Planaridade

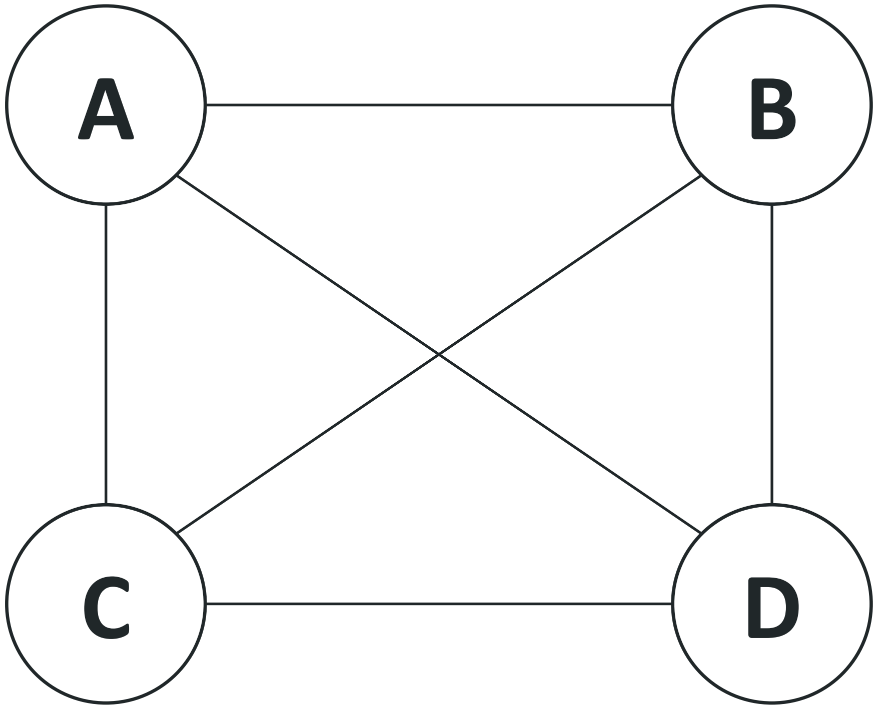
GRAFOS

Planaridade

- Consideramos um grafo planar caso ele possa ser desenhado em um plano de forma com que nenhuma aresta cruze com um vértice ou outra aresta.

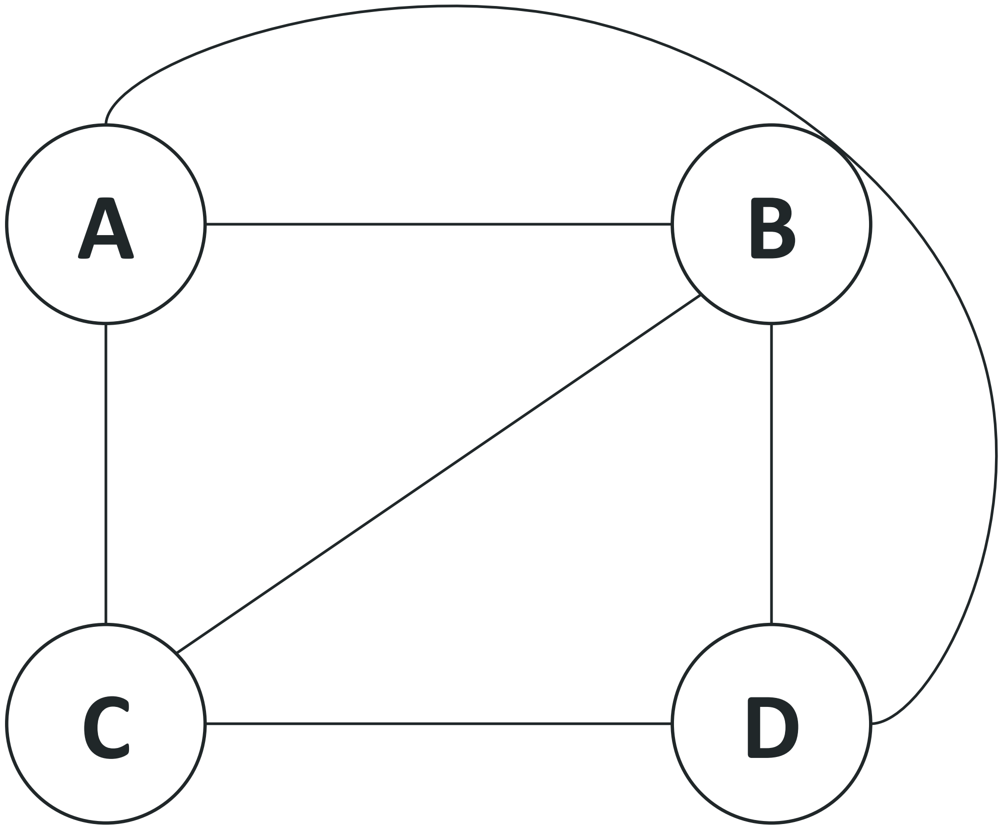
Planaridade

- O grafo K4 é planar?



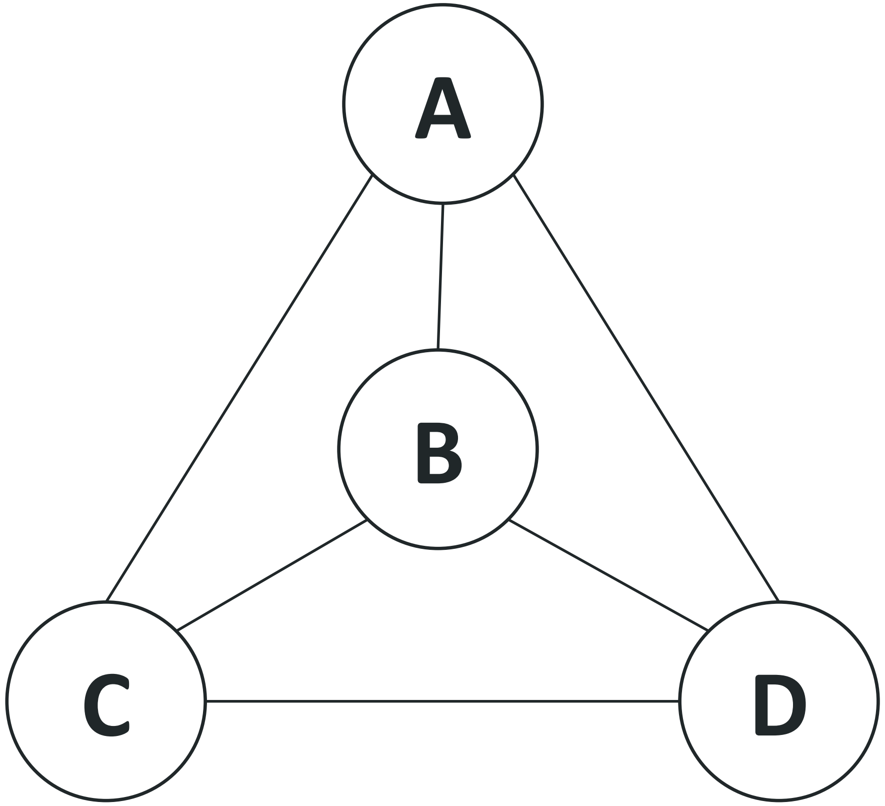
Planaridade

- O grafo K4 é planar?



Planaridade

- O grafo K4 é planar?

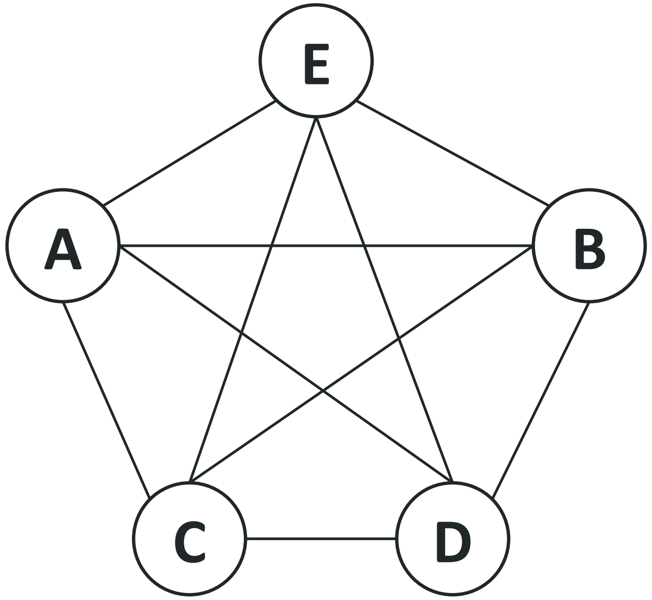


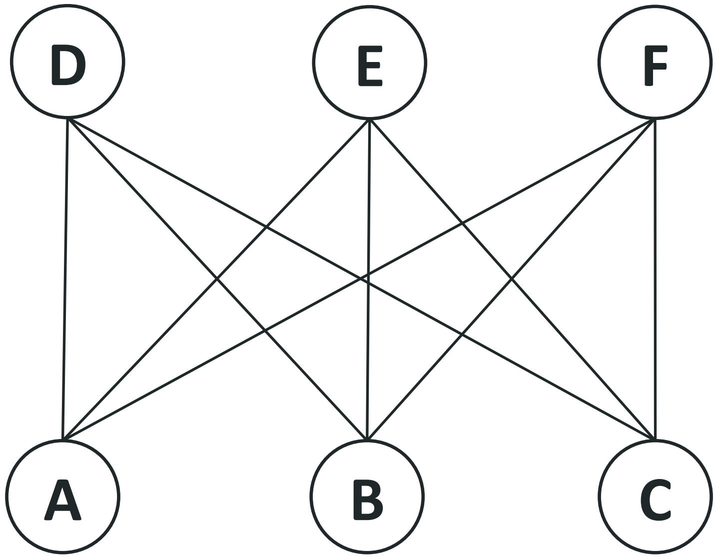
Planaridade

- Jogo sobre isso:
  - https://www.jasondavies.com/planarity/

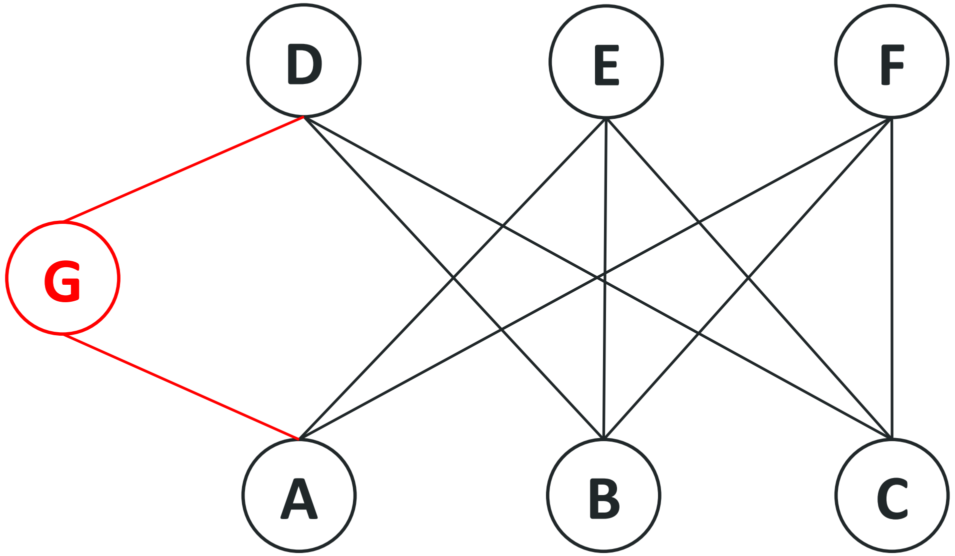
Teorema de Kuratowski

Um grafo é planar se, e somente se, ele não contém um subgrafo que é um subdivisão de K_5 ou $K_{3,3}$

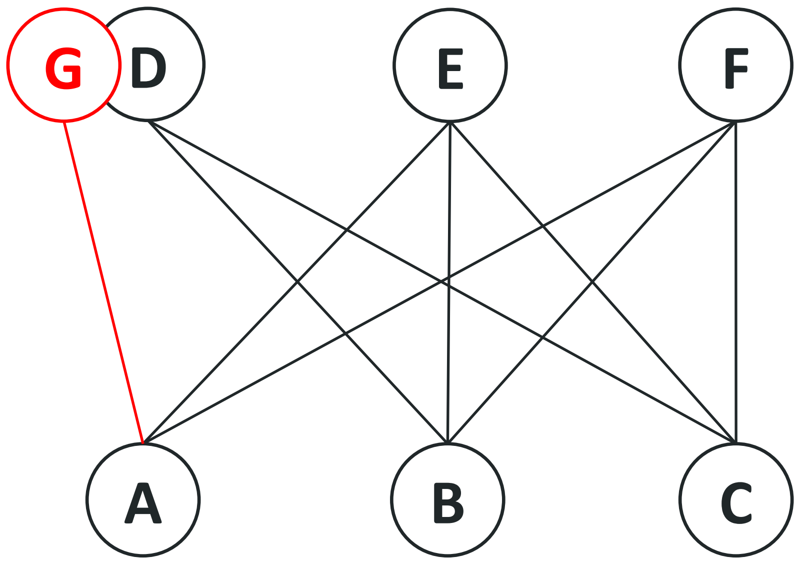




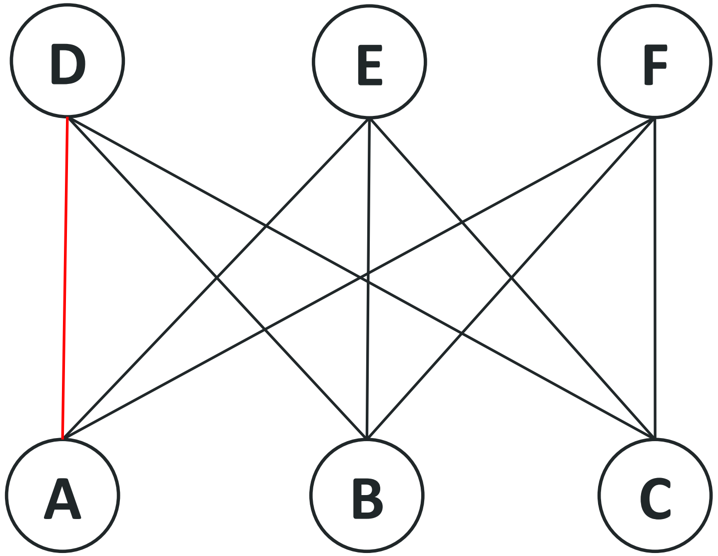
Grafo Homeomorfo



Grafo Homeomorfo



Grafo Homeomorfo



Outros critérios

- Normalmente verificar a existência de subgrafos específicos pode ser um processo muito custoso.
- Para isto existem formas alternativas para determinar a planaridade de um grafo

Outros critérios

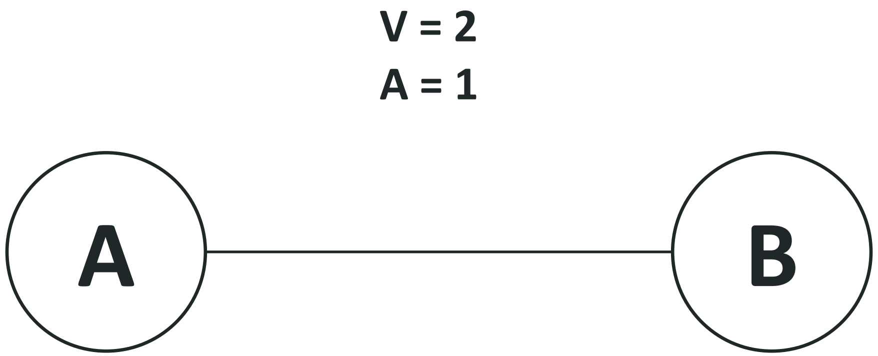
- Para um grafo conectado(conexo) simples não direcionado com **V** vértices e **A** arestas.
- Ele é **planar** caso
  - $V \leq 2$
- Senão, podemos verificar se ele **pode ser planar** (não podemos garantir que ele é planar)
  - $V \geq 3$ **e** $A \leq 3V - 6$ e ele contém **ciclos de tamanho 3**

  ou

  - $V \geq 3$ **e** $A \leq 2V - 4$ e ele **não** contém **ciclos de tamanho 3**

Verificações

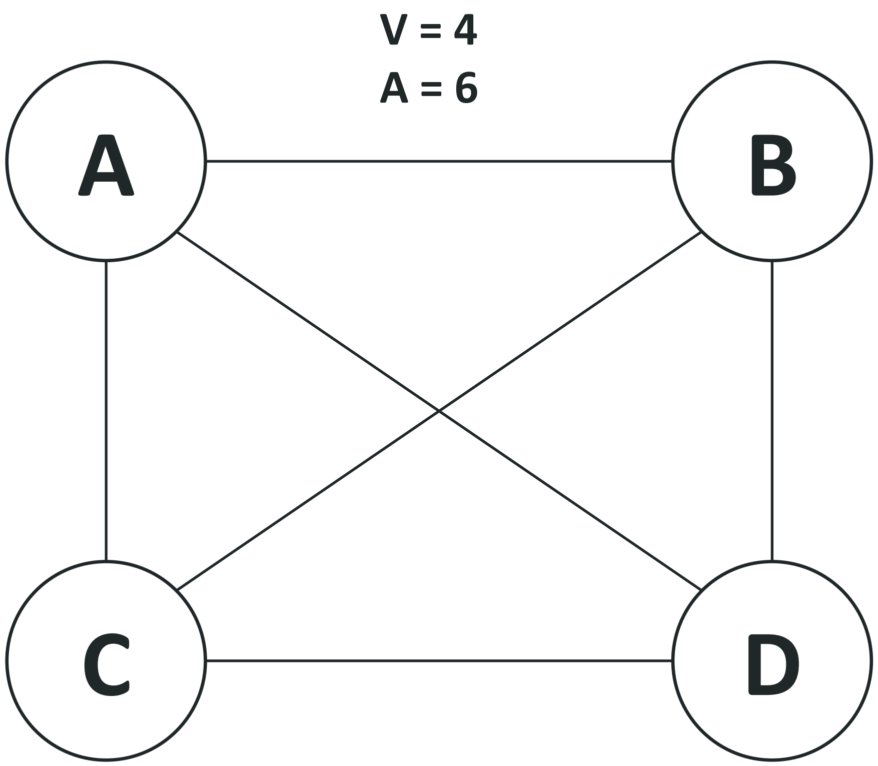
- **V ≤ 2**
- **2 ≤ 2**
- **O grafo é Planar**
-



Verificações

- **V ≤ 2**
- **4 ≤ 2**

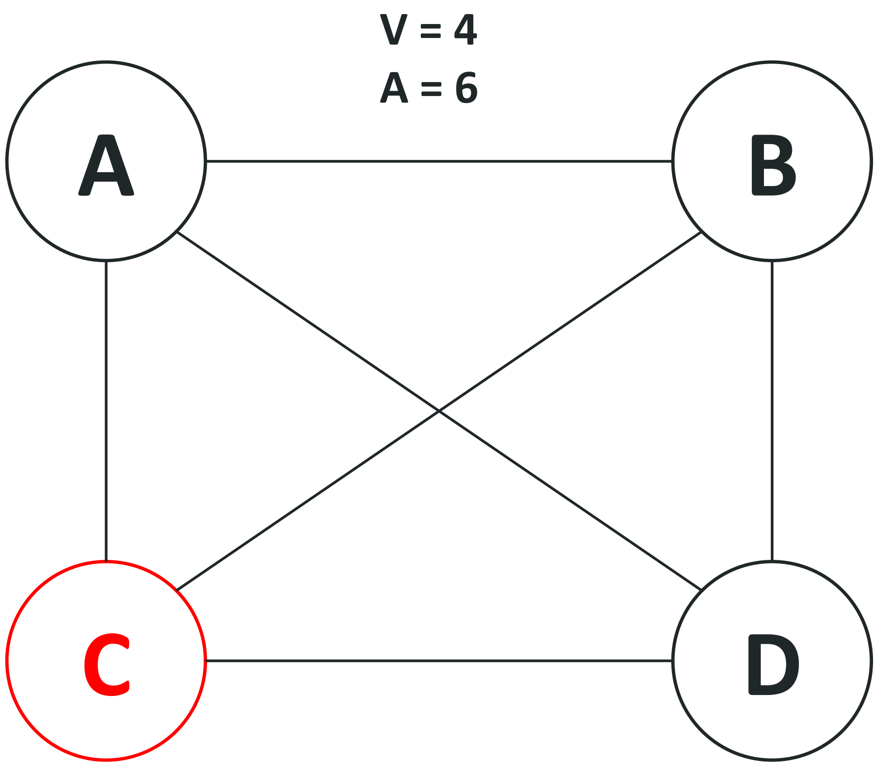
- Contém ciclo de tamanho 3?



Verificações

- **V ≤ 2**
- **4 ≤ 2**

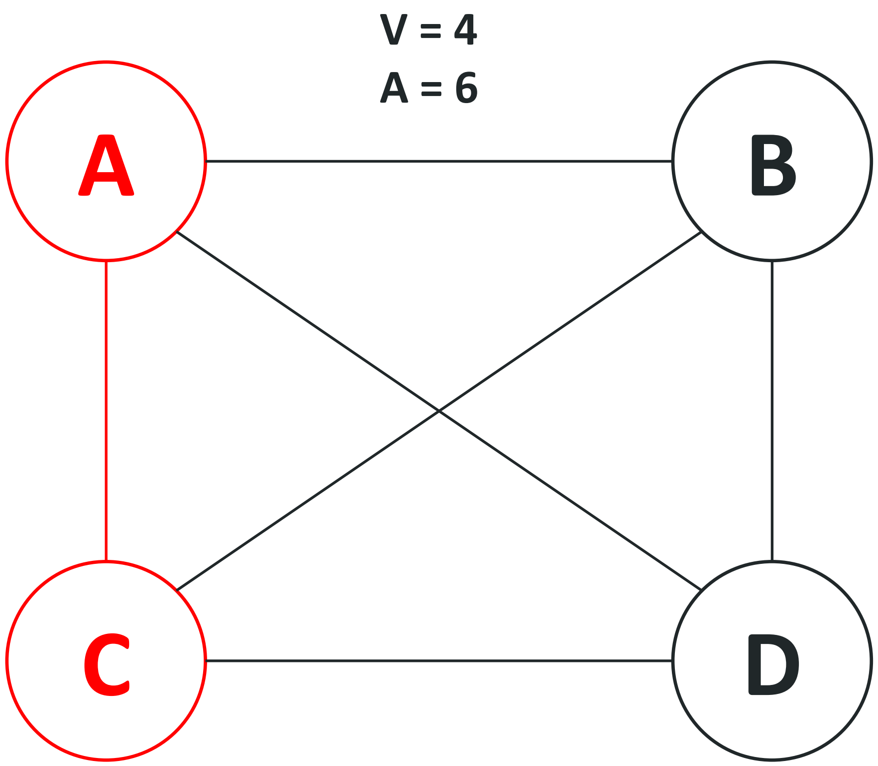
- Contém ciclo de tamanho 3?



Verificações

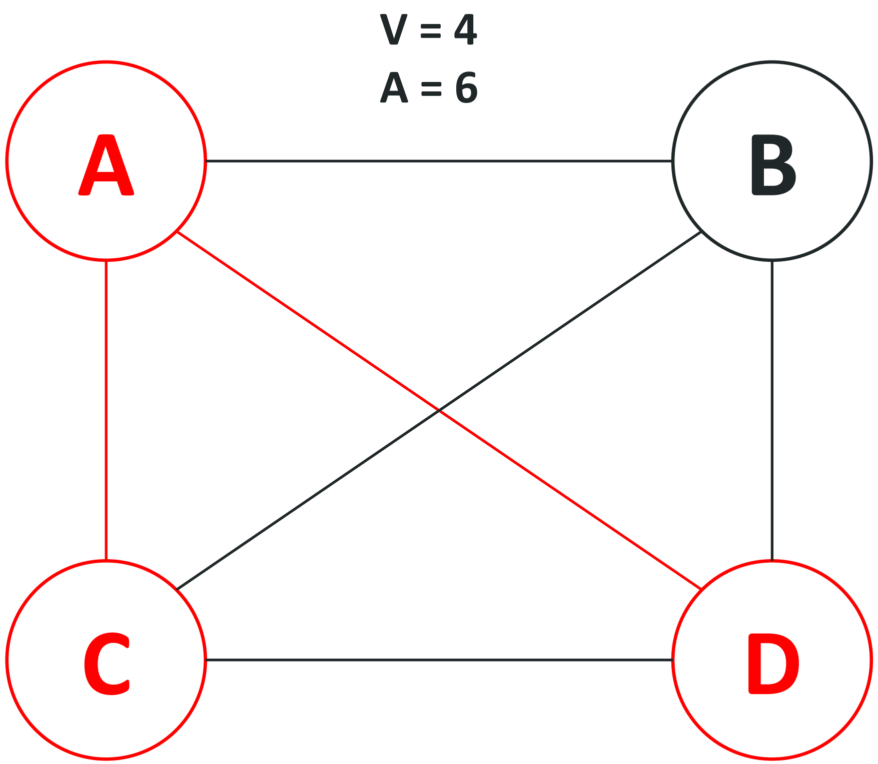
- **V ≤ 2**
- **4 ≤ 2**

- Contém ciclo de tamanho 3?



Verificações

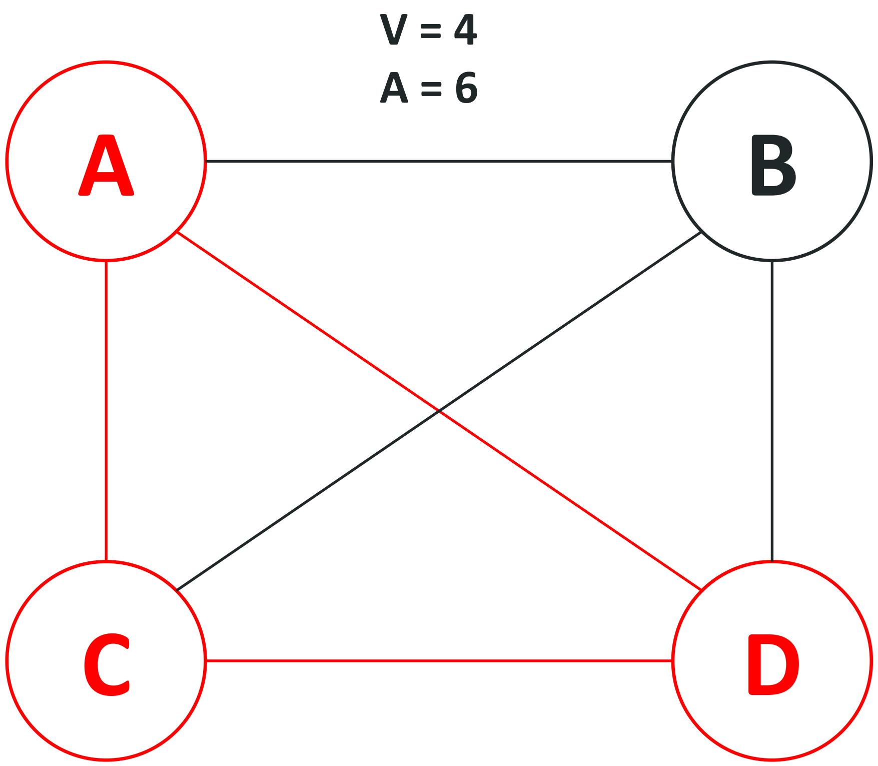
- **V ≤ 2**
- **4 ≤ 2**
- Contém ciclo de tamanho 3?



Verificações

- **V ≤ 2**
- **4 ≤ 2**

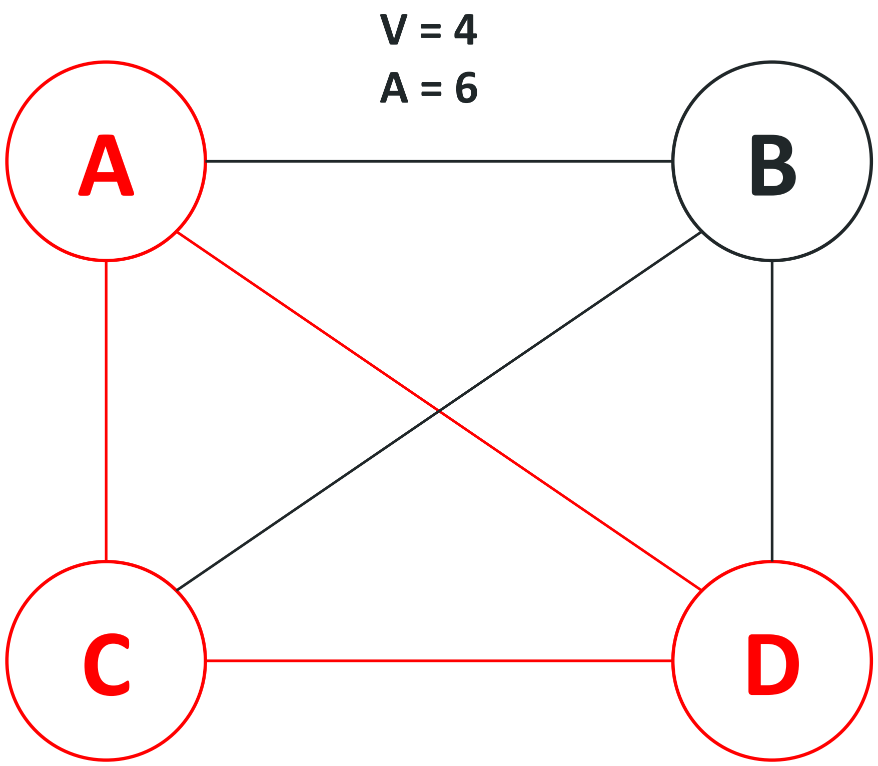
- Contém ciclo de tamanho 3?



Verificações

- **V ≤ 2**
- **4 ≤ 2**

- Contém ciclo de tamanho 3?
- **Sim**



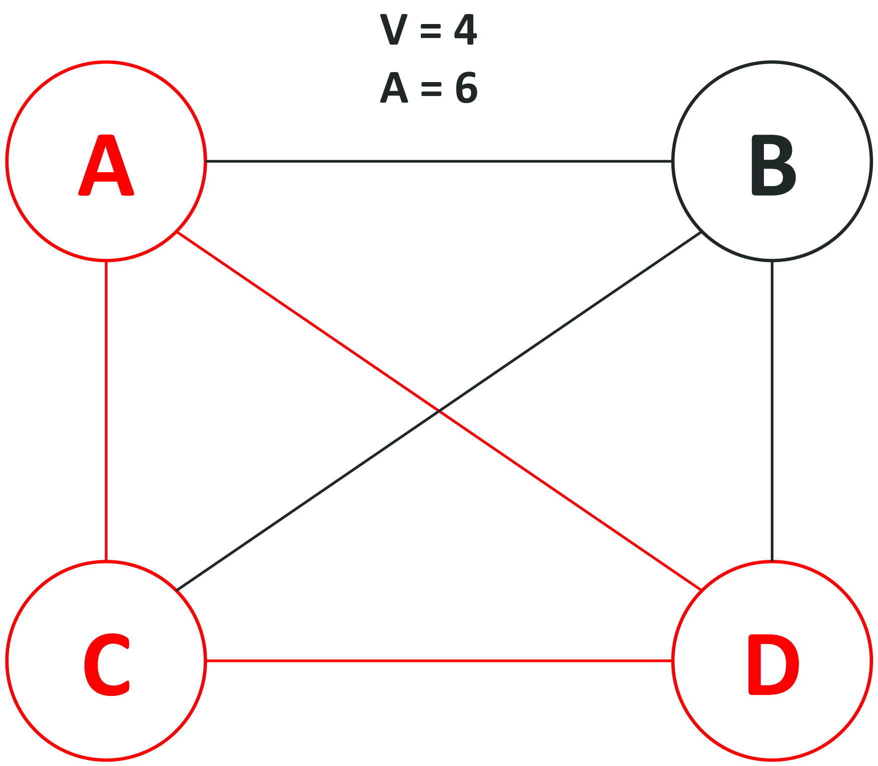
Verificações

- **$V \leq 2$**
- **$4 \leq 2$**

- Contém ciclo de tamanho 3?
- **Sim**

- **$A \leq 3V - 6$**
- **$6 \leq (3 * 4) - 6$**
- **$6 \leq 12 - 6$**
- **$6 \leq 6$**

- **O grafo pode ser planar**



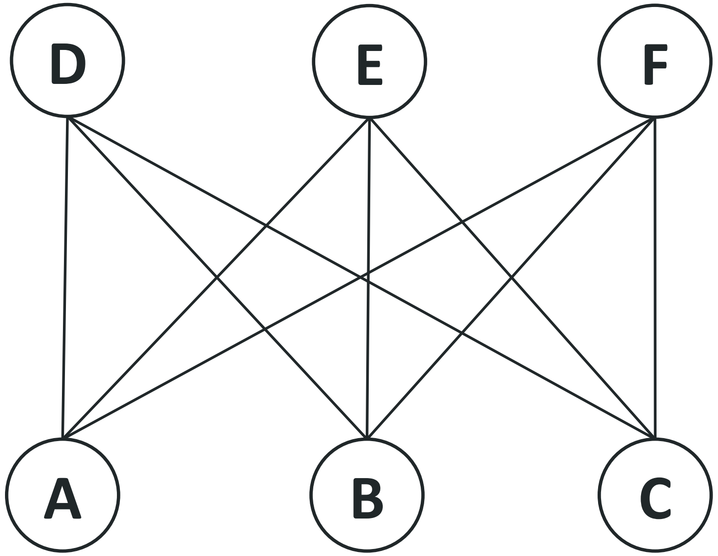
Verificações

- **V ≤ 2**
- **6 ≤ 2**

- Contém ciclo de tamanho 3?

V = 6

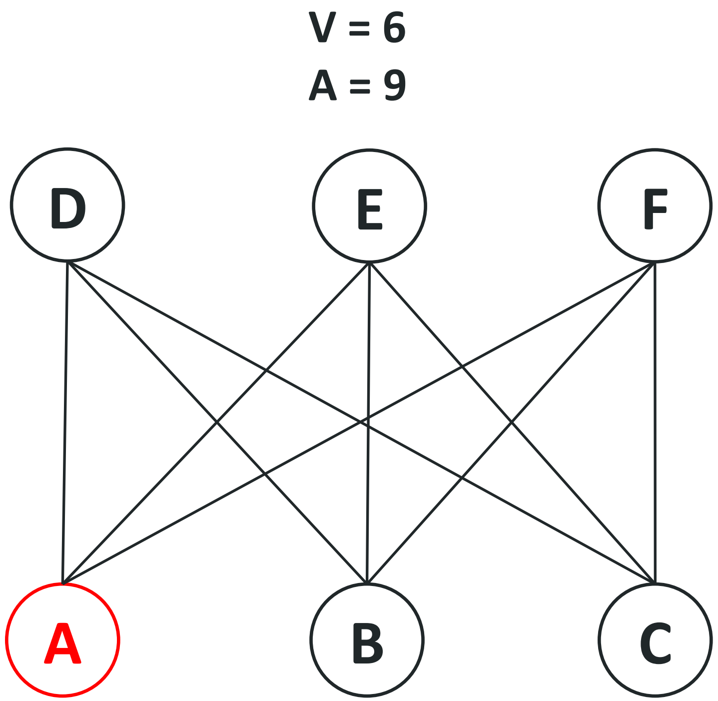
A = 9



Verificações

- **V ≤ 2**
- **6 ≤ 2**

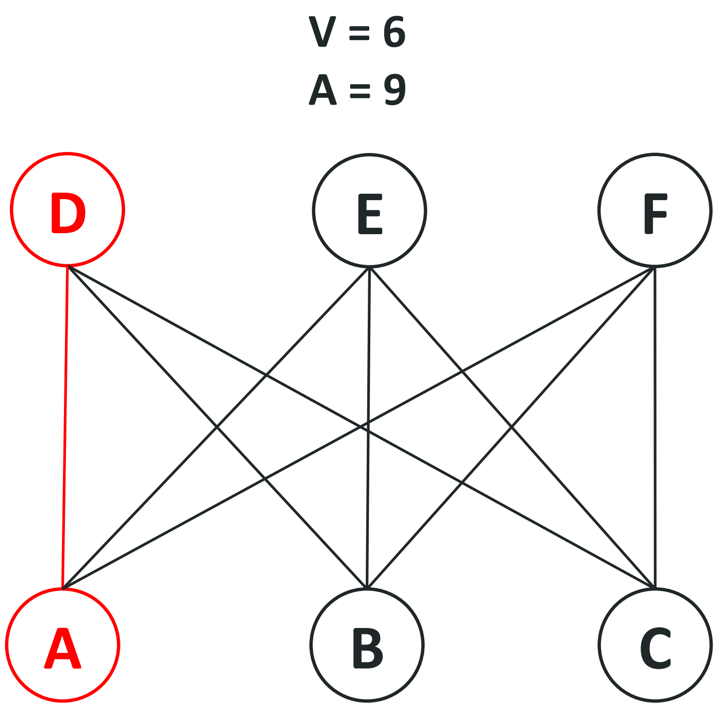
- Contém ciclo de tamanho 3?



Verificações

- **V ≤ 2**
- **6 ≤ 2**

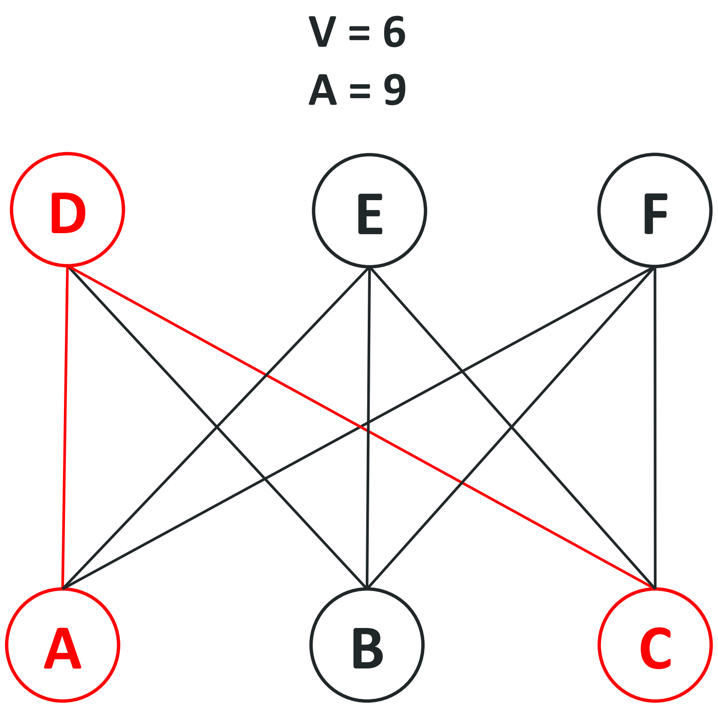
- Contém ciclo de tamanho 3?



Verificações

- **V ≤ 2**
- **6 ≤ 2**

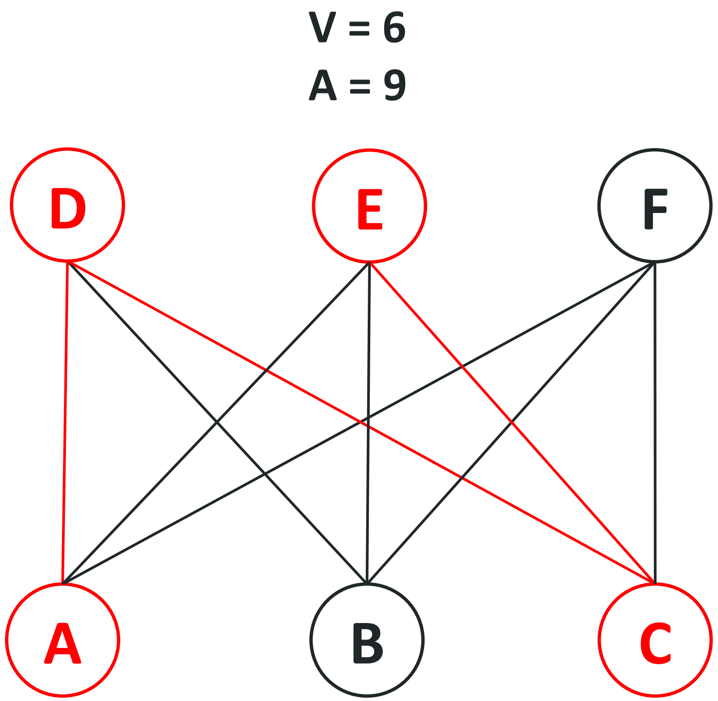
- Contém ciclo de tamanho 3?



Verificações

- **V ≤ 2**
- **6 ≤ 2**

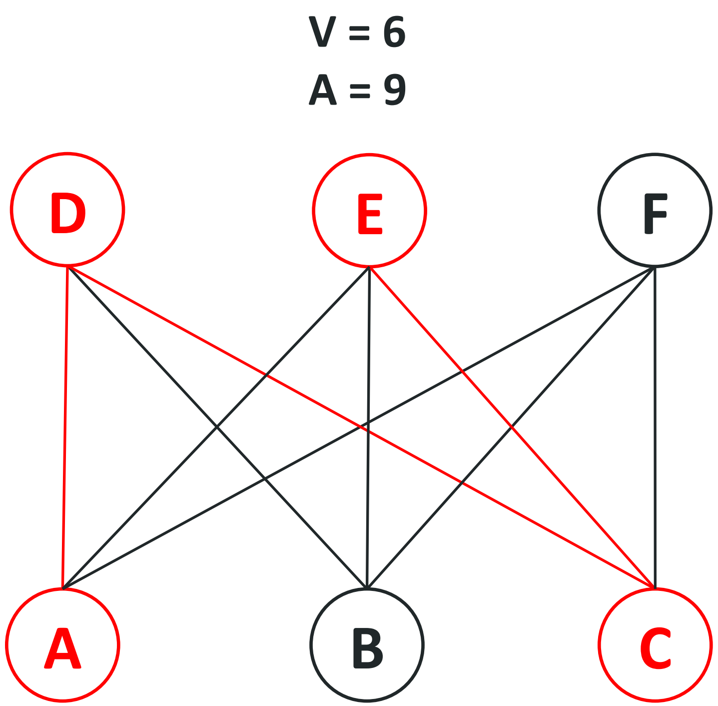
- Contém ciclo de tamanho 3?



Verificações

- **V ≤ 2**
- **6 ≤ 2**

- Contém ciclo de tamanho 3?
- **Não**



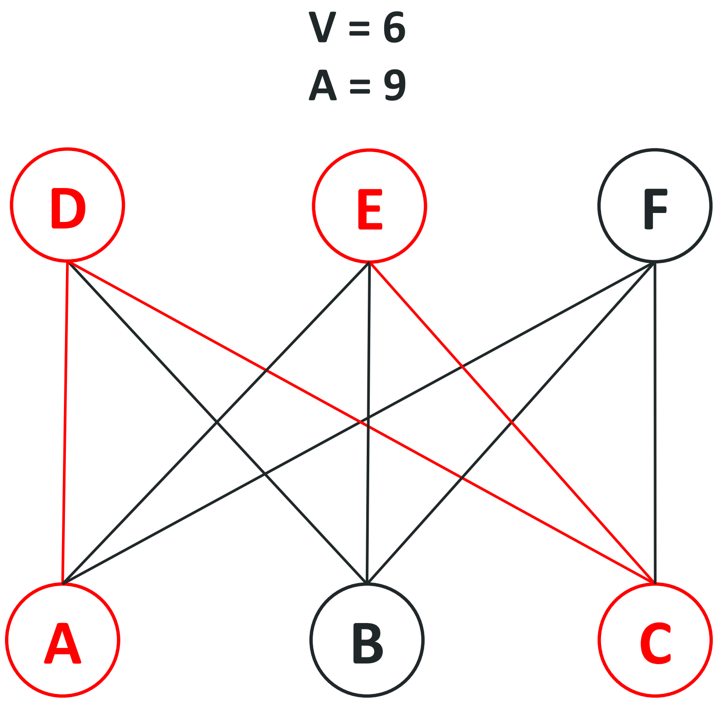
Verificações

- $V \leq 2$
- $6 \leq 2$

- Contém ciclo de tamanho 3?
- **Não**

- $A \leq 2V - 4$
- $9 \leq (2 * 6) - 4$
- $9 \leq 12 - 4$
- $9 \leq 8$

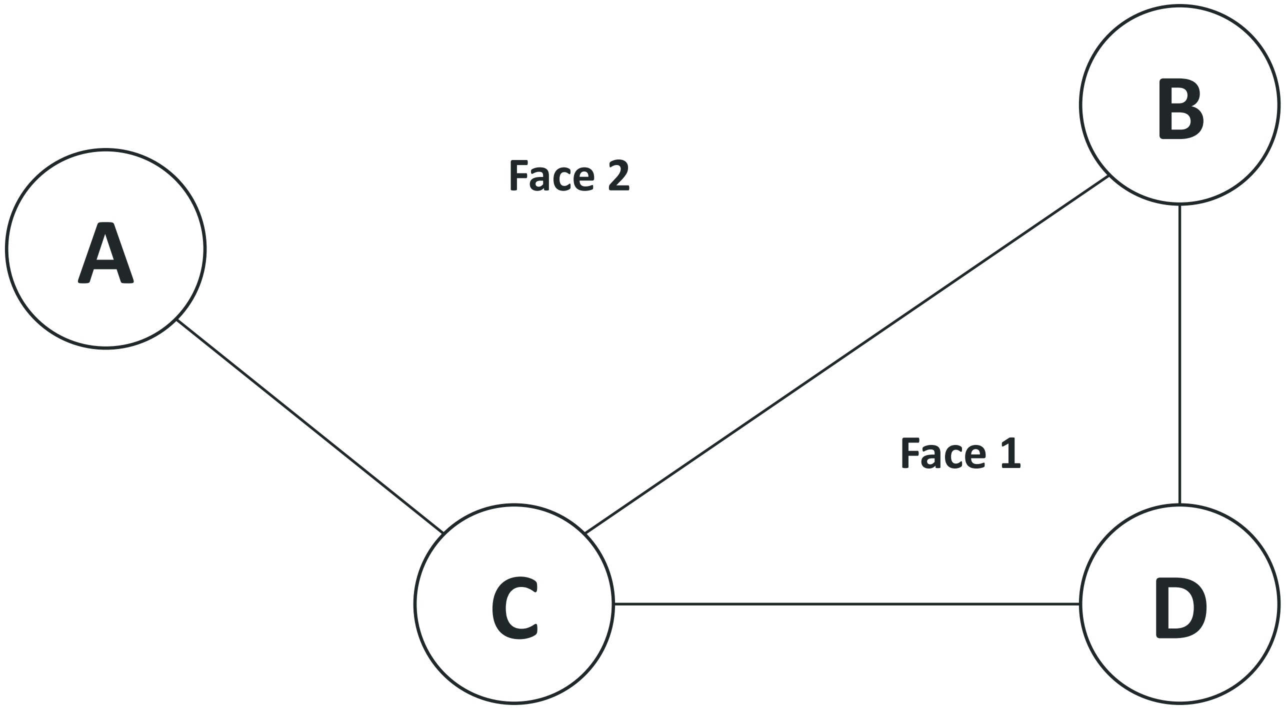
O Grafo não é planar



Fórmula de Euler

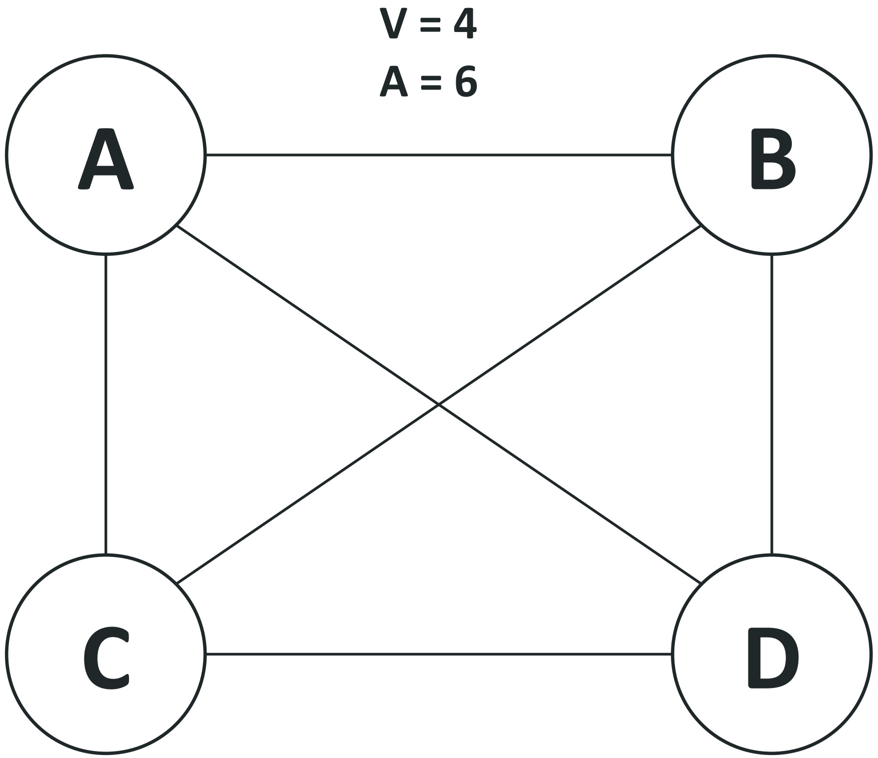
- Dado um grafo planar simples e conexo, com **V** vértices e **A** arestas. A sua representação sem o cruzamentos de arestas apresentará **F** faces de acordo com a fórmula abaixo:
  - **V – A + F = 2**
- Cada aresta tem contato, e com isso ajuda a formar duas faces
- Cada face é formada por pelo menos 3 aresta, com exceção da área externa
- A área externa ao gráfo é considerada como uma face de extensão infinita

Fórmula de Euler

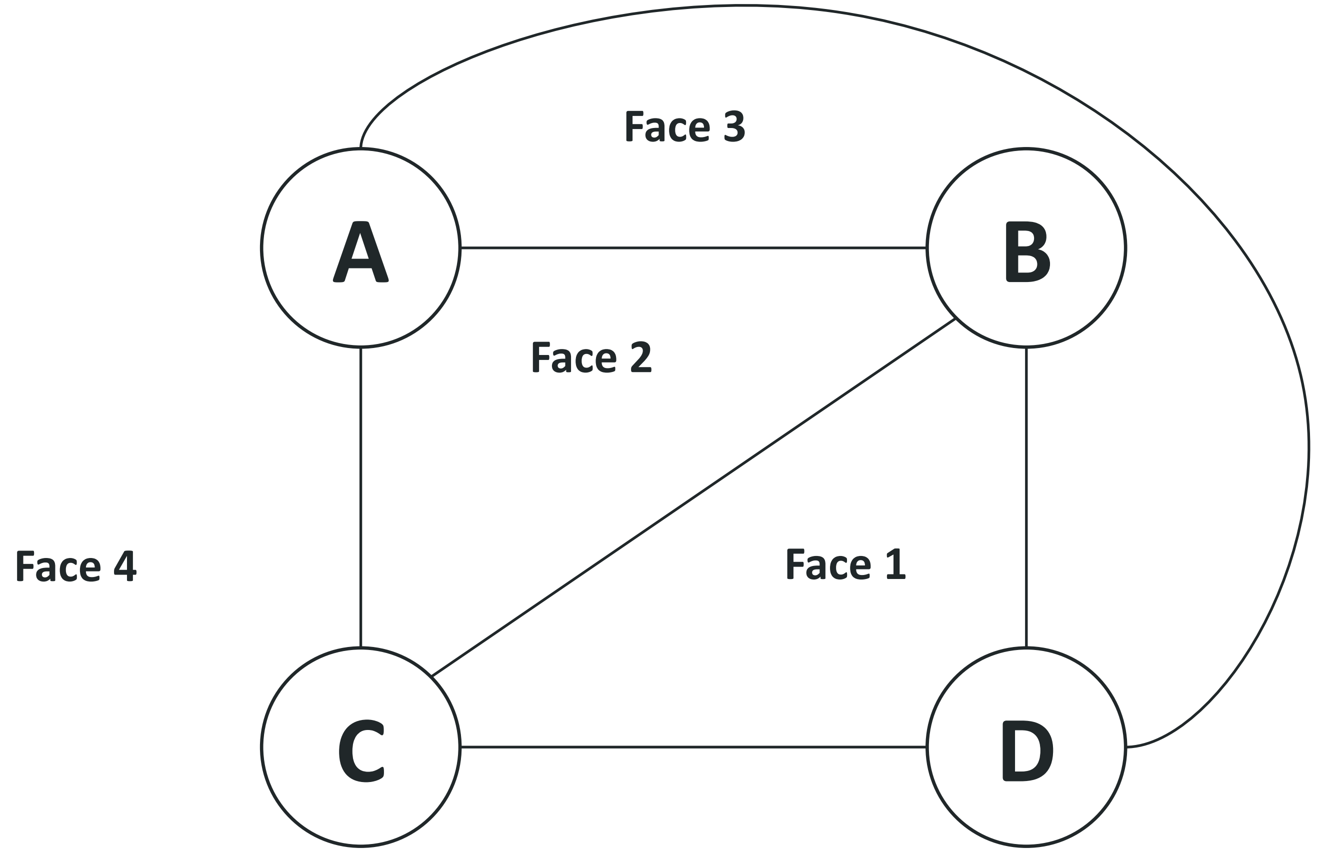


Fórmula de Euler

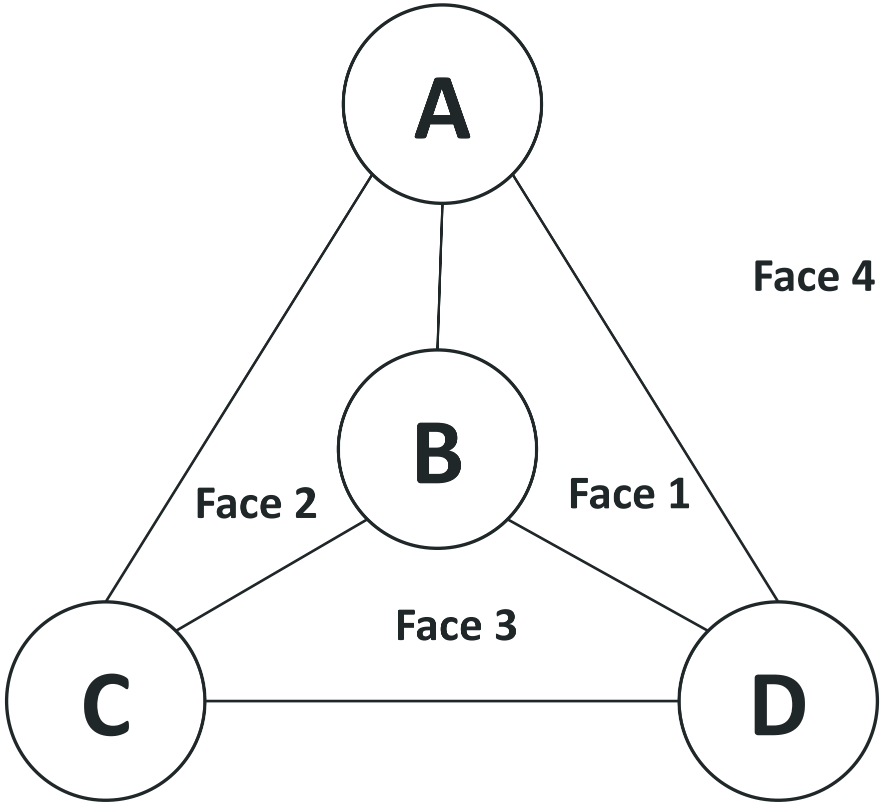
- $V - A + F = 2$
- $F = 2 - V + A$
- $F = 2 - 4 + 6$
- $F = 4$



Fórmula de Euler



Fórmula de Euler

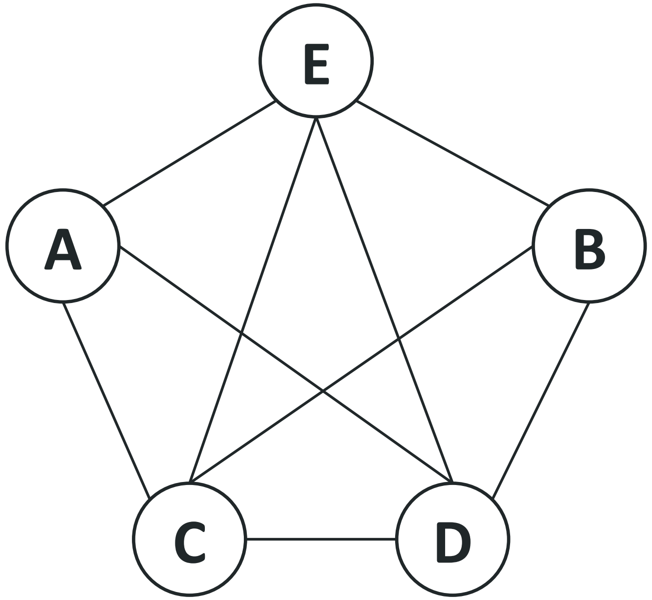


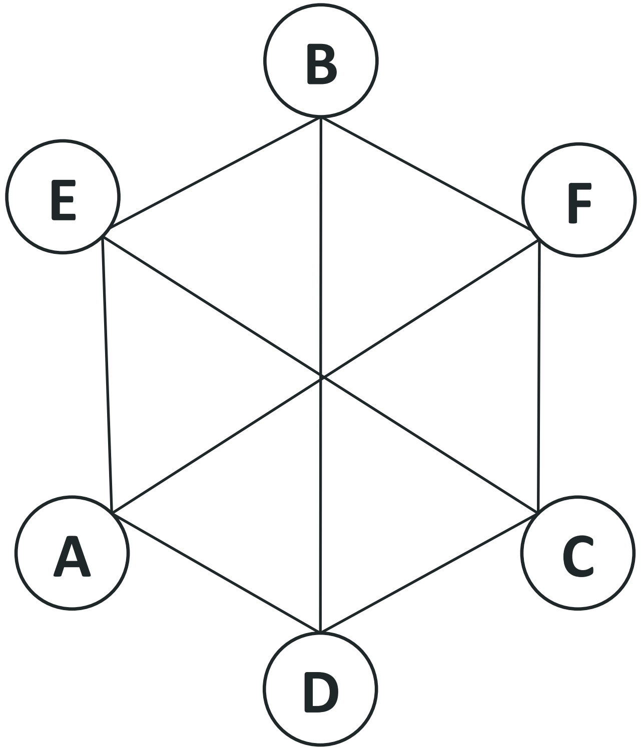
Fórmula de Euler

- Cada face **F** em um grafo planar simples tem pelo menos 3 arestas **A**, para grafos com 3 vértices ou mais, logo:
  - **3F ≤ A**
- Porém, cada aresta **A** ajuda a formar duas faces, corrigindo:
  - **3F ≤ 2A**
  - **F ≤ (2A)/3**
- Voltando a fórmula de Euler:
  - **V – A + F = 2**
  - **F = 2 – V + A**
- Substituímos o valor de **F** que não podemos sempre contar por sua equivalência em **A**, porém o valor de A é maior ou igual a F e não somente igual, o que muda a igualdade também:
  - **(2A)/3 ≥ 2 – V + A**
  - **2A ≥ 6 – 3V + 3A**
  - **-A ≥ 6 – 3V**
  - **A ≤ 3V - 6**

Exercício

- Os grafos a seguir são planares?





Função TemCicloTres

- Para cada vértice **i** do grafo{
-     Para cada vizinho **j** do vértice **i** {
-         Para cada vizinho **k** do vértice **j** {
-             Se **k** é vizinho de **i** {
-                 Retorne Verdadeiro
-             }
-         }
- }
- Retorne Falso