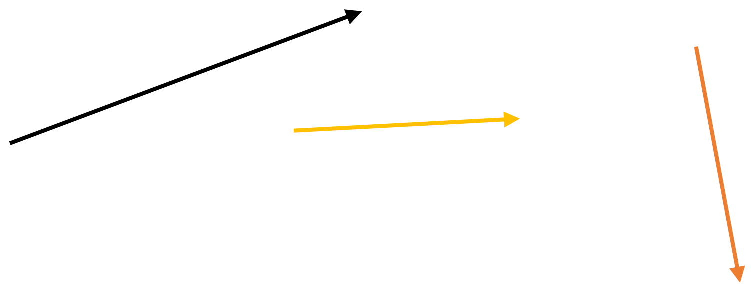
Produto Vetorial e a Regra da Mão Direita

Os seguintes ***vetores estão no plano*** da tela (papel):

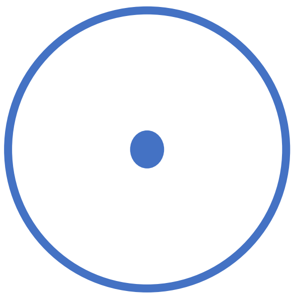


Como podemos representar vetores que "entram" ou "saem" da tela (papel)?

Desenho de um ***vetor "entrando"*** na tela:

Símbolo de um vetor entrando na tela

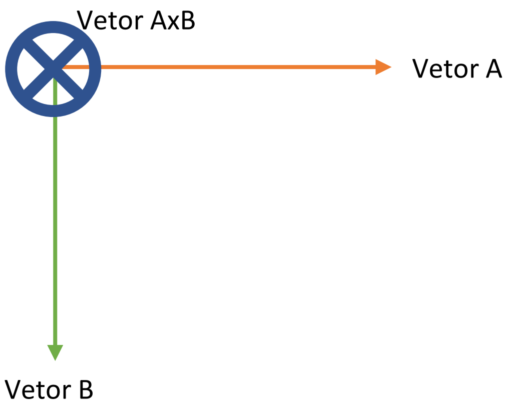
Desenho de um ***vetor "saindo"*** da tela (papel):



Símbolo de um vetor saindo da tela

Dessa forma podemos representar os vetores em 3 dimensões usando apenas duas dimensões da tela (papel).

Exemplos:

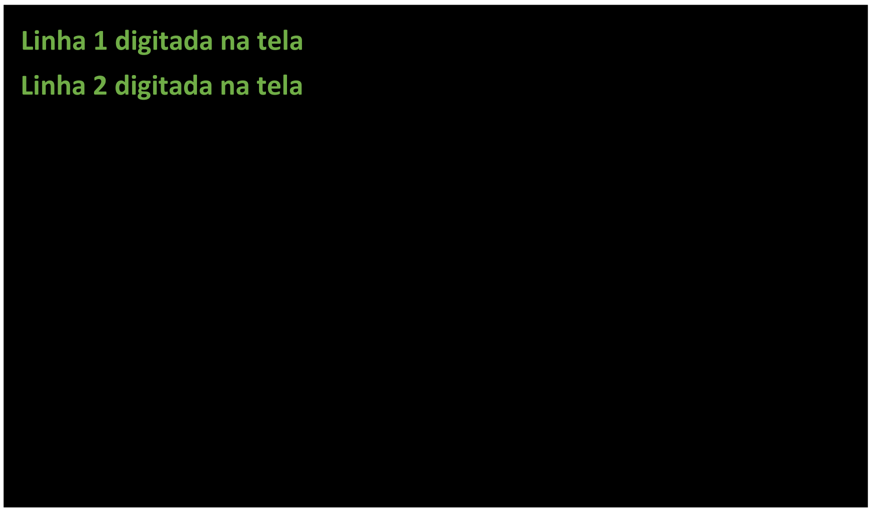


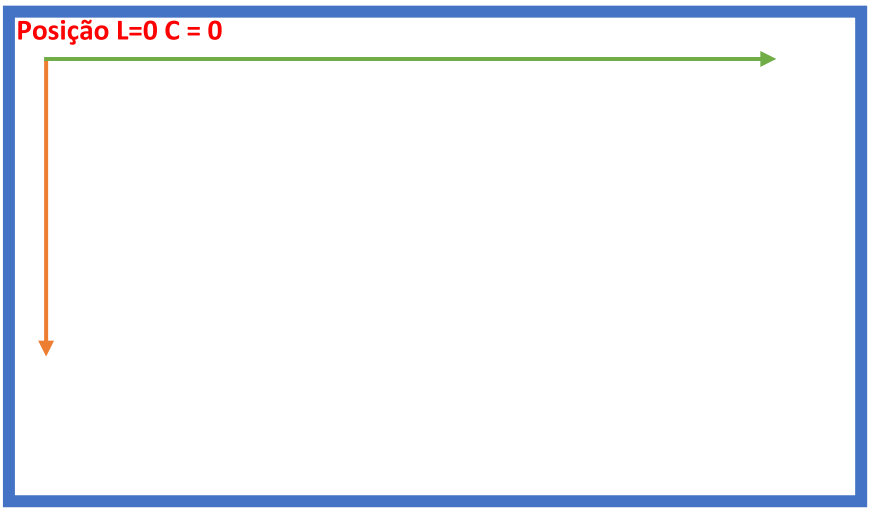
Usando a regra da mão direita: colocamos o vetor A nos dedos da mão aberta e o vetor B na palma da mão, de modo que os dedos (representam o vetor A) possam ser "girados" em direção ao vetor B: devemos colocar a mão com a sua palma voltada para baixo. Neste caso, o "dedão" aponta para ***DENTRO*** da tela.

Usando a regra da mão direita: colocamos o vetor A nos dedos da mão aberta e o vetor B na palma da mão, de modo que os dedos (representam o vetor A) possam ser "girados" em direção ao vetor B: devemos colocar a mão com a sua palma voltada para a direita (dedos voltados para baixo). Neste caso, o "dedão" aponta para **FORA** da tela.

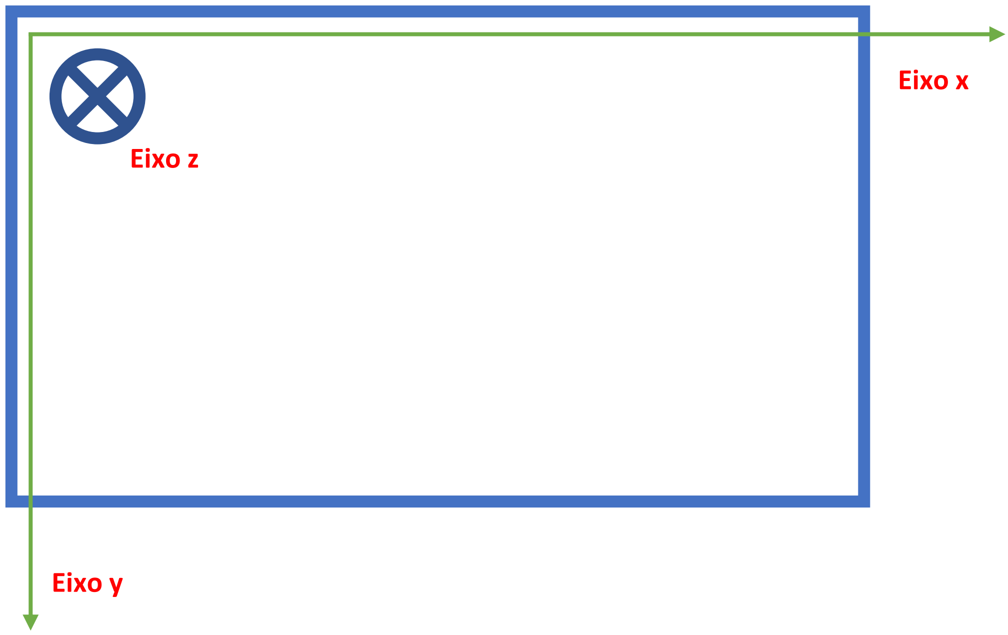
Usando a regra da mão direita: colocamos o vetor A nos dedos da mão aberta e o vetor B na palma da mão, de modo que os dedos (representam o vetor A) possam ser "girados" em direção ao vetor B: devemos colocar a mão com a sua palma voltada para a direita (*dedos saindo* da tela). Neste caso, o "dedão" aponta para **CIMA** da tela.

Tela do computador:





O sistema de coordenadas da tela é: linda crescendo para baixo e colunas crescendo para a direita:

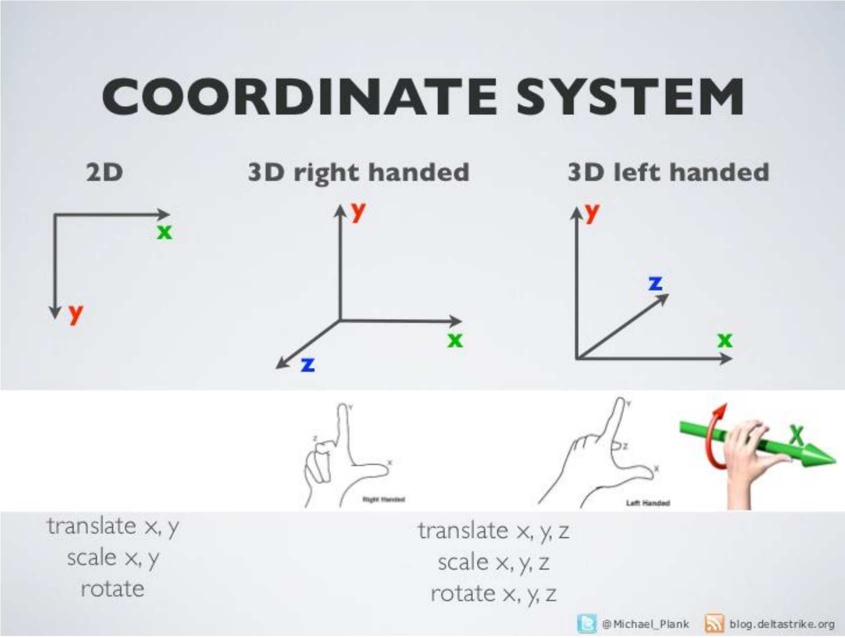


Neste caso, para onde aponta o eixo Z?

Usando a regra da mão direita: colocamos o Eixo x nos dedos da mão aberta e o Eixo y na palma da mão, de modo que os dedos (representam o Eixo x) possam ser "girados" em direção ao Eixo y: devemos colocar a mão com a sua palma voltada para baixo. Neste caso, o "dedão" aponta para ***DENTRO*** da tela (eixo z).

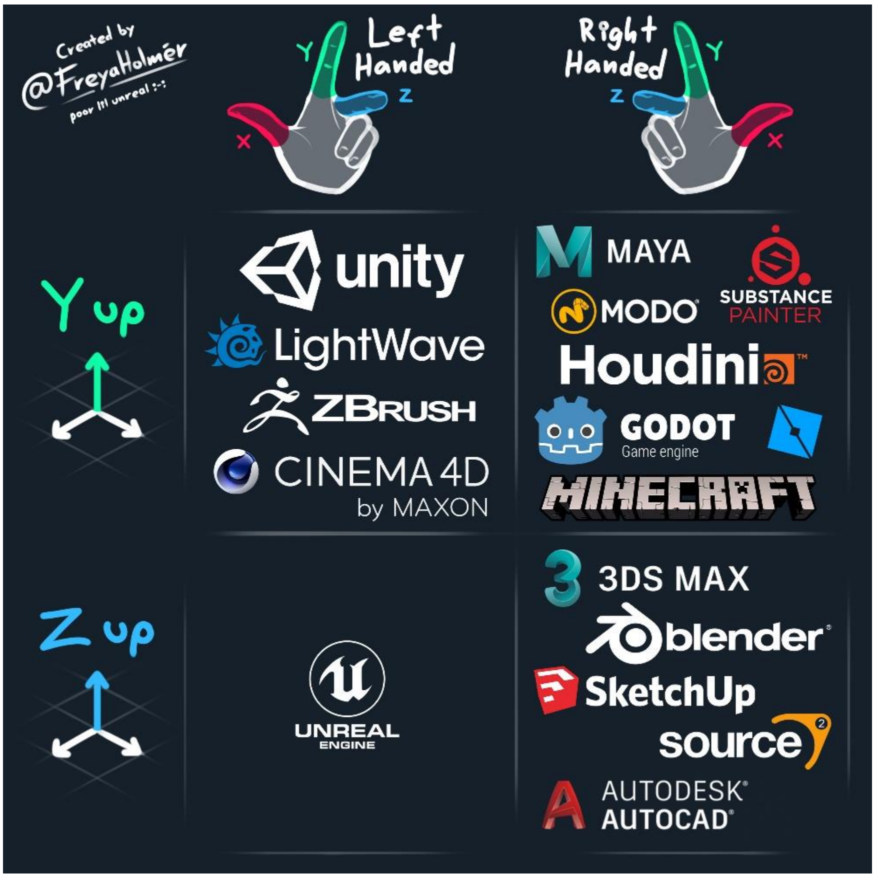
Portanto, no computador, as *coordenadas Z positivas estão "dentro"* da tela e as *coordenadas Z negativas estão "fora"* da tela.

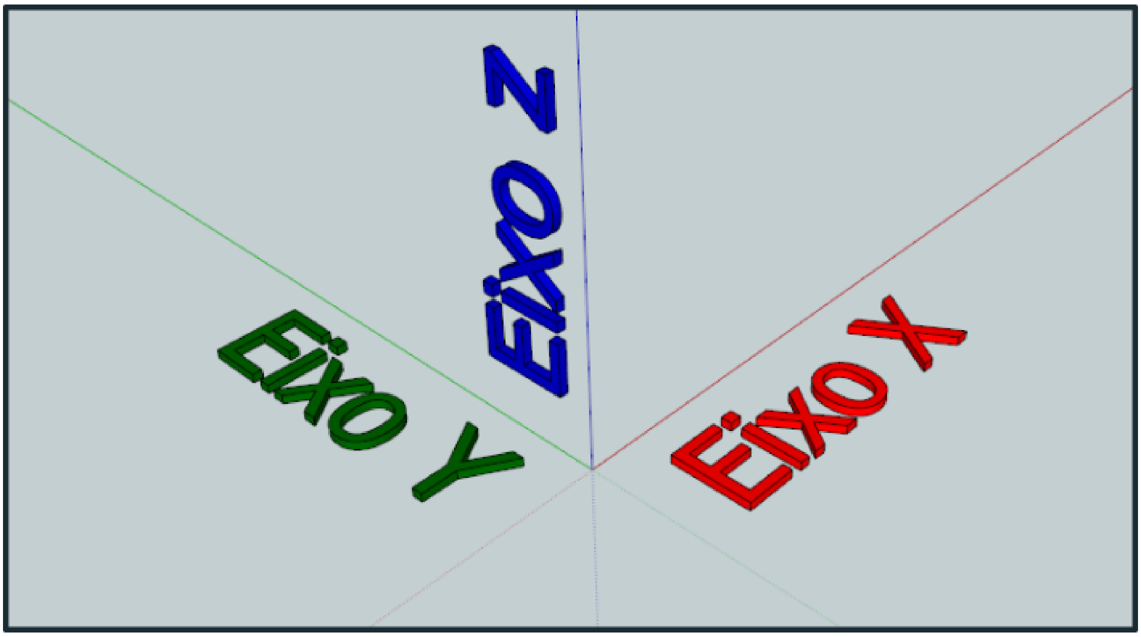
Lembrando: Origem (0,0,0) está no canto superior esquerdo da tela.



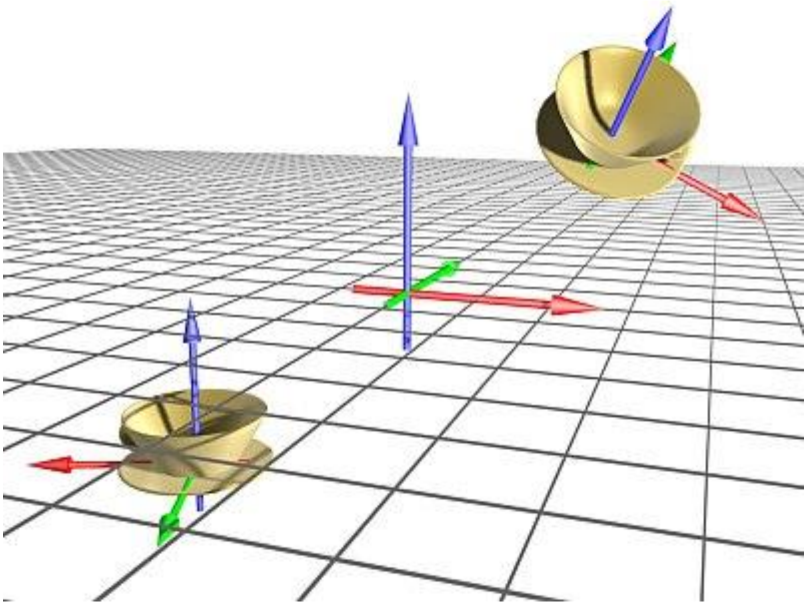
Regra do parafuso **mão direita** → Sistemas **DESTRÓGIROS** (preferenciais)

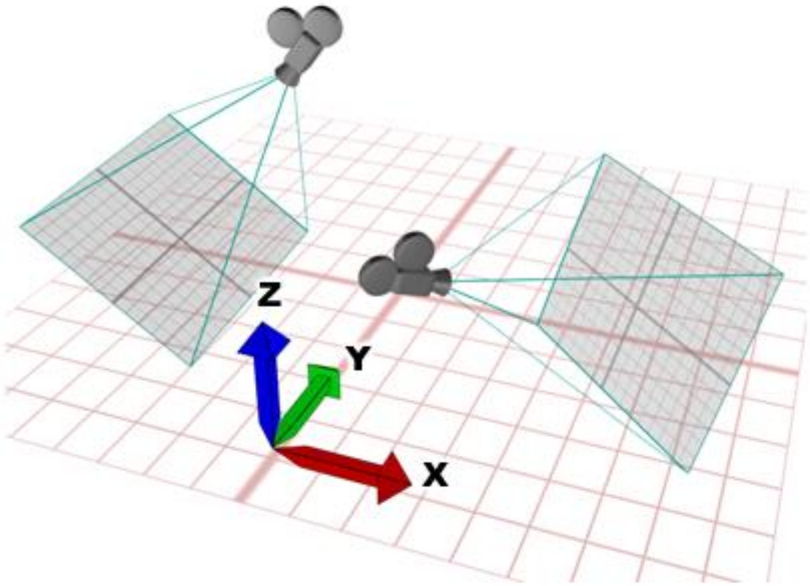
Regra do parafuso **mão esquerda** → Sistemas **LEVÓGIROS** (não preferenciais)

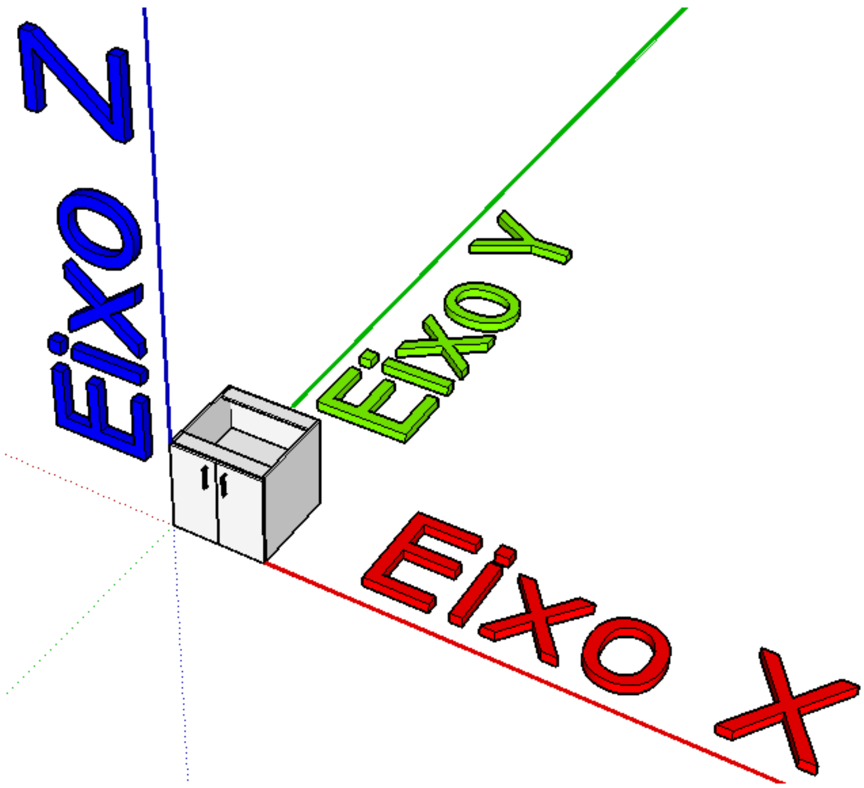


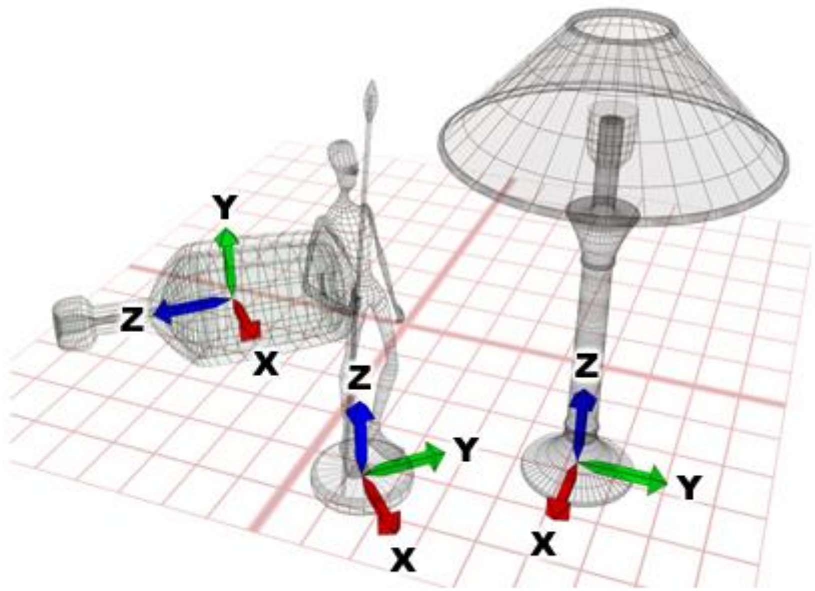


(Sistema preferencial)




Z
Y
X


Eixo Z
Eixo Y
Eixo X



Exercício para entregar na próxima aula, individual e manuscrito.

Sejam $\vec{x}$ e $\vec{y}$ dois vetores onde $|\vec{x}| = 2$, $|\vec{y}| = 3$ e o ângulo entre eles θ=30 graus. Calcule a área do triângulo ABC em que $\overrightarrow{AB} = \vec{x} + 2\vec{y}$ e $\overrightarrow{AC} = 2\vec{x} - 3\vec{y}$. Calcule também a distância entre o vértice B e o lado AC.

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (\vec{x} + 2\vec{y}) \times (2\vec{x} - 3\vec{y})$$

$$= \vec{x} \times 2\vec{x} + \vec{x} \times (-3\vec{y}) + 2\vec{y} \times 2\vec{x} + 2\vec{y} \times (-3\vec{y}) =$$

$$= \vec{0} - 3\vec{x} \times \vec{y} + 4\vec{y} \times \vec{x} - 6\vec{y} \times \vec{y} = +3\vec{y} \times \vec{x} + 4\vec{y} \times \vec{x}$$

$$= 7\vec{y} \times \vec{x}$$

O vetor x foi colocado em evidência!

$$\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = |7\vec{y} \times \vec{x}| = 7|\vec{y}||\vec{x}| \sin\theta = 7 \times 2 \times 3 \times \sin 30$$

$$= 21$$

$$\boldsymbol{A = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{21}{2} = 10,5\ ua}$$

Altura do triângulo:

$$A = \frac{base \times altura}{2}$$

$$base = |\overrightarrow{AC}|$$

$$|\overrightarrow{AC}|^2 = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AC} = (2\vec{x} - 3\vec{y})(2\vec{x} - 3\vec{y})$$
$$= 4|\vec{x}|^2 - 6\vec{x}\vec{y} - 6\vec{y}\vec{x} + 9|\overrightarrow{y}|^2 =$$
$$= 4|\vec{x}|^2 - 12\vec{x}\vec{y} + 9|\vec{y}|^2$$

Vamos calcular $\vec{x}\vec{y} = |\vec{x}||\vec{y}|\cos 30 = 2 \times 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$

Assim,

$$|\overrightarrow{AC}|^2 = 4|\vec{x}|^2 - 12\vec{x}\vec{y} + 9|\vec{y}|^2 = 4 \times 2^2 - 12 \times 3\sqrt{3} + 9 \times 3^2$$
$$= 34{,}6$$

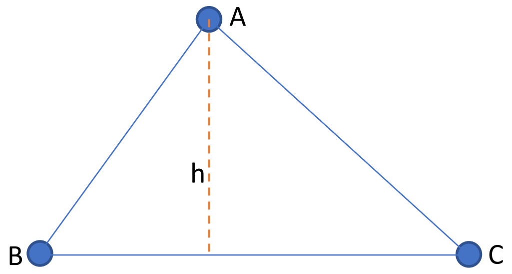
(16 - 62.35 + 81 = 34,65)

Base = 5,9 (raiz quadrada de 34,6)

Assim: altura = 2A/base=2×10,5/5,9 → ***altura = 3,6***

Exercício:

Calcule a área do triângulo de vértices A, B e C, onde $\overrightarrow{AB} = (1,5,3)$ e $\overrightarrow{AC} = (-1,0,2)$. Calcule também o comprimento da altura pelo vértice A.



Cálculo da área: $S = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$

$$\begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & 5 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (10, -5{,}5)$$

$$|10,-5{,}5| = \sqrt{10^2 + (-5)^2 + 5^2} = \sqrt{150}$$

$$\boldsymbol{S = \frac{1}{2}\sqrt{150} = 6,12}$$

Cálculo da altura: $S = \frac{base \times altura}{2}$

$$\frac{1}{2}\sqrt{150} = \frac{|(C-B)|h}{2}$$

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = (-1{,}0{,}2) - (1{,}5{,}3)$$
$$= (-2,-5,-1)$$

$$|(-2,-5,-1) = \sqrt{(-2)^2 + (-5)^2 + (-1)^2} = \sqrt{30}$$

Substituindo na expressão da base:

$$\frac{1}{2}\sqrt{150} = \frac{\sqrt{30}}{2}h \rightarrow h = \frac{\sqrt{150}}{\sqrt{30}} \rightarrow \boldsymbol{h = 2,24}$$

PRODUTO MISTO:

Interpretação do produto misto: é o volume de um sólido (paralelepípedo) cujas arestas são os três vetores que compõe o produto misto:

$$\boldsymbol{V = |\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c}|}$$

Assim, podemos dizer que um determinante de ordem 3 equivale a um volume de um sólido (paralelepípedo).

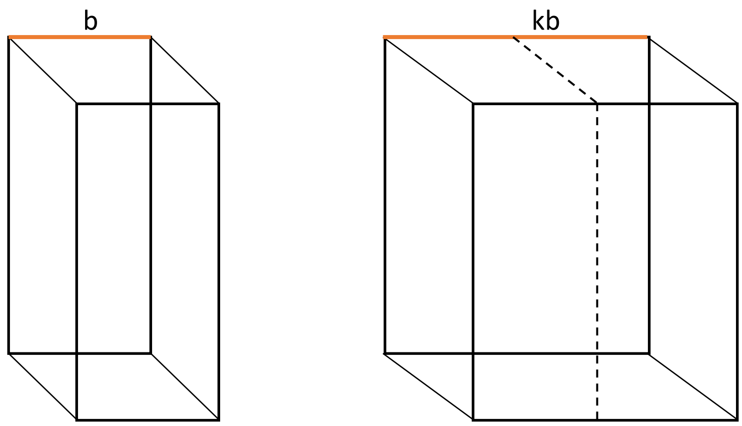
O que isso tem com as propriedades dos determinantes?

Propriedade 1: Se um determinante tiver pelo menos uma fila de elementos nulos, então o determinante é nulo.

Interpretação: uma fila de elementos nulos indica a ausência de uma das arestas (a, b ou c). Por exemplo, se a aresta **a** não existir, temos um paralelogramo definido pelos lados **b** e **c**.

Figuras planas não tem volume (V = 0 e determinante nulo).

Propriedade 2: Se multiplicarmos os elementos de uma fila de um determinante por um número k qualquer, o determinante fica multiplicado por k.

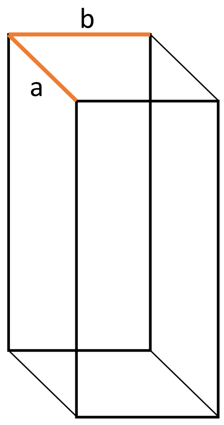


Se o primeiro paralelepípedo tem ***Volume V***, qual o volume do segundo paralelepípedo? Ele tem ***Volume kV***.

Propriedade 5: Um determinante com duas filas iguais ou proporcionais é nulo.

Duas filas iguais → dois vetores iguais → duas arestas iguais

P. Exemplo, a aresta **a** é igual a aresta **b**.

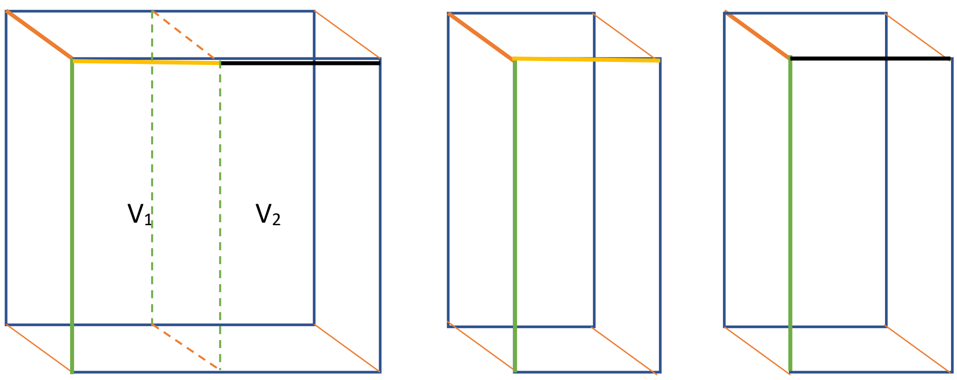


Se **a = b**, **a // b** e tem o mesmo tamanho

Se eles são paralelos, não temos a face definida por eles e logo, não temos um paralelepípedo. Então o ***Volume = 0***.

Se os vetores forem proporcionais, também são *paralelos* e a face definida por eles não existe → ***Volume = 0***.

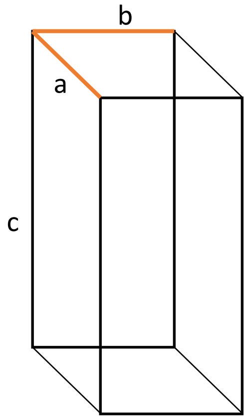
Propriedade 6: Um determinante pode ser decomposto na soma de dois determinantes que tenham todas as linhas (colunas) iguais, com exceção de uma. A soma dos elementos das linhas (colunas) que são diferentes é igual ao elemento das linhas (colunas) correspondente do determinante dado.



V = V_1 + V_2

Propriedade 7: Um determinante onde uma fila seja a soma de outras duas filas é igual a zero.

Se um vetor é combinação linear de outros dois, ele é coplanar aos outros dois (estão no mesmo plano).



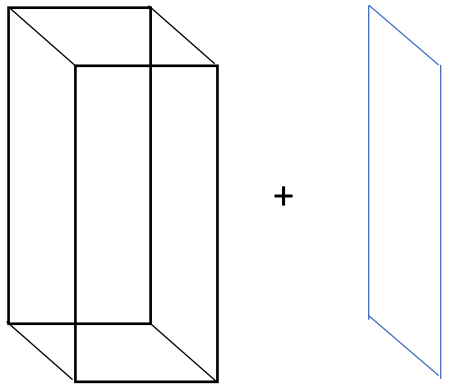
Se o vetor **c** é combinação linear do vetor **a** com o vetor **b**, então os três vetores estão no *mesmo plano*, não formando um sólido e assim o ***Volume = 0***.

Propriedade 8: Um determinante onde uma fila seja combinação linear qualquer de outras filas é igual a zero.

Ver propriedade 7. Só muda o tipo de combinação linear.

Propriedade 10: Adicionando-se a uma fila uma combinação linear de outras filas paralelas, o valor do determinante não se altera.

Lembrando que uma combinação linear não produz um sólido, mas sim uma figura plana. Uma figura plana tem volume 0. Essa propriedade diz que se adicionarmos a um volume qualquer, um volume nulo, o volume não se altera!!



Exercício para entregar na próxima aula, individual e manuscrito:

Os pontos A, B, C e D são vértices de um tetraedro com $\overrightarrow{AB} = (1,4,3), \overrightarrow{AC} = (1,2,3) \ \ e \ \ \overrightarrow{AD} = (1,4,9)$.

Calcule:

a) O volume do tetraedro.

b) A área da face do tetraedro que não contém o vértice D.

c) A altura do tetraedro pelo vértice D (ou a distância do ponto D ao plano determinado por A, B e C).

Volume do tetraedro = um terço da área da base vezes a altura.

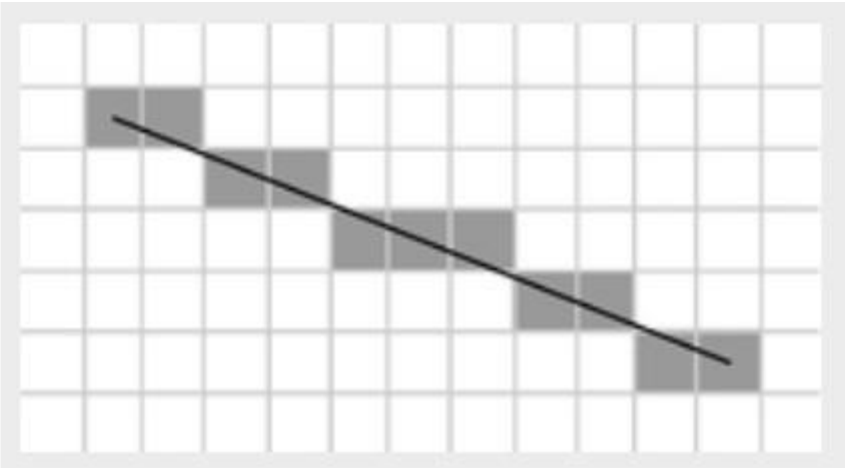
a) $V = \frac{1}{6}\left|\left|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}\right|\right| = \frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix}\right| = \mathbf{2}$

b) $A = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}|6,0,-2)| = \sqrt{\mathbf{10}}$

c) Volume do tetraedro = um terço da área da base vezes a altura.

$$V = \frac{1}{3}S \times h \rightarrow 2 = \frac{1}{3}\sqrt{10}h \rightarrow \boldsymbol{h} = \frac{\mathbf{6}}{\sqrt{\mathbf{10}}}$$

Algoritmo de Bresenham



O algoritmo de Bresenham — em homenagem a Jack Elton Bresenham — é um algoritmo criado para o desenho de linhas, em dispositivos matriciais (como por exemplo, um monitor), que permite determinar quais os pontos numa matriz de base quadriculada que devem ser destacados para atender o grau de inclinação de um ângulo.

O Código

```
void bresenham1(int x1, int y1, int x2, int y2){
        int slope;
```

```
        int dx, dy, incE, incNE, d, x, y;
        // Onde inverte a linha x1 > x2
        if (x1 > x2){
            bresenham1(x2, y2, x1, y1);
             return;
        }
        dx = x2 - x1;
        dy = y2 - y1;

        if (dy < 0){
            slope = -1;
            dy = -dy;
        }
        else{
           slope = 1;
        }
        // Constante de Bresenham
        incE = 2 * dy;
        incNE = 2 * dy - 2 * dx;
        d = 2 * dy - dx;
        y = y1;
        for (x = x1; x <= x2; x++){
            putpixel(x, y);
            if (d <= 0){
              d += incE;
            }
            else{
              d += incNE;
              y += slope;
            }
        }
}
```