

Fluxo Máximo

GRAFOS

Fluxo em redes

É a transferência de algum tipo de recurso quantificável e sujeito a restrições de equilíbrio, de um local(nó origem) para outro(nó sorvedor) através da rede.

Fluxo em rede

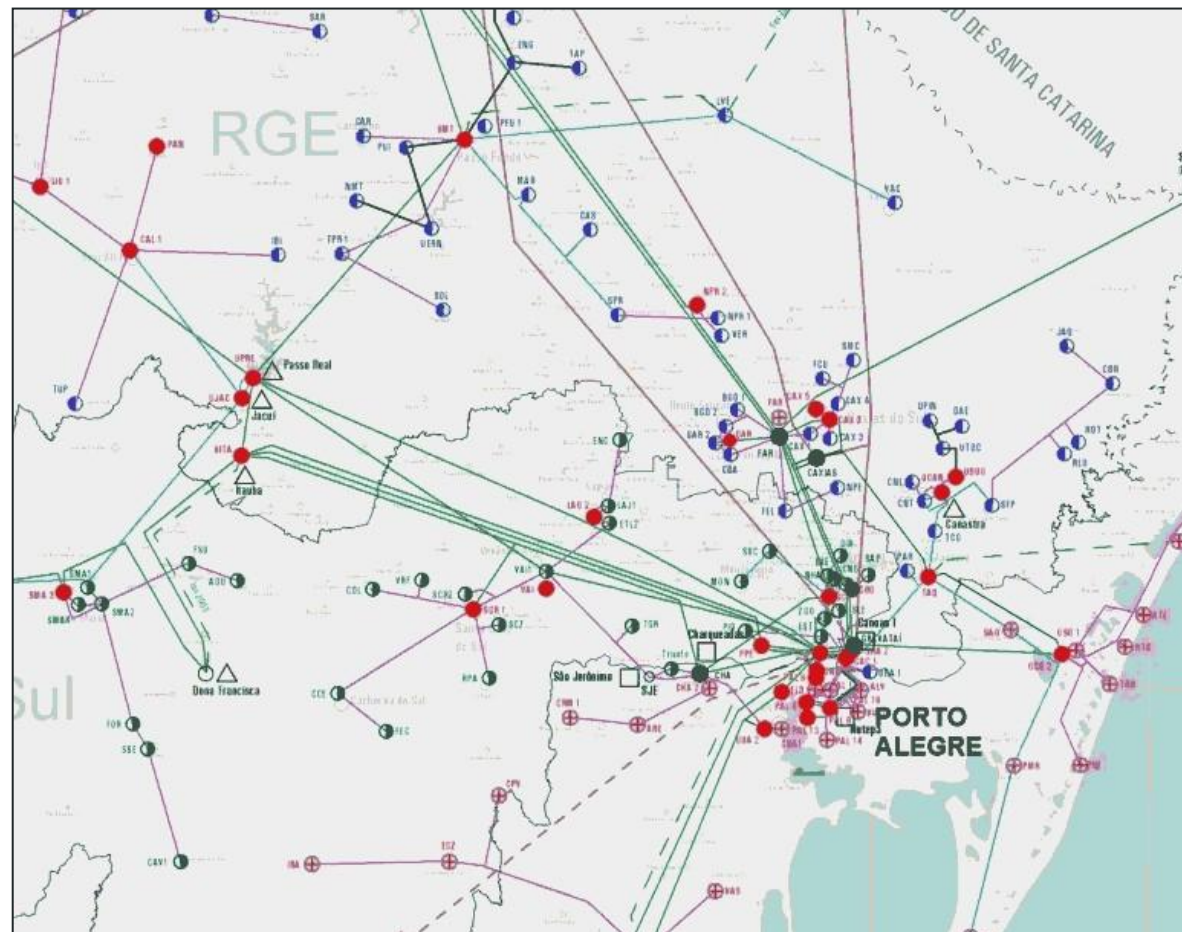
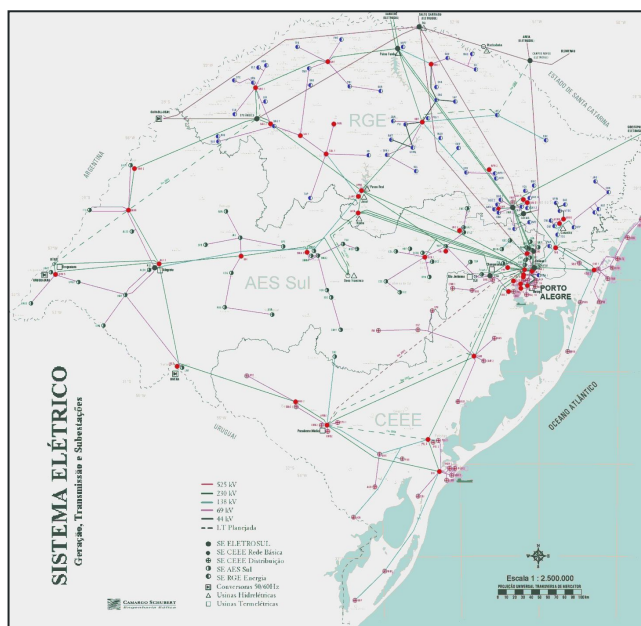
- Um fluxo em rede $G=(V,E)$ é um grafo orientado em que cada aresta $(u,v) \in E$ e tem uma capacidade não negativa $c(u,v) \geq 0$.
- E =conjunto de arestas
- V =conjunto de vértices
- u =fonte (origem) e v =sorvedor(destino)
- Cada vértice reside em algum caminho de u a v

Exemplos

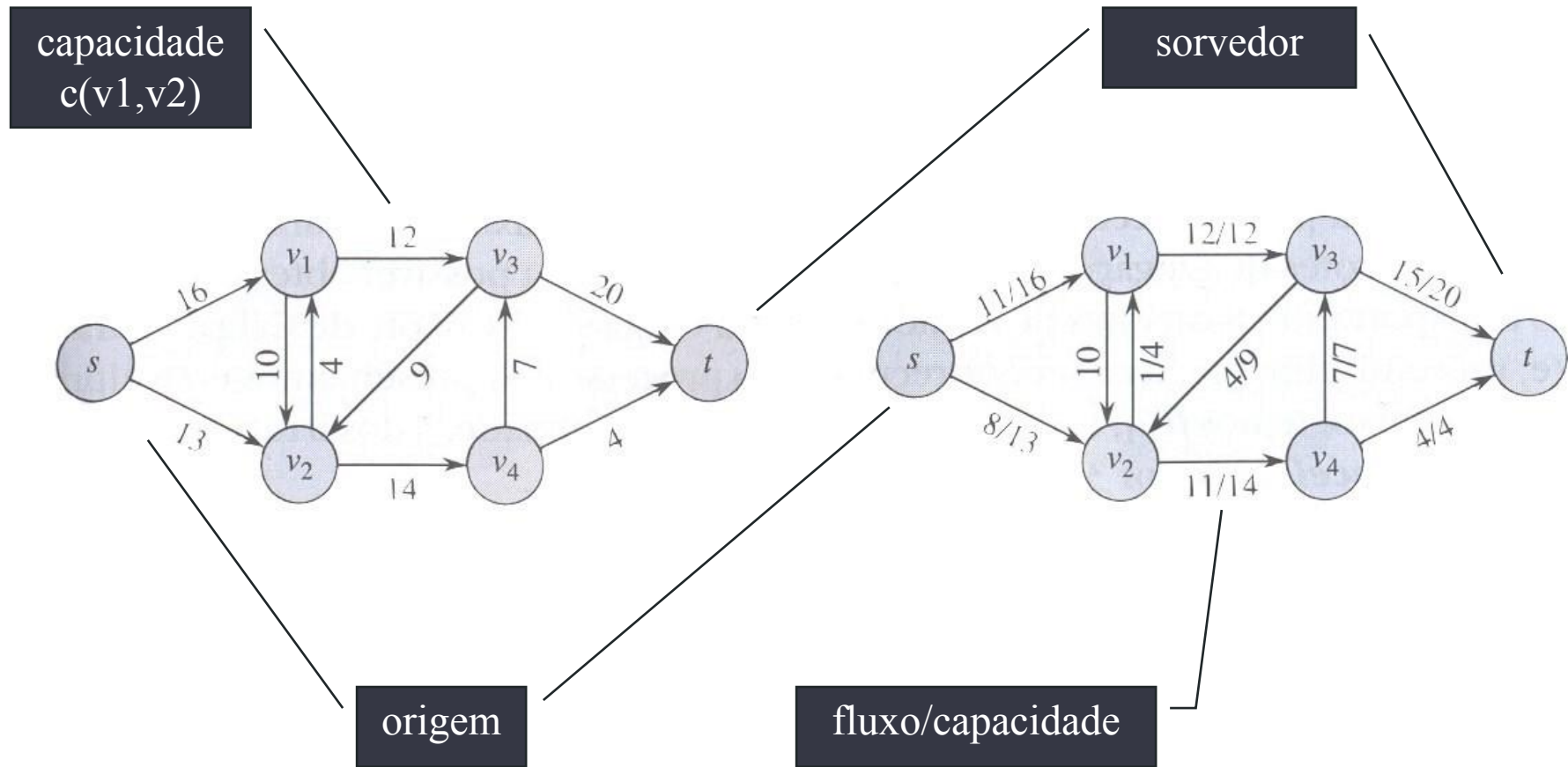
- Líquido fluindo por uma rede de tubos, como a rede de abastecimento de água ou a rede de esgoto
- Peças se deslocando por linhas de montagem
- Voz, imagem ou dados em redes de comunicação
- Sistemas Elétricos de Transmissão

Exemples

Sistema Elétrico do Rio Grande do Sul



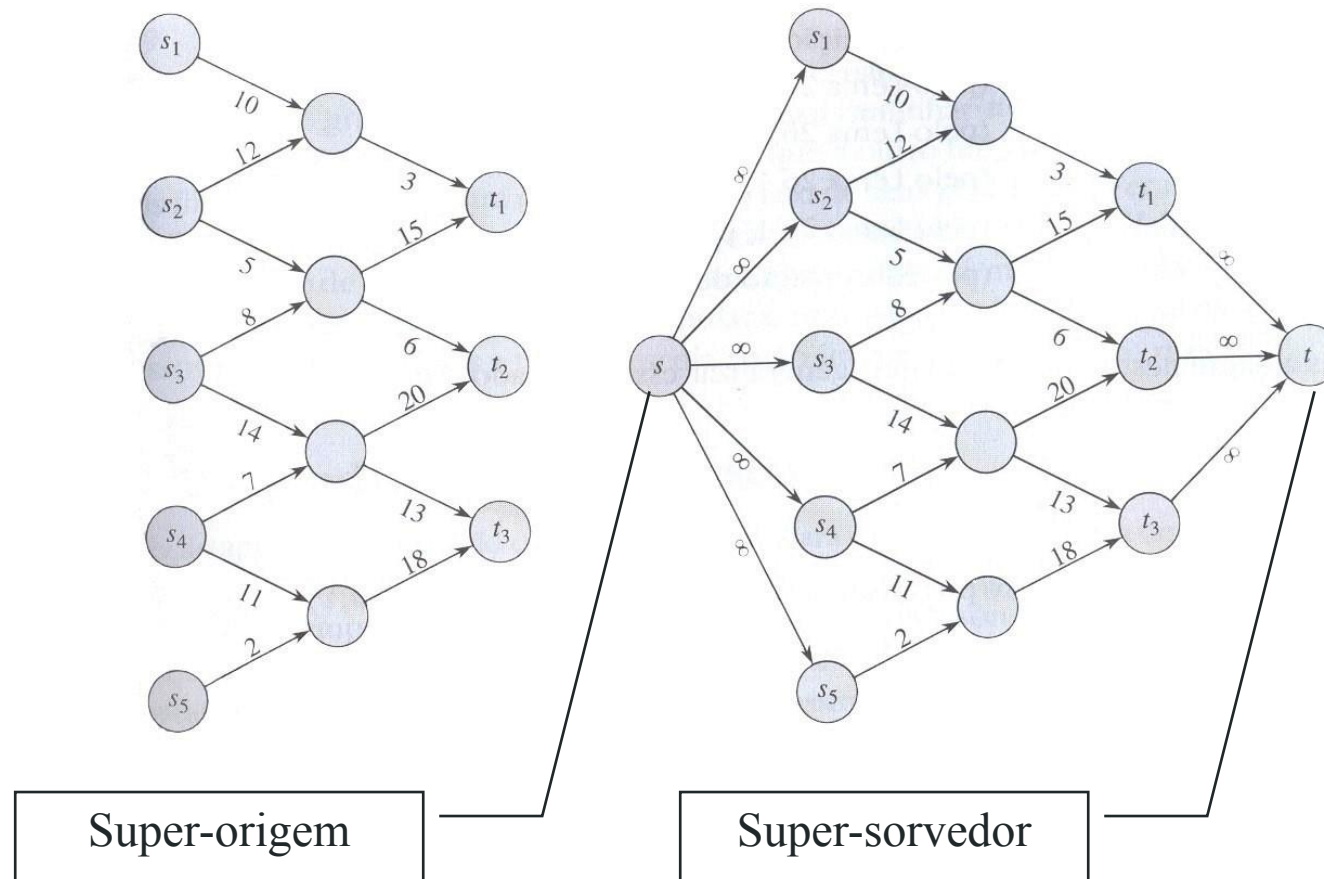
Exemplo



Fluxo em Redes

- Redes de fluxo com múltiplas fontes e/ou sorvedouros:
 - Definir super-fonte que liga a todas as fontes;
 - Definir super-sorvedor ao qual todos os sorvedores se ligam;
 - Capacidades infinitas entre super-fonte e fontes, e entre sorvedores e super-sorvedor.

Fluxo em Redes



Fluxo Máximo

- Número máximo de unidades de fluxo que é possível enviar através da rede desde o nó origem (fonte) até o nó destino (sorvedor) sem violar quaisquer restrições de capacidade.
- Considera-se que há conservação de fluxo, ou seja, que o fluxo que parte da origem chega totalmente ao destino não havendo, portanto, perdas no caminho.

Aplicações

- Considere a seguinte situação modelada por um grafo:
 - Cada arco representa uma rua.
 - O peso de cada aresta indica o maior fluxo possível ao longo da rua (veículos/hora).
- Qual o maior número possível de veículos que pode viajar do local u até o local v em uma hora?



Aplicações

- Outra situação:
- Imagine que uma empresa deseja transportar a maior quantidade possível de produtos de uma cidade para outra, através da rede rodoviária.
- A restrição do transporte pode ser o número disponível de caminhões da empresa para fazer cada trajeto entre cada cidade intermediária.
- Então como determinar o fluxo máximo possível entre as duas cidades?

Fluxo Máximo

- Para resolver o problema do fluxo máximo foram propostos alguns algoritmos:
 - Método de Ford-Fulkerson, que foi o primeiro algoritmo proposto;
 - Algoritmo de Edmonds-Karp, que é o próprio Ford-Fulkerson com busca em largura para definir o caminho aumentante;
 - Método de push-relabel, que é mais rápido que os anteriores;
 - Goldberg e Tarjan propuseram um novo método conhecido como método do pré-fluxo.

Método de Ford-Fulkerson

- Depende de duas ideias importantes:
 - Redes residuais: Consiste em arestas que podem admitir mais fluxo.
 - Caminhos em ampliação: Consiste de um caminho simples desde a origem até o destino através da rede residual.

Método de Ford-Fukerson

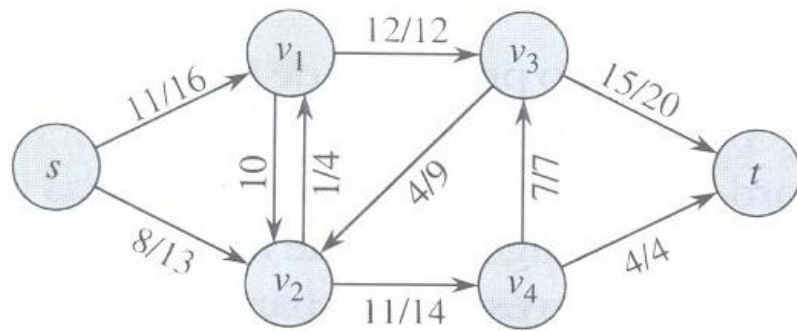
- Considerando-se uma rede G e um fluxo f , a rede residual G_f consiste em arestas que podem admitir mais fluxo.

A capacidade residual c_f é a quantidade de fluxo adicional que pode passar por (u, v) sem exceder a capacidade $c(u, v)$:

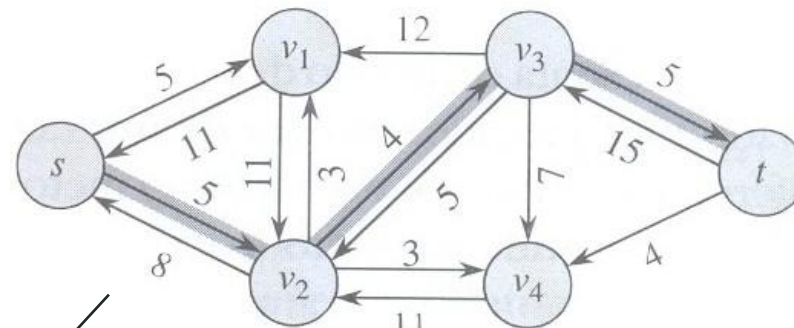
$$c_f(u, v) = c(u, v) - f(u, v)$$

Obs: u e v são dois vértices quaisquer da rede G

Exemplo

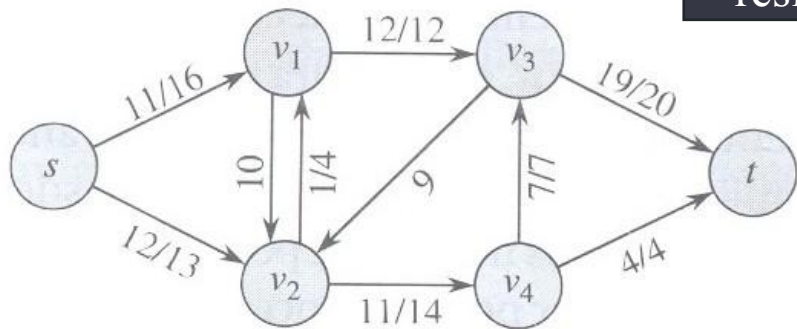


(a)

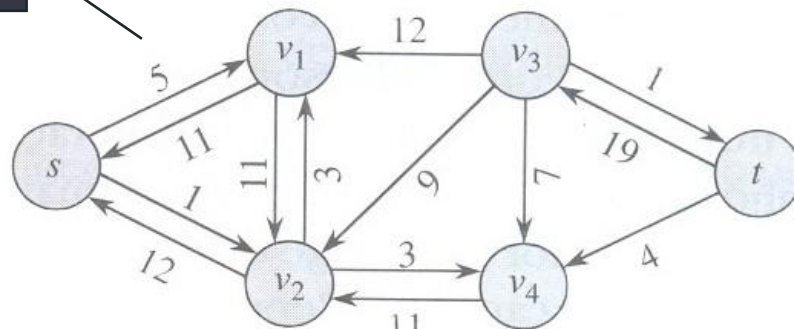


(b)

Redes
residuais



(c)



(d)

Caminhos aumentantes

- São caminhos simples da origem(s) ao sorvedor(t) através da rede residual G_f .

A capacidade residual de um caminho aumentante p , corresponde à menor dentre as capacidades residuais das arestas que fazem parte de p .

$$c_f = \min\{c_f(u,v) \mid (u,v) \text{ está em } p\}$$

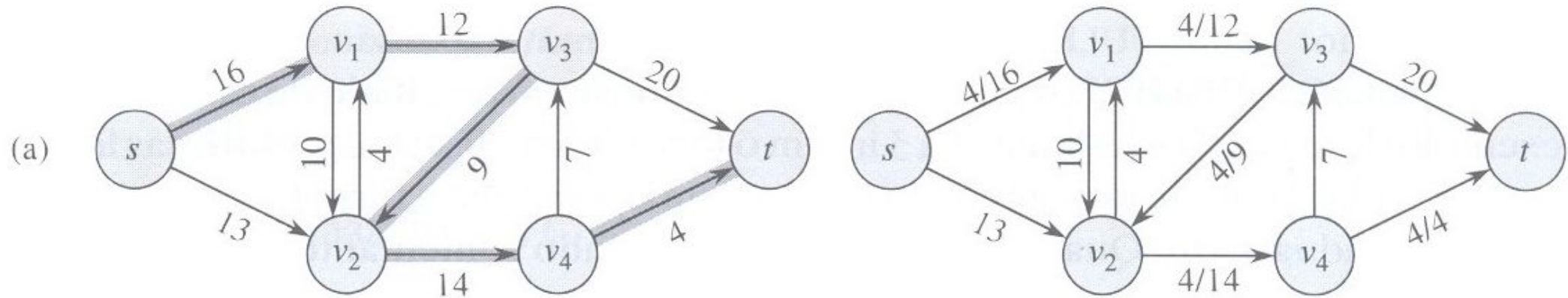
Método de Ford-Fukerson

- Os passos de cada iteração do algoritmo podem ser resumidos do seguinte modo:
 - Criar um grafo auxiliar como uma cópia do grafo original
 - Criar um inteiro S para solução iniciado com 0.
 - Enquanto existir pelo menos um caminho P de capacidade positiva da fonte até o sorvedor
 - Encontrar o menor arco A do caminho P
 - Somar o valor de A à solução S
 - Para cada arco (u,v) no caminho P
 - Subtrair o valor de A no arco (u,v)
 - Se existir um arco (v,u)
 - Somar o valor de A no arco (v,u)
 - Senão
 - Criar um arco (v,u) com o valor de A

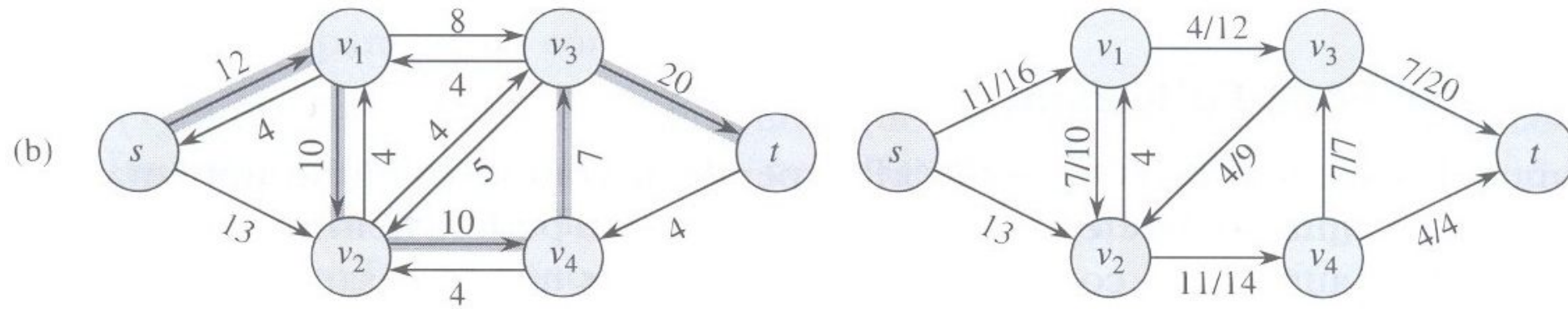
Método de Ford-Fukerson

- A cópia do grafo é feita pois ela representa a capacidade atual de fluxo daquela aresta, como se estivéssemos aos poucos aumentando a demanda ao sistema. Enquanto o grafo original manterá a capacidade geral do sistema.
- No momento de somar o fluxo no sentido inverso, caso não exista um arco, ele deve ser criado com o peso do valor que seria somado. Este valor de capacidade pode parecer um pouco estranho, mas ele representa o quanto de fluxo está passando por ali e eu posso “redirecionar” para outro caminho.

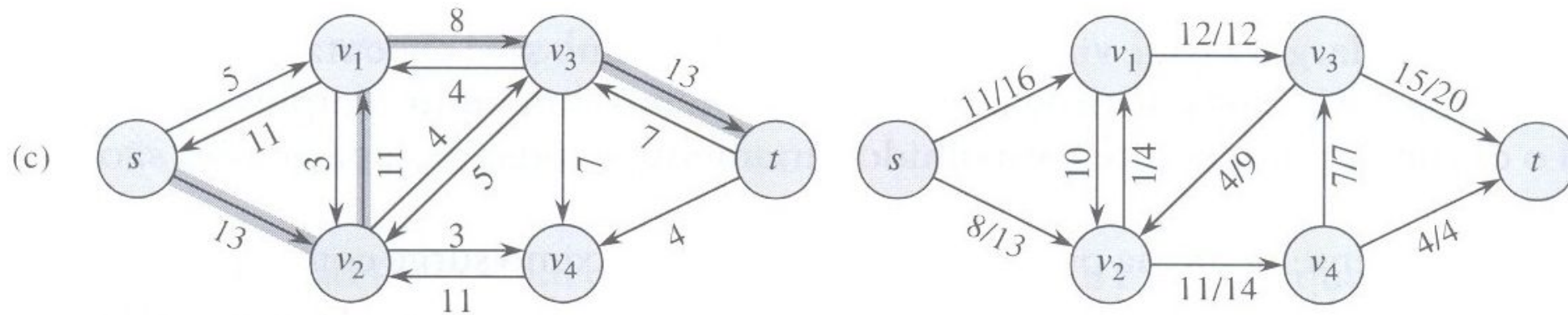
Método de Ford-Fukerson



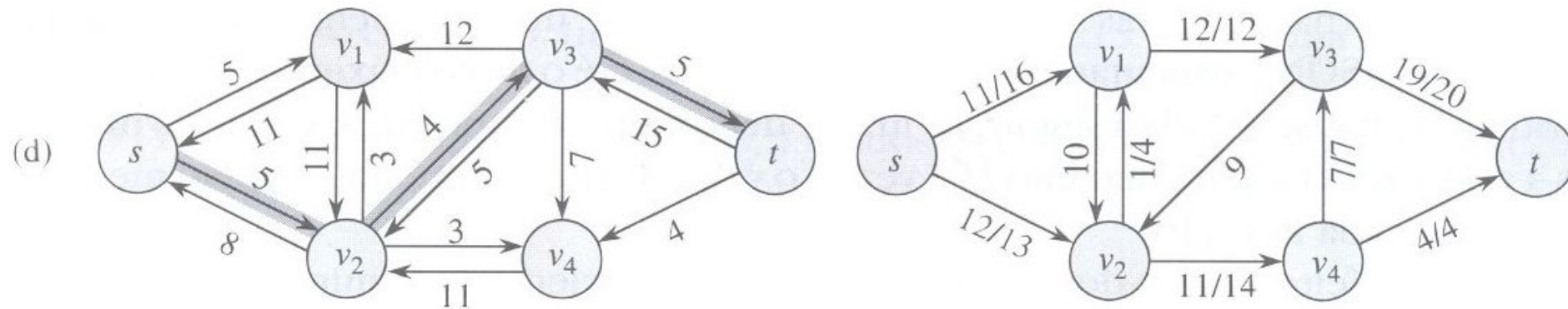
Método de Ford-Fukerson



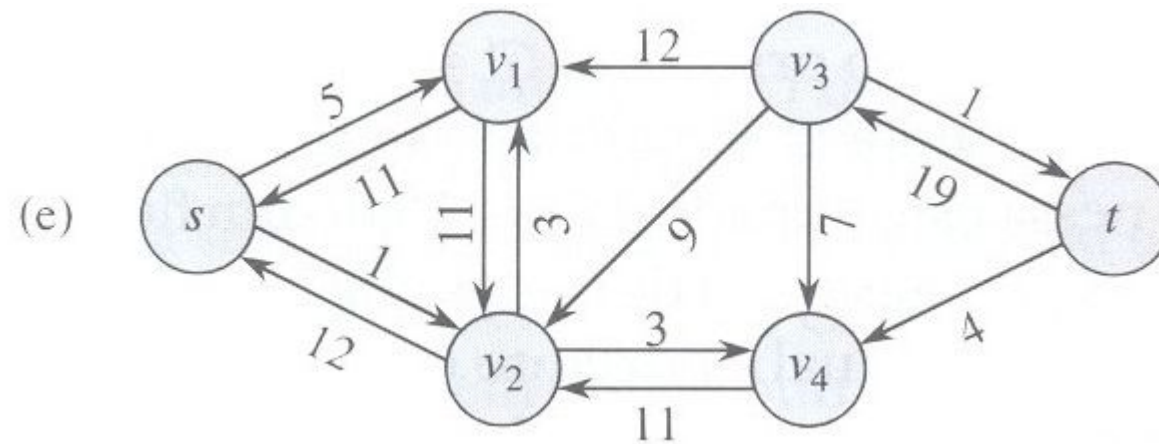
Método de Ford-Fukerson



Método de Ford-Fukerson



Método de Ford-Fukerson

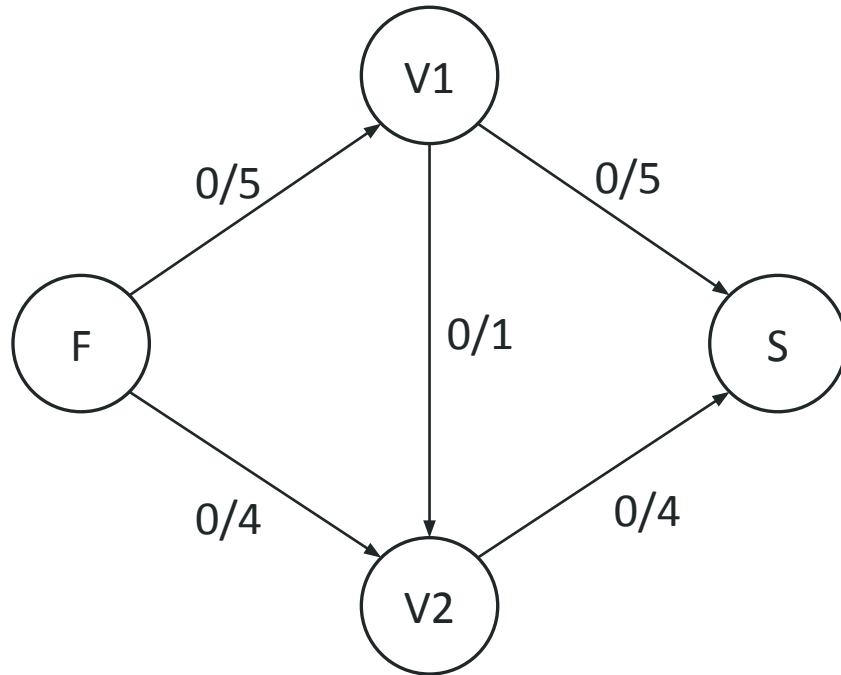


Não existem mais nenhum caminho possível que vá da origem até o sorvedouro
O Fluxo máximo é 23 (melhor visto no slide anterior)

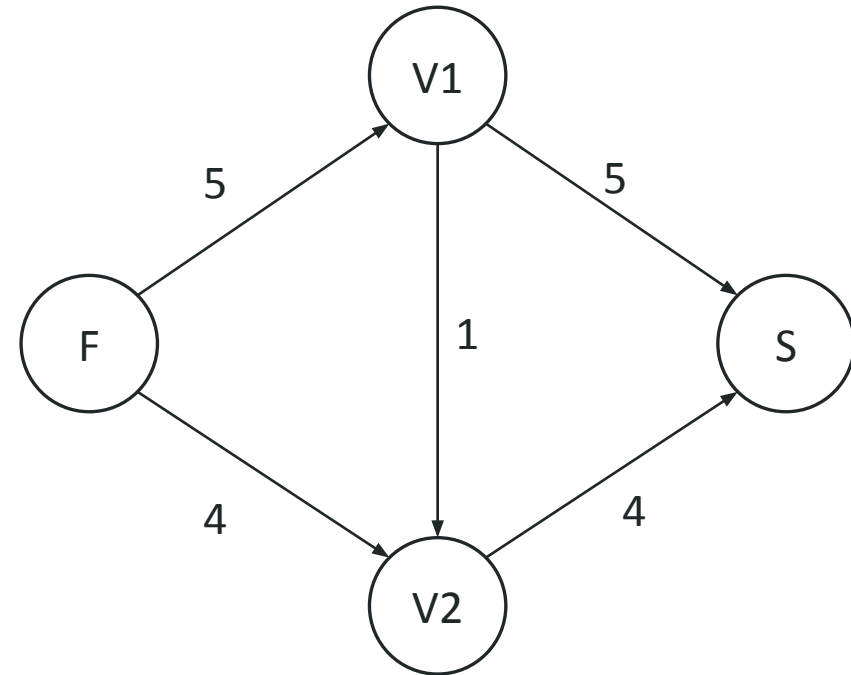
Método de Ford-Fukerson – Exemplo 2

Solução = 0

Grafo Original



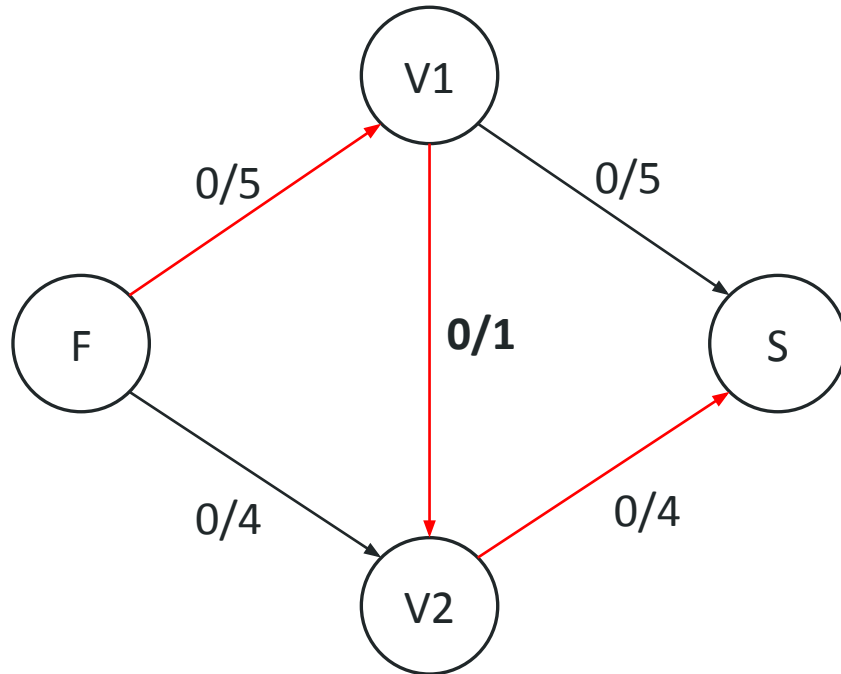
Fluxos residuais



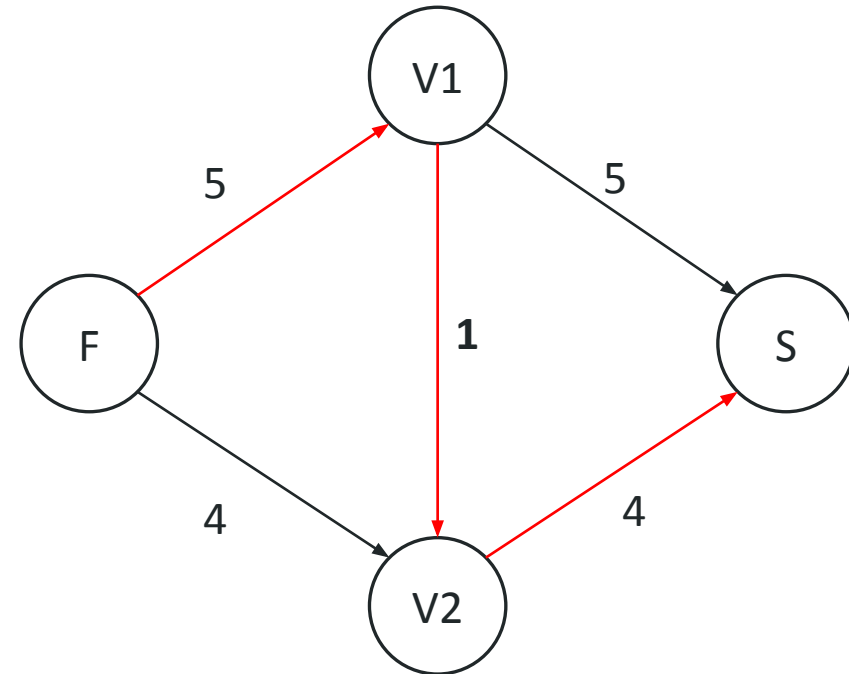
Método de Ford-Fukerson – Exemplo 2

Solução = 0

Grafo Original



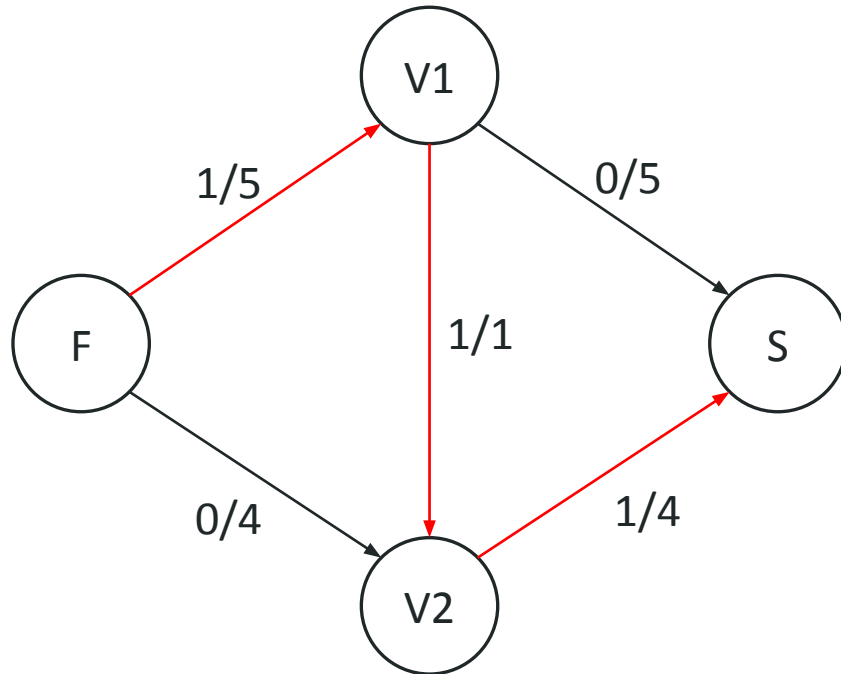
Fluxos residuais



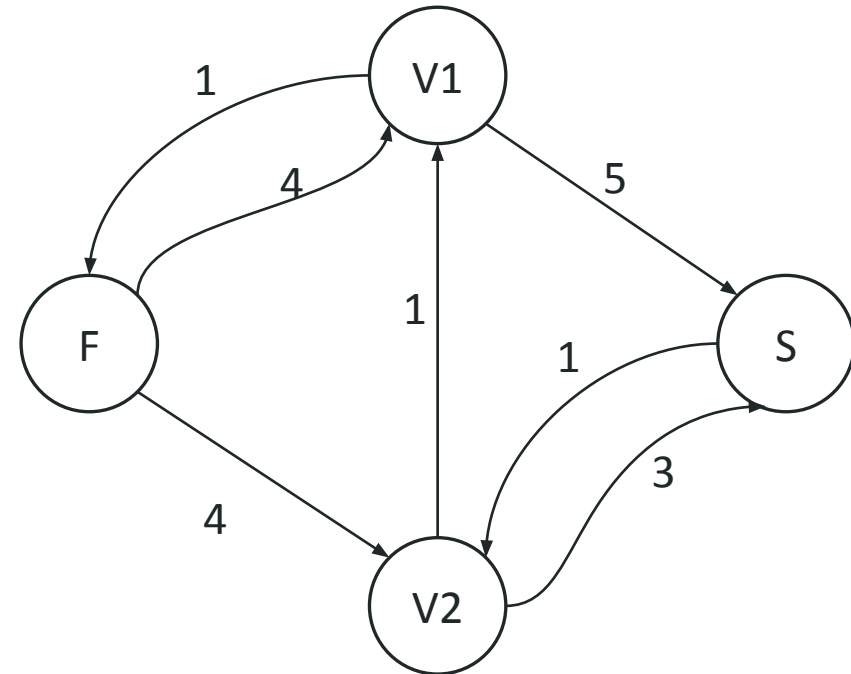
Método de Ford-Fukerson – Exemplo 2

Solução = 1

Grafo Original



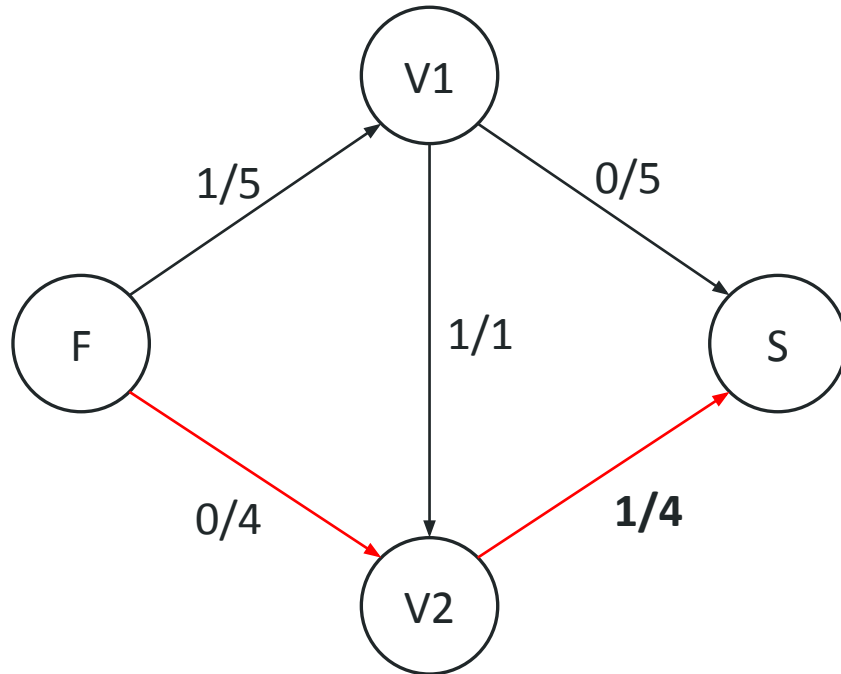
Fluxos residuais



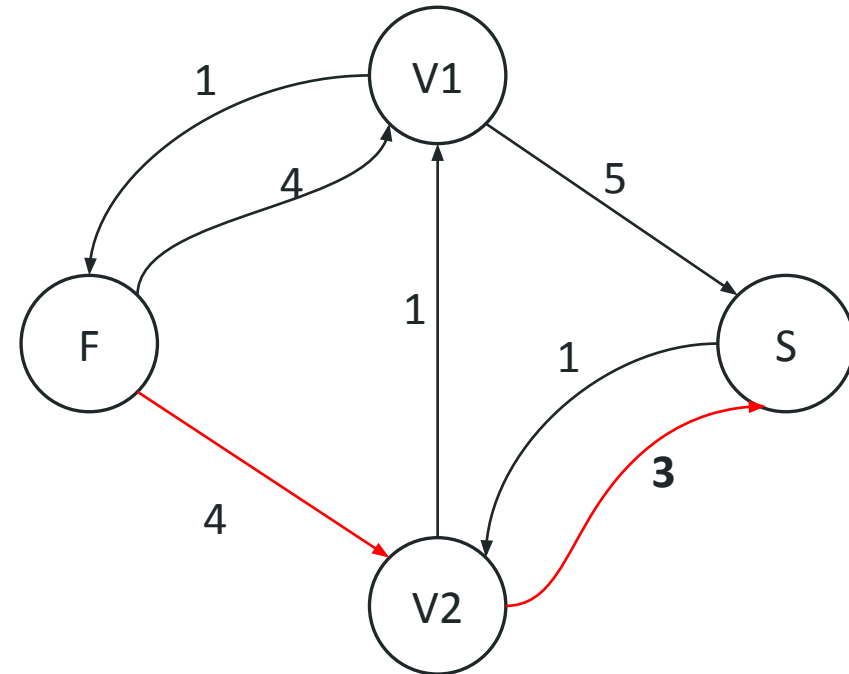
Método de Ford-Fukerson – Exemplo 2

Solução = 1

Grafo Original



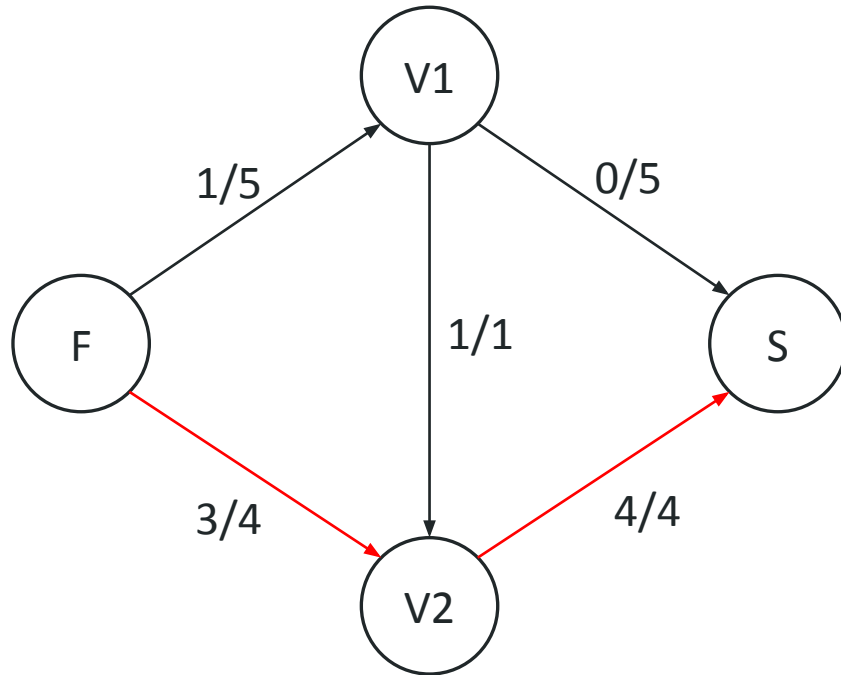
Fluxos residuais



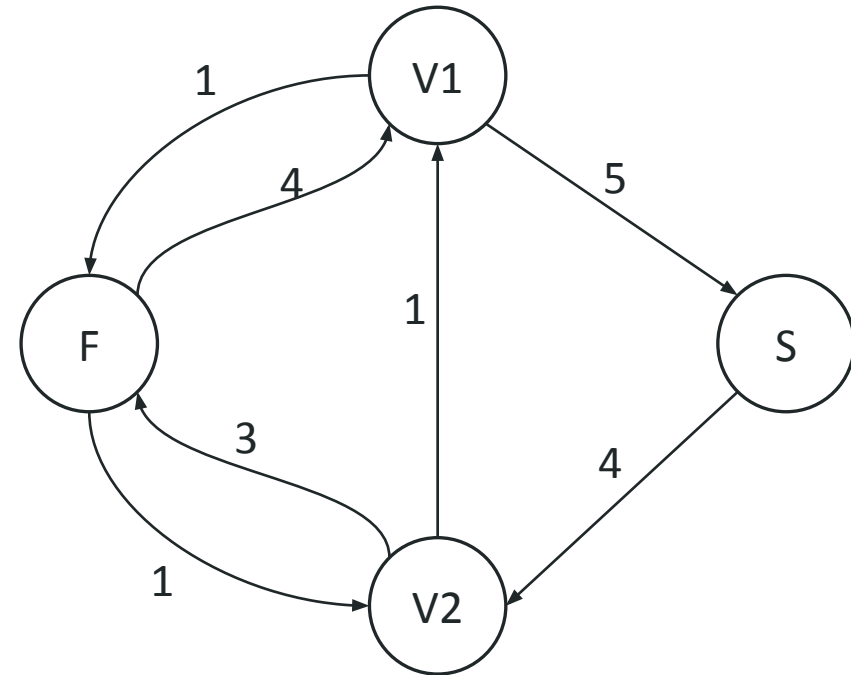
Método de Ford-Fukerson – Exemplo 2

Solução = 4

Grafo Original



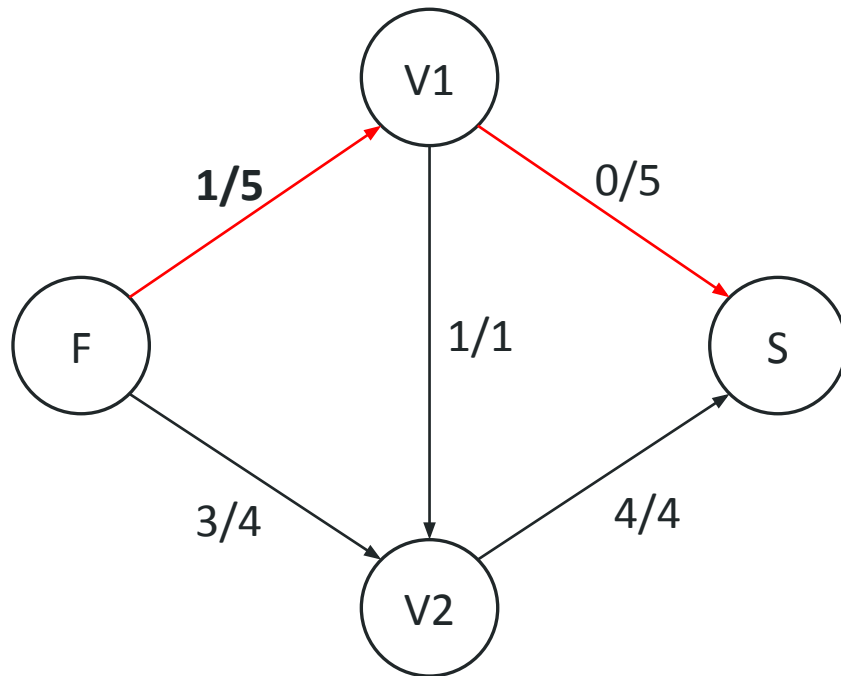
Fluxos residuais



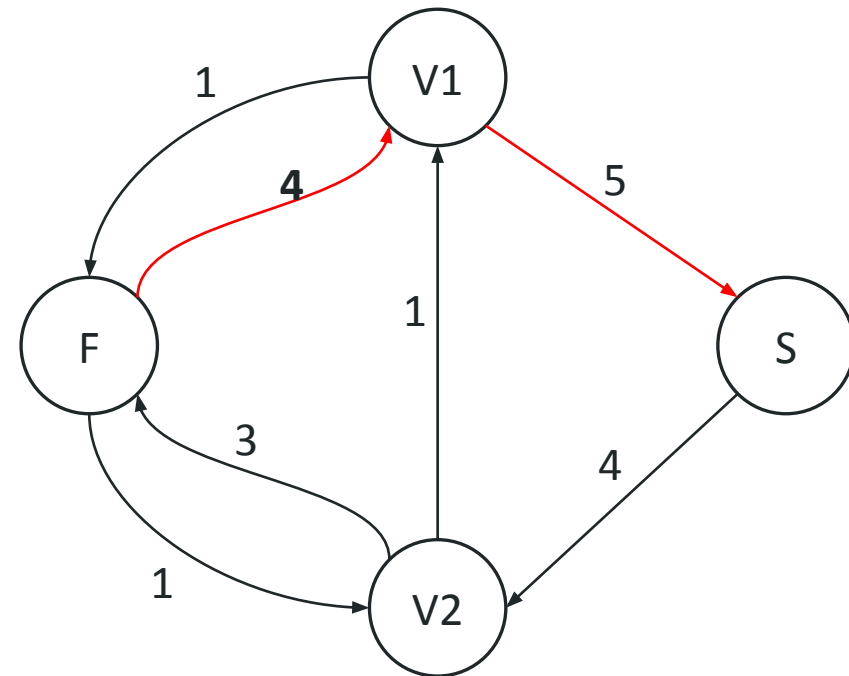
Método de Ford-Fukerson – Exemplo 2

Solução = 4

Grafo Original



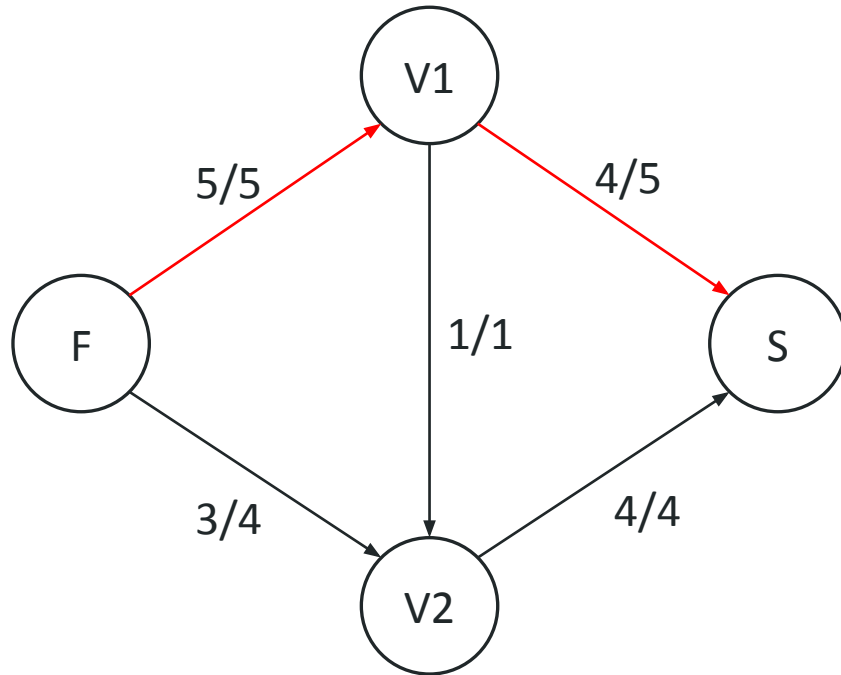
Fluxos residuais



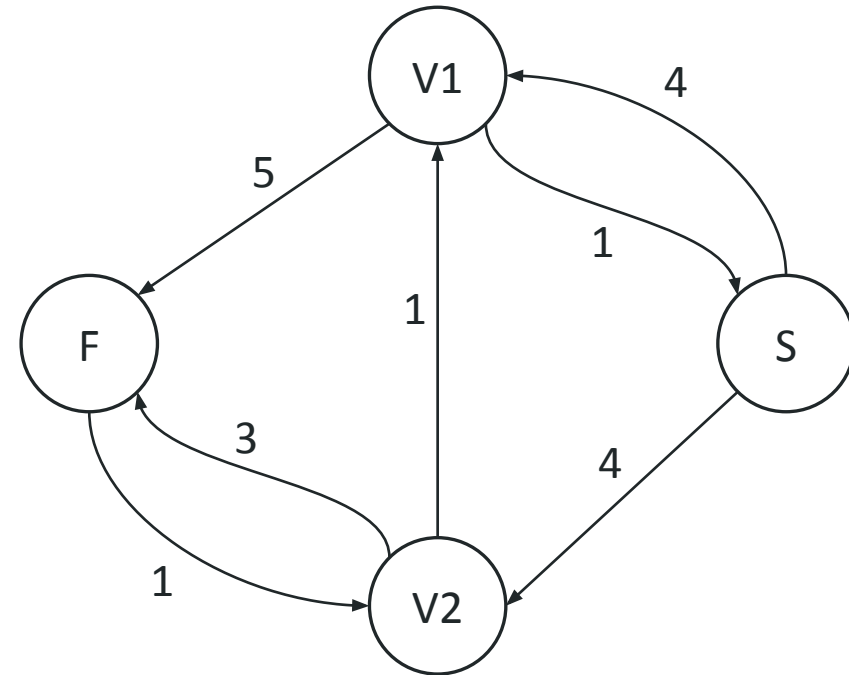
Método de Ford-Fukerson – Exemplo 2

Solução = 8

Grafo Original



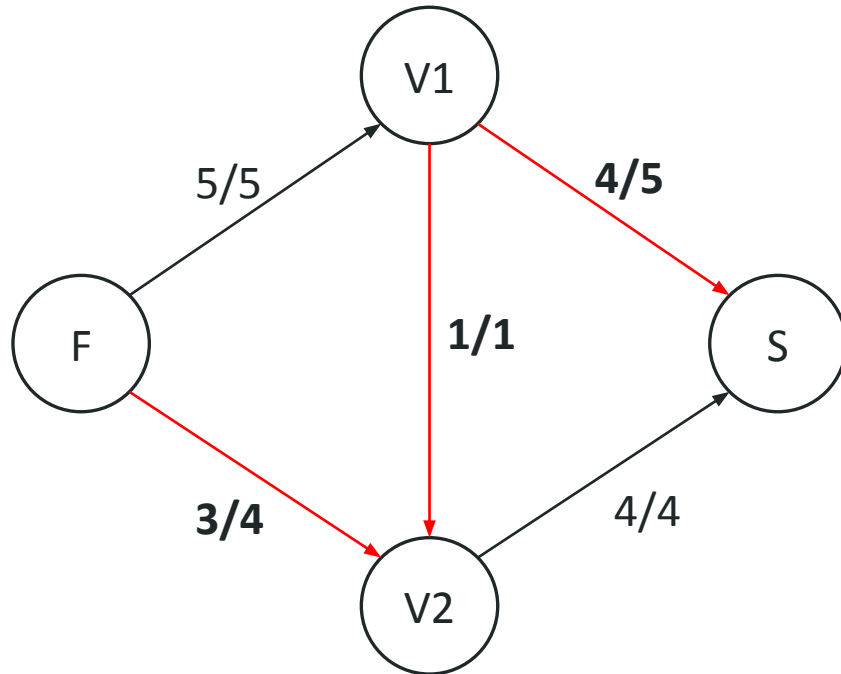
Fluxos residuais



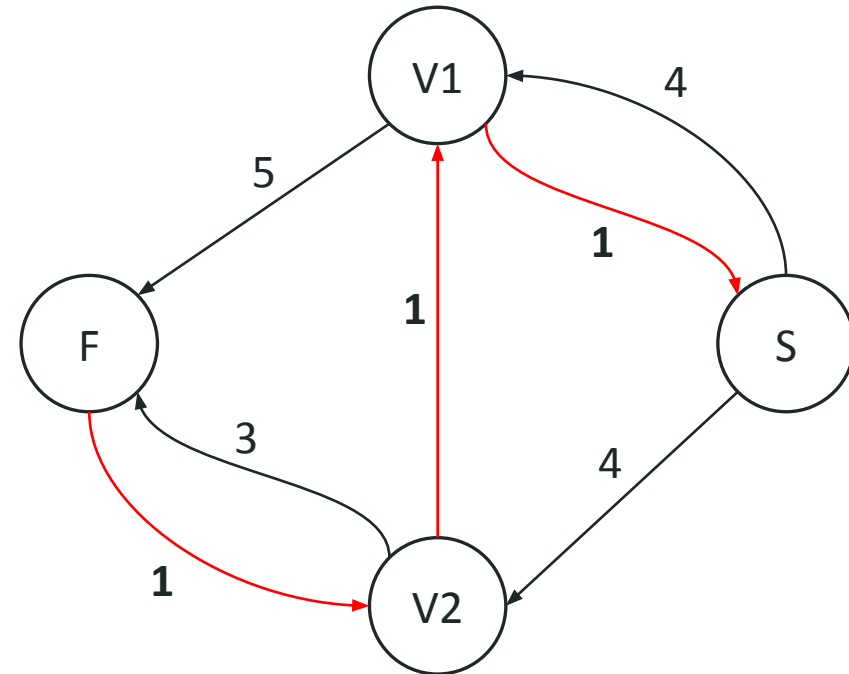
Método de Ford-Fukerson – Exemplo 2

Solução = 8

Grafo Original



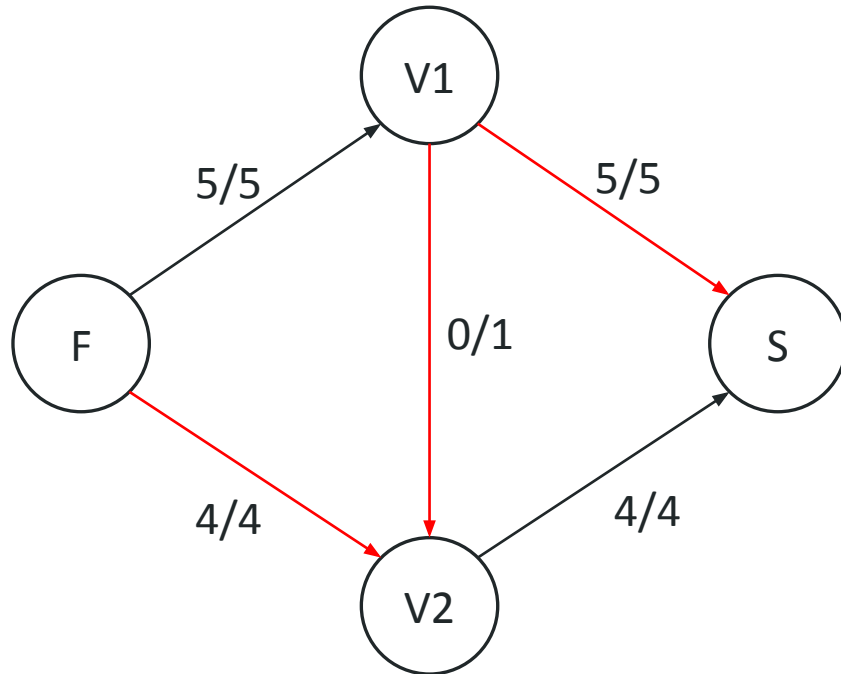
Fluxos residuais



Método de Ford-Fukerson – Exemplo 2

Solução = 9

Grafo Original



Fluxos residuais

