DERIVADAS: Taxas de Variação (aplicação) e Derivadas de Ordem Superior(derivadas sucessivas)

Taxa de Variação Média

1. **Inclinação** A derivada de f é a função que expressa a inclinação da curva de f em um ponto $(x, f(x))$.
2. **Taxa de Variação** A derivada de f é a função que expressa a taxa de variação de f em relação a x em um ponto $(x, f(x))$.

Nesta seção, vamos ver que existem muitas aplicações práticas da taxa de variação; velocidade, aceleração, taxa de crescimento de uma população, taxa de desemprego, produtividade e vazão de um líquido são apenas alguns exemplos. Embora as taxas de variação se refiram freqüentemente à variação com o tempo, é possível investigar a taxa de variação de qualquer variável com qualquer outra variável de interesse.

A taxa de variação pode ser de dois tipos: taxa de variação *média* e taxa de variação *instantânea*. A diferença entre essas duas taxas de variação é a mesma que existe entre a inclinação da reta secante, que passa por dois pontos de uma curva, e a reta tangente, que passa por apenas um ponto.

Definição de Taxa de Variação Média

Se $y = f(x)$, a **taxa de variação média** de y em relação a x no intervalo $[a,b]$ é dada por

$$\text{Taxa de variação média} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Observe que $f(a)$ é o valor da função na extremidade *esquerda* do intervalo, $f(b)$ é o valor da função na extremidade *direita* do intervalo, e $b - a$ é a largura do intervalo,

Nos problemas práticos, é importante definir a unidade que será usada para medir a taxa de variação. Uma taxa de variação do tipo $\Delta y/\Delta x$ é sempre medida em "unidades de y" por "unidades de x". Assim, por exemplo, se y é medido em quilômetros e x é medido em horas, $\Delta y/\Delta x$ é medido em *quilômetros por hora*.

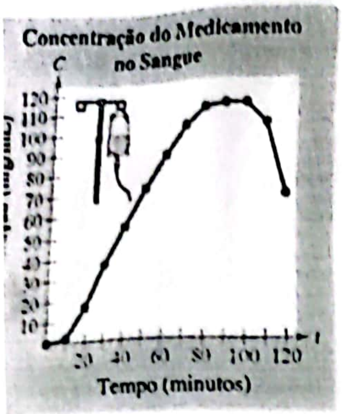
EXEMPLO 1

A concentração C de um medicamento no sangue de um paciente é medida a intervalos de 10 minutos durante 2 horas. Os resultados aparecem na tabela adiante, onde C está expressa em miligramas por mililitros e o tempo t em minutos. Determine a taxa de variação média nos intervalos indicados.

(a) $[0,10]$ (b) $[0,20]$ (c) $[100,110]$

---
[1]

Edson F.Floriani, MSc



t	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120
C	0	2	17	37	55	73	89	103	111	113	113	103	68

Solução

(a) A taxa de variação média no intervalo [0,10] é dada por

Valor de C na extremidade direita

Valor de C na extremidade esquerda

$$\frac{\Delta C}{\Delta t} = \frac{2 - 0}{10 - 0} = \frac{2}{10} = 0{,}2 \text{ mg por mL/min.}$$

Largura do intervalo

(b) A taxa de variação média no intervalo [0,20] é dada por

$$\frac{\Delta C}{\Delta t} = \frac{17 - 0}{20 - 0} = \frac{17}{20} = 0{,}85 \text{ mg por mL/min.}$$

(c) A taxa de variação média no intervalo [100,110] é dada por

$$\frac{\Delta C}{\Delta t} = \frac{103 - 113}{110 - 100} = \frac{-10}{10} = -1 \text{ mg por mL/min.}$$

TENTE ▷ 1 Use a tabela do Exemplo 1 para determinar a taxa de variação média nos intervalos indicados.

(a) [0, 120] (b) [90, 100] (c) [90, 120]

Como no Exemplo 1 a concentração do medicamento é dada em miligramas por mililitro e o tempo é dado em minutos, a taxa de variação é medida em miligramas por mililitro-minuto.

A concentração é medida em miligramas por mililitro.

A taxa de variação é medida em miligramas por mililitro-minuto.

$$\frac{\Delta C}{\Delta t} = \frac{2 - 0}{10 - 0} = \frac{2}{10} = 0{,}2 \text{ mg por mL/min}$$

O tempo é medido em minutos.

Uma aplicação muito comum da taxa de variação média é a determinação da velocidade média de um corpo que está se movendo em linha reta. Temos:

$$\text{Velocidade média} = \frac{\text{variação da distância}}{\text{variação do tempo}}.$$

Esta expressão é usada no Exemplo 2.

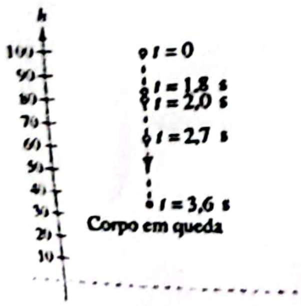


FIGURA 2.20 Alguns corpos em queda estão sujeitos a uma resistência considerável do ar. Para outros corpos, a resistência do ar pode ser desprezada. Para modelar corretamente o movimento de um corpo que cai, é preciso saber se a resistência do ar pode ou não ser desprezada.

EXEMPLO 2 Determinação da Velocidade Média

Se deixamos cair um corpo de uma altura de 100 metros, e *a resistência do ar pode ser desprezada*, a altura h (em metros) do corpo após um tempo t (em segundos) é dada por

$h = -4{,}9t^2 + 100$ (Veja a Figura 2.20)

Determine a velocidade média do corpo nos intervalos indicados.

(a) [1,8;3,6] (b) [1,8;2,7] (c) [1,8;2,0]

Solução Podemos usar a equação $h = -4{,}9t^2 + 100$ para determinar a altura do corpo nos instantes $t = 1{,}8$ s, $t = 2{,}0$ s, $t = 2{,}7$ s e $t = 3{,}6$ s; os resultados aparecem na tabela abaixo.

t (segundos)	0	1,8	2,0	2,7	3,6
h (metros)	100	84	80	64	36

(a) No intervalo [1,8;3,6], o objeto cai de uma altura de 84 metros a uma altura de 36 metros. Assim, a velocidade média é

$$\frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{36 - 84}{3{,}6 - 1{,}8} = \frac{-48}{1{,}8} \approx -26{,}7 \text{ m/s}.$$

(b) No intervalo [1,8;2,7], a velocidade média é

$$\frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{64 - 84}{2{,}7 - 1{,}8} = \frac{-20}{0{,}9} \approx -22{,}2 \text{ m/s}.$$

(c) No intervalo [1,8;2,0], a velocidade média é

$$\frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{80 - 84}{1{,}8 - 2{,}0} = \frac{-4}{0{,}2} = -20 \text{ m/s}.$$

TENTE ▷ 2 A altura h (em metros) no instante t (em segundos) de um corpo em queda livre é dada por $h = -4{,}9t^2 + 180$. Determine a velocidade média do corpo nos intervalos indicados.

(a) [0;1,8] (b) [1,8;3,6] (c) [3,6;5,4]

No Exemplo 2, as velocidades médias são negativas porque o corpo está descendo.

Taxa de Variação Instantânea e Velocidade

Suponhamos que no Exemplo 2 estivéssemos interessados em determinar a taxa de variação de h no instante $t = 1$ segundo. Uma taxa de variação desse tipo é chamada de **taxa de variação instantânea.** Como mostra a tabela, podemos determinar o valor aproximado da taxa de variação instantânea no instante $t = 1$, calculando a taxa de variação média em intervalos cada vez menores da forma $[1,1 + \Delta t]$. Observando a tabela, parece razoável concluir que a taxa de variação instantânea da altura no instante $t = 1$ é de 9,8 metros por segundo.

Δt tende a 0.

Δt	1	0,5	0,1	0,01	0,001	0,0001	0
$\frac{\Delta h}{\Delta t}$	−14,7	−12,25	−10,29	−9,849	−9,8049	−9,80049	−9,8

$\frac{\Delta h}{\Delta t}$ tende a −9,8.

Definição de Taxa de Variação Instantânea

A taxa de variação instantânea (ou simplesmente **taxa de variação**) de $y = f(x)$ no ponto x é o limite da taxa de variação média no intervalo $[x, x + \Delta x]$, quando Δx tende a 0.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Se y é uma distância e x é tempo, a taxa de variação é uma **velocidade**.

EXEMPLO 3 Determinação da Taxa de Variação Instantânea

Determine a velocidade do corpo do Exemplo 2 no instante $t = 1$.

Solução Sabemos que a altura do corpo em queda livre do Exemplo 2 é dada por

$h = -4{,}9t^2 + 100$ Função posição

Derivando essa função posição em relação ao tempo, obtemos a função velocidade

$h'(t) = -9{,}8t$ Função velocidade

A função velocidade pode ser usada para calcular a velocidade em *qualquer* instante de tempo. Assim, no instante $t = 1$, a velocidade do corpo é $h'(1) = 9{,}8(1) = -9{,}8$ metros por segundo.

TENTE ▷ 3 Determine a velocidade do corpo do Tente 2 nos instantes $t = 1{,}75$ e $t = 2$.

A expressão mais geral possível para a função posição de um corpo em queda livre, desprezando a resistência do ar, é dada por

$h = -4{,}9t^2 + v_0t + h_0$ Função posição

onde h é a altura (em metros), t é o tempo (em segundos), v_0 é a velocidade inicial (em metros por segundo) e h_0 é a altura inicial (em metros). Lembre-se de que velocidades positivas estão associadas a movimentos para cima e velocidades negativas a movimentos para baixo. A derivada da função posição, dada por $h' = -9{,}8t + v_0$, é a **função velocidade**. O valor absoluto da velocidade é a **velocidade escalar** do corpo.

EXEMPLO 4 Determinando a Velocidade de um Mergulhador

No instante $t = 0$, um mergulhador salta de um trampolim a 9,8 metros de altura, como mostra a Figura 2.21. Como a velocidade inicial do mergulhador é de 4,9 metros por segundo, sua função posição é

$h = -4{,}9t^2 + 4{,}9t + 9{,}8.$ Função posição

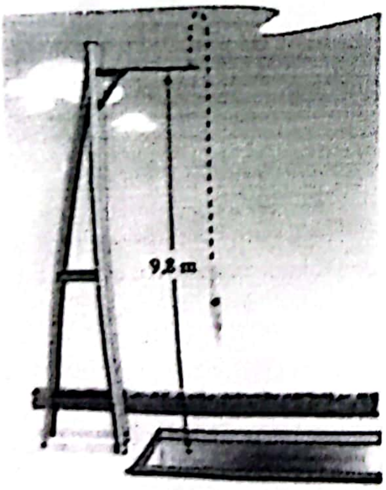


FIGURA 2.21

(a) Em que instante o mergulhador atinge a água?

(b) Qual é a velocidade do mergulhador ao atingir a água?

Solução

(a) Para determinar o instante em que o mergulhador atinge a água, igualamos a zero a função posição e calculamos o valor de t.

$-4{,}9t^2 + 4{,}9t + 9{,}8 = 0$ Fazemos $h = 0$.

$-4{,}9(t^2 - t - 2) = 0$ Colocamos 4,9 em evidência.

$-4{,}9(t + 1)(t - 2) = 0$ Fatoramos.

$t = -1$ ou $t = 2$ Calculamos as raízes.

A solução $t = -1$ não faz sentido porque o mergulhador não pode atingir a água antes de saltar. Assim, concluímos que o mergulhador atinge a água no instante $t = 2$ segundos.

(b) A velocidade no instante t é dada pela derivada

$h' = -9{,}8t + 4{,}9.$ Função velocidade

A velocidade no instante $t = 2$ é $-9{,}8(2) + 4{,}9 = -14{,}7$ metros por segundo.

TENTE ▷ 4 Determine a função posição de um mergulhador que salta de um trampolim a 4 metros de altura com uma velocidade inicial de 5 metros por segundo. Em seguida, determine a função velocidade do mergulhador.

Derivadas de Ordem Superior

Derivada Segunda, Derivada Terceira e Derivadas de Ordem Superior

A derivada de f' é chamada de **derivada segunda**, e representada pelo símbolo f''.

$$\frac{d}{dx}[f'(x)] = f''(x) \qquad \text{Derivada segunda}$$

A derivada de f'' é chamada de derivada terceira, e representada pelo símbolo f'''.

$$\frac{d}{dx}[f''(x)] = f'''(x) \qquad \text{Derivada terceira}$$

Continuando o processo, obtemos **derivadas de ordem superior** de f. O quadro a seguir mostra as várias formas de representar derivadas de ordem superior.

DICA DE ESTUDO

No contexto das derivadas de ordem superior, a derivada "comum" f' é chamada de **derivada primeira** de f.

DESCOBERTAS

Determine as derivadas de ordem superior das funções dadas.

(a) $y = x^2$ y''

(b) $y = x^3$ y'''

(c) $y = x^4$ $y^{(4)}$

(d) $y = x^n$ $y^{(n)}$

Notação para Derivadas de Ordem Superior

1. Derivada primeira:	y',	$f'(x)$,	$\frac{dy}{dx}$,	$\frac{d}{dx}[f(x)]$,	$D_x[y]$
2. Derivada segunda:	y'',	$f''(x)$,	$\frac{d^2y}{dx^2}$,	$\frac{d^2}{dx^2}[f(x)]$,	$D_x^2[y]$
3. Derivada terceira:	y''',	$f'''(x)$,	$\frac{d^3y}{dx^3}$,	$\frac{d^3}{dx^3}[f(x)]$,	$D_x^3[y]$
4. Derivada quarta:	$y^{(4)}$,	$f^{(4)}(x)$,	$\frac{d^4y}{dx^4}$,	$\frac{d^4}{dx^4}[f(x)]$,	$D_x^4[y]$
5. Derivada enésima:	$y^{(n)}$,	$f^{(n)}(x)$,	$\frac{d^ny}{dx^n}$,	$\frac{d^n}{dx^n}[f(x)]$,	$D_x^n[y]$

EXEMPLO 1 **Determinação de Derivadas de Ordem Superior**

Determine as primeiras cinco derivadas da função $f(x) = 2x^4 - 3x^2$.

$$\begin{aligned}
f(x) &= 2x^4 - 3x^2 && \text{Função dada}\\
f'(x) &= 8x^3 - 6x && \text{Derivada primeira}\\
f''(x) &= 24x^2 - 6 && \text{Derivada segunda}\\
f'''(x) &= 48x && \text{Derivada terceira}\\
f^{(4)}(x) &= 48 && \text{Derivada quarta}\\
f^{(5)}(x) &= 0 && \text{Derivada quinta}
\end{aligned}$$

TENTE ▷ **1** Determine as quatro primeiras derivadas da função

$$f(x) = 6x^3 - 2x^2 + 1.$$

EXEMPLO 2 **Determinação de Derivadas de Ordem Superior**

Determine o valor de $g'''(2)$ para a função

$$g(t) = -t^4 + 2t^3 + t + 4. \qquad \text{Função dada}$$

Começamos por derivar três vezes a função dada.

$g'(t) = 4t^3 + 6t^2 + 1$		Derivada primeira
$g''(t) = 12t^2 + 12t$		Derivada segunda
$g'''(t) = 24t + 12$		Derivada terceira

Em seguida, calculamos o valor da derivada terceira de g para $t = 2$.

$g'''(2) = 24(2) + 12 = 36$ Valor da derivada terceira

TENTE ▷ 2 Determine o valor de $g'''(1)$ para a função $g(x) = x^4 - x^3 + 2x$.

Os Exemplos 1 e 2 mostram como determinar derivadas de ordem superior de funções *polinomiais*. Observe que o grau do polinômio diminui de uma unidade a cada derivação. Toda função polinomial se reduz a uma constante ao ser derivada um número suficiente de vezes. Mais especificamente, a derivada de ordem n de uma função polinomial de grau n

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

é a função constante

$$f^{(n)}(x) = n!a_n$$

onde $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$. As derivadas de ordem superior a n são todas nulas. As funções polinomiais são as *únicas* funções com essa propriedade. Para as outras funções, derivações sucessivas não levam a uma função constante.

EXEMPLO 3 Determinação de Derivadas de Ordem Superior

Determine a derivada terceira da função $y = x^{-1}$.

$y = x^{-1} = \dfrac{1}{x}$ Função dada

$y' = (-1)x^{-2} = -\dfrac{1}{x^2}$ Derivada primeira

$y'' = (-1)(-2)x^{-3} = \dfrac{2}{x^3}$ Derivada segunda

$y''' = (-1)(-2)(-3)x^{-4} = -\dfrac{6}{x^4}$ Derivada terceira

$y^{(4)} = (-1)(-2)(-3)(-4)x^{-5} = \dfrac{24}{x^5}$ Derivada quarta

TENTE ▷ 3 Determine a derivada quarta da função

$$y = \frac{1}{x^2}.$$

Aceleração

Como vimos na Seção 2.3, a velocidade de um corpo que está se movendo em linha reta é dada pela derivada da função posição. Em outras palavras, a taxa de variação da posição de um corpo em relação ao tempo é definida como a velocidade do corpo. De forma análoga, a taxa de variação da velocidade em relação ao tempo é definida como a **aceleração** do corpo.

$s = f(t)$ Função posição

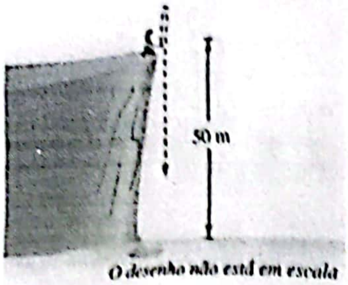
$\dfrac{ds}{dt} = f'(t)$ Função velocidade

$\dfrac{d^2s}{dt^2} = f''(t)$ Função aceleração

DICA DE ESTUDO

A aceleração é medida em unidades de comprimento por unidade de tempo ao quadrado. Assim, por exemplo, quando a velocidade é medida em metros por segundo, a aceleração é medida em "metros por segundo ao quadrado".

Para determinar a posição, a velocidade ou a aceleração de um corpo em um certo instante t, basta substituir o valor dado de t na função apropriada, como ilustra o Exemplo 4.



O desenho não está em escala

FIGURA 2.31

EXEMPLO 4 Determinando a Aceleração

Uma bola é arremessada verticalmente para cima do alto de um morro de 50 metros de altura, como mostra a Figura 2.31. A velocidade inicial da bola é de 14 metros por segundo, e portanto a função posição é

$$s = -4{,}9t^2 + 14t + 50$$

onde t é o tempo em segundos. Determine a altura, a velocidade e a aceleração da bola no instante $t = 3$.

Solução Começamos por derivar a função posição para obter a função velocidade; em seguida, derivamos a função velocidade para obter a função aceleração.

$$s = -4{,}9t^2 + 14t + 50 \qquad \text{Função posição}$$

$$\frac{ds}{dt} = -9{,}8t + 14 \qquad \text{Função velocidade}$$

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -9{,}8 \qquad \text{Função aceleração}$$

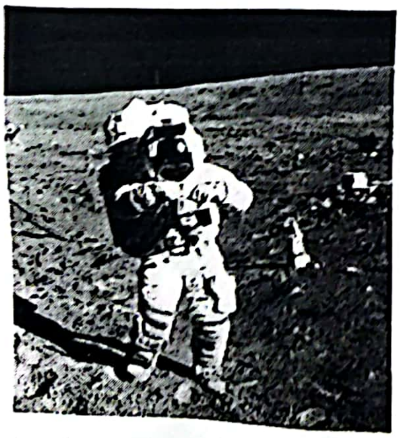
Para determinar a altura, a velocidade e a aceleração no instante $t = 3$, basta fazer $t = 3$ nas equações acima.

Altura $= -4{,}9(3)^2 + 14(3) + 50 = 136{,}1$ m
Velocidade $= -9{,}8(3) + 14 = 43{,}4$ m/s
Aceleração $= -9{,}8$ m/s^2

TENTE ▷ **4** Uma bola é arremessada para cima do alto de um morro de 24 metros, com uma velocidade inicial de 18 metros por segundo. Determine a função posição e em seguida calcule as funções velocidade e aceleração da bola.

Observe no Exemplo 4 que a aceleração da bola é de $-9{,}8$ m/s^2 para qualquer instante de tempo t. Essa aceleração constante se deve ao campo gravitacional da Terra e é conhecida como **aceleração da gravidade**. O valor negativo indica que a bola está *descendo* em direção à Terra.

A aceleração sofrida por um objeto em queda livre é praticamente a mesma em toda a superfície terrestre, mas pode variar bastante, de planeta para planeta. Os planetas maiores possuem uma atração gravitacional muito maior, e portanto os corpos nesses planetas estão sujeitos a uma maior aceleração por efeito da gravidade. O exemplo a seguir descreve o movimento de um objeto em queda livre na Lua.


A aceleração da gravidade na superfície da Lua é apenas um sexto da aceleração da gravidade na superfície da Terra. Assim, se você estiver na Lua e jogar um objeto para cima, ele subirá mais do que se estivesse na Terra.

EXEMPLO 5 Determinando a Aceleração na Lua

Um astronauta que se encontra na superfície da Lua arremessa uma pedra para cima. A altura da pedra (em metros) é dada por

$$s = -0{,}827t^2 + 8t + 1{,}8$$

onde t é o tempo em segundos. Como a aceleração da gravidade na Lua se compara com a aceleração da gravidade na Terra?

Solução

$$s = -0{,}827t^2 + 8t + 1{,}8 \qquad \text{Função posição}$$

$$\frac{ds}{dt} = -1{,}654t + 8 \qquad \text{Função velocidade}$$

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -1{,}654 \qquad \text{Função aceleração}$$