Exercício Programa 01 - Laboratório de Computação e Simulação

Matheus Oliveira da Silva

April 12, 2023

1 Introdução

O presente relatório visa apresentar uma aplicação do método Monte Carlo para estimar o valor da constante π com uma acurácia de 0,05%. Por conta do comportamento estocástico do algoritmo foi utilizado um intervalo de confiança de 99%, isto é, em cerca de 99% dos testes o algoritmo conseguirá estimar o valor de π com uma acurácia de 0,05%.

2 Desenvolvimento

Utilizando o python gera-se pontos pseudoaleatórios no intervalo $x_i \in [-1, 1]^2, i \in \{1, 2, 3, .., n\}$, área compreendida como quadrado de lado 2 centrado na origem chamaremos de área Q, considerando um círculo de raio 1 também centrado na origem dividimos a área Q em duas regiões, região a compreendida pela área do círculo e região b compreendida pela área dentro do quadrado complementar à do círculo como na {Figura 1}. O valor de π será estimado pela proporção $p = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T(x_i)$, sendo $T(x_i)$ a função indicadora dada por $T(x_i) = \mathbb{1}(||x||_2 \leq 1)$, representando o teste se o ponto gerado caiu na região a ou na região b. Tal teste caracteriza-se por uma Bernoulli com $p = \frac{\pi}{4}$, e n testes caracterizam-se por uma Binomial.

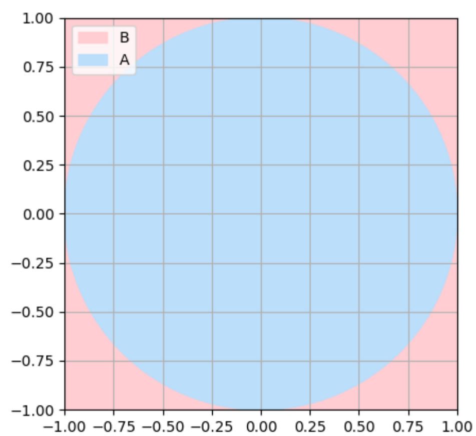


Figure 1: Região a e b

Como a probabilidade se mantém constante podemos montar um intervalo de confiança $\gamma = 99\%$ baseado na normalidade assintótica com o intuito de calcular o valor necessário de n. De acordo com o livro Estatística Básica de Pedro A. Moretinn e Wilton de O. Bussab, capítulo 7 seção 5, a aproximação normal à binomial é boa quando $np > 5$ e $n(1-p) > 5$.
Sabemos que a área do círculo $\pi \times r^2$ é menor que a área do quadrado $(2r)^2$, com $r = 1$ pode-se afirmar que $\pi < 4$ e, assim, conseguimos encontrar um valor de n suficientemente grande para satisfazer a condição de uma boa aproximação, visto que estaremos aproximando mais do que para o valor real

de π. Portanto para qualquer $n > 10$ a aproximação será boa.
Portanto gostariamos de determinar o valor de n de modo que

$$\mathrm{P}(|\bar{X} - \mu| \leq \varepsilon) \geq \gamma$$
$$\mathrm{P}(-\varepsilon \leq \bar{X} - \mu \leq \varepsilon) = \mathrm{P}(\frac{-\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma} \leq \mathrm{Z} \leq \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}) \geq 0.99$$
$$\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma} \geq 2.57$$
$$\text{Portanto, } n \geq \frac{\sigma^2 \times 2.57^2}{\varepsilon^2}[1]$$

Considerando cada ponto gerado, temos que

$$\sigma^2 = p(1-p)$$

Como $p = \frac{\pi}{4}$ e π é desconhecido, podemos utilizar da propriedade[1] que para qualquer p temos que $p(1-p) \leq \frac{1}{4}$ e portanto

$$n \geq \frac{2.57^2}{4\varepsilon^2}$$

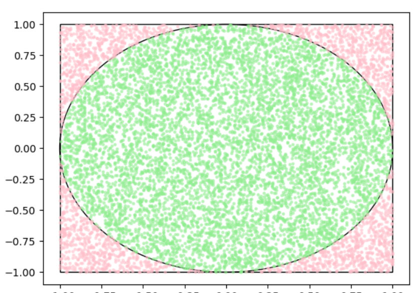
Sendo que p corresponde ao valor estimado de $\frac{\hat{\pi}}{4}$, computacionalmente é calculado o erro máximo ε

$$\varepsilon = 2.57 \times \frac{\sqrt{(\frac{\hat{\pi}}{4})(1-\frac{\hat{\pi}}{4})}}{\sqrt{n}}$$

Então, o algoritmo verificará se o erro ε é menor ou igual à 0.05% do valor estimado $\frac{\hat{\pi}}{4}$. Caso seja, o valor estimado de π é retornado multiplicando por 4. Caso não seja o algoritmo descobre o valor de n tal que

$$\varepsilon \leq 0.0005 \times \hat{\pi}$$

Plot com n = 10000, valor inicial arbitrário para termos uma estimativa de π



3 Conclusão

O método para aumentar n o suficientemente para que a acurácia seja atendida foi escolhido de forma que o tempo de execução seja otimizado. Visto que aumentar o n de forma a chegar no menor n que satisfaça a condição teria computado uma maior quantidade de amostras, decidi utilizar de um único passo para chegar a uma estimativa precisa. Em 10 execuções do programa obtive a seguinte média

$$\bar{\pi} = 3.1414610971341785$$
$$\text{e uma média de } n = 47125786$$

Portanto, conclui-se que a estimativa é válida de acordo com os parâmetros pedidos.

References

[1] MORETIN, Pedro; BUSSAB, Wilton *Estatística Básica*, Edição 8, Saraiva (2010)