

# Modelo Matemático Otimizado de Seleção de Matérias

Lorena Couto C. Melo<sup>1</sup>, Matheus Santana<sup>2</sup>, Marcos Vinicio<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Departamento de Ciência da Computação – Universidade Federal de Ouro Preto  
(UFOP)  
Ouro Preto – MG – Brasil

matheus.spc@aluno.ufop.edu.br, marcos.euzebio@aluno.ufop.edu.br,  
lorena.melo@aluno.ufop.edu.br

**Abstrato.** Este artigo descreve um modelo matemático para seleção de matérias primas para a sinterização em uma siderúrgica. O principal foco do artigo alvo, segundo Raimundo et al. (2024), é aprimorar o tempo de produção e a qualidade do sínter produzido.

**Resumo.** O texto busca em seu conjunto reduzir a soma de inconsistências químicas dos componentes de cada pacote, ou seja, refinar a seleção de matérias primas nas siderúrgicas para a produção do sínter, fruto da sinterização. Para isso foi desenvolvido um modelo matemático otimizado binário no IBM ILOG CPLEX Optimization Studio.

**PALAVRAS CHAVE.** Otimização, Desvio padrão, Sinterização.

## 1. Entendimento do Problema

O problema central reside na produção do sínter, um produto do processo de sinterização de matérias-primas em siderúrgicas. Nesse processo, partículas sólidas são separadas, inseridas na máquina, compactadas no formato desejado e submetidas a altas temperaturas (sempre abaixo do ponto de fusão). Essa etapa modifica o material sem alterar seu estado físico, resultando em sua solidificação.

Este estudo visa aprimorar o desenvolvimento do sínter por meio da otimização do processo de blendagem. A blendagem, que consiste na seleção da quantidade de matéria-prima a ser inserida em cada pacote, frequentemente resulta na perda de qualidade do produto. Além disso, consome uma quantidade significativa de tempo do programador, que realiza adaptações constantes no sistema em busca de uma combinação viável para a fabricação do sínter.

Processo de fabricação por Sinterização

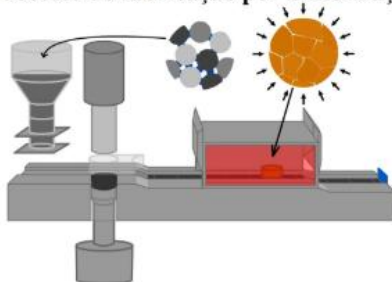


Figura 1. Ilustração do processo de sinterização.

Para garantir uma produção eficiente, o processo de blendagem deve ser otimizado para minimizar a dispersão dos elementos químicos entre os diferentes pacotes. A falta de uniformidade na distribuição desses elementos pode comprometer a qualidade do produto final, gerando inconsistências em suas propriedades físicas e químicas. Portanto, é fundamental ajustar a etapa de blendagem para reduzir essas variações, assegurando maior homogeneidade e confiabilidade no material obtido.

Com esse objetivo, foi utilizado um código implementado no **CPLEX**, ferramenta de programação matemática voltada à resolução de problemas de otimização. O modelo desenvolvido busca **minimizar a soma dos desvios máximos** dos elementos químicos presentes em cada pacote, de forma a reduzir as diferenças de concentração entre eles.

Para isso, foram definidas variáveis que representam a quantidade, em quilogramas (kg), da matéria-prima  $\{i\}$  no pacote  $\{j\}$ , uma variável binária que indica se a matéria-prima  $\{i\}$  está ou não presente em determinado pacote, além de uma variável que quantifica o desvio máximo observado. A partir dessas definições, o CPLEX foi capaz de estruturar um vetor para cada matéria-prima, no qual sua alocação binária determina como deve ser realizada a distribuição no sistema, possibilitando alcançar um arranjo mais equilibrado e eficiente.

## 2. Modelo Matemático

Antes de entrar no modelo matemático propriamente dito, faremos uma explicação dos conjuntos, parâmetros e variáveis que ele utiliza:

**Tabela 1.** Conjuntos.

Parâmetros e Variáveis	Descrição
<i>MateriasPrimas</i>	Matérias-primas para o processo de sinterização.
<i>Elementos</i>	Elementos químicos para composição do sínter.
<i>Pacotes</i>	Quantidade de pacotes a ser fabricados.

**Tabela 2.** Variáveis.

Parâmetros e Variáveis	Descrição
<i>Estoque<sub>i</sub></i>	Quantidade de estoque da matéria-prima $i$ .
<i>ComposicaoQuimica<sub>ij</sub></i>	Composição química do elemento químico $j$ na matéria-prima $i$ .
<i>LimitesConcentracao<sub>i[1,2]</sub></i>	Limite inferior e superior da concentração do elemento químico $i$ .
<i>Llb e LSb</i>	Limites inferior e superior da balança.
<i>Llp e LSp</i>	Limites inferior e superior do pacote.
<i>MaxTiposPorPacote</i>	Quantidade máxima de tipos de elemento químico permitidos por pacote.

$x_{ij}$	Quantidade, em kg, de matéria prima i no pacote j.
$y_{ij}$	Assume o valor 1 (um) se a matéria-prima i é atribuída ao pacote j, e assume valor 0 (zero) caso contrário.
$desvioMaximo_k$	Desvio máximo do elemento químico k.
$p_j$	Peso do pacote j.
$qtdeElemento_{ij}$	Quantidade do elemento químico i no pacote j.

---

## 2.1. Função Objetivo

$$\text{Min} \sum_{k \in \text{Elementos}} desvioMaximo_k$$

A função objetivo busca minimizar a soma dos desvios máximos de cada elemento químico; insistindo no ponto apresentado anteriormente na seção 1 deste documento, a ideia é reduzir ao máximo a diferença de quantidade, em quilogramas, do mesmo elemento químico entre diferentes pacotes.

### 2.1.1 Restrição 1

$$Llp \leq p_j \leq LSp, \quad \forall j \in \text{Pacotes}$$

Assegura que o **peso total de cada pacote** esteja dentro de um intervalo preestabelecido. O limite inferior evita que sejam formados pacotes com massa insuficiente, enquanto o limite superior impede a geração de pacotes excessivamente pesados. Dessa forma, garante-se a padronização e a adequação operacional da produção.

### 2.1.2 Restrição 2

$$Lib * y_{ij} \leq x_{ij} \leq Lsb * y_{ij}, \quad \forall i \in \text{MateriasPrimas}, j \in \text{Pacotes}$$

Estabelece a relação entre a variável contínua  $x_{ij}$ , que representa a quantidade da matéria-prima  $i$  no pacote  $j$ , e a variável binária  $y_{ij}$ , que indica se a matéria-prima está presente no pacote. Quando  $y_{ij} = 0$ , força-se  $x_{ij} = 0$ , ou seja, a matéria-prima não é utilizada. Quando  $y_{ij} = 1$ , a quantidade deve respeitar os limites da balança, compreendidos entre  $Lib$  e  $LSb$ . Essa técnica, conhecida como **Big-M**, garante consistência lógica entre a seleção e a quantidade alocada.

### 2.1.3 Restrição 3

$$\sum_{i \in MateriasPrimas} y_{ij} \leq MaxTiposPorPacote, \quad \forall j \in Pacotes$$

Limita-se a diversidade de matérias-primas em cada pacote. Essa condição é necessária, pois misturas com grande número de insumos podem aumentar a complexidade operacional e dificultar o controle de qualidade. Ao impor um limite, o modelo assegura **maior simplicidade e viabilidade prática na blendagem**.

### 2.1.4 Restrições 4

$$LimitesConcentracao_{i[1]} * p_j \leq qtdeElemento_{ij} \leq LimitesConcentracao_{i[2]} * p_j, \\ \forall i \in Elementos, j \in Pacotes$$

Garante que a concentração de cada elemento químico  $k$  em cada pacote  $j$  esteja dentro da **faixa aceitável de operação**. O limite inferior previne deficiência de determinado elemento, enquanto o limite superior evita excesso, que poderia comprometer as propriedades físicas e químicas do síter. Essa restrição é essencial para manter a qualidade do produto final.

### 2.1.5 Restrição 5

$$qtdeElemento_{ij} - qtdeElemento_{ik} \leq desvioMaximo_i, \\ \forall i \in Elementos, (j, k) \in Pacotes$$

Essa restrição assegura que a variável auxiliar  $desvioMaximo_k$  represente corretamente a **maior diferença na quantidade do elemento químico  $k$  entre quaisquer dois pacotes**. Como a função objetivo busca minimizar a soma desses desvios, o modelo é forçado a reduzir as diferenças, promovendo uniformidade química entre os pacotes produzidos.

2.1.6 Restrição 6

$$\sum_{j \in Pacotes} x_{ij} \leq Estoque_i, \quad \forall i \in MateriaPrima$$

Garante que a quantidade total utilizada de cada matéria-prima *i* não ultrapasse o estoque disponível. Trata-se de uma restrição prática, pois reflete a disponibilidade real de recursos da siderúrgica, evitando que a solução proposta seja inviável na prática.

3. Descrição das instâncias

3.1. Estoque

Tabela 3. Estoque total de cada matéria-prima.

Matéria-prima	Estoque (kg)
Areia	1.000.000
Bauxita	1.000.000
Braunita	200.000
Brucita	1.000.000
Calcita	500.000
Corindon	1.000.000
Dolomita	500.000
Goethita	3.000.000
Hematita	3.000.000
Itabirito	3.000.000
Magnesita	1.000.000
Magnetita	3.000.000
Pirolusita	1.000.000
Quartzo	1.000.000
Rhodocrosita	300.000

### 3.2. Composição Química

**Tabela 4.** Composição química (%) de cada elemento químico.

Matéria-prima	SiO <sub>2</sub>	CaO	MgO	Fe	Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	Mn
Areia	95	1	1	1	1	0
Bauxita	10	0	0	5	50	0
Braunita	11	0	0	0	0	60
Brucita	0	0	69	0	0	0
Calcita	5	50	5	0	0	0
Corindon	0	0	0	0	99	0
Dolomita	0	0	30	0	22	0
Goethita	0	0	0	63	0	0
Hematita	0	0	0	70	0	0
Itabirito	10	0	5	60	5	0
Magnesita	0	0	48	0	0	0
Magnetita	0	0	0	72	0	0
Pirolusita	0	0	0	0	0	63
Quartzo	99	0	0	0	0	0
Rhodocrosita	0	0	0	0	0	47

### 3.3. Limites de Concentração

**Tabela 5.** Limites de concentração (%) para cada elemento químico.

Elemento Químico	Limite Inferior	Limite Superior
SiO <sub>2</sub>	4	9
CaO	2	8
MgO	1	3
Fe	55	65
Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	0,5	2
Mn	0,2	2

### 3.4. Limites de Peso

**Tabela 6.** Limites inferior e superior de massa (kg) da balança.

Limite Inferior (LIb)	Limite Superior (LSb)
100.000	5.000.000

**Tabela 7.** Limites inferior e superior de massa (kg) do pacote.

Limite Inferior (LIp)	Limite Superior (LSp)
3.000.000	8.500.000

### 3.5. Máximo de matérias-primas

**Tabela 8.** Quantidade máxima de tipos de elemento químico permitidos por pacote.

<i>MaxTiposPorPacote</i>	5
--------------------------	---

## 4. Resultados

### 4.1. Simulação para 3 pacotes

**Tabela 9.** Receita para otimizar a produção de 3 pacotes.

	Pacote 1	Pacote 2	Pacote 3
Areia	0	0	0
Bauxita	0	0	0
Braunita	0	0	0
Brucita	0	0	0
Calcita	166520	166520	166520
Corindon	0	0	0
Dolomita	0	0	0
Goethita	3000000	0	0
Hematita	0	0	2700000
Itabirito	666080	666080	666080
Magnesita	0	0	0
Magnetita	0	2625000	0
Pirolusita	120250	120250	120250
Quartzo	210140	210140	210140
Rhodocrosita	0	0	0
Peso Total do Pacote	4162990	3787990	3862990

**Tabela 10.** Análise de qualidade para a produção de 3 pacotes.

	Pacote 1	Pacote 2	Pacote 3	Média (%)	Variância (VAR.P)	Desvio Padrão (DP %)
SiO2	6,7973	7,4703	7,3252	7,1976	0,0836	0,2892
CaO	2	2,198	2,1553	2,1178	0,0072	0,0851
MgO	1	1,099	1,0777	1,0589	0,0018	0,0425
Fe	55,0001	60,4449	59,2714	58,2388	5,4742	2,3397
Al2O3	0,8	0,8792	0,8621	0,8471	0,0012	0,034
Mn	1,8198	1,9999	1,9611	1,9269	0,006	0,0774

## 4.2. Simulação para 4 pacotes

**Tabela 11.** Receita para otimizar a produção de 4 pacotes.

	Pacote 1	Pacote 2	Pacote 3	Pacote 4
Areia	122750	122750	0	0
Bauxita	0	0	0	0
Braunita	0	0	100000	100000
Brucita	0	0	0	0
Calcita	123770	123770	126230	126230
Corindon	0	0	0	0
Dolomita	172140	172140	0	0
Goethita	0	0	1272300	1177100
Hematita	0	2523800	476220	0
Itabirito	0	0	1054900	1054900
Magnesita	0	0	0	0
Magnetita	2453700	0	0	546320
Pirolusita	0	0	0	0
Quartzo	0	0	0	0
Rhodocrosita	127660	127660	0	0
Peso Total do Pacote	3000020	3070120	3029650	3004550

**Tabela 12.** Análise de qualidade para a produção de 4 pacotes.

	Pacote 1	Pacote 2	Pacote 3	Pacote 4	Média (%)	Variância (VAR.P)	Desvio Padrão (DP %)
SiO <sub>2</sub>	4,0933	3,9999	4,0533	4,0872	4,0584	0,0014	0,0371
CaO	2,1037	2,0557	2,0832	2,1006	2,0858	0,0004	0,0191
MgO	1,9686	1,9236	1,9493	1,9656	1,9518	0,0003	0,0178
Fe	58,9293	57,5837	58,3514	58,8395	58,426	0,2849	0,5337
Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	1,3033	1,2735	1,741	1,7555	1,5183	0,053	0,2302
Mn	2	1,9543	1,9804	1,997	1,9829	0,0003	0,0181



### 4.3. Simulação para 5 pacotes

**Tabela 13.** Receita para otimizar a produção de 5 pacotes.

	Pacote 1	Pacote 2	Pacote 3	Pacote 4	Pacote 5
Areia	252690	102990	252690	188560	146240
Bauxita	100000	0	100000	0	100000
Braunita	0	0	0	0	0
Brucita	0	0	0	0	0
Calcita	100000	100000	100000	100000	100000
Corindon	0	0	0	0	0
Dolomita	0	0	0	132770	0
Goethita	0	1025400	0	0	1974600
Hematita	2141600	0	0	858400	0
Itabirito	149460	1671600	149460	858680	170750
Magnesita	156250	0	156250	0	156250
Magnetita	0	0	2113900	733930	152130
Pirolusita	100000	100000	0	0	100000
Quartzo	0	0	0	0	100000
Rhodocrosita	0	0	127660	127660	0
Peso Total do Pacote	3000000	2999990	2999960	3000000	2999970

**Tabela 14.** Análise de qualidade para a produção de 5 pacotes.

	Pacote 1	Pacote 2	Pacote 3	Pacote 4	Pacote 5	Média (%)	Variância (VAR.P)	Desvio Padrão (DP %)
SiO <sub>2</sub>	9	9	9,0002	9	9,0002	9,0001	0	0,0001
CaO	1,7509	1,701	1,7509	1,7295	1,7154	1,7296	0,0004	0,0196
MgO	3	2,987	3	2,9884	3	2,9951	0	0,0061
Fe	53,2108	54,9999	53,9744	54,8801	48,7486	53,1628	5,294	2,3009
Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	2	2,8203	2	2,4676	2	2,2576	0,112	0,3346
Mn	2,1	2,1	2	2	2,1	2,06	0,0024	0,049

## 5. Comparação com modelo matemático de Raimundo et al. (2024)

De acordo com o artigo, tem-se a seguinte função objetivo:

$$\text{Min} \sum_{k=1}^E dp_k$$

O modelo proposto por Raimundo et al. (2024) tem como função objetivo a minimização da soma dos desvios padrão das dispersões químicas dos elementos presentes em cada pacote. Além disso, os autores impõem restrições explícitas que limitam o desvio padrão de cada elemento a no máximo 2%, assegurando rigoroso controle estatístico da variabilidade química entre pacotes. Essa abordagem confere maior precisão na uniformização da composição, porém gera um modelo de caráter **não linear**, pois o **desvio padrão envolve operações quadráticas e não lineares** (média, variância, raiz quadrada), cuja resolução apresenta elevada complexidade computacional. Como destacado pelos autores, “para as instâncias com 5 e 6 pacotes, soluções factíveis são encontradas em até uma hora de execução, sem a certeza da otimalidade”.

No presente trabalho, optou-se por uma formulação alternativa: a função objetivo foi definida como a **minimização da soma dos desvios máximos entre pacotes**. Essa escolha simplifica a modelagem, uma vez que o desvio máximo pode ser expresso de forma linear por meio de restrições que limitam a diferença entre as quantidades de um mesmo elemento em diferentes pacotes. Diferentemente do desvio padrão, que requer operações quadráticas e cálculo de raiz quadrada, o desvio máximo pode ser diretamente tratado pelo solver de otimização, resultando em maior eficiência e menor tempo de execução.

## 6. Conclusão

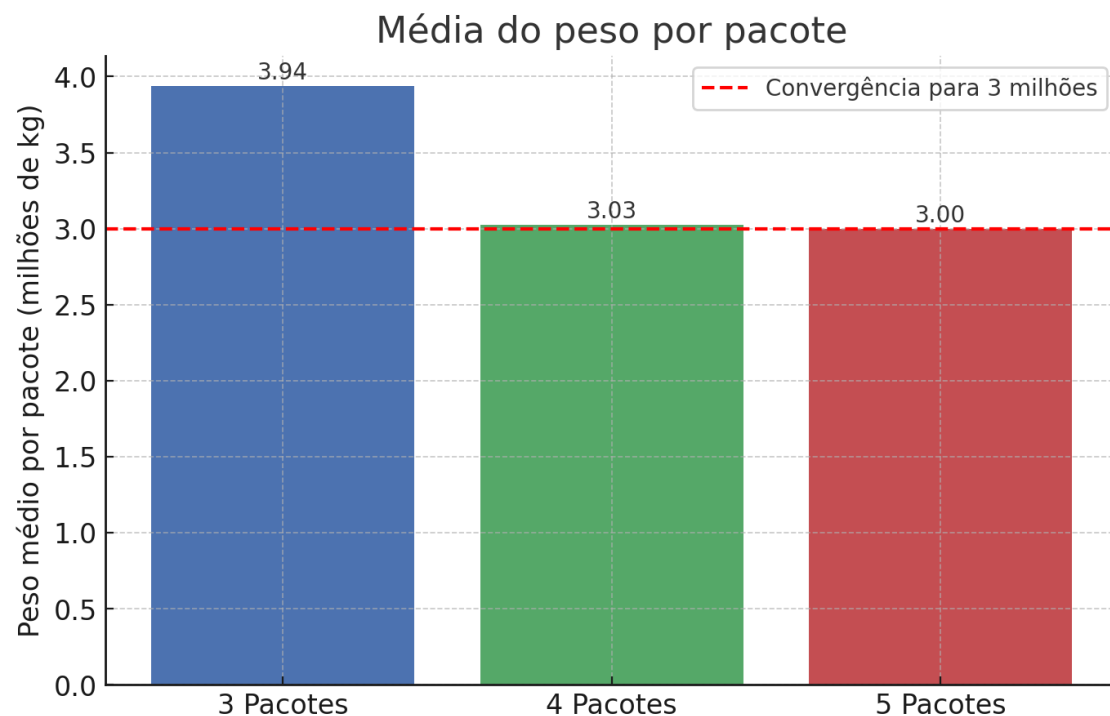
Observou-se que, para o elemento ferro (Fe), em alguns cenários o desvio padrão ultrapassou o limite de 2% indicado no artigo original. Apesar disso, tais valores ainda podem ser considerados aceitáveis no contexto prático, uma vez que o ferro representa o componente majoritário na composição do sinter e pequenas variações não comprometem significativamente a qualidade do produto final.

Desvio padrão do Fe para:

- 3 pacotes = 2,3397
- 4 pacotes = 0,5337
- 5 pacotes = 2,3009

Outra análise realizada refere-se ao peso total dos pacotes. Conforme destacado no artigo original, os valores convergem para 3 milhões de quilogramas em cada pacote, comportamento também observado em nossas simulações. Esse resultado evidencia a consistência do modelo em respeitar os limites operacionais definidos, assegurando que

cada pacote seja produzido dentro da faixa estipulada e, ao mesmo tempo, mantendo a uniformidade da distribuição das matérias-primas.



Dessa forma, a utilização do desvio máximo, apesar de ser uma medida mais simples, mostrou-se adequada para capturar a variabilidade entre pacotes e ao mesmo tempo viabilizar a resolução do modelo em instâncias de maior porte.

Código disponível em: <https://github.com/matheus-santana1/Modelo-Matematico-Otimizado-de-Selecao-de-Materias>

## 7. Referências

Raimundo, G. R., Tedesco, C. R. de O., Shiguemoto, G. H. B., & Shiguemoto, A. L. (2024) Modelo matemático para seleção de matérias-primas em siderúrgicas. In: Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, Fortaleza, CE.