Escola
Politécnica

Árvores

Prof. Marcos Carrard
carrard@univali.br
carrard@gmail.com

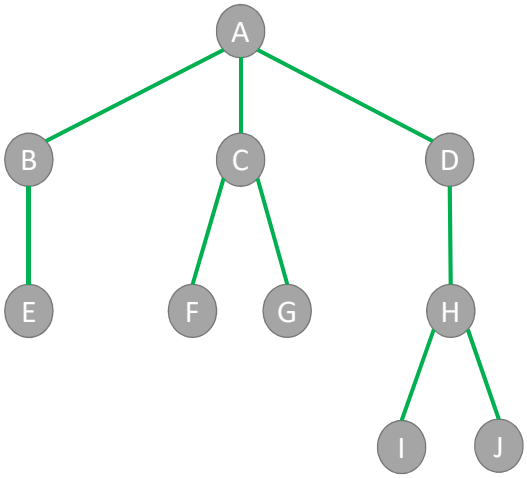
UNIVALI Escola Politécnica

Árvores

- Estrutura muito utilizada na computação
- Estrutura que gera relacionamento de hierarquia e subordinação
- Pode representar muitos problemas

UNIVALI Escola Politécnica

Árvores



UNIVALI Escola Politécnica

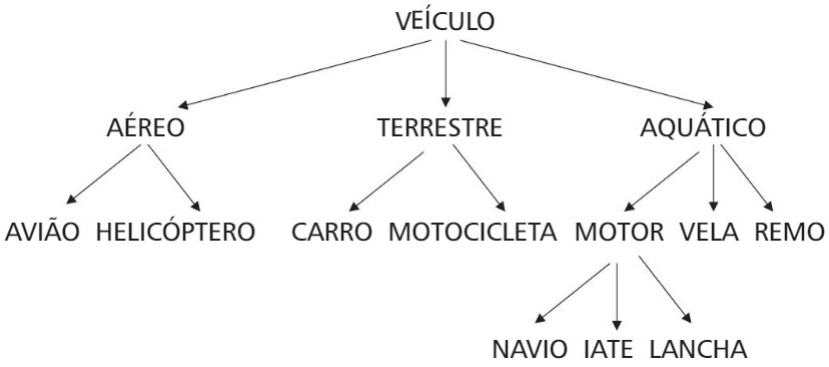
Árvores

- Podemos pensar em 3 tipos de hierarquia principais:
  - Especialização;
  - Composição; e
  - Dependência.

UNIVALI Escola Politécnica

Árvores

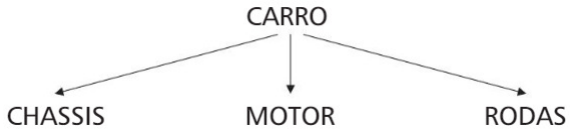
- Especialização



UNIVALI Escola Politécnica

Árvores

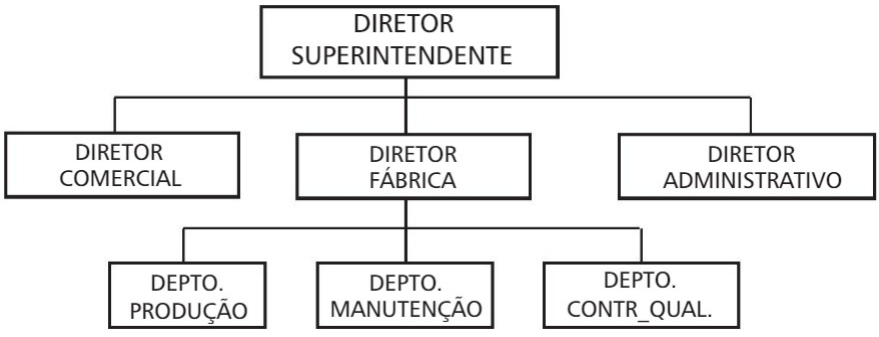
- Composição



UNIVALI Escola Politécnica

Árvores

- Dependência



UNIVALI Escola Politécnica

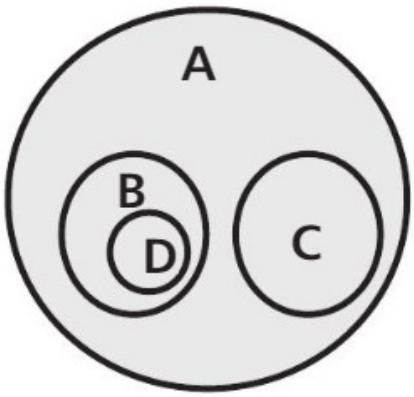
Formas de representação

- Diagramas
  - Inclusão
  - Barras
  - Aninhamento
  - Numeração por níveis

UNIVALI Escola Politécnica

Formas de representação

- Inclusão



UNIVALI Escola Politécnica

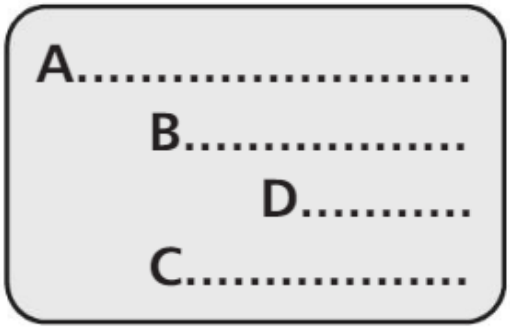
Formas de representação

- Barras

UNIVALI Escola Politécnica

Formas de representação

- Aninhamento



UNIVALI Escola Politécnica

Formas de representação

- Numeração por níveis

1A; 1.1B; 1.1.1D; 1.2C

UNIVALI Escola Politécnica

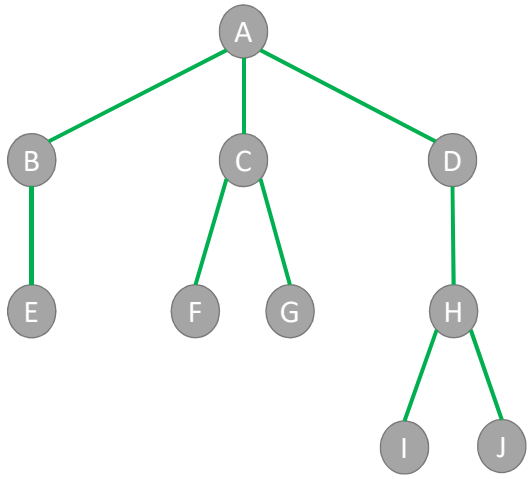
Terminologia

- **Raiz**
- **Nós** ou nodos (descendentes e ascendentes)
- **Subárvore**
- **Grau de um nodo** (número de descendentes)
- **Grau da árvore** (nodo com maior número de descendentes)
- **Folha** ou terminal (nodos de grau 0)

UNIVALI Escola Politécnica

Árvores

- Raiz
- Nós
- Subárvores
- Grau de Nodo
- Grau da árvore
- Folha



UNIVALI Escola Politécnica

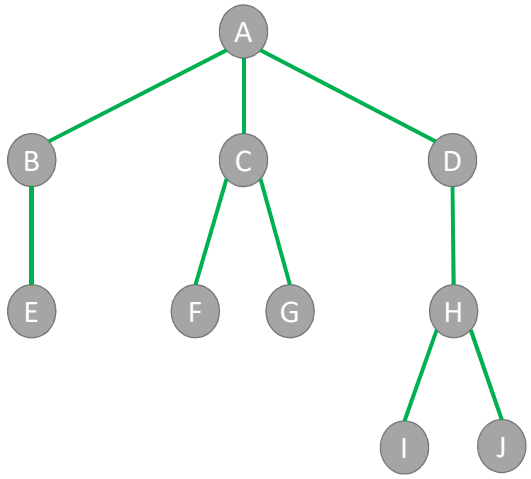
Terminologia

- **Nível de um nodo** (nº de nodos até a raiz+1)
- **Caminho** (sequência de nós consecutivos de um nó fonte a um nó de destino)
- **Comprimento do caminho** (nº de níveis entre 2 nós)
- **Altura ou profundidade**
- **Floresta** (conjunto de árvores disjuntas)
- **Árvore ordenada**
- **Árvore binária / n-ária**
- **Árvore balanceada**

UNIVALI Escola Politécnica

Árvores

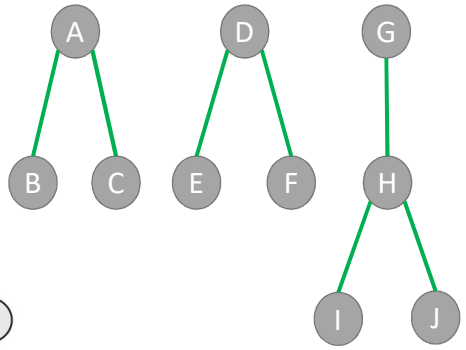
- Nível de um nodo
- Caminho
- Comprimento do caminho
- Altura/profundidade

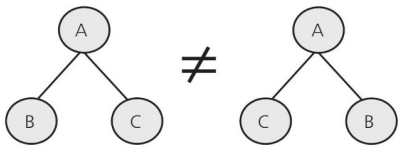


UNIVALI Escola Politécnica

Árvores

- Floresta
- Arvore ordenada
- Arvore binária/ n-ária
- Árvore balanceada





UNIVALI Escola Politécnica

Árvore Binária

UNIVALI Escola Politécnica

Árvore Binária

- **Definição (Árvore Binária)** Uma *árvore binária* *T* é um conjunto finito de *nós* com as propriedades:

1. Ou o conjunto é vazio, $T = \varnothing$; ou
2. O conjunto consiste em uma raiz, *r*, e exatamente *duas* árvores *binárias* distintas T_L e T_R . A árvore T_L é chamada *árvore da esquerda* de *T*, e a árvore T_R é chamada *árvore da direita* de *T*.

$$T = \{r; T_L; T_R\}$$

UNIVALI Escola Politécnica

Árvores Binárias

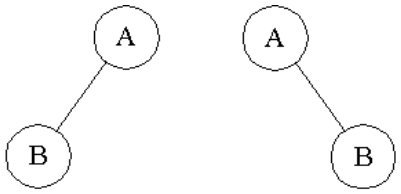
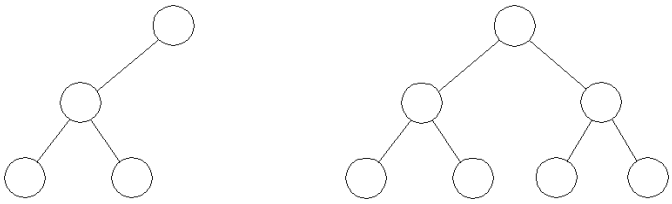


Fig. 5.5 Árvores binárias distintas

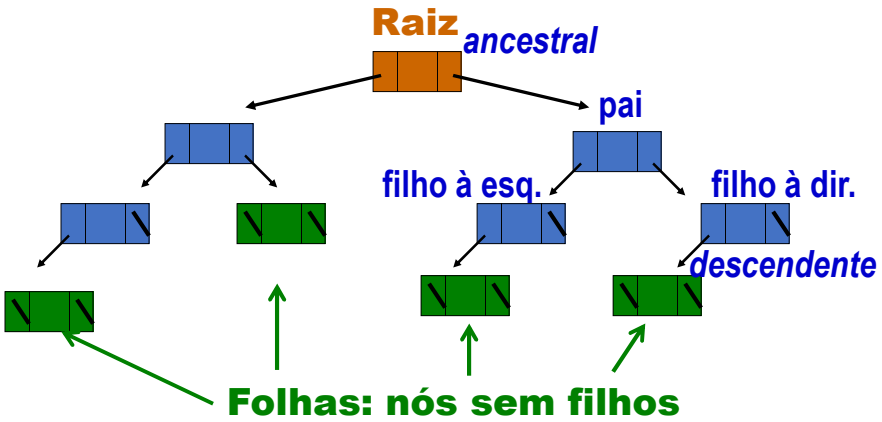
UNIVALI Escola Politécnica

Árvores binárias completas e incompletas



UNIVALI Escola Politécnica

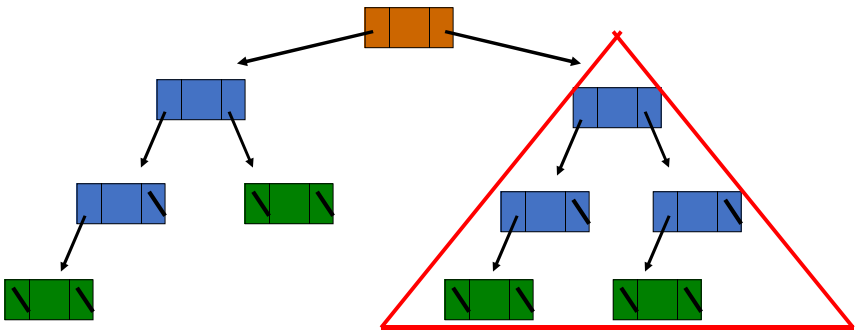
Árvore Binária



UNIVALI Escola Politécnica

Sub-Árvores

Árvores que contêm um nó e todos os seus descendentes.



UNIVALI Escola Politécnica

Veja uma árvore binária....

Escola Politécnica

Caminhamento em Árvores

Encaminhamentos sistemáticos em árvore baseiam-se na ordem em que a raiz é visitada com relação a seus descendentes.

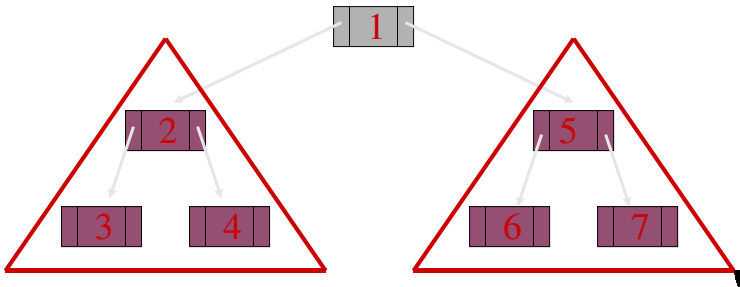
- Têm normalmente o mesmo custo.
- A diferença está no efeito produzido.
- Muitas vezes, para uma situação há um encaminhamento mais adequado.

UNIVALI Escola Politécnica

Caminhamento Pré-Fixado

- A raiz é visitada antes dos seus descendentes.

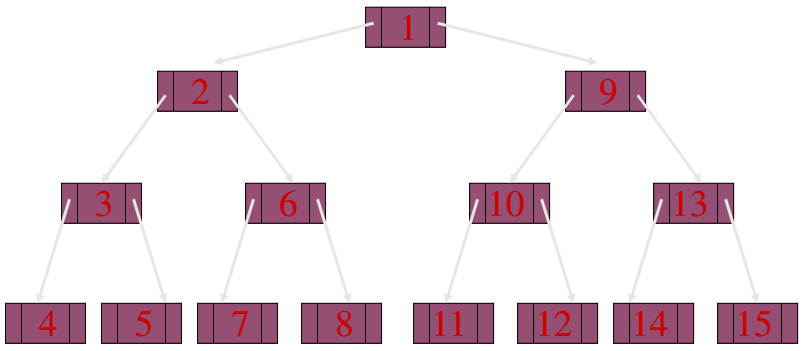
- Depois as sub-árvores da raiz são visitadas em pré-fixado da esquerda para a direita.



UNIVALI Escola Politécnica

Caminhamento Pré-Fixado

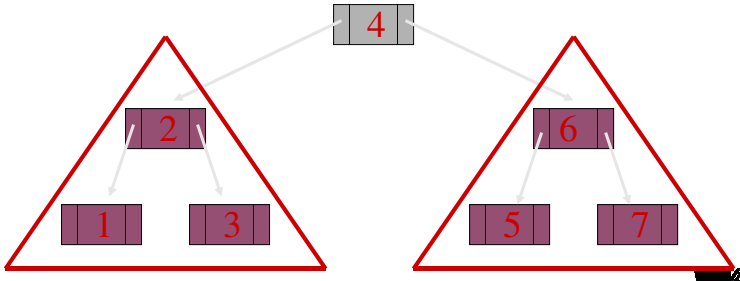
Um exemplo um pouco maior:



UNIVALI Escola Politécnica

Caminhamento Infixado

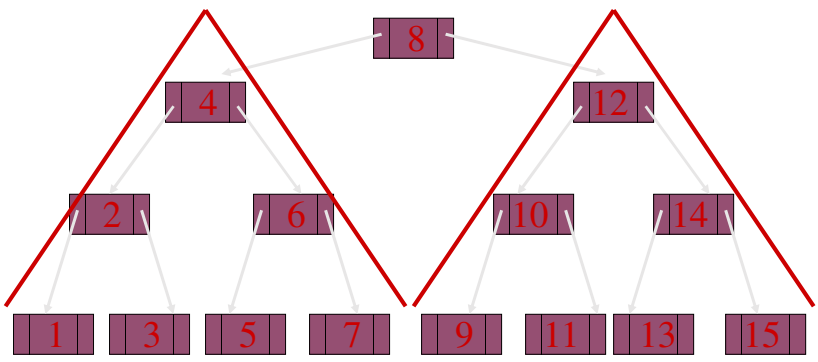
- Visitar a sub-árvore à esquerda infixada.
- Visitar a raiz. (entre as sub-árvores)
- Visitar a sub-árvore à direita infixada



UNIVALI Escola Politécnica

Caminhamento Infixado

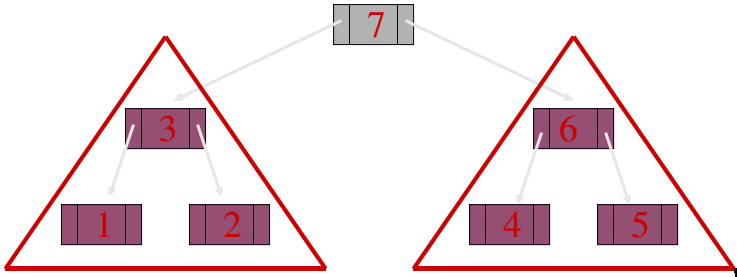
Um exemplo um pouco maior:



UNIVALI Escola Politécnica

Caminhamento Pós-Fixado

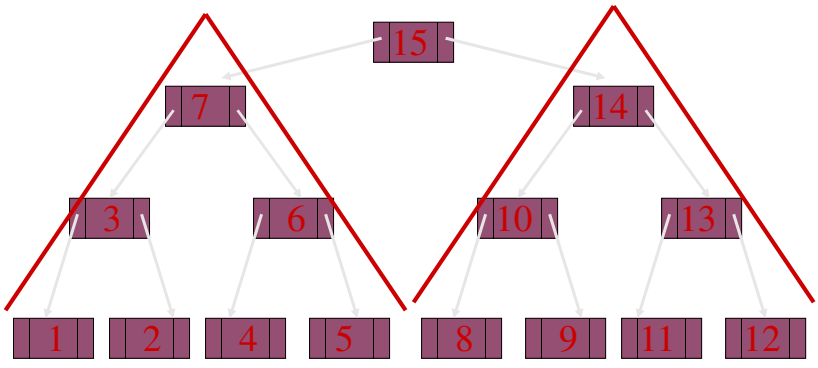
- As sub-árvores da raiz são visitadas em pós-fixado da esquerda para a direita.
- A raiz é visitada depois dos seus descendentes.



UNIVALI Escola Politécnica

Caminhamento Pós-Fixado

Um exemplo um pouco maior:



UNIVALI Escola Politécnica

Caminhamentos

- Pré-fixado:
  Raiz– [ESQUERDA] – [DIREITA]
- Infixado:
  [ESQUERDA] - Raiz – [DIREITA]
- Pós-fixado
  [ESQUERDA] – [DIREITA] - Raiz

UNIVALI Escola Politécnica

Caminhamento ou percurso sobre árvores binárias

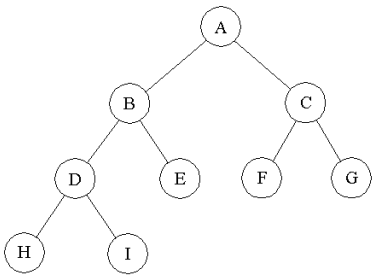


Fig 5.11 Percurso sobre árvore binária

- Percurso ou notação pré-fixada: A-B-D-H-I-E-C-F-G
- Percurso ou notação infixada: H-D-I-B-E-A-F-C-G
- Percurso ou notação pós-fixada: H-I-D-E-B-F-G-C-A

UNIVALI Escola Politécnica

Árvore Binária de Busca

UNIVALI Escola Politécnica

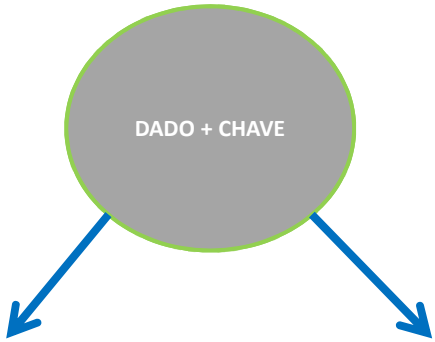
Árvore Binária de Busca

- É uma estrutura de dados que foi criada com o intuito de otimizar o tempo de busca, em comparação às listas.
- Todo nó de uma árvore binária de busca possui um dado.
- Neste dado, deve haver um índice (ou chave), que deverá ser utilizado como base para as comparações.
- IMPORTANTE: não podem haver dois nós com a mesma chave

UNIVALI Escola Politécnica

Árvore Binária de Busca

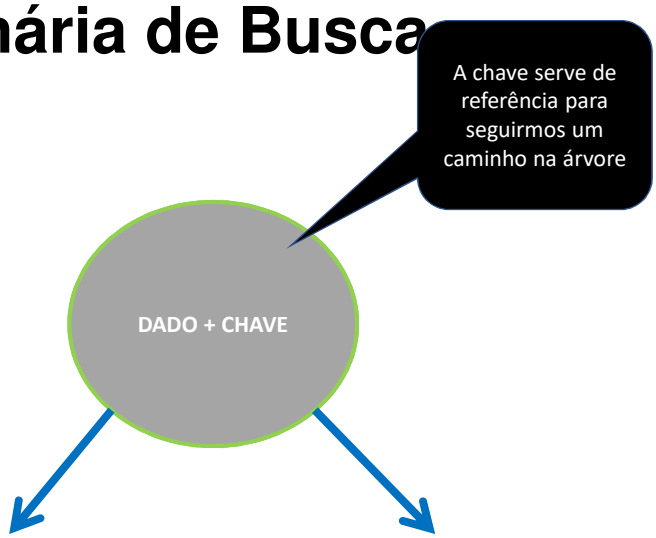
- Vejamos



UNIVALI Escola Politécnica

Árvore Binária de Busca

- Vejamos



UNIVALI Escola Politécnica

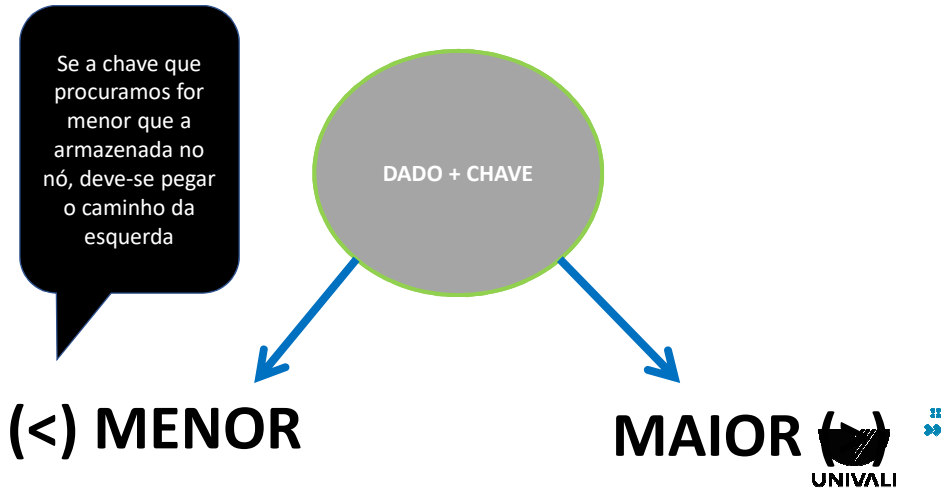
Árvore Binária de Busca

- Vejamos

UNIVALI Escola Politécnica

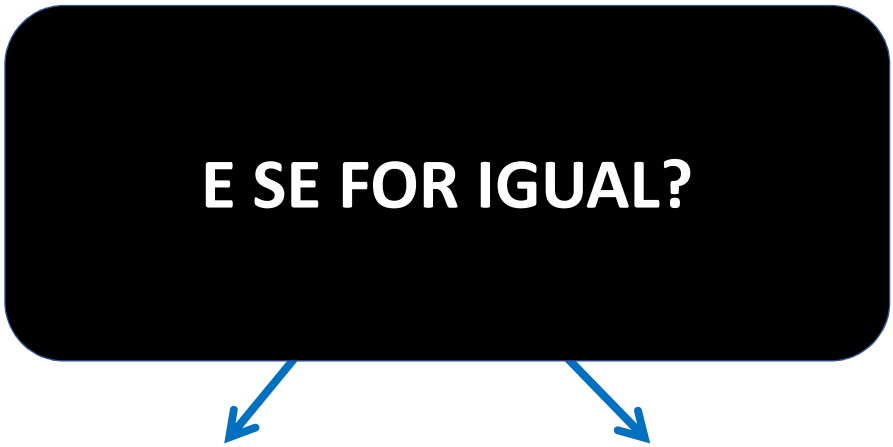
Árvore Binária de Busca

- Vejamos



UNIVALI Escola Politécnica

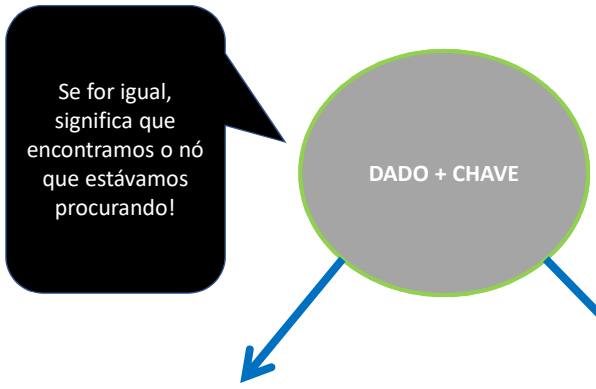
Árvore Binária de Busca



UNIVALI Escola Politécnica

Árvore Binária de Busca

- Vejamos



UNIVALI Escola Politécnica

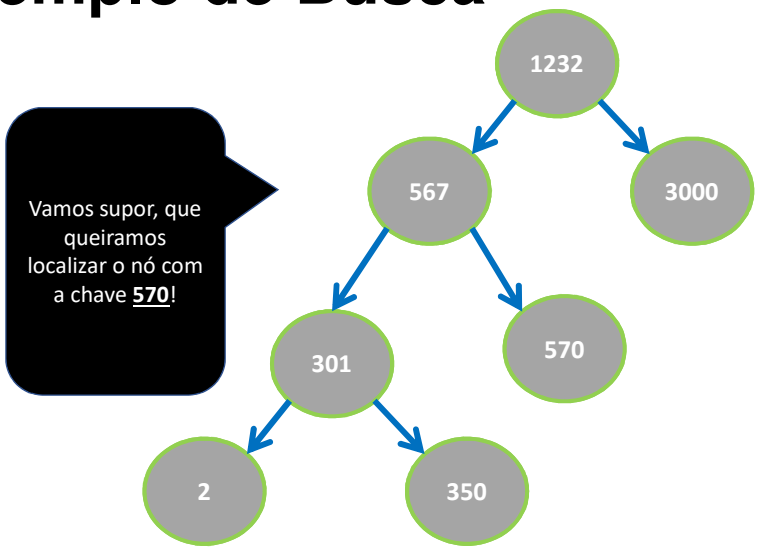
Exemplo de Busca

Iremos realizar dois exemplos de busca de valores para ilustrar processo.

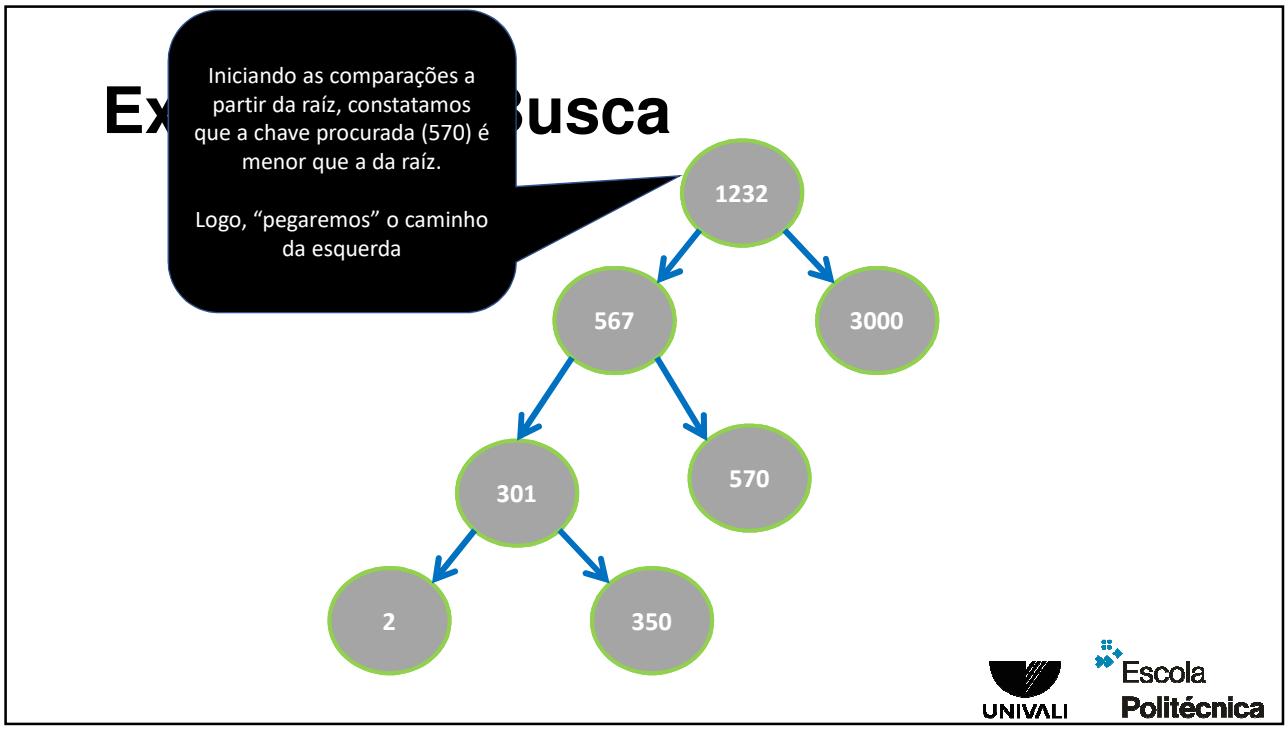
2 350

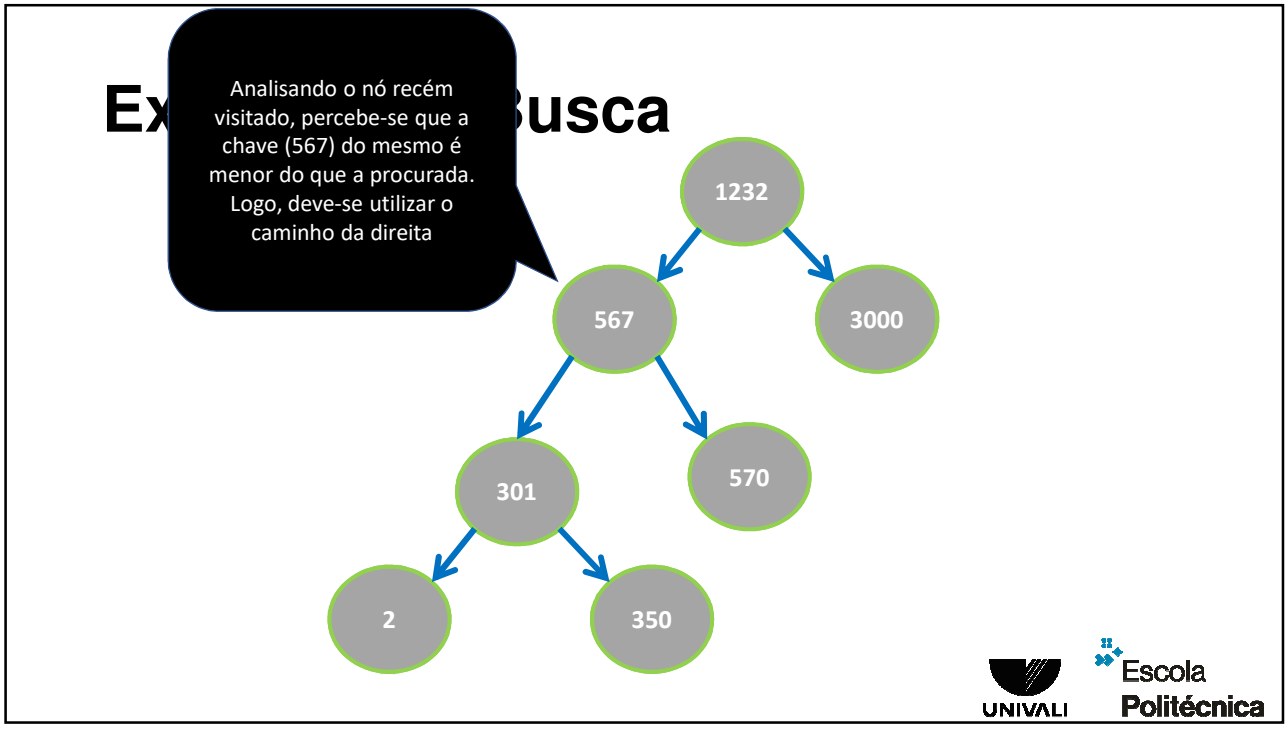
UNIVALI Escola Politécnica

Exemplo de Busca

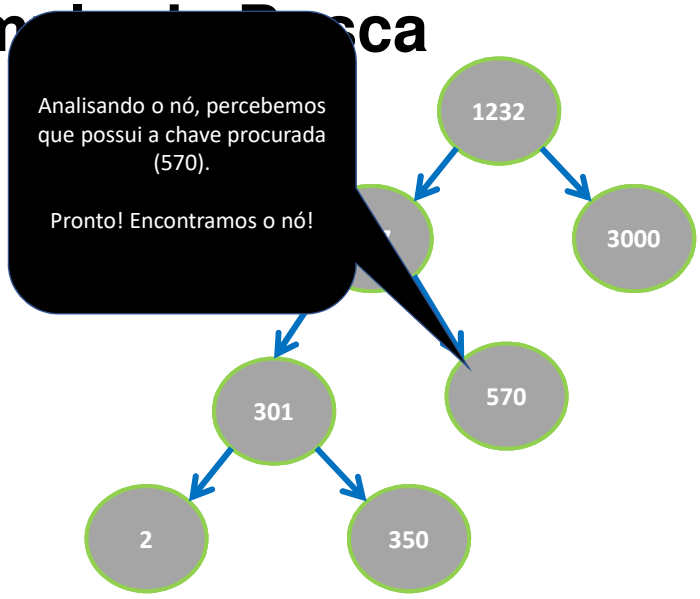


UNIVALI Escola Politécnica


Ex usca
Iniciando as comparações a partir da raíz, constatamos que a chave procurada (570) é menor que a da raíz.
Logo, “pegaremos” o caminho da esquerda
1232
567
3000
301
570
2
350
UNIVALI
Escola Politécnica

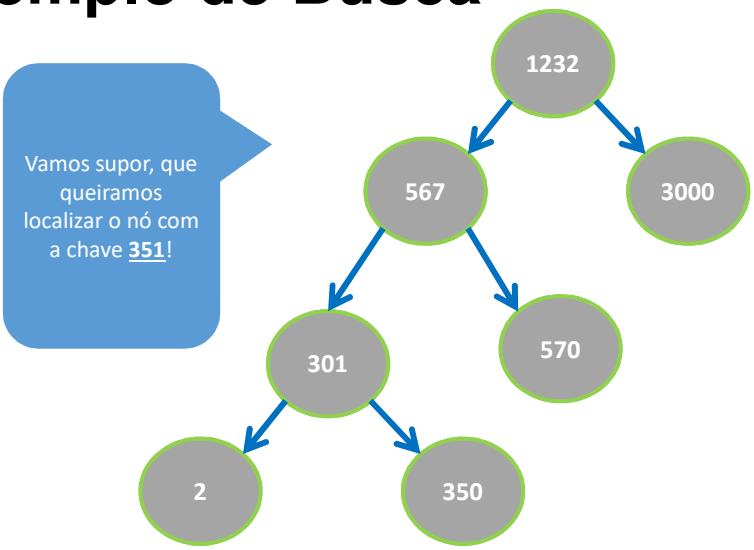

Ex usca
Analisando o nó recém visitado, percebe-se que a chave (567) do mesmo é menor do que a procurada. Logo, deve-se utilizar o caminho da direita
1232
567
3000
301
570
2
350
UNIVALI
Escola Politécnica

Exem[illegible]sca



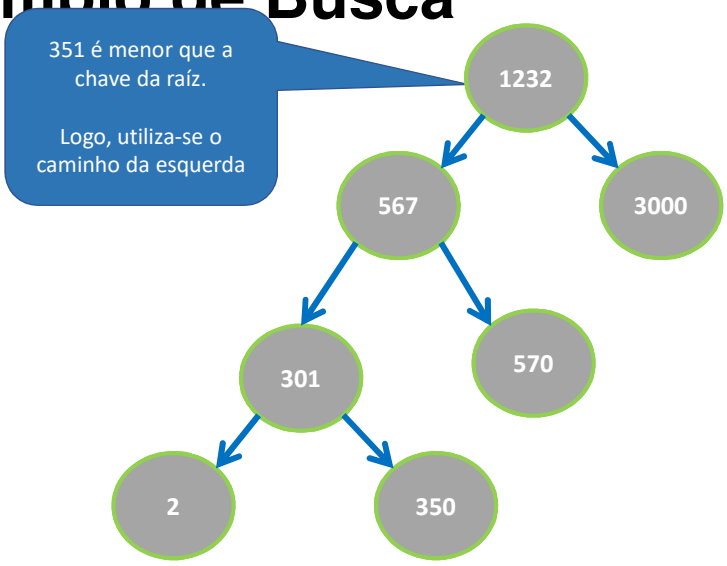
UNIVALI Escola Politécnica

Exemplo de Busca



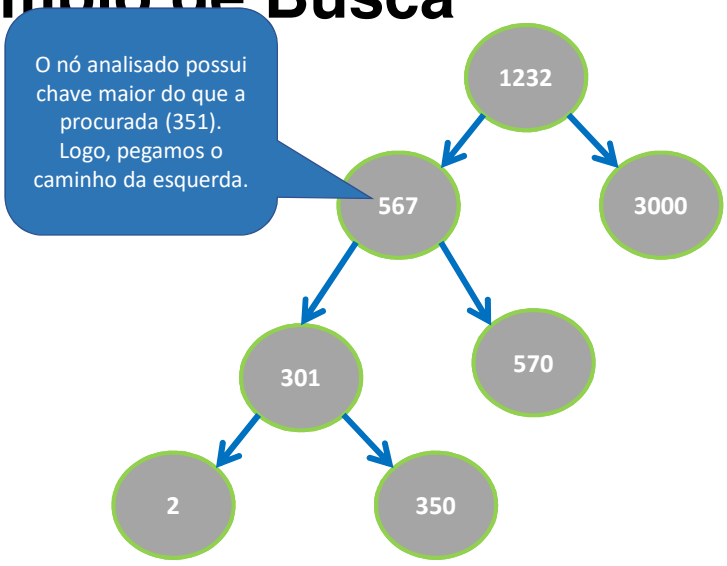
UNIVALI Escola Politécnica

Exemplo de Busca



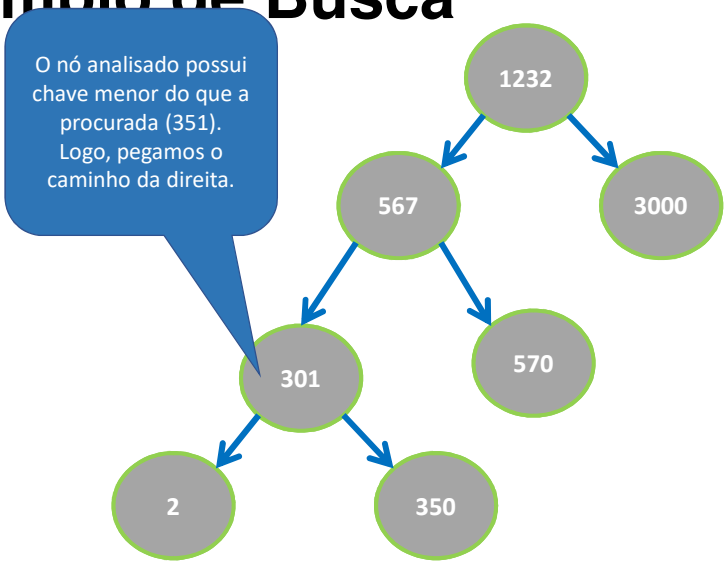
UNIVALI Escola Politécnica

Exemplo de Busca



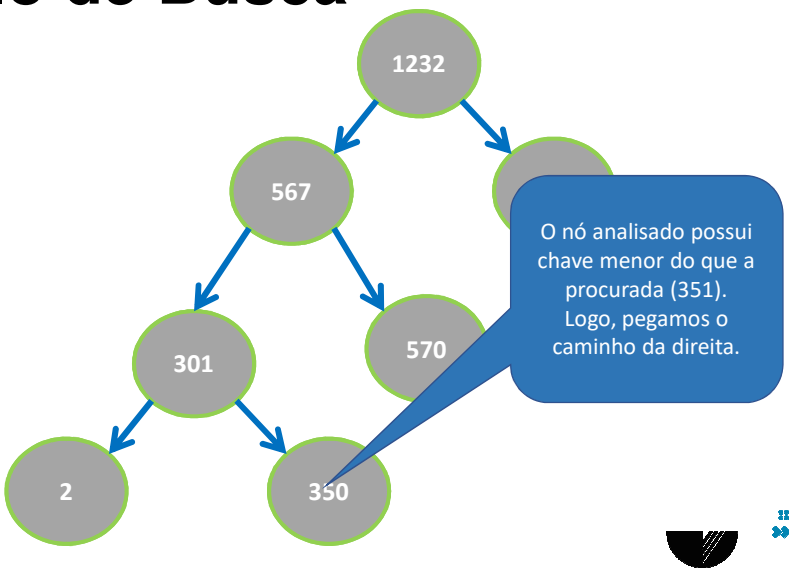
UNIVALI Escola Politécnica

Exemplo de Busca



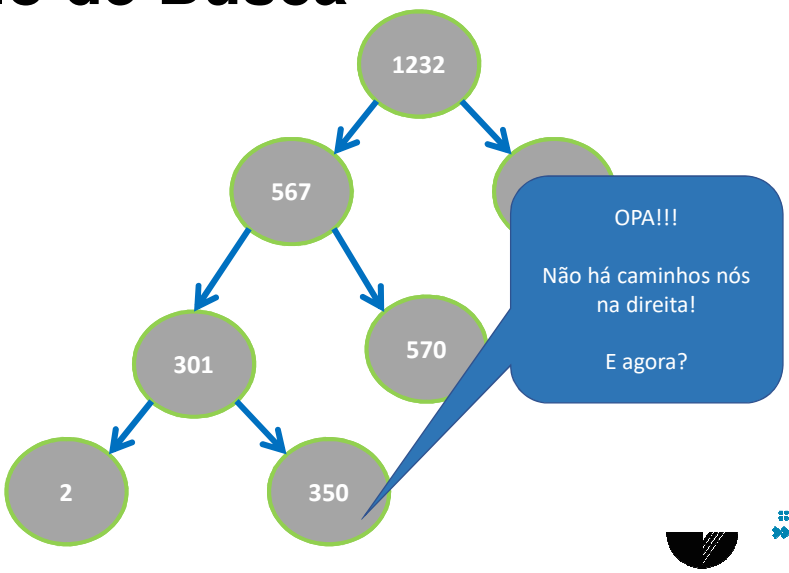
UNIVALI Escola Politécnica

Exemplo de Busca



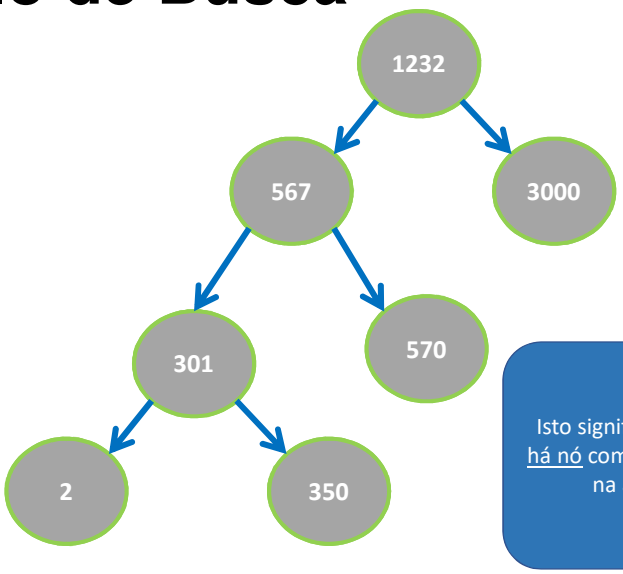
UNIVALI Escola Politécnica

Exemplo de Busca



UNIVALI Escola Politécnica

Exemplo de Busca



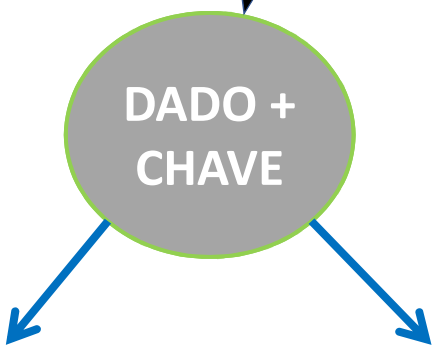
UNIVALI Escola Politécnica

Agora, iremos planejar a TAD!

Escola Politécnica

TAD

Cada nó deve possuir uma estrutura para acomodar o dado, a chave e dois ponteiros: um para direita e um para esquerda

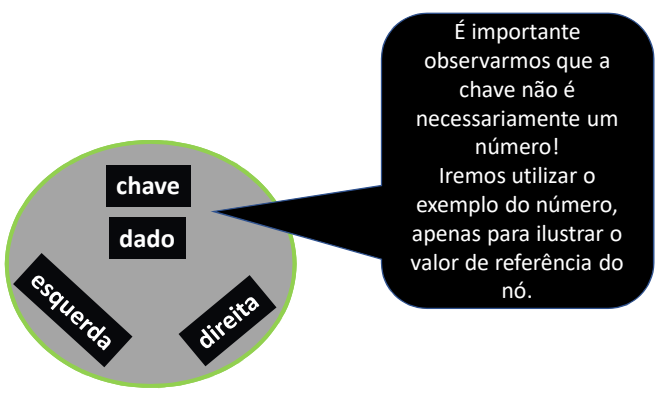


UNIVALI Escola Politécnica

TAD

UNIVALI Escola Politécnica

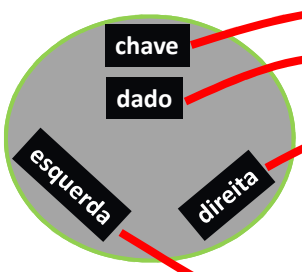
TAD



UNIVALI Escola Politécnica

TAD

Transformando a estrutura em código (C++), veremos como podem ser representados cada nó.




```
struct TNo{
    int chave;
    TIPO dado;
    TNo * direita;
    TNo * esquerda;
};
```

UNIVALI Escola Politécnica

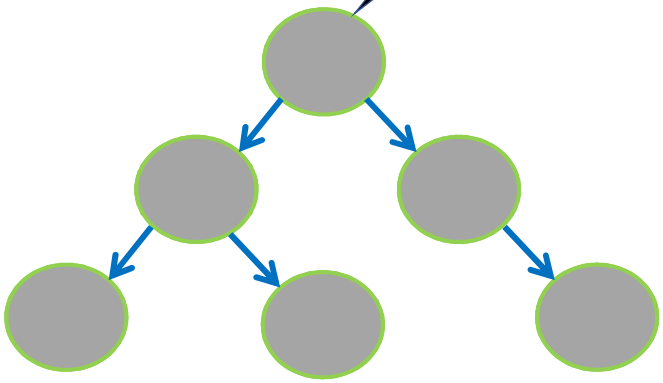
TAD

No entanto, ainda precisamos de uma estrutura que comporte a árvore em si, como fazíamos com as listas.

UNIVALI Escola Politécnica

TAD

Possuindo a referência da raíz, conseguimos atingir todos os nós da árvore.

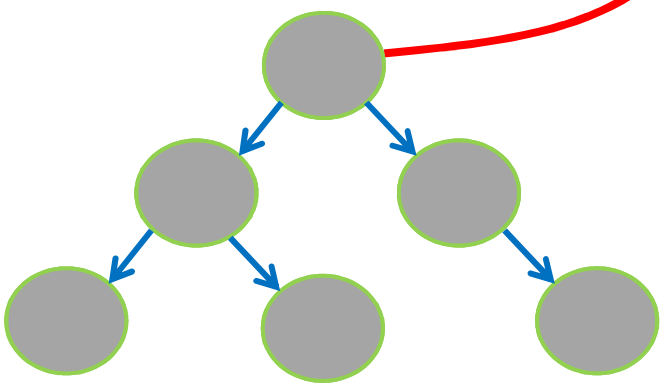


UNIVALI Escola Politécnica

TA

Logo, ...

```
struct TArvore{
     TNo * raiz;
};
```



UNIVALI Escola Politécnica

Considerações

- Como operações da TAD, podemos citar:
  - inicializar;
  - inserir;
  - remover;
  - buscar;
  - calcular_altura_no;
  - destruir_arvore.

UNIVALI Escola Politécnica

Considerações

- Pode-se criar TADs de árvores binárias genéricas
  - Nestes casos é interessante sobrecarregar os operadores de igualdade, maior e menor (respectivamente ==, > e <) para comparar os valores das chaves.

UNIVALI Escola Politécnica

K-HARD

UNIVALI Escola Politécnica