Linguagens Formais e Autômatos

Prof. Alex Luciano Roesler Rese, MSc.
Adaptado: Rafael de Santiago, Dr.

Linguagens Recursivas

Introdução

- Linguagens Recursivas são aquelas aceitas por um tipo muito geral de reconhecedor: a Máquina de Turing

- A diferença da Máquina de Turing que veremos a seguir com a que vimos nas últimas aulas é que esta trabalha com uma fita infinita

Introdução

- O fato da fita ser infinita pode parecer apresentar pequena diferença de poder, mas isto permite a Máquina de Turing reconhecer uma categoria mais abrangente de linguagens

Introdução

- É dito que uma linguagem é recursiva, se e somente se:

  - é aceita por uma Máquina de Turing que pára para todas as cadeias de entrada

Máquinas de Turing

Máquinas de Turing

- A MT Possui as seguintes diferenças em relação às MT sem Fita Limitada:

1. a fita de trabalho possui tamanho infinito, sendo limitada à esquerda e infinita à direita (alguns autores definem que não há limitação à esquerda também);
2. A cadeia de entrada é delimitada apenas à esquerda pelo símbolo “<”;

Máquinas de Turing

- A MT Possui as seguintes diferenças em relação às MT sem Fita Limitada:

3. As posições à direita do último símbolo da cadeia de entrada são preenchidos inicialmente com símbolo especial (β) que não faz parte do alfabeto; e
4. O cursor de acesso pode se deslocar livremente pela fita de trabalho, exceto a esquerda da primeira posição da fita. Se isto ocorrer, a computação é encerrada anormalmente.

Máquinas de Turing

- A definição formal de uma Máquina de Turing é vista a seguir:

(próximos slides...)

Máquinas de Turing

$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, <, \beta, F)$, onde:

Q é o conjunto finito de estados

Σ é o alfabeto de entrada (finito)

Γ é o conjunto que podem ser lidos e gravados na fita de trabalho(finito)

$\Sigma \subseteq \Gamma$

δ é a função parcial de transição, compreendendo os mapeamentos $Q \times \Gamma \rightarrow 2^{Q \times \Gamma \times \{E, D\}}$

q_0 é o estado inicial, $q_0 \in Q$

$< \in \Gamma, < \notin \Sigma$ símbolo situado imediatamente à esquerda da cadeia de entrada. Durante toda a operação o símbolo não poderá ser gravado em nenhuma posição na fita;

$\beta \in \Gamma, \beta \notin \Sigma$ símbolo utilizado para preencher inicialmente todas as posições à direita da cadeia de entrada na fita. Durante a operação da máquina, o símbolo β pode ser gravado em qualquer posição da fita;

$F \subseteq Q$ é o conjunto de estados finais

$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, <, \beta, F)$, onde:

Q é o conjunto finito de estados

Σ é o alfabeto de entrada (finito)

Γ é o conjunto que podem ser lidos e gravados na fita de trabalho(finito)

$\Sigma \subseteq \Gamma$

δ é a função parcial de transição, compreendendo os mapeamentos $Q \times \Gamma \to 2^{Q \times \Gamma \times \{E, D\}}$

q_0 é o estado inicial, $q_0 \in Q$

$< \in \Gamma, < \notin \Sigma$ símbolo situado imediatamente à esquerda da cadeia de entrada. Durante toda a operação o símbolo não poderá ser gravado em nenhuma posição na fita;

$\beta \in \Gamma, \beta \notin \Sigma$ símbolo utilizado para preencher inicialmente todas as posições à direita da cadeia de entrada na fita. Durante a operação da máquina, o símbolo β pode ser gravado em qualquer posição da fita;

$F \subseteq Q$ é o conjunto de estados finais

OU SEJA...

Máquinas de Turing

Conteúdo

$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, <, \beta, F)$, onde:

Q é o conjunto finito de estados

Σ é o alfabeto de entrada (finito)

Γ é o conjunto que podem ser lidos e gravados na fita de trabalho(finito)

$\Sigma \subseteq \Gamma$

δ é a função parcial de transição, compreendendo os mapeamentos $Q \times \Gamma \rightarrow 2^{Q \times \Gamma \times \{E, D\}}$

q_0 é o estado inicial, $q_0 \in Q$

$< \in \Gamma, < \notin \Sigma$ símbolo situado imediatamente à esquerda da cadeia de entrada. Durante toda a operação o símbolo não poderá ser gravado em nenhuma posição na fita;

$\beta \in \Gamma, \beta \notin \Sigma$ símbolo utilizado para preencher inicialmente todas as posições à direita da cadeia de entrada na fita. Durante a operação da máquina, o símbolo β pode ser gravado em qualquer posição da fita;

$F \subseteq Q$ é o conjunto de estados finais

Máquina formada por um conjunto de estados finitos

Máquinas de Turing

Conteúdo

$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, <, \beta, F)$, onde:

Q é o conjunto finito de estados

Σ é o alfabeto de entrada (finito)

Γ é o conjunto que podem ser lidos e gravados na fita de trabalho(finito)

$\Sigma \subseteq \Gamma$

δ é a função parcial de transição, compreendendo os mapeamentos $Q \times \Gamma \rightarrow 2^{Q \times \Gamma \times \{E, D\}}$

q_0 é o estado inicial, $q_0 \in Q$

$< \in \Gamma, < \notin \Sigma$ símbolo situado imediatamente à esquerda da cadeia de entrada. Durante toda a operação o símbolo não poderá ser gravado em nenhuma posição na fita;

$\beta \in \Gamma, \beta \notin \Sigma$ símbolo utilizado para preencher inicialmente todas as posições à direita da cadeia de entrada na fita. Durante a operação da máquina, o símbolo β pode ser gravado em qualquer posição da fita;

$F \subseteq Q$ é o conjunto de estados finais

Onde Σ é o alfabeto de entrada

$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, <, \beta, F)$, onde:

Q é o conjunto finito de estados

Σ é o alfabeto de entrada (finito)

Γ é o conjunto que podem ser lidos e gravados na fita de trabalho(finito)

$\Sigma \subseteq \Gamma$

Formado por símbolos que podem ser lidos ou escritos na fita de trabalho

δ é a função parcial de transição, compreendendo os mapeamentos $Q \times \Gamma \rightarrow 2^{Q \times \Gamma \times \{E,D\}}$

q_0 é o estado inicial, $q_0 \in Q$

$< \in \Gamma, < \notin \Sigma$ símbolo situado imediatamente à esquerda da cadeia de entrada. Durante toda a operação o símbolo não poderá ser gravado em nenhuma posição na fita;

$\beta \in \Gamma, \beta \notin \Sigma$ símbolo utilizado para preencher inicialmente todas as posições à direita da cadeia de entrada na fita. Durante a operação da máquina, o símbolo β pode ser gravado em qualquer posição da fita;

$F \subseteq Q$ é o conjunto de estados finais

$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, <, \beta, F)$, onde:

Para que uma transição se realize, de um estado para outro, devo ler um símbolo na fita, escrever algo na fita e posicionar a cabeça de leitura na próxima casa à direita (D) ou à esquerda (E)

$\Sigma \subseteq \Gamma$

δ é a função parcial de transição, compreendendo os mapeamentos $Q \times \Gamma \rightarrow 2^{Q \times \Gamma \times \{E, D\}}$

q_0 é o estado inicial, $q_0 \in Q$

$< \in \Gamma, < \notin \Sigma$ símbolo situado imediatamente à esquerda da cadeia de entrada. Durante toda a operação o símbolo não poderá ser gravado em nenhuma posição na fita;

$\beta \in \Gamma, \beta \notin \Sigma$ símbolo utilizado para preencher inicialmente todas as posições à direita da cadeia de entrada na fita. Durante a operação da máquina, o símbolo β pode ser gravado em qualquer posição da fita;

$F \subseteq Q$ é o conjunto de estados finais

Máquinas de Turing

Conteúdo

Máquinas de Turing

$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, <, \beta, F)$, onde:

Q é o conjunto finito de estados

Σ é o alfabeto de entrada (finito)

Γ é o conjunto que podem ser lidos e gravados na fita de trabalho(finito)

$\Sigma \subseteq \Gamma$

δ é a função parcial de transição, compreendendo os mapeamentos $Q \times \Gamma \to 2^{Q \times \Gamma \times \{E,D\}}$

q_0 é o estado inicial, $q_0 \in Q$

Estado inicial

$< \in \Gamma, < \notin \Sigma$ símbolo situado imediatamente à esquerda da cadeia de entrada. Durante toda a operação o símbolo não poderá ser gravado em nenhuma posição na fita;

$\beta \in \Gamma, \beta \notin \Sigma$ símbolo utilizado para preencher inicialmente todas as posições à direita da cadeia de entrada na fita. Durante a operação da máquina, o símbolo β pode ser gravado em qualquer posição da fita;

$F \subseteq Q$ é o conjunto de estados finais

Conteúdo

Máquinas de Turing

$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, <, \beta, F)$, onde:

> "<" identifica o início da fita, por isso não podem fazer parte do alfabeto e não podem ser gravos em qualquer posição da fita, apenas lidos.

Q é o conjunto f

Σ é o alfabeto d

Γ é o conjunto

gravados na

$\Sigma \subseteq \Gamma$

δ é a função pa

os mapeamentos Q … $2^{Q \times \Gamma \times \{E,D\}}$

q_0 é o estado inicial, $q_0 \in Q$

$< \in \Gamma, < \notin \Sigma$ símbolo situado imediatamente à esquerda da cadeia de entrada. Durante toda a operação o símbolo não poderá ser gravado em nenhuma posição na fita;

$\beta \in \Gamma, \beta \notin \Sigma$ símbolo utilizado para preencher inicialmente todas as posições à direita da cadeia de entrada na fita. Durante a operação da máquina, o símbolo β pode ser gravado em qualquer posição da fita;

$F \subseteq Q$ é o conjunto de estados finais

Conteúdo

Máquinas de Turing

$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, <, \beta, F)$, onde :

Q é o conjunto finito de estados

Σ é o alfabeto de entrada (finito)

Γ é o conjunto que podem ser lidos e gravados na fita de trabalho(finito)

$\Sigma \subseteq \Gamma$

δ é a função parcial de

os mapeamentos $Q \times$

q_0 é o estado inicial, q_0

$< \in \Gamma, < \notin \Sigma$ símbolo si

da cadeia de en

o símbolo não poderá ... vado em nenhuma

posição na fita;

$\beta \in \Gamma, \beta \notin \Sigma$ símbolo utilizado para preencher inicialmente todas as posições à direita da cadeia de entrada na fita. Durante a operação da máquina, o símbolo β pode ser gravado em qualquer posição da fita;

$F \subseteq Q$ é o conjunto de estados finais

“β” preenche os espaços que estão inicialmente à direita da cadeia de entrada na fita infinita.

LIA

UNIVALI

Máquinas de Turing

$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, <, \beta, F)$, onde :

Q é o conjunto finito de estados

Σ é o alfabeto de entrada (finito)

Γ é o conjunto que podem ser lidos e
gravados na fita de trabalho(finito)
$\Sigma \subseteq \Gamma$

δ é a função parcial de transição, compreendendo
os mapeamentos $Q \times \Gamma \rightarrow 2^{Q \times \Gamma \times \{E,D\}}$

q_0 é o estado inicial, $q_0 \in Q$

$< \in \Gamma, < \notin \Sigma$ símbolo situado imediatamente à esquerda
da cadeia de entrada. Durante toda a operação
o símbolo não poderá ser gravado em nenhuma
posição na fita;

$\beta \in \Gamma, \beta \notin \Sigma$ símb
todas as pos
fita. Durante a oper máquina, o símbolo β
pode ser gravado e qualquer posição da fita;

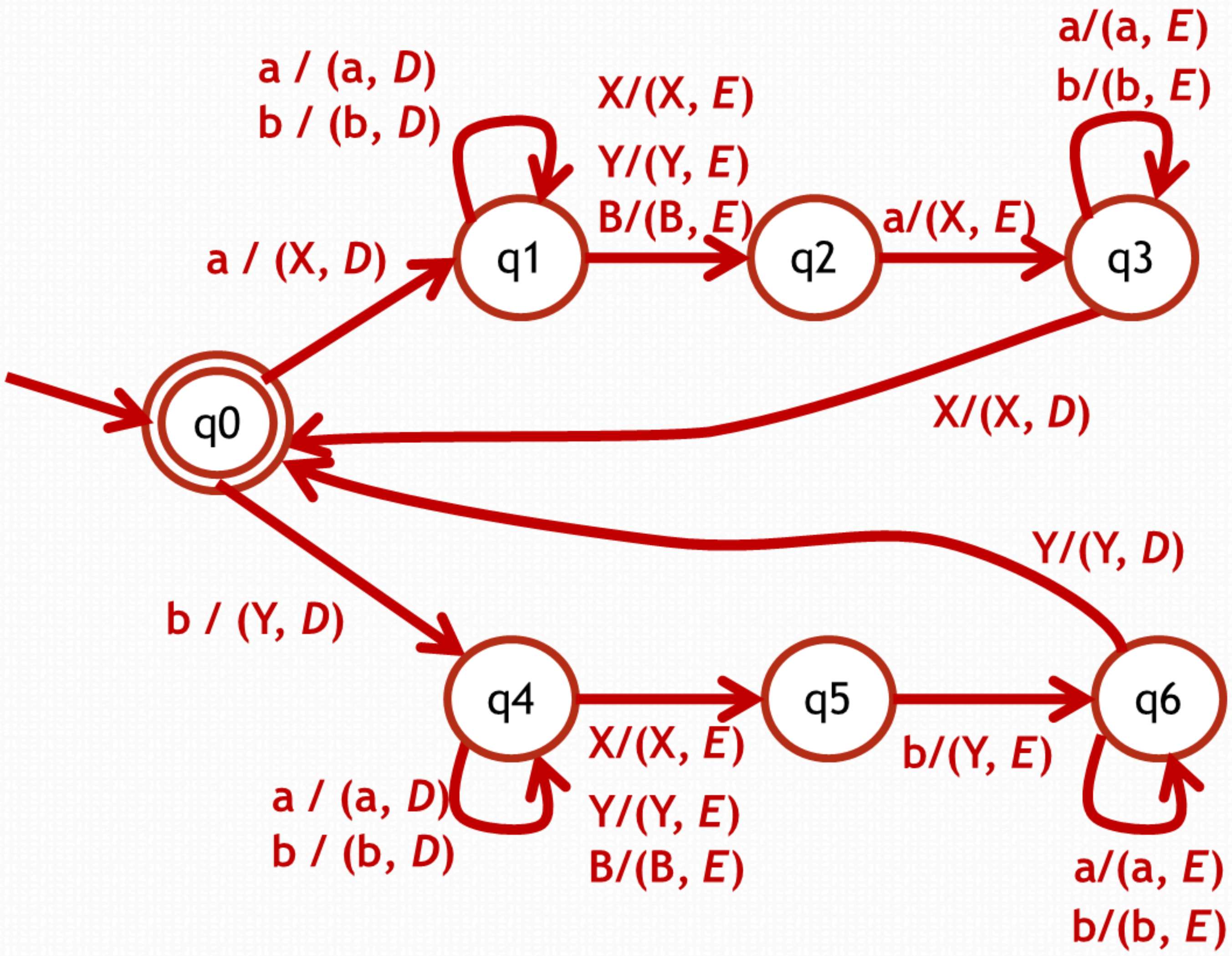
Conjunto de estados finais

$F \subseteq Q$ é o conjunto de estados finais

UNIVALI

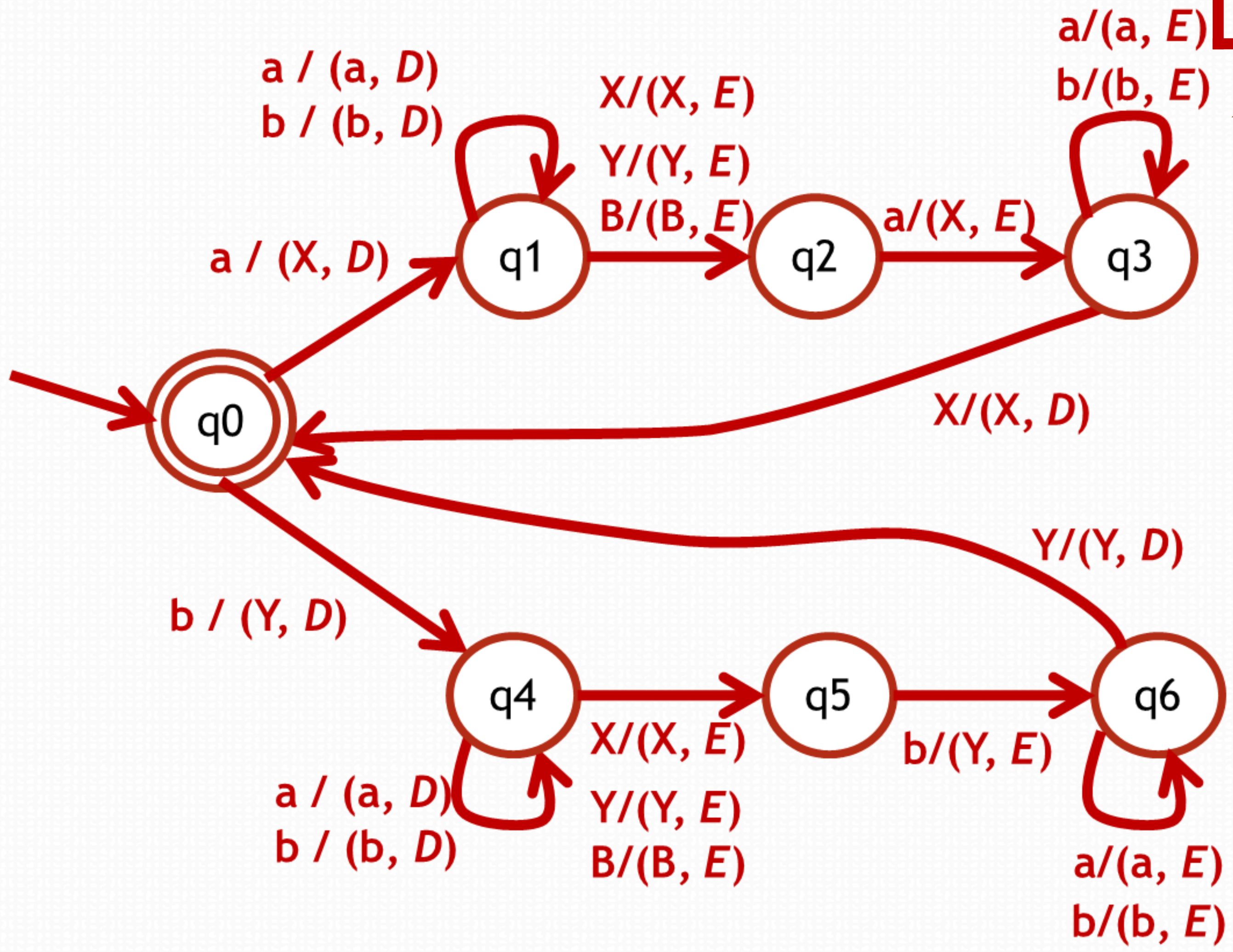
Máquinas de Turing

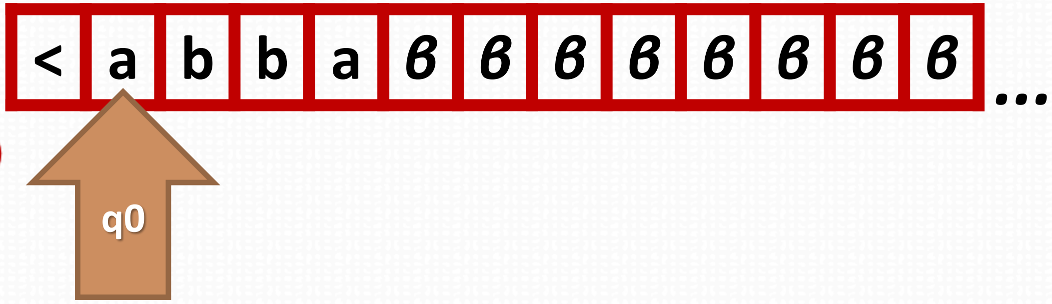
- Exemplo



Máquinas de Turing

- Exemplo



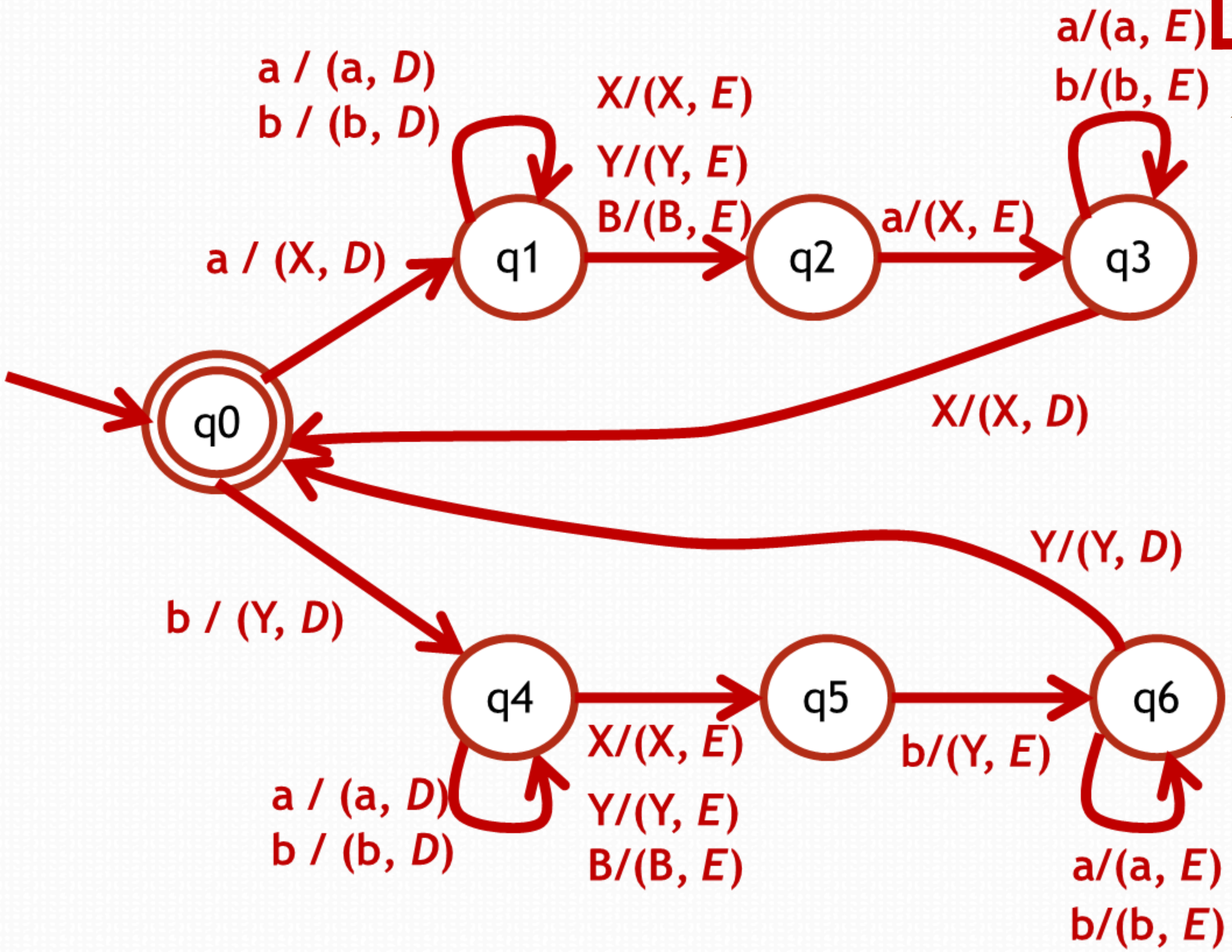


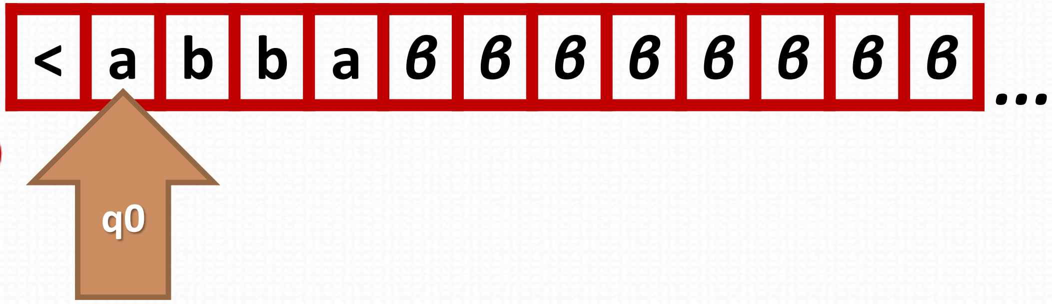
Estamos no estado q0!

Iremos executar a Máquina de Turing

Máquinas de Turing

- Exemplo

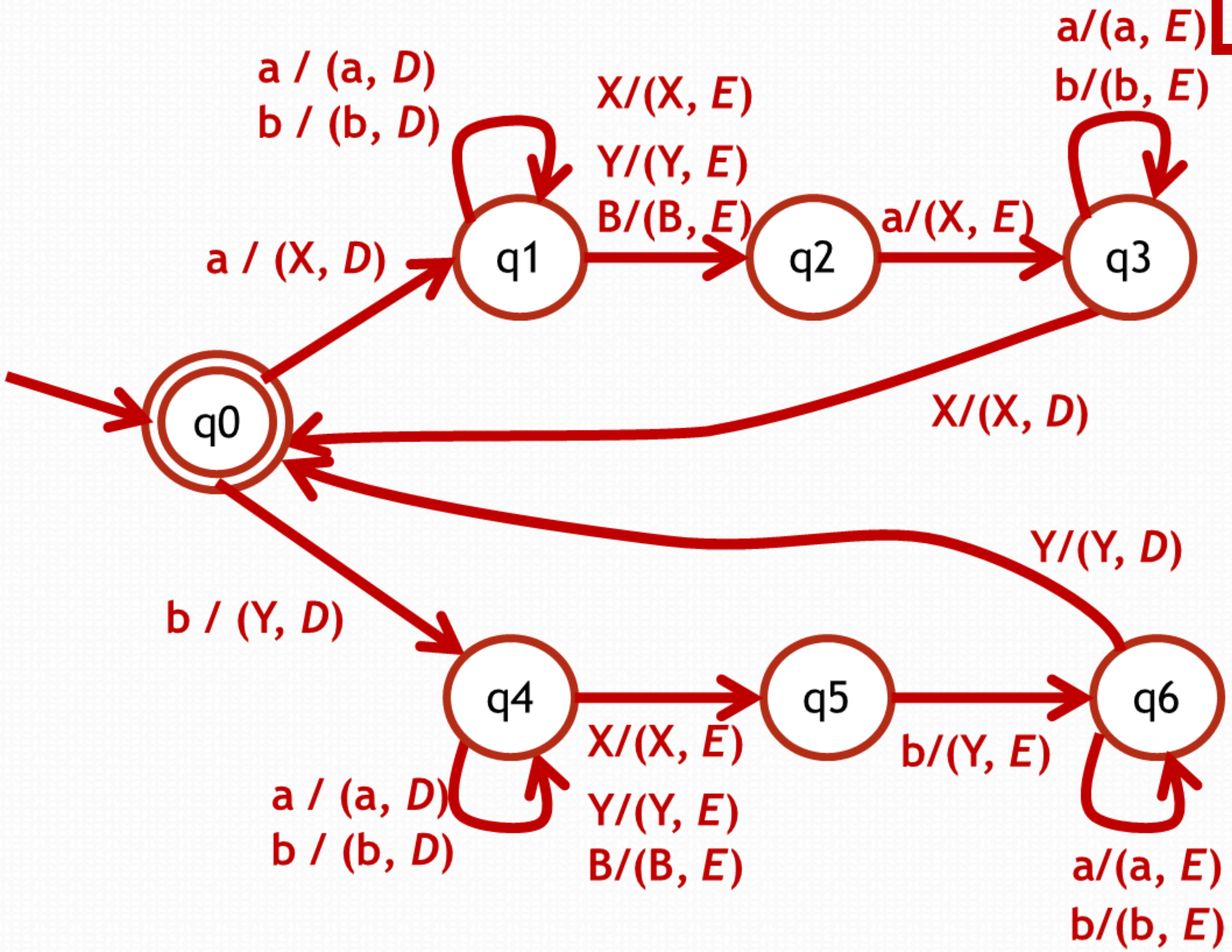


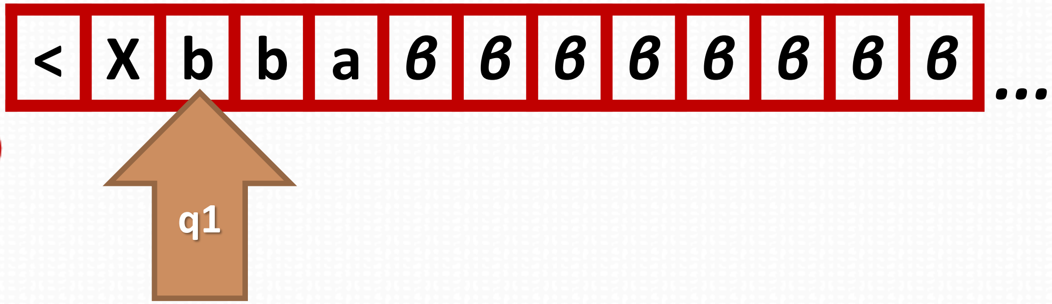


δ(q0,a)→(q1, X, *D*)

Máquinas de Turing

- Exemplo

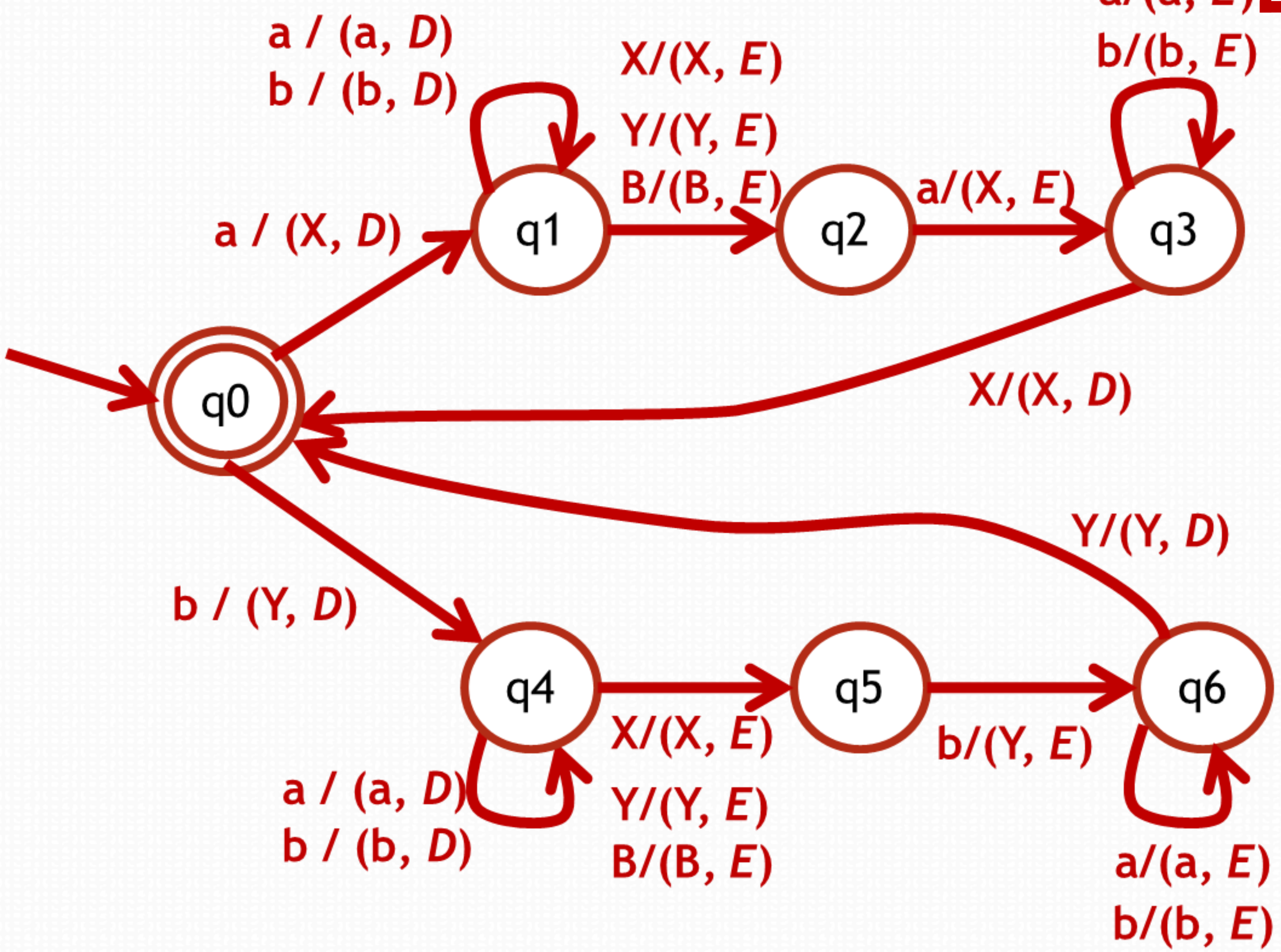


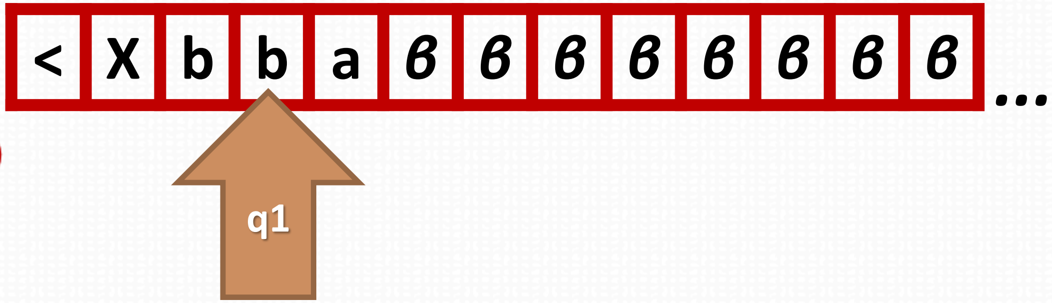


δ(q1,b)→(q1, b, *D*)

Máquinas de Turing

- Exemplo

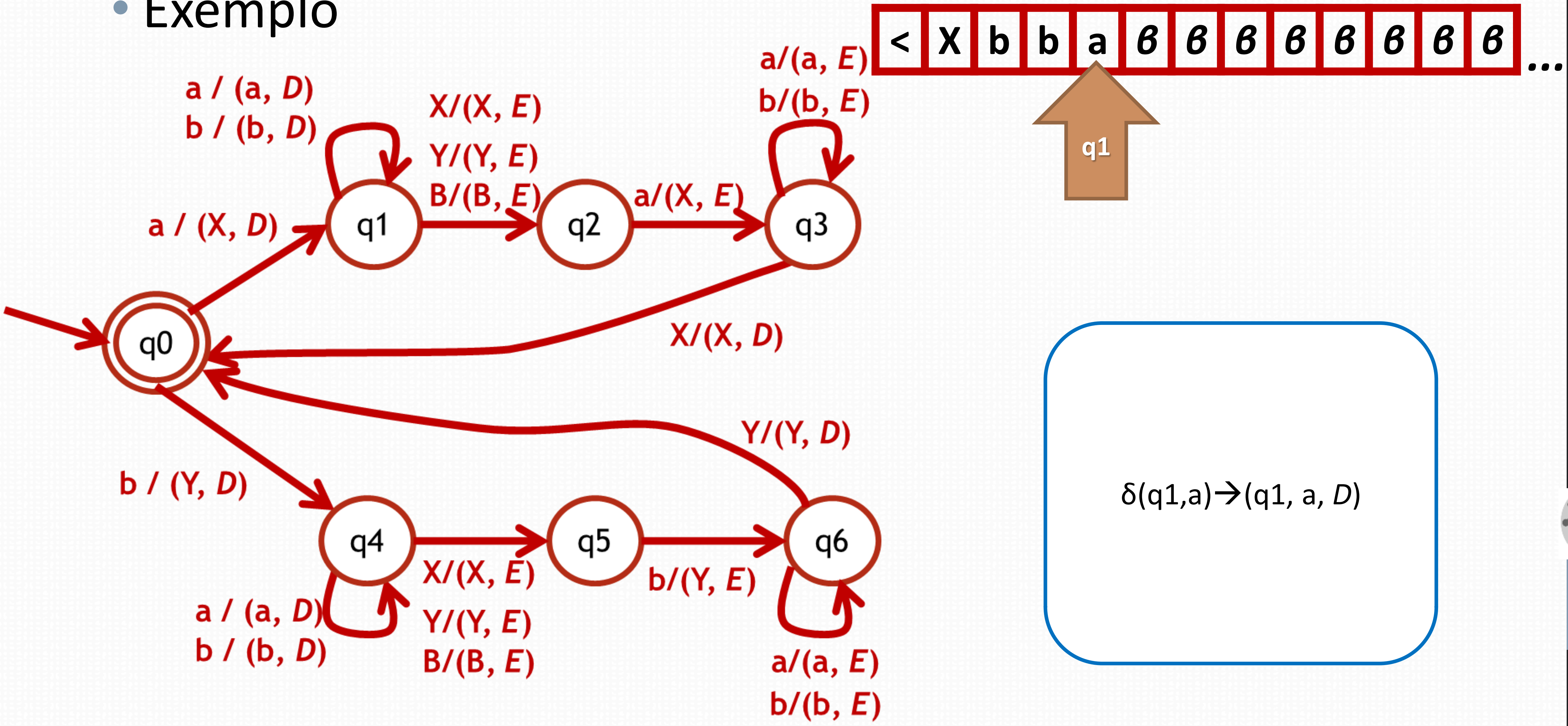




δ(q1,b)→(q1, b, *D*)

Máquinas de Turing

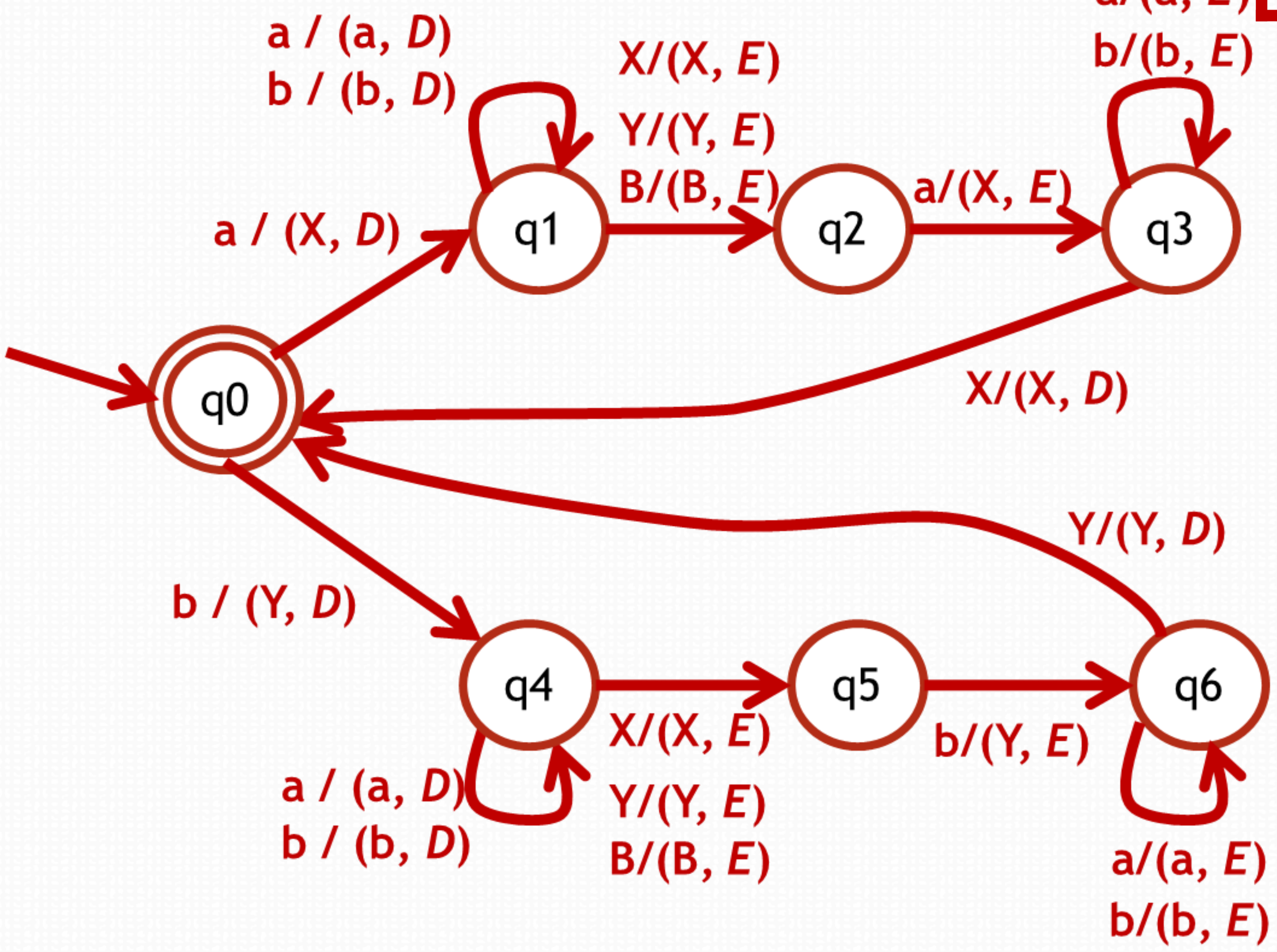
- Exemplo

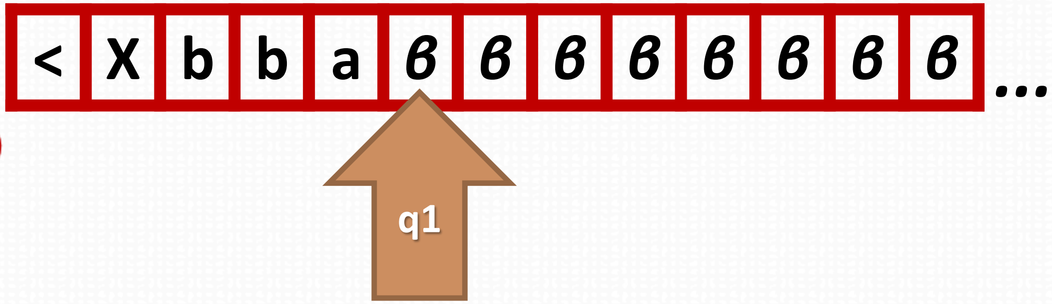


$\delta(q1,a) \rightarrow (q1, a, D)$

Máquinas de Turing

- Exemplo

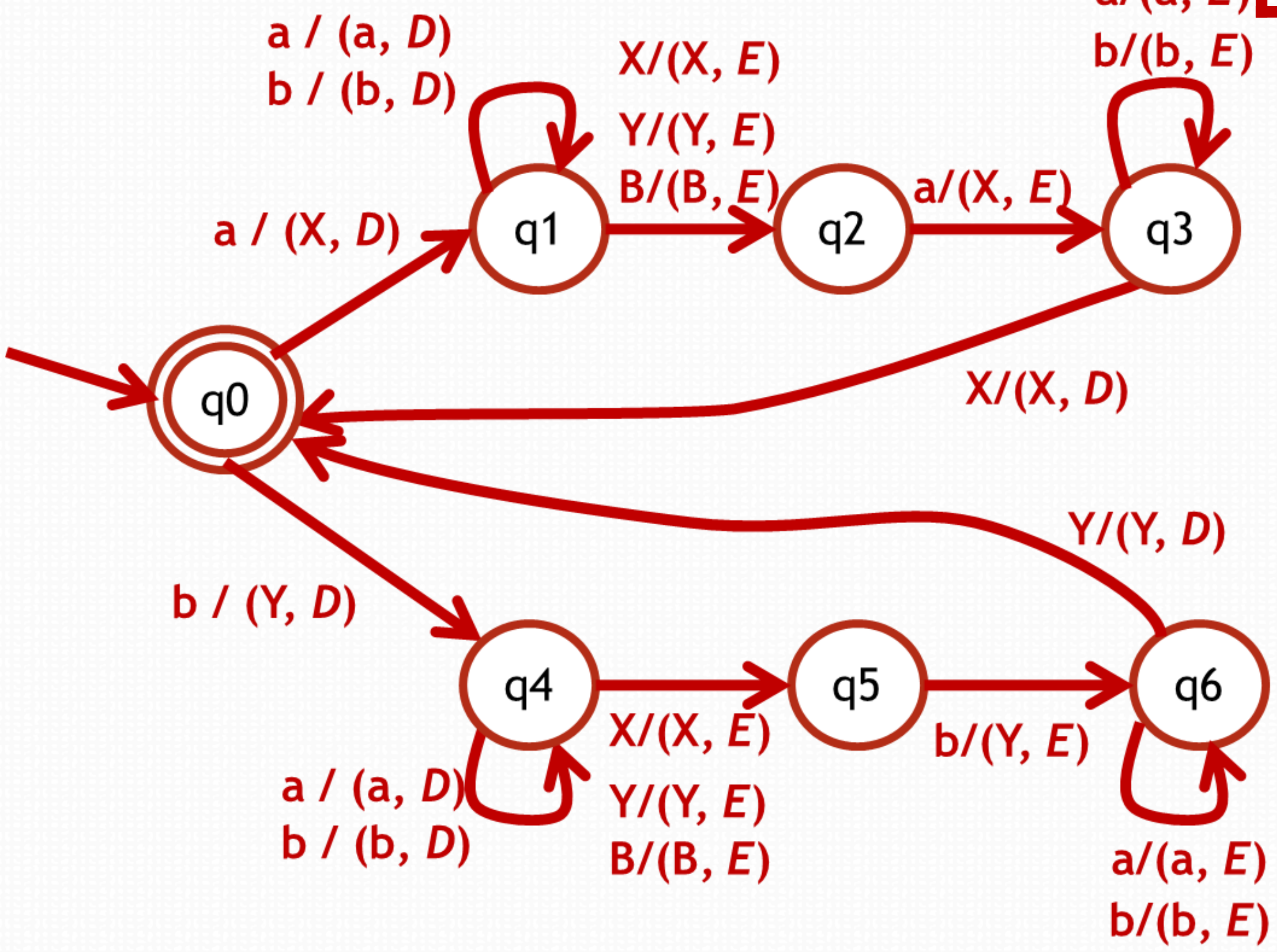


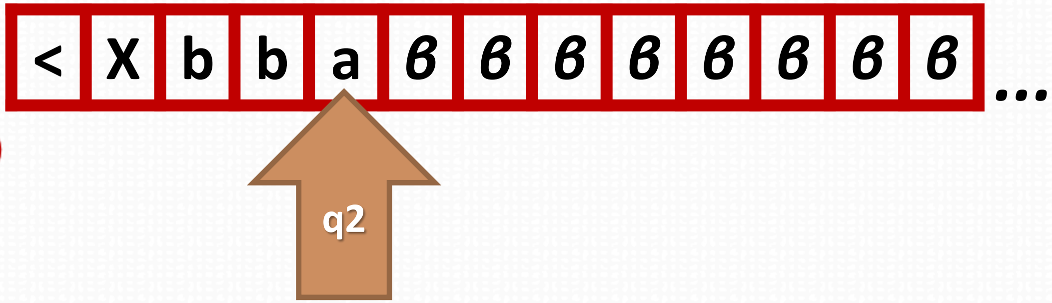


δ(q1,β)→(q2, β, E)

Máquinas de Turing

- Exemplo

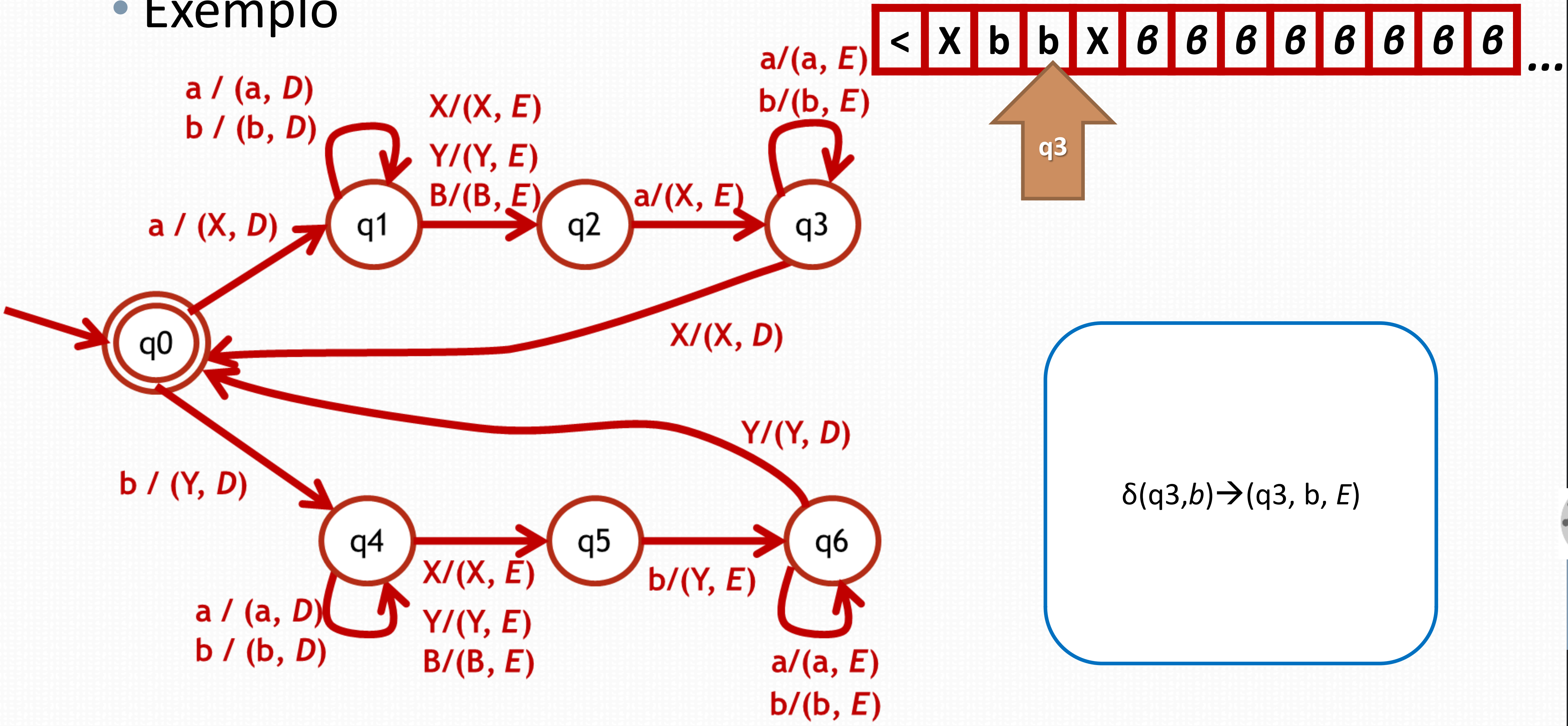




δ(q2,*a*)→(q3, X, *E*)

Máquinas de Turing

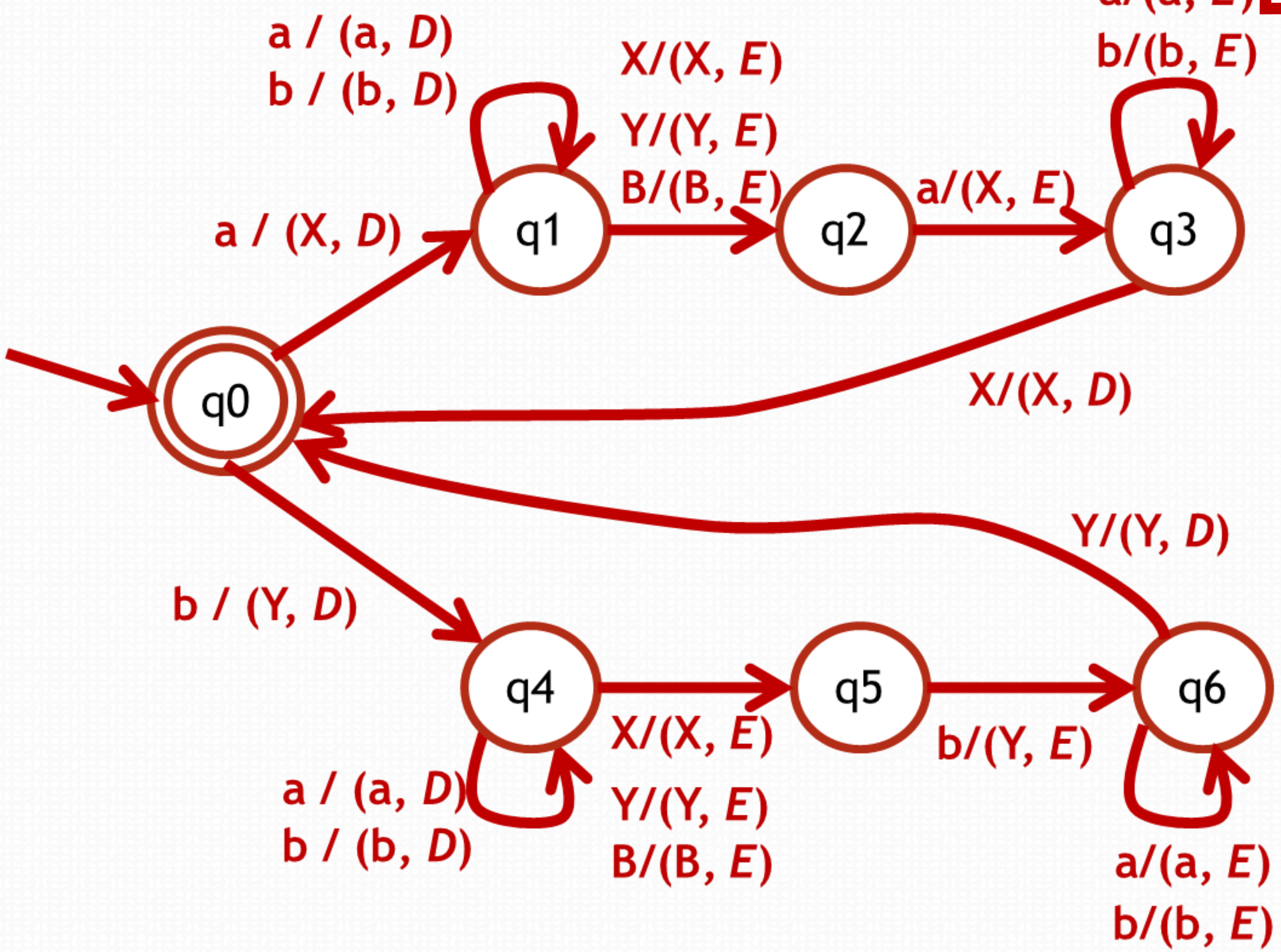
- Exemplo

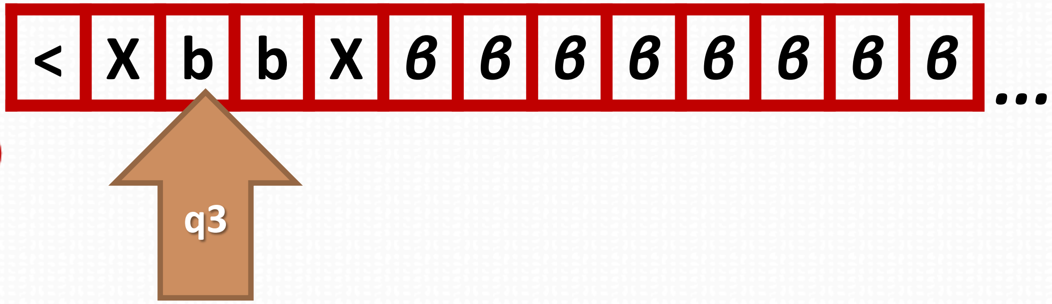


$\delta(q3,b) \rightarrow (q3, b, E)$

Máquinas de Turing

- Exemplo

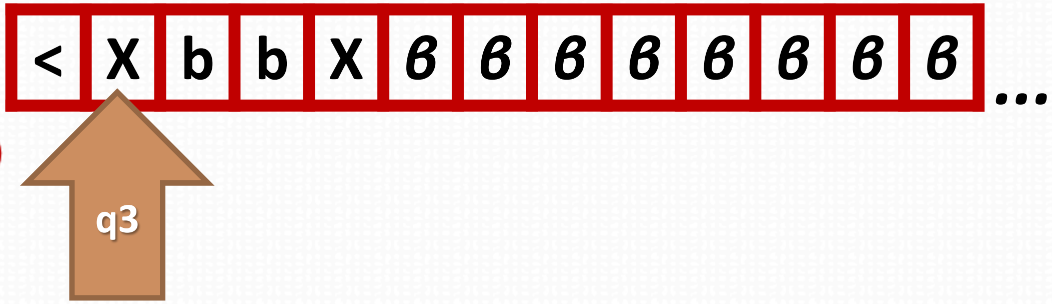


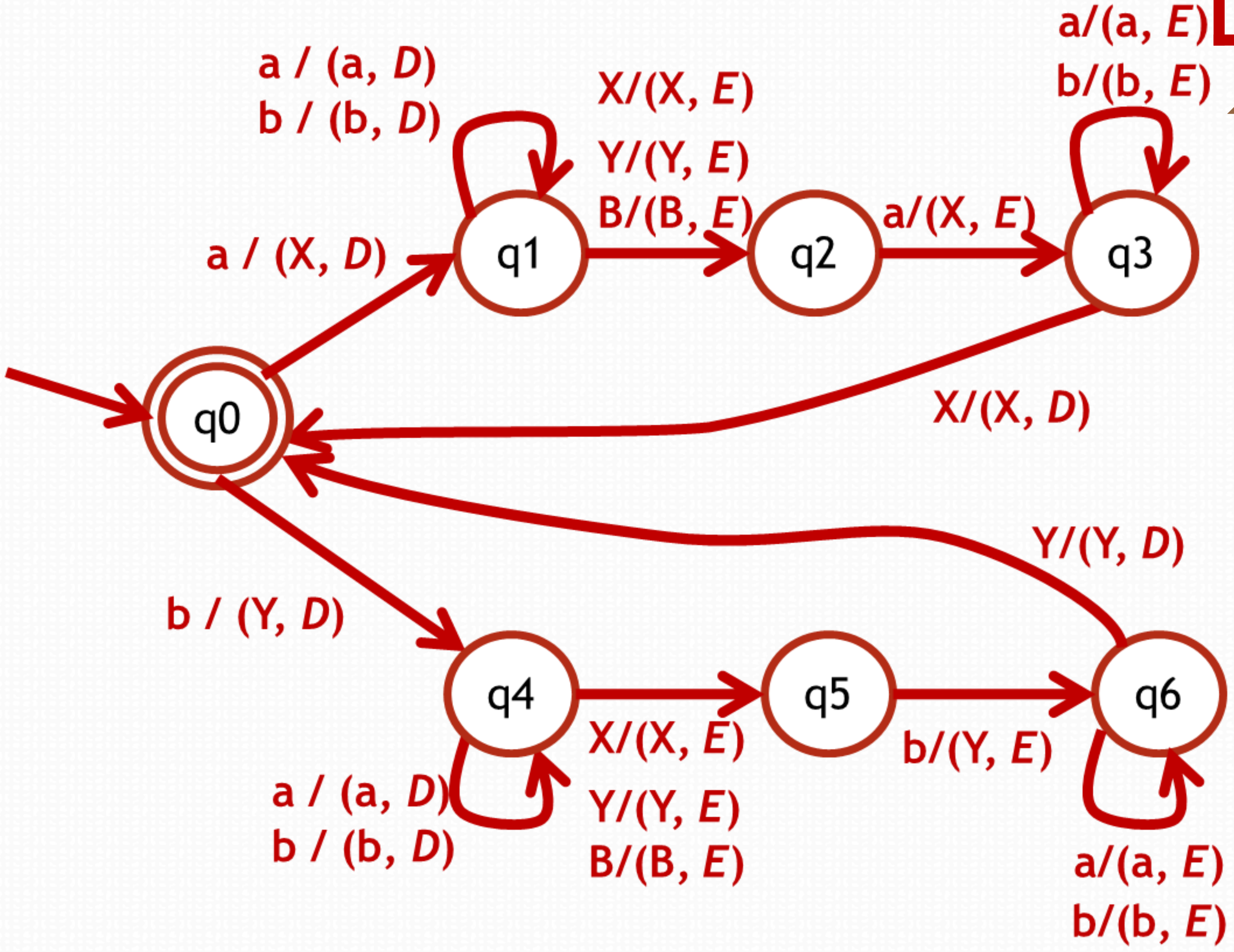


δ(q3,*b*)→(q3, b, *E*)

Máquinas de Turing

- Exemplo

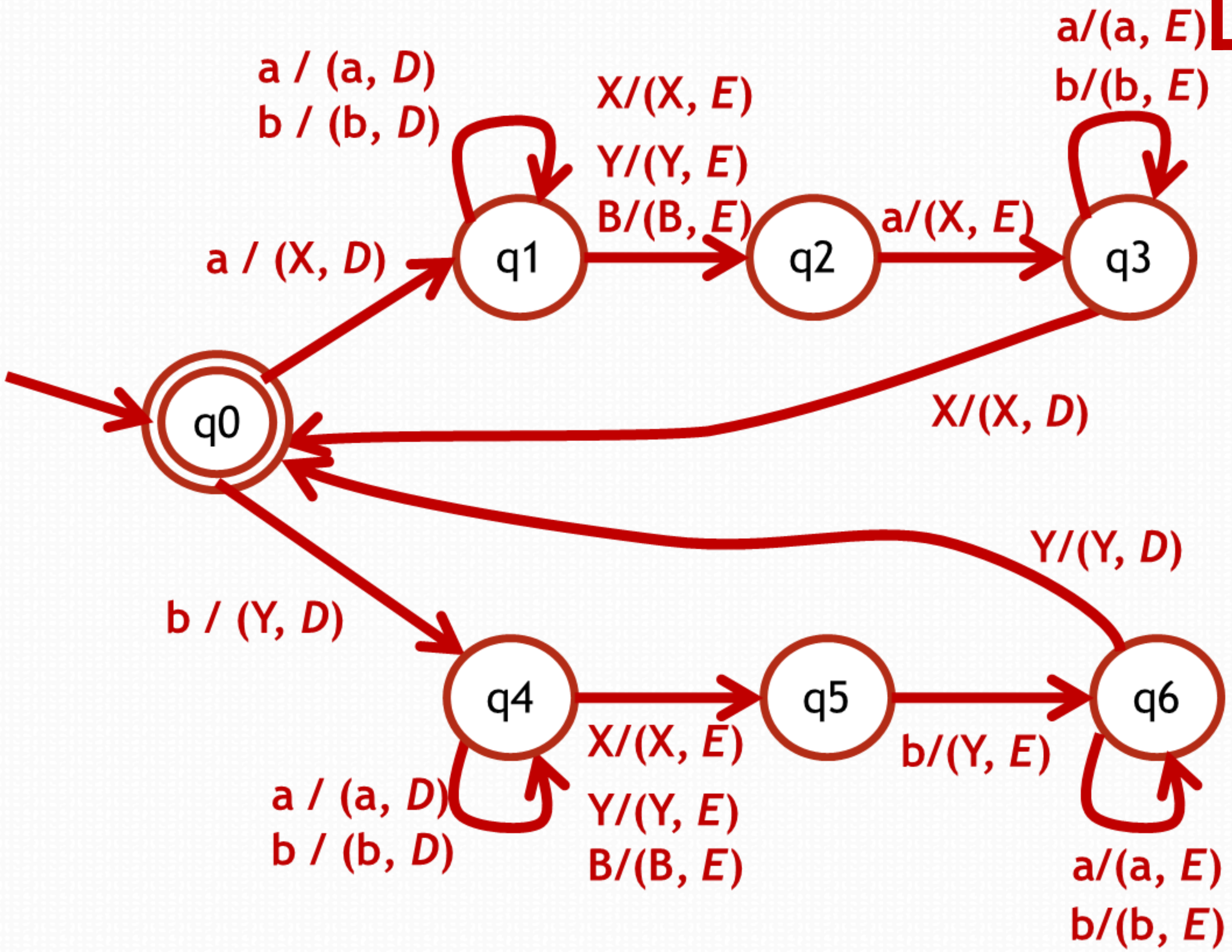


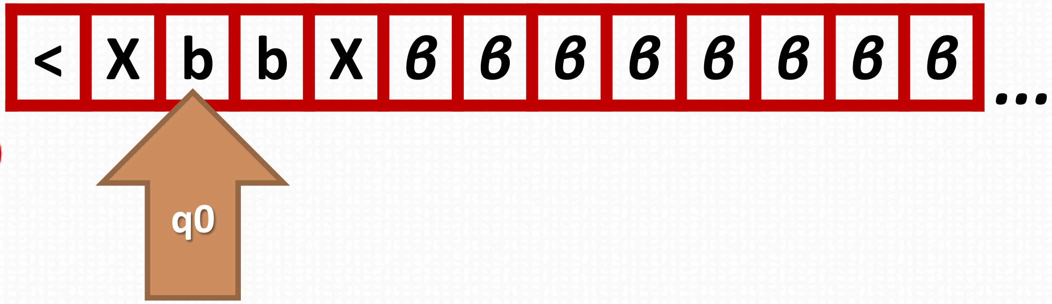


δ(q3,X)→(q0, X, *D*)

Máquinas de Turing

- Exemplo

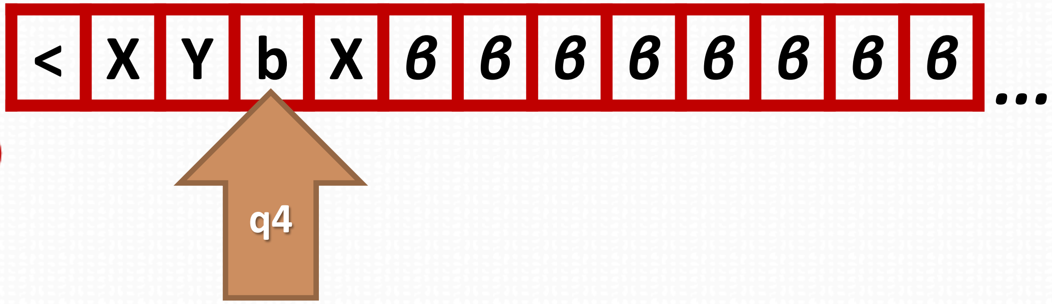


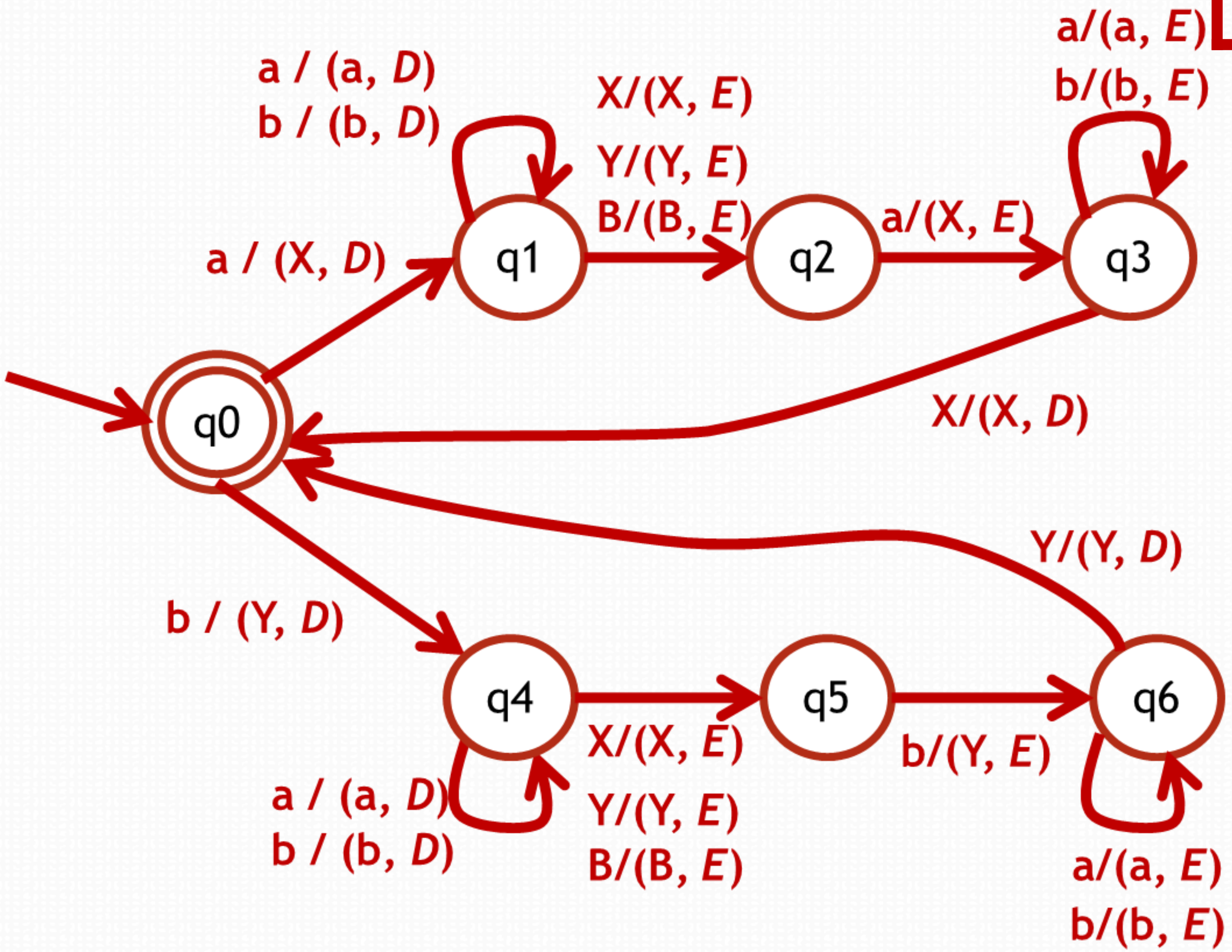


δ(q0,b)→(q4, Y, *D*)

Máquinas de Turing

- Exemplo

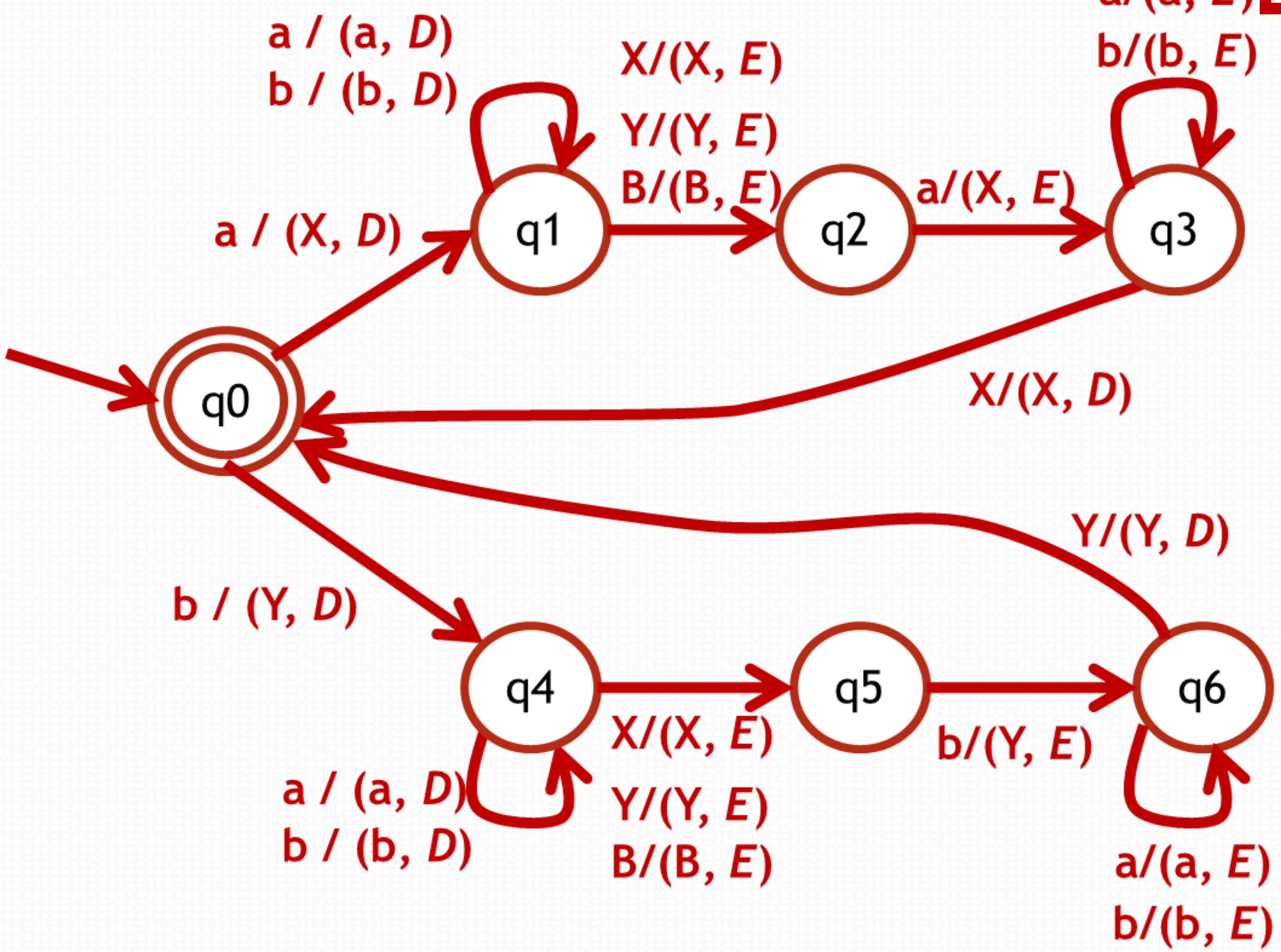


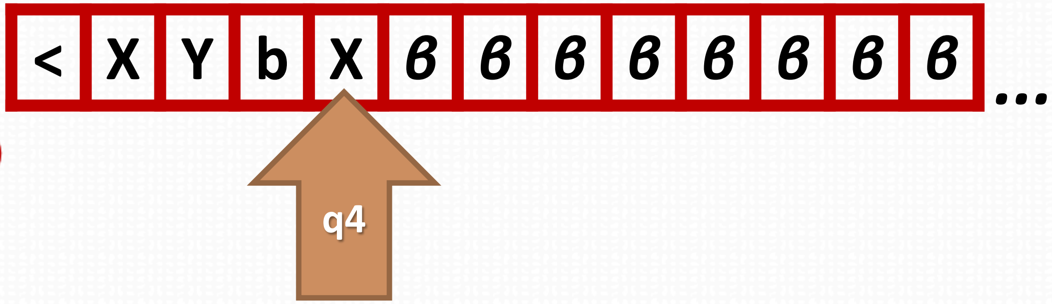


$\delta(q4,b) \rightarrow (q4, b, D)$

Máquinas de Turing

- Exemplo

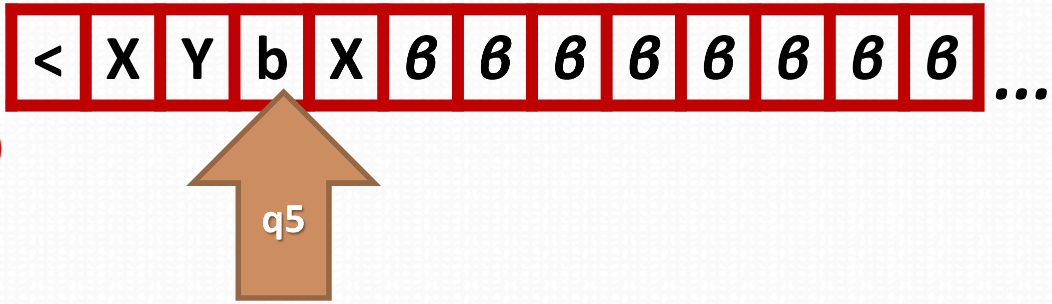


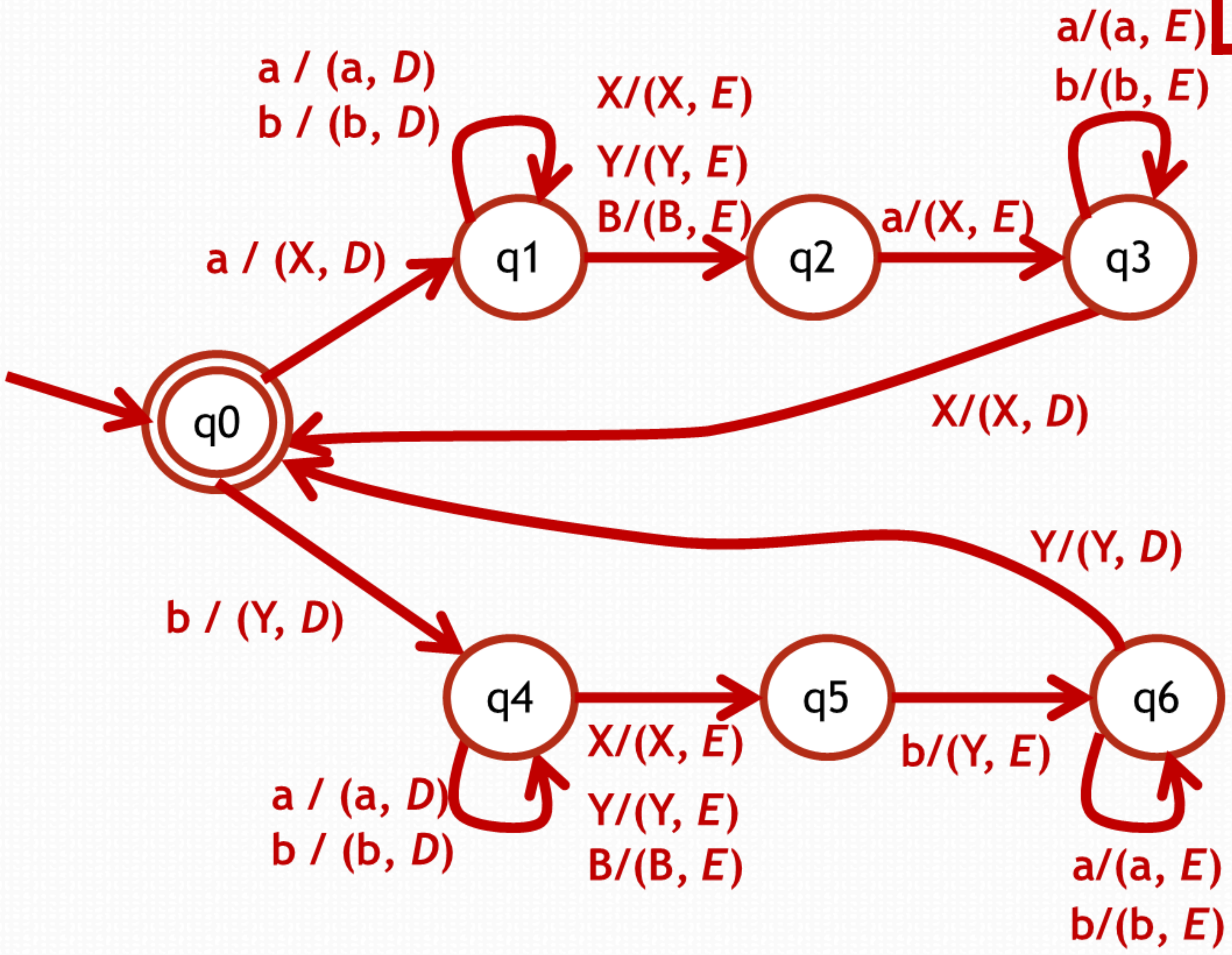


$\delta(q4,X) \rightarrow (q5, X, E)$

Máquinas de Turing

- Exemplo

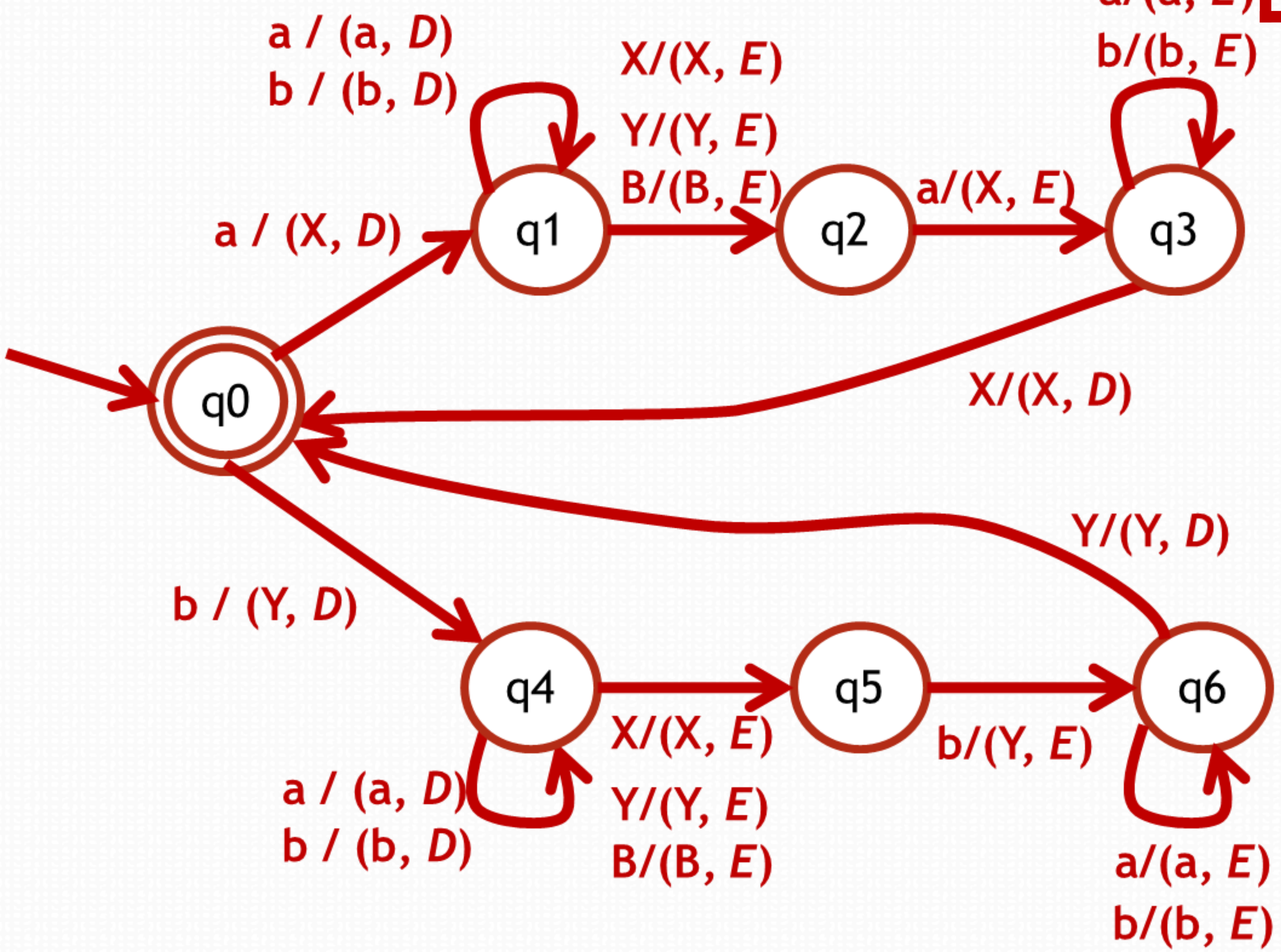


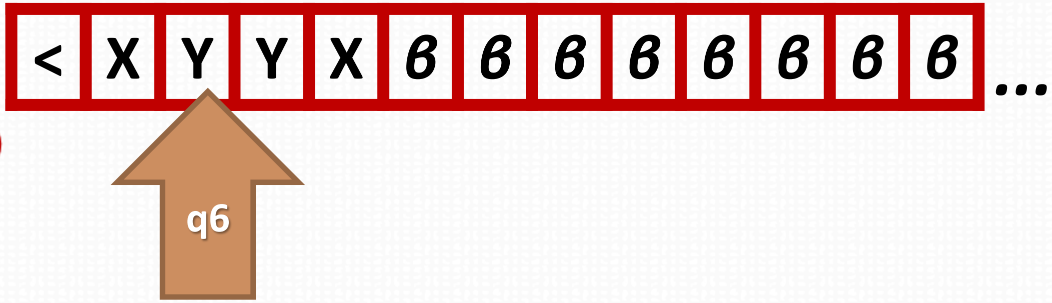


δ(q5,b)→(q6, Y, *E*)

Máquinas de Turing

- Exemplo

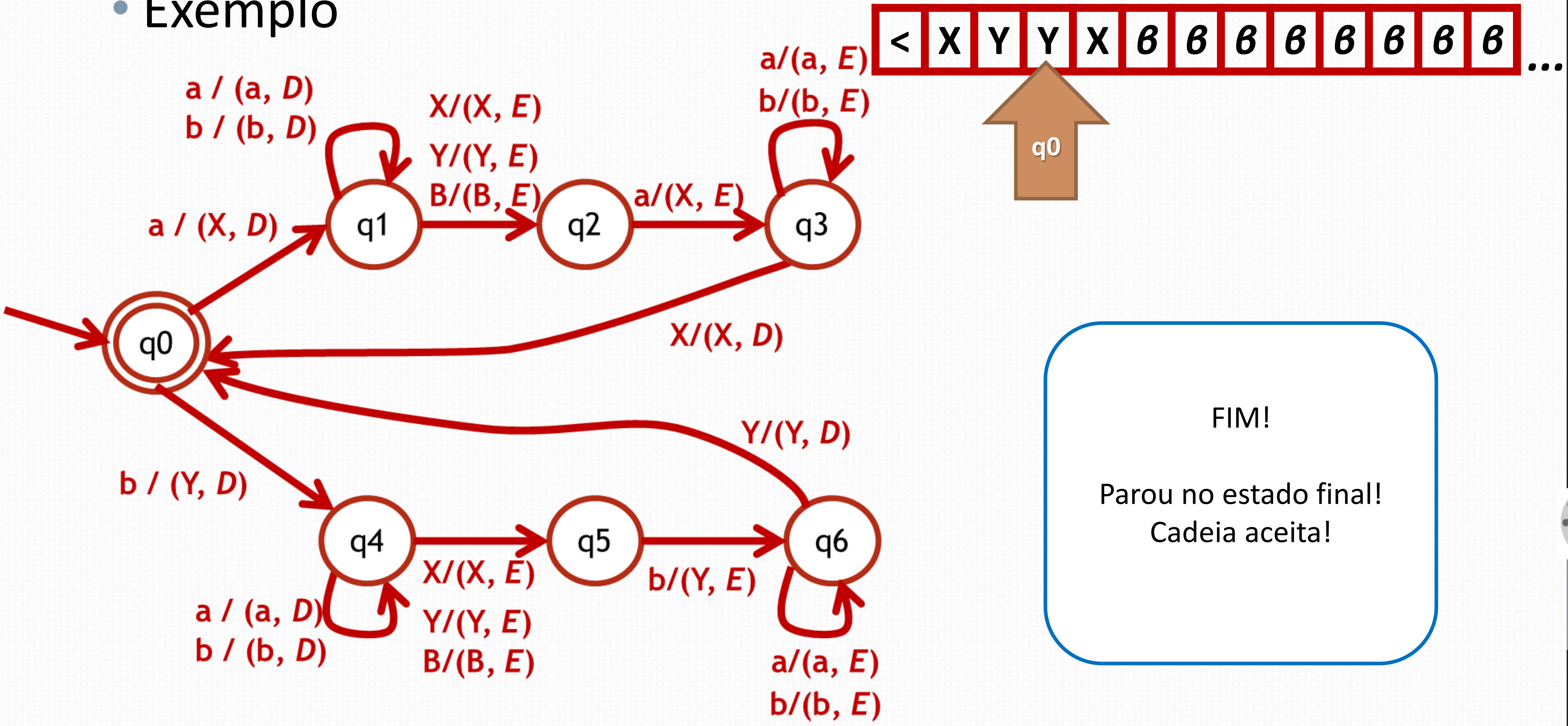




δ(q6,Y)→(q0, Y, *D*)

Máquinas de Turing

- Exemplo



FIM!

Parou no estado final!
Cadeia aceita!

Linguagens Recursivamente Enumeráveis

Introdução

- Uma linguagem é dita recursivamente enumerável (ou simplesmente irrestrita) se for aceita por pelo menos uma Máquina de Turing M:

  - para toda cadeia w pertencente a L, M pára e aceita w;

  - para toda cadeia z pertencente a Σ^*-L, M pára e rejeita z ou executa uma sequência infinita de movimentações

Introdução

- Possui como gramática a Gramática Irrestrita
- Como reconhecedor a Máquina de Turing (que pode executar eternamente)

Gramáticas Irrestritas

Gramática Irrestrita

- Definição formal de uma Gramática Irrestrita:

$$G = (V, \Sigma, P, S)$$

$$V = \Sigma \cup N, \text{sendo N} = \text{não - terminais}$$

$$\Sigma = alfabeto$$

$$P = \{\alpha \rightarrow \beta \mid \alpha \in \mathrm{V}^{+},\ \beta \in \mathrm{V}^{*}\}$$

$$S = \text{não - terminal inicial}$$

Gramática Irrestrita

- Exemplo:
  - G_1 – ({S,A,B,C,a,b,c}, {a, b, c}, *P*, *S*), com

P =
{
S → aAbcC,
bc → B,
ABC → b
}

Gramática Irrestrita

- Exemplo:
  - G_2 – ({S,A,B,C,X,Y,Z,a,b,c}, {a, b, c}, *P*, *S*), com

P =
{
S → XAYZC,
YZ → B,
ABC → Y,
X → a,
Y → b,
Z → c
}

Gramática Irrestrita

- Exemplo:
  - G_3 – ({S,A,C,a,b,c}, {a, b, c}, *P*, *S*), com

P =
{
S → aAbc,
A → aAbC|ε,
Cb → bC,
Cc → cc
}

UNIVALI

Classes de Linguagens e suas Características Principais

Classes de Linguagens

Tipo	Classe	Gramática	Reconhecedor
3	Regular	Regular	Autômato Finito
2	Livre de Contexto	Livre de contexto	Autômato de Pilha
1	Sensível ao Contexto	Sensível ao contexto	Máquina de Turing com fita limitada
0	Recursiva	?	Máquina de Turing que sempre pára
	Recursivamente enumerável	Irrestrita	Máquina de Turing
N.A.	Não-gramaticais	N.A.	?