Universidade do Vale do Itajaí
Escola do Mar, Ciência e Tecnologia - EMCT
Ciência da Computação

Matemática Computacional

Álgebra Booleana

Prof. Thiago Felski Pereira, M.Sc.

Agenda

- Álgebra Booleana

Álgebra Booleana

- A álgebra booleana permite apenas dois valores: 0 e 1
  - **Lógica 0** pode ser: *falso, desligado, baixo, não, interruptor aberto*
  - **Lógica 1** pode ser: *verdadeira, ligado, alto, sim, interruptor fechado*

- Três operações básicas:
  - Soma "+" (união ou OR) – Ex: A + B
  - Produto " • " (intersecção ou AND) – Ex: A • B = AB
  - Negação "—" (complemento ou NOT) – Ex: A' = $\overline{A}$

Lógico 0	Lógico 1
Falso	Verdadeiro
Desligado	Ligado
BAIXO	ALTO
Não	Sim
Aberto	Fechado

Álgebra Booleana

- Propriedades da Álgebra Booleana que são úteis para manipulação de expressões lógicas. Sendo A, B e C variáveis booleanas:
  - Propriedade Comutativa
    - $A \cdot B = B \cdot A$
    - $A + B = B + A$
  - Propriedade Associativa
    - $A(BC) = (AB)C = ABC$
    - $A + (B + C) = (A + B) + C = A + B + C$
  - Propriedade Distributiva
    - $A(B + C) = AB + AC$
    - $A + BC = (A + B)(A + C)$

Álgebra Booleana

- Postulados (leis fundamentais) regem a Álgebra Booleana
- Postulados Básicos:
  - 1 – se $A \neq 0$ então $A = 1$

    se $A \neq 1$ então $A = 0$
  - 2 – $1 + 1 = 1$

    $0 \bullet 0 = 0$
  - 3 – $0 + 0 = 0$

    $1 \bullet 1 = 1$
  - 4 – $0 + 1 = 1$

    $1 \bullet 0 = 0$
  - 5 – $\overline{0} = 1$

    $\overline{1} = 0$

Álgebra Booleana

- Teoremas da Álgebra Booleana
  - 1 – $A + 0 = A$

    $A \cdot 1 = A$
  - 2 – $A + 1 = 1$

    $A \cdot 0 = 0$
  - 3 – $A + A = A$

    $A \cdot A = A$
  - 4 – $\overline{(\overline{A})} = A$
  - 5 – $A + \overline{A} = 1$

    $A \cdot \overline{A} = 0$
  - 6 – Teoremas de De Morgan

    $\overline{A + B + C + \ldots} = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} \cdot \ldots\ldots$

    $\overline{A \cdot B \cdot C \cdot \ldots.} = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C} + \ldots.$
  - 7 – Identidades auxiliares

    $A(A + B) = A + AB = A$

    $A + \overline{A}B = A + B$

    $(A + B) \cdot (A + C) = A + BC$
  - 8 – Substituição (não é um teorema)

    $\overline{AB} = X$

Álgebra Booleana

- A tabela-verdade descreve a relação entre as entradas e as saídas de um circuito lógico

- O número de colunas corresponde ao número de entradas

  - Uma tabela de duas entradas teria $2^2 = 4$ linhas

  - Uma tabela de três entradas teria $2^3 = 8$ linhas

Álgebra Booleana

- Tabela-verdade da “+”

A	B	A+B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

- Tabela-verdade da “ – ”

A	$\bar{A}$
0	1
1	0

- Tabela-verdade da “•”

A	B	A•B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Álgebra Booleana

- Tabela-verdade da operação " $\oplus$ " também conhecida como OU-exclusive ou XOR

  - Somente é "1" quando suas entradas forem opostas (quando a operação for exclusiva OR = +)

A	B	$A \oplus B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Álgebra Booleana

- Outras tabelas verdades importantes

  - AND negado = NAND

A	B	$\overline{A \bullet B}$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

  - OR negado = NOR

A	B	$\overline{A + B}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Álgebra Booleana

- A simplificação de expressões booleanas permite simplificar circuitos digitais e, assim, reduzir custos
  - Utilização da Álgebra booleana ou Mapas de Veitch-Karnaugh
    - $S = ABC + A\overline{C} + A\overline{B}$

$A(BC + \overline{C} + \overline{B})$ Deixando em evidência A

$A[BC + (\overline{C}+\overline{B})]$ Aplicando a propriedade associativa

$A[BC + (\overline{\overline{\overline{C}+\overline{B}}})]$ Aplicando De Morgan e propriedade comutativa

$A[BC + (\overline{\overline{\overline{B}}\,\overline{\overline{C}}})]$ $\overline{\overline{A}} = A$ e substituindo BC por X

$A(X + \overline{X}) = A$ $A + \overline{A} = 1$

Álgebra Booleana

- As formas padrão que podemos escrever as expressões são duas
  - Soma dos produtos
    - Ex : $F(A,B,C) = \overline{A}BC + A\overline{B}C + AB\overline{C}$
  - Produto das somas
    - Ex: $F(A,B,C) = (\overline{A}+B+C)\ (A+\overline{B}+C)\ (A+B+\overline{C})$

Álgebra Booleana

- Cada termo da soma dos produtos é chamada de **minitermo**, sendo a expressão na sua forma mínima chamada de **forma canônica de minitermos**

- Essa forma tem que atender a seguinte propriedade F = 1 (ou F(A,B,C) = 1)

  - F = 1 se ao menos um dos minitermos for 1 e um minitermo será 1 somente se todas as suas variáveis forem 1

  - Podemos assumir que os minitermos corresponde a linha da tabela verdade que F=1

Álgebra Booleana

- Dada a tabela verdade
  - $F(A,B,C) = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}BC + ABC$

$$= m_0 + m_2 + m_3 + m_7$$

$$= \sum m(0,2,3,7)$$

A	B	C	F(A,B,C)
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Álgebra Booleana

- Cada termo da produto das somas é chamada de **maxitermo**, sendo a expressão na sua forma mínima chamada de **forma canônica de maxitermos**

- Essa forma tem que atender a seguinte propriedade F = 0 (ou F(A,B,C) = 0)

  - F = 0 se ao menos um dos maxitermos for 0 e um maxitermo será 0 somente se todas as suas variáveis forem 0

  - Podemos assumir que os maxitermos corresponde a linha da tabela verdade que F=0

Álgebra Booleana

- Dada a tabela verdade
  - $F(A,B,C) = (A+B+\overline{C})(A+\overline{B}+C)(A+\overline{B}+\overline{C})(\overline{A}+\overline{B}+C)$

    $= M_1 \bullet M_4 \bullet M_5 \bullet M_6$

    $= \prod M(1,4-6)$

A	B	C	F(A,B,C)
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Álgebra Booleana

- Relação dos minitermos e maxitermos

A	B	C	minitermo	maxitermo
0	0	0	$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} = m_0$	$\overline{A}+\overline{B}+\overline{C} = M_0$
0	0	1	$\overline{A}\,\overline{B}C = m_1$	$\overline{A}+\overline{B}+C = M_1$
0	1	0	$\overline{A}B\overline{C} = m_2$	$\overline{A}+B+\overline{C} = M_2$
0	1	1	$\overline{A}BC = m_3$	$\overline{A}+B+C = M_3$
1	0	0	$A\overline{B}\,\overline{C} = m_4$	$A+\overline{B}+\overline{C} = M_4$
1	0	1	$A\overline{B}C = m_5$	$A+\overline{B}+C = M_5$
1	1	0	$AB\overline{C} = m_6$	$A+B+\overline{C} = M_6$
1	1	1	$ABC = m_7$	$A+B+C = M_7$