Resolução de equações não-lineares por métodos iterativos

Professor: Wemerson D. Parreira.

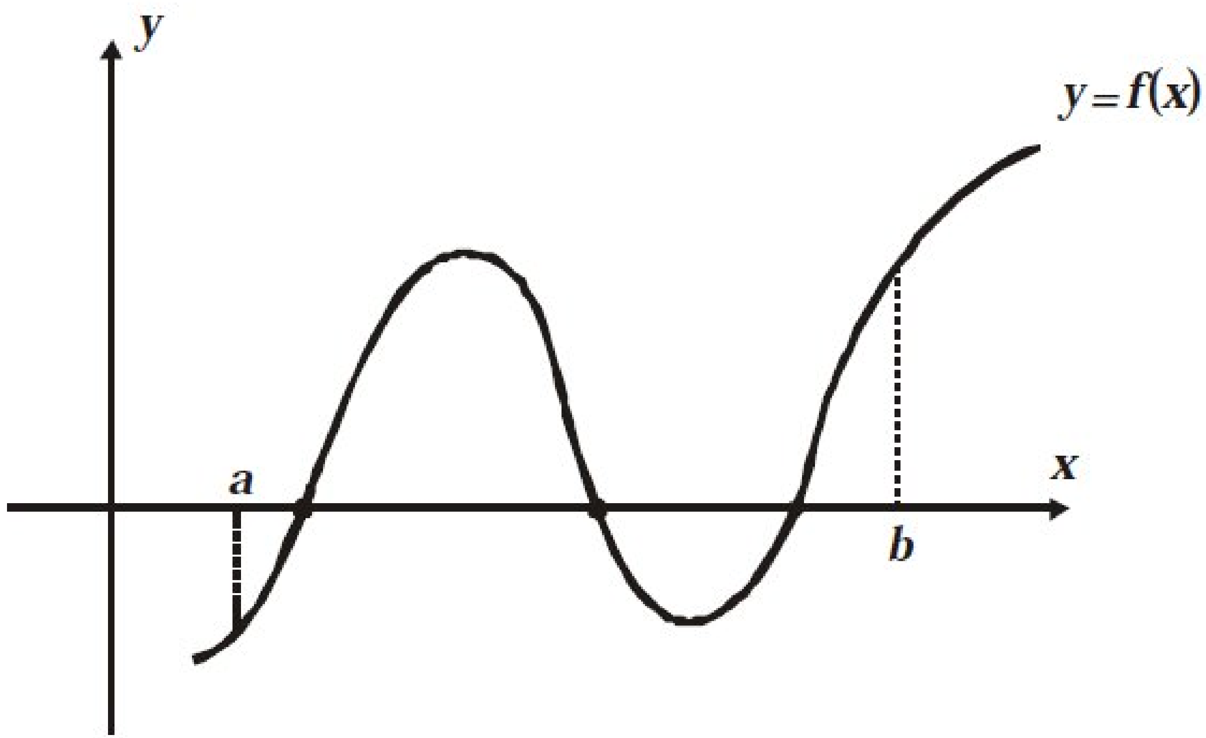
parreira@univali.br

Universidade do Vale do Itajaí
Escola Politécnica

2023

Introdução

Dada uma função real f definida e contínua em um intervalo aberto I , chama-se de **zero desta função em I** , a todo $\alpha \in I$, tal que $f(\alpha) = 0$.



➪ Note que na figura acima, $f(x)$ possui 3 zeros reais (raízes reais) no intervalo $[a, b]$.

➪ Como determinar essas raízes numericamente?

Processo iterativo:

É um processo que calcula uma sequência de aproximações x_1 , x_2 , x_3 , ... da solução desejada. O cálculo de uma nova aproximação é feito utilizando aproximações anteriores.

➪ Dizemos que a sequência x_1 , x_2 , x_3 , ... converge para α , se

dado $\epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, tal que qualquer que seja $n > N$, $|x_n - x| < \epsilon$.

Neste caso tem-se que

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} x_n = \alpha},$$

o que também poderá ser indicado por,

$$\boxed{x_n \to \alpha}.$$

Metodologia:

Nos **processos iterativos** que estudaremos, a determinação das raízes de uma função real de variável real será feita em duas etapas:

1. Isolar cada zero que se deseja determinar da função f em um intervalo $[a, b]$.
   ➪ Sendo que cada intervalo deverá conter **uma e somente uma raiz da função f** .

2. Cálculo dos zeros aproximados utilizando um método iterativo.
   ➪ Pode ter uma precisão prefixada.

Isolando Raízes Reais

➪ Para verificar se existe uma raiz real em um intervalo $[a,\, b]$ usamos o seguinte teorema:

Teorema (existência de raiz real): Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua num intervalo $[a,\, b]$.

$$\boxed{f(a).f(b) < 0 \Rightarrow \exists\, \xi \in [a,\, b] \text{ tal que } f(\xi) = 0}$$

Teorema (unicidade da raiz real): Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua num intervalo $[a,\, b]$ e ainda existe a derivada, $f'(x)$, no intervalo $(a,\, b)$

$$f'(x) > 0\,(\text{ ou } f'(x) < 0)\, \forall\, x \in (a,\, b) \Rightarrow \exists!\, \xi \in [a,\, b] \text{ tal que } f(\xi) = 0.$$

➪ Quando a derivada preserva o sinal dentro de um intervalo $(a,\, b)$ significa que a função e estritamente crescente ou estritamente decrescente em $(a,\, b)$, portanto a raiz é única.

Isolando Raízes Reais

➪ Para verificar se existe uma raiz real em um intervalo $[a,\, b]$ usamos o seguinte teorema:

Teorema (existência de raiz real): Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua num intervalo $[a,\, b]$.

$$\boxed{f(a).f(b) < 0 \Rightarrow \exists\, \xi \in [a,\, b] \text{ tal que } f(\xi) = 0}$$

Teorema (unicidade da raiz real): Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua num intervalo $[a,\, b]$ e ainda existe a derivada, $f'(x)$, no intervalo $(a,\, b)$

$$f'(x) > 0\,(\text{ ou } f'(x) < 0)\,\forall\, x\, \in (a,\, b) \Rightarrow \exists!\, \xi \in [a,\, b] \text{ tal que } f(\xi) = 0.$$

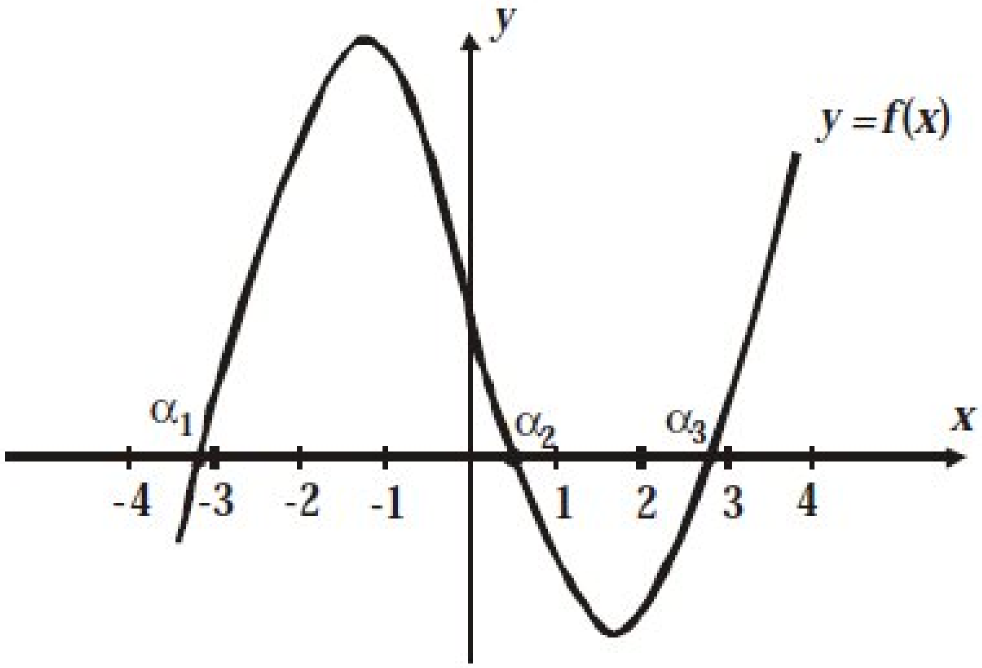
➪ Quando a derivada preserva o sinal dentro de um intervalo $(a,\, b)$ significa que a função e estritamente crescente ou estritamente decrescente em $(a,\, b)$, portanto a raiz é única.

Exercício 1: Isole os zeros da função $f(x) = x^3 - 9x + 3$

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(x)								

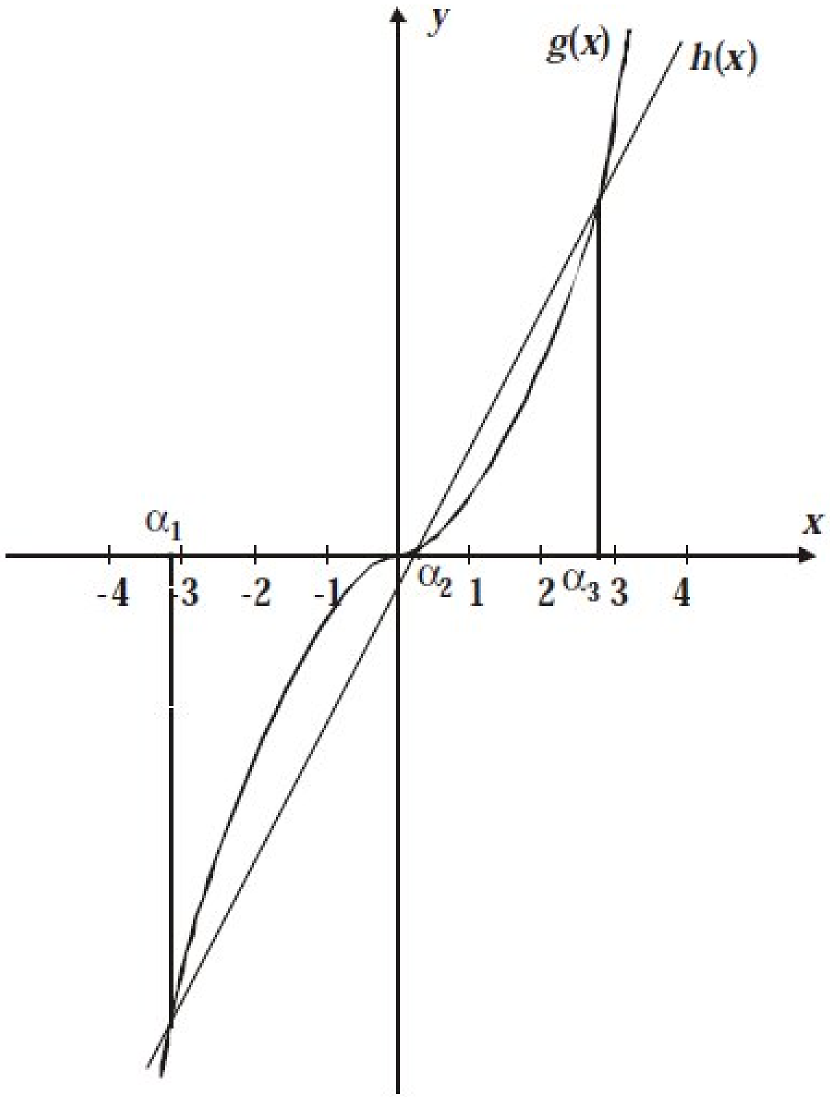
x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
f'(x)								

Representação gráfica da função de $f(x) = x^3 - 9x + 3$



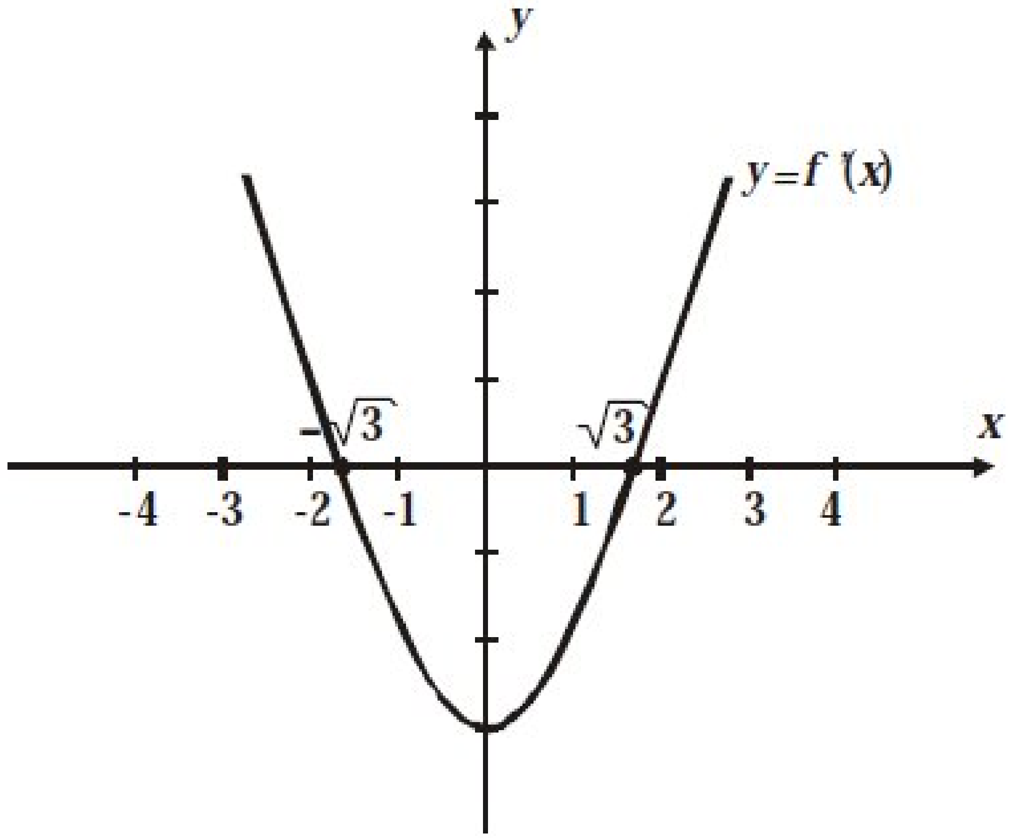
Solução alternativa $g(x) = -h(x)$.

Representação gráfica da função de $g(x) = x^3$ e $h(x) = 9x - 3$



Análise da função derivada.

Representação gráfica da função de $f'(x) = 3x^2 - 9x$



Exercício 2: Isole os zeros da função $f(x) = x \ln x - 3,2$

x	1	2	3	4
f(x)				

x	1	2	3	4
f'(x)				

Exercício 3: Isole os zeros da função $f(x) = 5 \log x - 2 + 0,4x$

x	1	2	3	4
f(x)				

x	1	2	3	4
f'(x)				

Método da Bissecção ou Método da Biseção

- Este método é comumente usado para diminuir o intervalo que contém a raiz da função para aplicação de outro método.

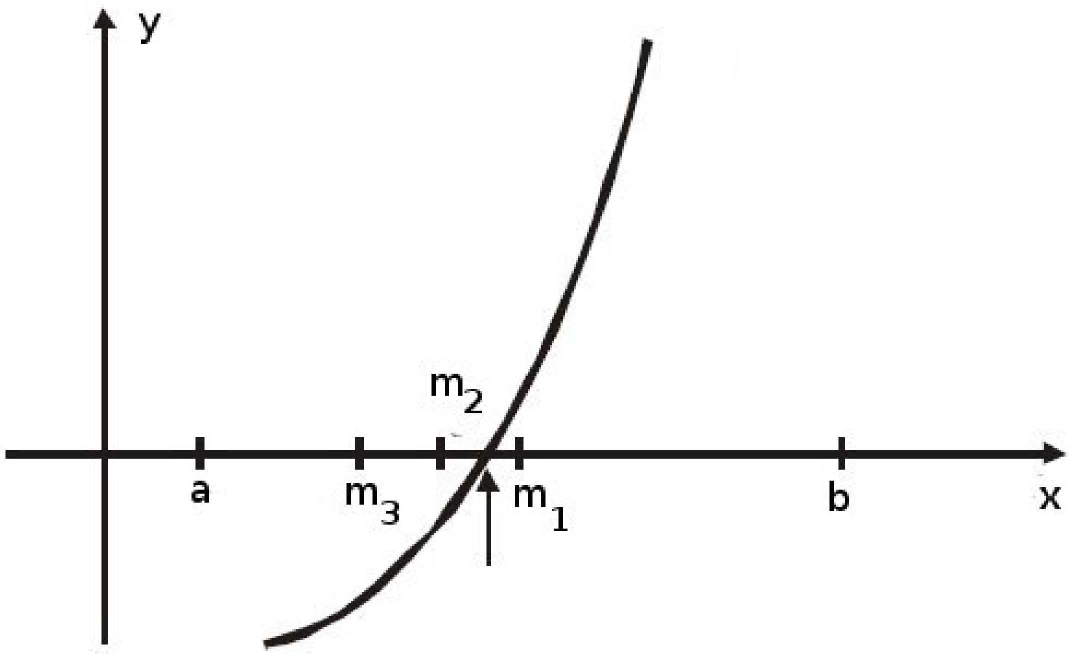
  ➪ O esforço computacional cresce demasiadamente quando se aumenta a precisão exigida (convergência lenta se o intervalo inicial for grande).

- O processo é simples e consiste em dividir o intervalo que contém o zero ao meio e por aplicação do Teorema que garante a existência de uma raiz real nos subintervalos resultantes para determinar qual deles contém o zero:

$$\left[a, \frac{a+b}{2}\right], \left[\frac{a+b}{2}, b\right].$$

- O processo é repetido para o novo subintervalo até que se obtenha uma precisão prefixada.

  ➪ Em cada iteração a raiz da função é aproximada pelo ponto médio de cada subintervalo que o contém.



Na figura acima, temos:

$$m_1 = \frac{a+b}{2};\ m_2 = \frac{a+m_1}{2}, m_3 = \frac{m_2+m_1}{2}, \ldots$$

Assim, o maior erro que se pode cometer na:

- 1^a iteração (n = 1): $\dfrac{(b-a)}{2}$
- 2^a iteração (n = 2): $\dfrac{(b-a)}{2^2}$
- 3^a iteração (n = 3): $\dfrac{(b-a)}{2^3}$

  $\vdots$
- n^a iteração (n = 1): $\dfrac{(b-a)}{2^n}$

Desta forma, se o problema exige que o erro cometido seja inferior a um determinado parâmetro $\epsilon_{\max}$, podemos determinar a quantidade n de interações usando a seguinte desigualdade:

$$\boxed{n \geq \frac{\log(b-a) - \log \epsilon_{\max}}{\log 2}}$$

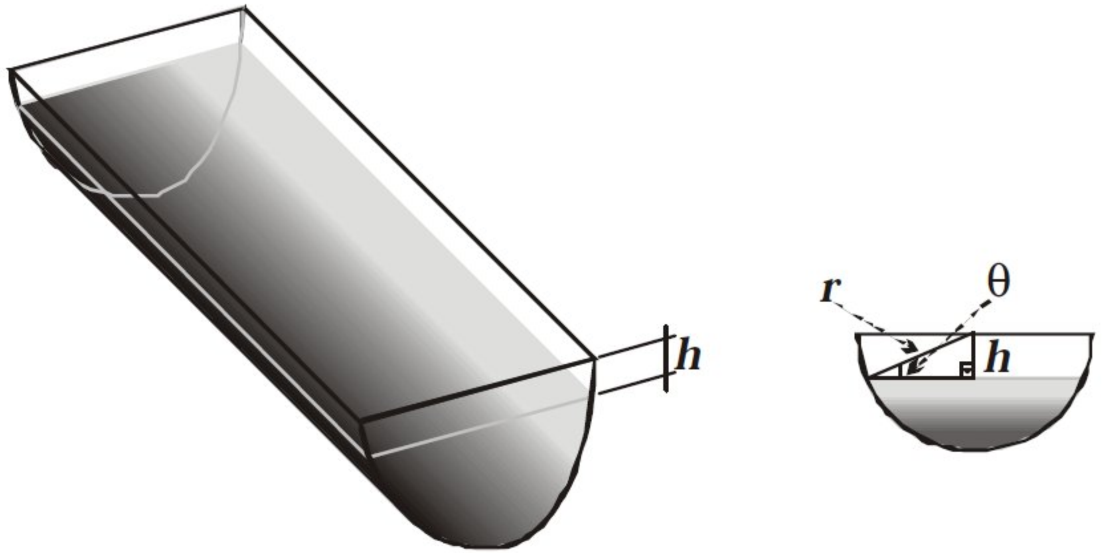
Exercícios:

1. Determinar um valor aproximado para $\sqrt{5}$, com erro inferior a 10^{-2}.

2. Um tanque com comprimento L tem uma secção transversal no formato de uma semicírculo como raio r (como mostrado na figura abaixo). Quando cheio de água a uma distância h do topo, o volume V da água é

$$V = L\left[0,5\pi r^2 - r^2\text{arcsen}\left(\frac{h}{r}\right) - h\sqrt{r^2 - h^2}\right].$$

Supondo que $L = 10\ ft$, $r = 1\ ft$ e $V = 12,4\ ft^3$, encontre a profundidade da água no tanque com precisão de $0,01\ ft$.



Exercício 1 (Resolução):

Determinar $\sqrt{5}$ é equivalente a obter o zero positivo da função $f(x) = x^2 - 5$

n	a	x	b	f(a)	f(x)	f(b)	(b-a)/2
1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							

Resposta: Assim $\sqrt{5}$ pode ser aproximado por . . . . . . com erro inferior a 10^{-2}.

Exercício 2 (Resolução): Primeiramente devemos obter $f(h)$ e então construímos uma tabela de valores para $f(h)$ e analisamos os sinais

h	-1	0	1
f(h)			

Para confirmar a unicidade da raiz calculamos a derivada de $f(h)$ que é

$$f'(h) = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

e verificamos que a mesma preserva o sinal no intervalo ....

n	a	x	b	f(a)	f(x)	f(b)	(b-a)/2
1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							

Resposta: Assim ...... é uma aproximação para h com erro inferior a

Exercício 2 (Resolução): Primeiramente devemos obter $f(h)$ e então construímos uma tabela de valores para $f(h)$ e analisamos os sinais

h	-1	0	1
f(h)	19,01593	3,30796	-12,4

Para confirmar a unicidade da raiz calculamos a derivada de $f(h)$ que é

$$f'(h) = -20\sqrt{1-h^2}$$

e verificamos que a mesma preserva o sinal no intervalo $[0,1]$.

n	a	m	b	f(a)	f(m)	f(b)	(b-a)/2
1	0	0,5	1	3,308	-6,2582	-12,4	5 $\times 10^{-1}$
2	0	0,25	0,5	3,308	-1,6395	-6,2582	2,5 $\times 10^{-1}$
3	0	0,125	0,25	3,3080	0,8145	-1,6395	1,25 $\times 10^{-1}$
4	0,125	0,1875	0,25	0,8145	-0,4199	-1,6395	6,25 $\times 10^{-2}$
5	0,125	0,15625	0,1875	0,8145	0,1957	-0,4199	3,13 $\times 10^{-2}$
6	0,15625	0,171875	0,1875	0,1957	-0,1125	-0,4199	1,56 $\times 10^{-2}$
7	0,15625	0,164063	0,17188	0,1957	0,00415	-0,1125	7,81 $\times 10^{-3}$

Resposta: Assim $0,164063$ é uma aproximação para h com erro inferior a 7,81 $\times 10^{-3}$.

Algoritmo da Bissecção:

Seja $f(x)$ uma função contínua em um intervalo $[a, b]$, como $f(a).f(b) < 0$ e a raiz de $f(x)$ isolada em $[a, b]$.

- **Dados de entrada:**

  Pontos extremos $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ do intervalo; precisão ou tolerância $\boldsymbol{\epsilon_{\mathbf{max}}}$ e o número máximo de iterações $\mathbf{itmax}$.

- **Saída**:

  solução aproximada $\boldsymbol{x}$ ou mensagem **"solução não encontrada com a precisão exigida"** (com a precisão desejada no número máximo de iterações)

Passo 1 `Faça` $i = 1$ `e` $FA = f(a)$

Passo 2 `Enquanto` $i \leq \text{itmax}$ `execute os passos 3 a 6`

Passo 3 `Faça` $x = \dfrac{(a+b)}{2}$ `e` $FX = f(x)$

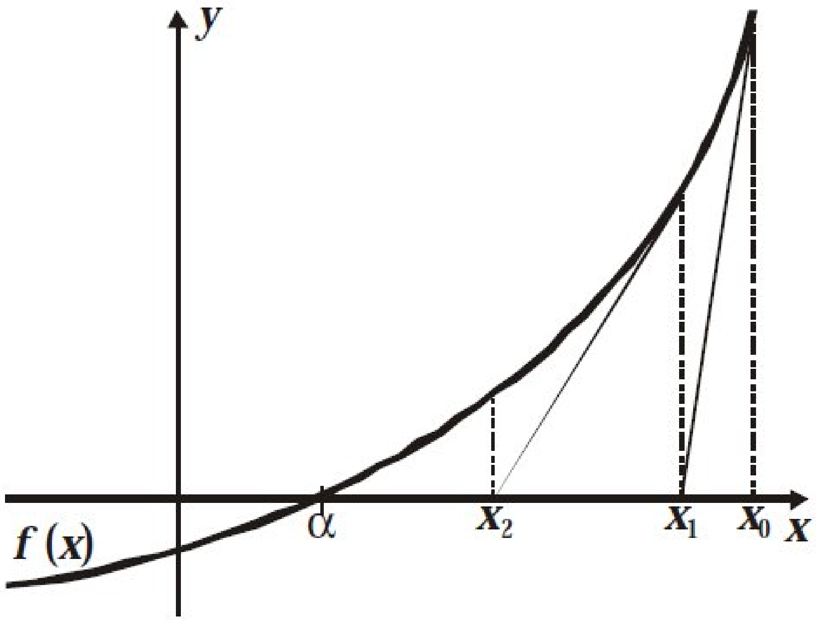
Passo 4 `Se` $FX = 0$ `ou` $\dfrac{(b-a)}{2} < \epsilon_{\text{max}}$`, então`
`Saída (x) [procedimento executado com sucesso!]`
`FIM`

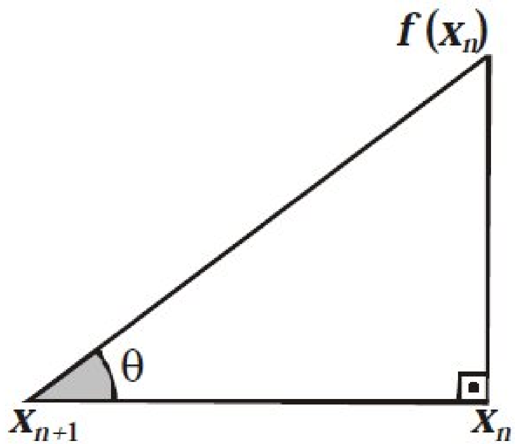
Passo 5 `Faça` $i = i + 1$

Passo 6 `Se` $FA.FX > 0$ `então faça` $a = x$ `e` $FA = FX$
`Caso contrário faça` $b = x$

Passo 7 `Saída (Solução não encontrada com a precisão exigida, redefina` itmax `ou` ϵ_{max}`)`
FIM

Método de Newton, Newton-Raphson ou Método das tangentes (MN)





Para o triângulo com vértices em $x_0, f(x_0), x_1$, e θ_0 ângulo do vértice x_1, temos que

$$\tan\theta_0 = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} = f'(x_0) \implies$$

$$f'(x_0)(x_0 - x_1) = f(x_0) \implies f'(x_0)x_0 - f'(x_0)x_1 = f(x_0)$$

$$-f'(x_0)x_1 = f(x_0) - f'(x_0)x_0 \implies x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Generalizando,

$$\tan\ \theta = f'(x_n) = \frac{f(x_n)}{x_n - x_{n+1}} \implies x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Assim, o processo iterativo de Newton é definido por:

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$

com $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Erro pode ser obtido analisando $|x_n - x_{n+1}|$.

Análise de convergência

Teorema da convergência do Método de Newton: Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, duas vezes diferenciável, com $f''(x)$ contínua. Suponha que:

i) $f(a).f(b) < 0$

ii) $f'(x) \neq 0, \forall x \in [a,b]$

iii) $f''(x)$ não troca de sinal em $[a,b]$

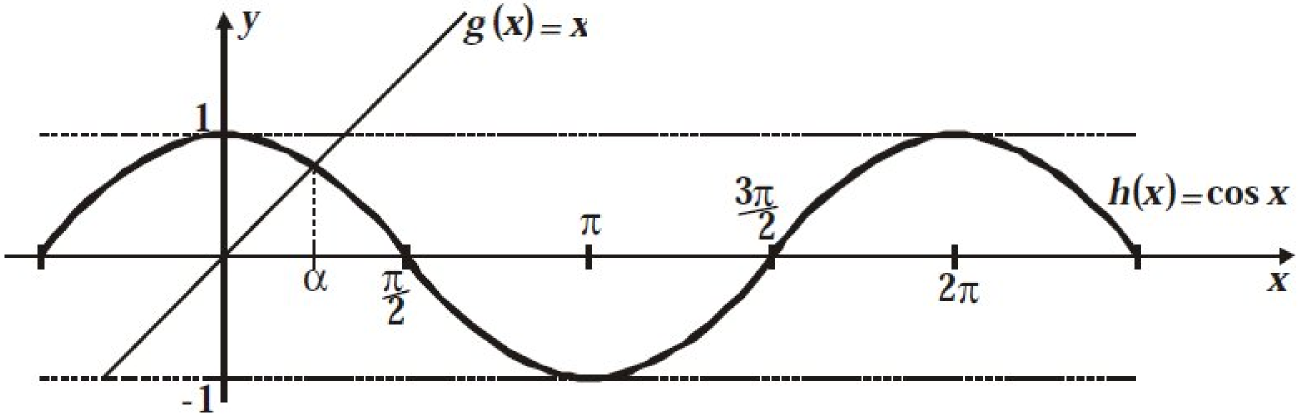
Então, a sequência gerada pelas iterações do método de Newton-Raphson utilizando a função converge para o único zero α de

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

converge para um único zero α de $f(x)$, isolado em $[a,b]$, se $x_0 \in [a,b]$ for escolhido convenientemente.

➪ Para se escolher o ponto inicial x_0 , pode-se, por exemplo, fazer $x_0 = a$ se $x_1 \in [a,b]$ ou $x_0 = b$ caso contrário.

Exercício 5: Encontrar a solução para equação $x = \cos x$ com precisão de $\epsilon = 10^{-6}$



$$f(0) = \ldots\ldots \qquad \text{e} \qquad f(\pi/2) = \ldots\ldots$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \ldots\ldots\ldots$$

n	x_n	x_{n+1}	$\lvert x_{n+1} - x_n \rvert$
0			
1			
2			

Portando, ... pode ser usado como uma solução aproximada para solução da equação $x = \cos x$ de acordo com o método de Newton.

Algoritmo: Para encontrar uma solução para $f(x) = 0$, dada a derivada de $f(x)$ e uma aproximação inicial p_0.

- Dados de Entrada: Aproximação inicial p_0 , precisão ou tolerância ($\epsilon_{\max}$) e o número máximo de iterações ($ITMAX$).
- Saída: Solução aproximada p ou mensagem de "solução não encontrada".

PASSO 1 Faça $i = 1$

PASSO 2 Enquanto $i \leq \text{itmax}$, execute os passos 3 - 6

PASSO 3 Faça $p = p_0 - f(p_0)/f'(p_0)$ (calcular p_i)

PASSO 4 Se $|p - p_0| < \epsilon_{\max}$ então
Saída (p) (procedimento efetuado com sucesso)
FIM

PASSO 5 Faça $i = i + 1$

PASSO 6 Faça $p_0 = p$ (atualize p_0)

PASSO 7 Saída (solução não encontrada após itmax iterações)
FIM.

Comparação entre Métodos

Exercício 6: Determine uma aproximação para α tal que $f(\alpha) = 0$, em que $\alpha \in (1, 2)$ e $f(x) = e^{-x^2} - \cos x$. Use uma tolerância $\varepsilon = 10^{-4}$.

(a) Pelo método da Bissecção, tal que $(b - a)/2 < \varepsilon$.

(b) Pelo método de Newton-Raphson, tal que $|f(x_n)| < \epsilon$ ou $|x_{n+1} - x_n| < \epsilon$. Utilize $x_0 = 1,5$.

Comente os resultados encontrados, destacando o número de iterações necessárias para convergência e o erro $|f(x_n)|$ obtido em cada um deles.

Comparação entre Métodos - Solução

Dada a função $f(x) = e^{-x^2} - \cos x$, é possível obter a derivada utilizando a regra da cadeia $f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$ e a derivada do cosseno $\cos u = -u' \sin u$:

$$f'(x) = -2xe^{-x^2} + \sin x$$

O restante da resolução está no seguinte link: `shorturl.at/xyIK2` (É necessário um email com domínio univali para abrir)

Lista de Exercícios: 2

Bibliografia: Chapra, S.C., "Métodos Numéricos Aplicados com Matlab para Engenheiros e Cientístas". Mc Graw Hill, 3a. ed.

➪ Disponível na Biblioteca Online

Problemas: **5.1, 5.6, 5.7, 5.13, 6.1, 6.3 (a) e (b), 6.4 (a) e (b), 6.9, 6.11, 6.12, 6.27.**

Páginas: 147 – 149 e 177 – 180.