maiores problemas “insolúveis” da matemática foi a questão: “se o teorema das 5 cores poderia ser fortalecido”. Esse problema ficou conhecido como o “Problema das 4 Cores”. Ele foi primeiro proposto em 1852 e finalmente resolvido em 1976 por K. Appel e W. Haken.
- **TEOREMA DAS 4 CORES.** O número cromático de um grafo planar não é maior do que 4.

# Colorindo Mapas

- O problema das 4 cores surgiu historicamente em conexão com a coloração de mapas. Dado um mapa contendo diversos países, podemos questionar quantas cores são necessárias para colorir todos os países de forma que os países que fazem fronteira entre si possuam cores diferentes.
- Provavelmente, a forma mais familiar do teorema das 4 cores é a sentença que diz que todo mapa pode ser colorido com apenas 4 cores.

# Colorindo Mapas

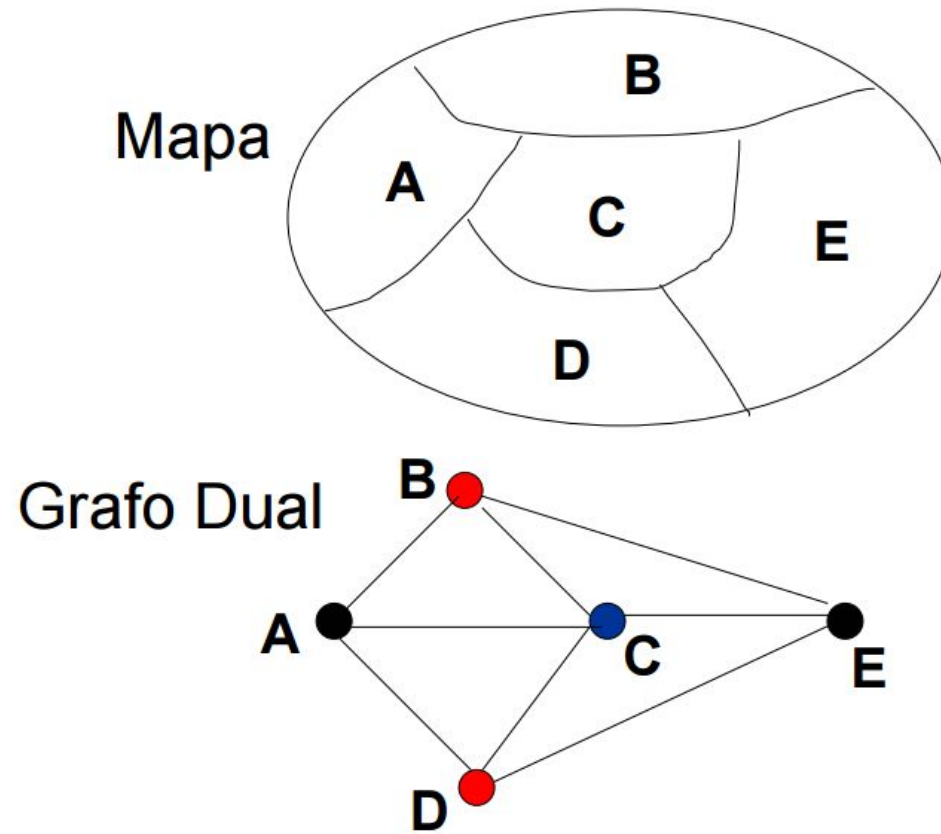
- A figura a seguir mostra um mapa colorido com 4 cores.



# Colorindo Mapas

- Para deixar essa sentença clara, devemos explicar como usar grafos para representar mapas.
- Cada mapa no plano pode ser representado por um grafo que é chamado grafo dual.
- Cada região do mapa é representada por um vértice. As arestas ligam os vértices que representam regiões que fazem fronteira entre si.

# Colorindo Mapas





# Aplicação de Coloração de Vértices

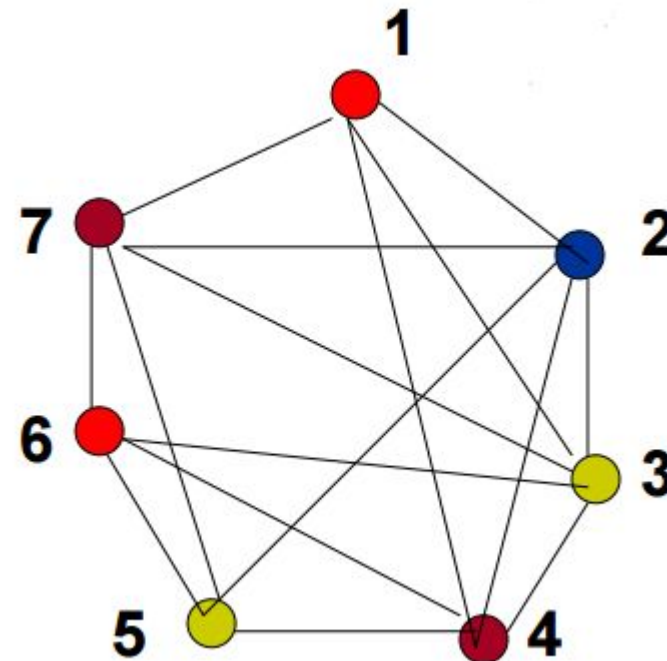
- Horário da prova final – Como podemos definir os horário da prova final das disciplinas de um curso de forma que não haja um aluno com duas provas no mesmo horário?
- Modelo de grafos: os vértices representam as disciplinas. Existe uma aresta entre dois vértices se a disciplina possui um aluno em comum. Assim, cada cor define o horário para as provas.

# Aplicação de Coloração de Vértices

- Exemplo: Existem 7 disciplinas. A seguinte tabela mostra a existência de alunos em comum: onde há \* na célula  $ij$ , existe um aluno matriculado na disciplina  $i$  e na disciplina  $j$

# Aplicação de Coloração de Vértices

|   | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | - | * | * | * | - | - | * |
| 2 |   | - | * | * | * | - | * |
| 3 |   |   | - | * | - | * | * |
| 4 |   |   |   | - | * | * | - |
| 5 |   |   |   |   | - | * | * |
| 6 |   |   |   |   |   | - | * |
| 7 |   |   |   |   |   |   | - |



| Horário | Disc. |
|---------|-------|
| 1       | 1 e 6 |
| 2       | 7 e 4 |
| 3       | 3 e 5 |
| 4       | 2     |