Universidade do Vale do Itajaí
Escola Politécnica
Curso de Ciência da Computação – Campus Itajaí
Disciplina - Cálculo Numérico

Relatório da Atividade Avaliativa M1-1

Acadêmico(a) / Cód. de Pessoa: Matheus Baron Lauritzen / 7854811

Acadêmico(a) / Cód. de Pessoa: Gustavo Baron Lauritzen / 7853653.

Data: 14/09/2023

SUMÁRIO

Resolução da Questão 1

Resolução segundo o código de pessoa do aluno Gustavo

Seguindo as regras impostas no enunciado da questão obtemos a seguinte equação não linear para o aluno Gustavo Baron Lauritzen com o código de pessoa 7853653:

$$\alpha = \sqrt[78]{7853653}$$

Para encontrar a f(x) tal que $f(\alpha) = 0$ precisamos:

$$(\alpha)^{78} = 7853653$$

$$(\alpha)^{78} - 7853653 = 0$$

Assim, encontramos:

$$f(x) = (x)^{78} - 7853653$$

Derivando, obtemos:

$$f'(x) = 78x^{77}$$

Para utilizarmos o método de Newton, precisamos definir ainda um intervalo, para isso substituiremos alguns valores na função $f(x) = (x)^{78} - 7853653$. Para uma melhor ilustração, colocamos os resultados na tabela abaixo:

x	1	2
$f(x)$	-7853652	$3{,}022314549 \times 10^{23}$

Ao substituir os valores 1 e 2 dentro da função de $f(x)$ segundo o teorema (existência de raiz real) podemos notar que $f(a) \times f(b) < 0$ isso indica que existe uma ou mais raízes para essa função de $f(x)$. Porém precisamos garantir que exista apenas uma raiz nesse intervalo, e para isso utilizaremos os mesmos valores dentro de $f'(x)$:

x	1	2
$f'(x)$	78	$1{,}178702674 \times 10^{25}$

Depois de substituirmos esses valores para $f'(x)$ podemos notar que não há mais aquela mudança de sinal, permanecendo os dois resultados positivos, o que confirma o zero da função pois segundo o teorema (unicidade da raiz real) quando a derivada preserva o sinal dentro de um intervalo (a, b) significa que a função é estritamente crescente ou estritamente decrescente em (a, b), portanto a raiz é única.

A partir do intervalo (a,b), podemos calcular o ponto médio fazendo (a+b)/2 para utilizarmos como x_0 no método de Newton, no nosso caso:

$$x_0 = \frac{(1+2)}{2}$$

$$x_0 = 1{,}5$$

Com todas essas informações podemos calcular o valor de α utilizando o método de Newton, para isso a dupla optou por implementar o método de Newton utilizando a linguagem de programação Python, essa implementação está anexada em um arquivo .zip junto a esse relatório.

Substituindo $f(x)$, $f'(x)$, x_0 e os demais dados no código em Python obtemos os seguintes resultados, levando em consideração um erro de 10^{-5}, vale ressaltar que esse é o critério de parada utilizado:

```
Valor de x 1 : [ 1.480769233548625 ] Valor estimado do Erro :[ 0.019230766451374892 ]
Valor de x 2 : [ 1.4617850201123872 ] Valor estimado do Erro :[ 0.018984213436237907 ]
Valor de x 3 : [ 1.4430442067955584 ] Valor estimado do Erro :[ 0.018740813316828753 ]
Valor de x 4 : [ 1.4245436947994645 ] Valor estimado do Erro :[ 0.018500511996093927 ]
Valor de x 5 : [ 1.4062804619881453 ] Valor estimado do Erro :[ 0.018263232811319252 ]
Valor de x 6 : [ 1.3882516247230616 ] Valor estimado do Erro :[ 0.01802883726508364 ]
Valor de x 7 : [ 1.3704546057341997 ] Valor estimado do Erro :[ 0.01779701898886188 ]
Valor de x 8 : [ 1.3528875882818874 ] Valor estimado do Erro :[ 0.017567017452312372 ]
Valor de x 9 : [ 1.3355507429031699 ] Valor estimado do Erro :[ 0.01733684537871749 ]
Valor de x 10 : [ 1.3184495361273085 ] Valor estimado do Erro :[ 0.017101206775861355 ]
Valor de x 11 : [ 1.301603627985524 ] Valor estimado do Erro :[ 0.016845908141784438 ]
Valor de x 12 : [ 1.285070612264255 ] Valor estimado do Erro :[ 0.016533015721269084 ]
Valor de x 13 : [ 1.2690080140361597 ] Valor estimado do Erro :[ 0.016062598228095304 ]
Valor de x 14 : [ 1.2538256591873045 ] Valor estimado do Erro :[ 0.015182354848855217 ]
Valor de x 15 : [ 1.240497070953688 ] Valor estimado do Erro :[ 0.01332858823361649 ]
Valor de x 16 : [ 1.2308464992651513 ] Valor estimado do Erro :[ 0.009650571688536669 ]
Valor de x 17 : [ 1.2264761942903455 ] Valor estimado do Erro :[ 0.004370304974805839 ]
Valor de x 18 : [ 1.225756747773162 ] Valor estimado do Erro :[ 0.0007194465171835862 ]
Valor de x 19 : [ 1.2257399987394682 ] Valor estimado do Erro :[ 1.674903369375258e-05 ]
Valor de x 20 : [ 1.225739989922027 ] Valor estimado do Erro :[ 8.817441221609101e-09 ]


Valor final de x: [ 1.225739989922027 ]
Estimativa final do erro |xn-xn+1|:  8.817441221609101e-09

Process finished with exit code 0
```

Analisando os resultados podemos afirmar que uma aproximação para α usando o método de Newton é $1{,}225739989922027$ com a estimativa de erro de $8.817441221609101 \times 10^{-9}$ que é menor do que o critério definido de 10^{-5}.

Resolução segundo o código de pessoa do aluno Matheus

Seguindo as regras impostas no enunciado da questão obtemos a seguinte equação não linear para o aluno Matheus Baron Lauritzen com o código de pessoa 7854811:

$$\alpha = \sqrt[78]{7854811}$$

Para encontrar a f(x) tal que $f(\alpha) = 0$ precisamos:

$$(\alpha)^{78} = 7854811$$

$$(\alpha)^{78} - 7854811 = 0$$

Assim, encontramos:

$$f(x) = (x)^{78} - 7854811$$

Derivando, obtemos:

$$f'(x) = 78x^{77}$$

Para utilizarmos o método de Newton, precisamos definir ainda um intervalo, para isso substituiremos alguns valores na função $f(x) = (x)^{78} - 7854811$. Para uma melhor ilustração, colocamos os resultados na tabela abaixo:

x	1	2
$f(x)$	-7854810	$3{,}022314549 \times 10^{23}$

Ao substituir os valores 1 e 2 dentro da função de $f(x)$ segundo o teorema (existência de raiz real) podemos notar que $f(a) \times f(b) < 0$ isso indica que existe uma ou mais raízes para essa função de $f(x)$. Porém precisamos garantir que exista apenas uma raiz nesse intervalo, e para isso utilizaremos os mesmos valores dentro de $f'(x)$:

x	1	2
$f'(x)$	78	$1{,}178702674 \times 10^{25}$

Depois de substituirmos esses valores para $f'(x)$ podemos notar que não há mais aquela mudança de sinal, permanecendo os dois resultados positivos, o que confirma o zero da função pois segundo o teorema (unicidade da raiz real) quando a derivada preserva o sinal dentro de um intervalo (a, b) significa que a função é estritamente crescente ou estritamente decrescente em (a, b), portanto a raiz é única.

A partir do intervalo (a,b), podemos calcular o ponto médio fazendo (a+b)/2 para utilizarmos como x_0 no método de Newton, no nosso caso:

$$x_0 = \frac{(1+2)}{2}$$

$$x_0 = 1{,}5$$

Com todas essas informações podemos calcular o valor de α utilizando o método de Newton.

Substituindo $f(x)$, $f'(x)$, x_0 e os demais dados no código em Python obtemos os seguintes resultados, levando em consideração um erro de 10^{-5}, vale ressaltar que esse é o critério de parada utilizado:

```
Valor de x 1 : [ 1.4807692335490348 ] Valor estimado do Erro :[ 0.01923076645096522 ]
Valor de x 2 : [ 1.4617850201138984 ] Valor estimado do Erro :[ 0.018984213435136343 ]
Valor de x 3 : [ 1.4430442068000398 ] Valor estimado do Erro :[ 0.018740813313858684 ]
Valor de x 4 : [ 1.4245436948119623 ] Valor estimado do Erro :[ 0.01850051198807745 ]
Valor de x 5 : [ 1.406280462022289 ] Valor estimado do Erro :[ 0.018263232789673234 ]
Valor de x 6 : [ 1.3882516248156613 ] Valor estimado do Erro :[ 0.018028837206627735 ]
Valor de x 7 : [ 1.370454605984676 ] Valor estimado do Erro :[ 0.017797018830993716 ]
Valor de x 8 : [ 1.3528875889586747 ] Valor estimado do Erro :[ 0.017567017025992948 ]
Valor de x 9 : [ 1.3355507447309884 ] Valor estimado do Erro :[ 0.01733684422768622 ]
Valor de x 10 : [ 1.3184495410610364 ] Valor estimado do Erro :[ 0.017101203669952048 ]
Valor de x 11 : [ 1.3016036412868983 ] Valor estimado do Erro :[ 0.016845899774138084 ]
Valor de x 12 : [ 1.2850706480116267 ] Valor estimado do Erro :[ 0.01653299327527158 ]
Valor de x 13 : [ 1.2690081092876913 ] Valor estimado do Erro :[ 0.016062538723935482 ]
Valor de x 14 : [ 1.2538259072065239 ] Valor estimado do Erro :[ 0.015182202081167384 ]
Valor de x 15 : [ 1.2404976788654858 ] Valor estimado do Erro :[ 0.013328228341038084 ]
Valor de x 16 : [ 1.230847785414768 ] Valor estimado do Erro :[ 0.009649893450717872 ]
Valor de x 17 : [ 1.2264782281668716 ] Valor estimado do Erro :[ 0.0043695572478963385 ]
Valor de x 18 : [ 1.2257590518695252 ] Valor estimado do Erro :[ 0.0007191762973464133 ]
Valor de x 19 : [ 1.2257423156350888 ] Valor estimado do Erro :[ 1.6736234436320885e-05 ]
Valor de x 20 : [ 1.2257423068311402 ] Valor estimado do Erro :[ 8.803948681190832e-09 ]


Valor final de x: [ 1.2257423068311402 ]
Estimativa final do erro |xn-xn+1|:  8.803948681190832e-09

Process finished with exit code 0
```

Analisando os resultados podemos afirmar que uma aproximação para α usando o método de Newton é $1{,}2257423068311402$ com a estimativa de erro de $8.803948681190832 \times 10^{-9}$ que é menor do que o critério definido de 10^{-5}.

Resolução da Questão 2

Verificação do sistema apresentado:

Para verificar se o sistema abaixo é de solução única, fizemos o determinante do sistema:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 & = 4; \\ 3x_1 + 9x_2 + 5x_3 & = 0; \\ 3x_1 + 3x_2 + 7x_3 & = 4; \end{cases}$$

Aplicando o determinante:

$$3 - 1 + 1 + 3 - 1$$

$$3 + 9 + 5 + 3 + 9$$

$$3 + 3 + 7 + 3 + 3$$

$$(3 \times 9 \times 7) + (-1 \times 5 \times 3) + (1 \times 3 \times 3) - (1 \times 9 \times 3 + 3 \times 5 \times 3 + (-1) \times 3 \times 7)$$

$$(189 + (-15) + 9) - 18 - 45 - (-21)$$

$$183 - 42$$

$$141$$

Podemos concluir que o sistema acima é um Sistema Possível e Determinado (SPD) por se tratar de um sistema 3x3(Quadrado) e o Determinante da Matriz gerada a partir do Sistema é diferente de zero ($\det(A) \neq 0$).

Justificativa do método:

Ao somarmos os valores absolutos fora da diagonal principal e compará-los aos valores absolutos da diagonal principal, podemos notar que o sistema é de diagonal dominante, o que satisfaz o chamado "Critério das Linhas". Agora, sabendo que o sistema avaliado é diagonal dominante, o que garante a convergência de ambos os métodos. Nesse cenário, a principal diferença entre Gauss-Seidel e Gauss-Jacobi é a eficiência da convergência.

O Método de Gauss-Seidel converge mais rapidamente do que o Método de Gauss-Jacobi na maioria dos casos. A razão para isso é que, no Método de Gauss-Seidel, os valores atualizados são usados assim que são calculados, o que significa que cada novo valor é baseado nos valores mais recentes das variáveis que já convergiram. Isso permite uma convergência mais rápida, pois as variáveis convergentes fornecem informações atualizadas para as variáveis restantes. Portanto iremos utilizar o método de Gauss-Seidel para a solução computacional.

Resolução segundo o código de pessoa do aluno Gustavo:

O aluno Gustavo possui o código de pessoa 7853653, portanto os valores de d1, d2 e d3 são respectivamente 7;8 e 5.

Utilizando o Método de Gauss-Seidel obtemos os seguintes resultados:

```
Iteração 0
x =  [7, 8, 5]
Iteração 1:
x1 =  2.333333333333333 x2 =  -3.5555555555555554 x3 =  1.0952380952380951
Erro absoluto(x1): 4.666666666666667 Erro absoluto(x2): 11.555555555555555 Erro absoluto(x3): 3.904761904761905
Erro relativo(x1): 200.00000000000006% Erro relativo(x2): 325.0% Erro relativo(x3): 356.52173913043487%
Iteração 2:
x1 =  -0.21693121693121675 x2 =  -0.5361552028218695 x3 =  0.8941798941798941
Erro absoluto(x1): 2.55026455026455 Erro absoluto(x2): 3.019400352733686 Erro absoluto(x3): 0.20105820105820105
Erro relativo(x1): 1175.6097560975616% Erro relativo(x2): 563.1578947368421% Erro relativo(x3): 22.485207100591715%
Iteração 3:
x1 =  0.8565549676660789 x2 =  -0.7822849304330786 x3 =  0.5395985554715712
Erro absoluto(x1): 1.0734861845972956 Erro absoluto(x2): 0.2461297276112091 Erro absoluto(x3): 0.35458133870832287
Erro relativo(x1): 125.32601235415235% Erro relativo(x2): 31.46292585170341% Erro relativo(x3): 65.71206225680936%
Valor final de x =  [0.8565549676660789, -0.7822849304330786, 0.5395985554715712]

Process finished with exit code 0
```

Resolução segundo o código de pessoa do aluno Matheus:

O aluno Matheus possui o código de pessoa 7854811, portanto os valores de d1, d2 e d3 também são respectivamente 7;8 e 5.

Utilizando o Método de Gauss-Seidel obtemos os seguintes resultados:

```
Iteração 0
x =  [7, 8, 5]
Iteração 1:
x1 =  2.333333333333333 x2 =  -3.5555555555555554 x3 =  1.0952380952380951
Erro absoluto(x1): 4.666666666666667 Erro absoluto(x2): 11.555555555555555 Erro absoluto(x3): 3.904761904761905
Erro relativo(x1): 200.00000000000006% Erro relativo(x2): 325.0% Erro relativo(x3): 356.52173913043487%
Iteração 2:
x1 =  -0.21693121693121675 x2 =  -0.5361552028218695 x3 =  0.8941798941798941
Erro absoluto(x1): 2.55026455026455 Erro absoluto(x2): 3.019400352733686 Erro absoluto(x3): 0.20105820105820105
Erro relativo(x1): 1175.6097560975616% Erro relativo(x2): 563.1578947368421% Erro relativo(x3): 22.485207100591715%
Iteração 3:
x1 =  0.8565549676660789 x2 =  -0.7822849304330786 x3 =  0.5395985554715712
Erro absoluto(x1): 1.0734861845972956 Erro absoluto(x2): 0.2461297276112091 Erro absoluto(x3): 0.35458133870832287
Erro relativo(x1): 125.32601235415235% Erro relativo(x2): 31.46292585170341% Erro relativo(x3): 65.71206225680936%
Valor final de x =  [0.8565549676660789, -0.7822849304330786, 0.5395985554715712]

Process finished with exit code 0
```

Análise dos resultados de ambos os alunos:

Como ambos os alunos possuem os três primeiros dígitos do código de pessoa iguais, os valores encontrados para x1, x2, e x3 são os mesmos. Além disso, as estimativas de erros também são as mesmas. Ao calcularmos a solução podemos perceber que com 3 interações conseguimos obter as seguintes aproximações:

$$x_1 = 0.8565549676660789$$

$$x_2 = -0.7822849304330786$$

$$x_3 = 0.5395985554715712$$

Com o erro máximo relativo encontrado na iteração 2 do x1 de:

$$e_R = 1175.6097560975616\%$$

Com o erro máximo absoluto encontrado na iteração 1 do x2 de:

$$e_A = 11.555555555555555$$

É evidente que o erro máximo obtido é alto, ademais, foram obtidos outros valores de erro que são tão altos quanto. Então, uma forma de reduzir esses valores é aumentar a quantidade de iterações, o que resultaria em uma redução do erro. Outrossim, uma outra maneira de reduzir o erro máximo obtido é mudar os valores de $x^{(0)}$, também chamado de “chute” inicial. Usualmente esse valor é definido como 0, porém ele pode mudar dependendo do sistema linear e através de testes com valores diferentes para o chute inicial pode-se chegar a um chute que reduza o valor do erro de forma mais eficiente. Entretanto o valor 0 é bastante utilizado como valor inicial por apresentar um bom resultado para a maioria dos sistemas lineares.