UFC/CT/DETI

CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE COMPUTAÇÃO

SINAIS E SISTEMAS

Experimento - Parte 1

Estimação de Parâmetros de Modelo ARX via Mínimos Quadrados

2018

1 – INTRODUÇÃO

Na Engenharia, estamos frequentemente interessados no desenvolvimento de um modelo matemático de um fenômeno físico qualquer a fim de se fazer uma previsão analítica sobre o comportamento do referido fenômeno. Nas aplicações de automação, é de grande importância a modelagem da planta física na qual se deseja controlar para a prever o efeito do esforço de controle e de perturbações na planta. Pela planta, entende-se como qualquer processo caracterizado por certo número de entradas *u* e de saídas *y* como mostra a figura abaixo.

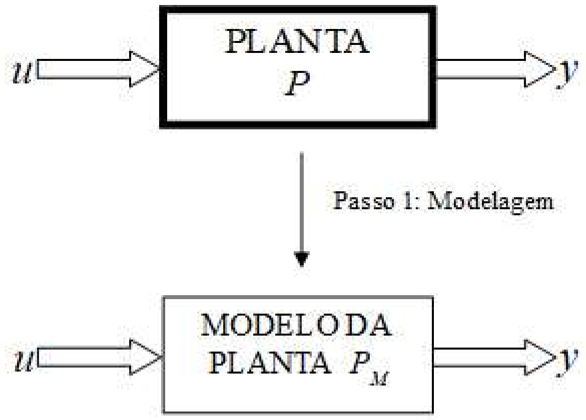

Figura 1.1 Representação da Planta

Em geral, o modelo da planta pode ser obtido pela aplicação dos princípios físicos via as equações dinâmicas governantes. Às vezes, o modelo não pode ser obtido de argumentos físicos por causa, por exemplo, da complexidade dos processos físicos. Neste caso, recorrer-se-á ao método experimental para se obter o modelo da planta. Ao mesmo, dá-se o nome de *Identificação ou Estimação de parâmetros*.

A técnica utilizada neste experimento emprega um sinal determinístico de entrada *u(t)* e um modelo ARX (autoregressivo e entrada exógena), para a estimação dos parâmetros do modelo. Estas equações constituem o modelo matemático da planta.

Para melhor compreensão vide as notas de aula.

2- ESTIMAÇÃO *OFF-LINE* DE SISTEMAS DINÂMICOS LINEARES E INVARIANTES NO TEMPO

No final do século XVIII, o matemático Karl Friedrich Gauss formulou o princípio dos mínimos quadrados, utilizando-o na determinação das órbitas dos planetas e asteroides. Com este princípio, os parâmetros desconhecidos de um modelo matemático devem ser escolhidos de tal forma que:

Somatório dos quadrados das diferenças entre os valores medidos e os valores verdadeiros, multiplicado por números que medem o grau de precisão , seja mínimo

Considere um sistema dinâmico discreto cuja entrada e a resposta são, respectivamente, *u(k)* e *y(k),* para *k=0,1 2,3….* Inicialmente, ter-se-á que determinar a função de transferência no domínio.-Z Como isto não é uma tarefa fácil, deve-se assumir várias formas para a função de transferência e observar qual delas nos dará o erro mínimo associado.

Considere que o modelo da planta é representado pela seguinte função de transferência:

$$G(z)=\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{b_{n-1}z^{n-1}+\ldots+b_1 z+b_0}{z^n-a_{n-1}z^{n-1}-\ldots-a_1 z-a_0}$$

A equação a diferença equivalente é:

$$\mathbf{y(k)} = a_{n-1}y(k-1)+\ldots+a_0 y(k-n)+b_{n-1}u(k-1)+\ldots+b_0 u(k-n)$$

Hipótese: *y(k)* e *u(k)* são nulos quando k<0.

Definiremos o k-ésimo vetor de dados como sendo

$$\mathbf{d}(k) = [y(k-1)\ y(k-2)\ \ldots\ y(k-n)\ u(k-1)\ \ldots\ u(k-n)]$$

e o vetor de parâmetros

$$\boldsymbol{\theta} = [a_{n-1}\ \ldots\ a_0\ b_{n-1}\ \ldots\ b_0]^T$$

Então, a saída no instante *k* pode ser escrita como o produto interno do vetor de parâmetros com o vetor de dados, ou seja,

$$y(k) = \mathbf{d}^T(k)\boldsymbol{\theta}$$

Se um estado estimado de θ, $\underline{\theta}$, for usado, então haverá um erro na previsão de *y(k)*, ou seja,

$$y(k) = \boldsymbol{d}^T(k)\boldsymbol{\theta} + e(k)$$

Se fizermos *k* partir de *n* até *N*, teremos o seguinte conjunto de equações:

$$\begin{aligned} y(n) &= \boldsymbol{d}^T(n)\underline{\boldsymbol{\theta}} + e(n) \\ &. \\ &. \\ &. \\ y(N) &= \boldsymbol{d}^T(N)\underline{\boldsymbol{\theta}} + e(N) \end{aligned}$$

O vetor de saída de dados é definido como

$$\boldsymbol{y}(N) = [y(n) \ldots y(N)]^T$$

Define-se a matriz de dados como sendo

$$D(N) = \left[d(n)\ldots d(N)\right]^T = \begin{bmatrix} d^T(n). \\ . \\ . \\ . \\ d^T(N) \end{bmatrix}$$

Também, define-se o vetor de erro como sendo

$$\boldsymbol{e}(N) = [e(n) \ldots e(N)]^T$$

Para estimar o vetor de parâmetro, o sistema de equações pode ser escrito como

$$\boldsymbol{y}(N) = \boldsymbol{D}^T(N)\underline{\boldsymbol{\theta}} + e(N)$$

A estimação o vetor de parâmetro no tempo *NT (T é o intervalo de amostragem)*, é equivalente a minimizar a soma dos erros quadrados, ou seja,

$$J = \Sigma e^2(k) = \boldsymbol{e}^T(N)\boldsymbol{e}(N)$$

Isolando o valor de ***e****(N)* e substituindo na expressão anterior, tem-se:

$$J = (\boldsymbol{y}(N) - \boldsymbol{D}(N)\underline{\boldsymbol{\theta}})^T(\boldsymbol{y}(N) - \boldsymbol{D}(N)\underline{\boldsymbol{\theta}})$$

diferenciando com relação à $\underline{\theta}$, tem-se:

$$(\partial \boldsymbol{J})/(\partial \underline{\boldsymbol{\theta}}) = -\boldsymbol{y}(N)\boldsymbol{D}(N) + \underline{\boldsymbol{\theta}}^T\boldsymbol{D}^T(N)\boldsymbol{D}(N) = 0$$

ou

$$\boldsymbol{D}^T(N)\boldsymbol{D}(N)\,\underline{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{D}^T(N)\boldsymbol{y}(N)$$

Este conjunto de equações é chamado de *equações normais* da teoria do mínimos quadrados e muita atenção deve ser dada a solução delas. Pode-se escrever a solução, como,

$$\boxed{\underline{\theta} = (\mathbf{D}^{\mathrm{T}}(\mathrm{N})\mathbf{D}(\mathrm{N}))^{-1}\mathbf{D}^{\mathrm{T}}(\mathrm{N})\mathbf{y}(\mathrm{N})}$$

Os algoritmos baseados na obtenção da *pseudo-inversa* para a solução do problema de estimação de parâmetros apresentam as seguintes desvantagem que os tornam pouco utilizados:

- A matriz $(\mathbf{D}^{\mathbf{T}}\mathbf{D})$ na equação normal deve ser inversível;
- A matriz $(\mathbf{D}^{\mathbf{T}}\mathbf{D})^{-1}$ é geralmente mal condicionada, apresentando problemas de estabilidade numérica;
- Há a necessidade de se armazenar uma grande quantidade de medidas de saída e de dados de entrada para formar a matriz **D**;
- Tal metodologia torna-se inviável para requerimentos de aplicações de tempo real como, por exemplo, o controle adaptativo.

Um método para a solução do problema de estimação *off-line* do vetor de parâmetros é obtido através do emprego de decomposição QR em que as dificuldades com a estabilização numérica e inversão de matrizes são reduzidas.

3 – APLICAÇÃO DA METODOLOGIA DE ESTIMAÇÃO OFF-LINE

Como aplicação da metodologia descrita, será considerado a estimação de parâmetros de um sistema térmico em que os parâmetros do processo são invariantes no tempo. Para a simulação poderá ser utilizado o OCTAVE, SCILAB ou MATLAB.

3.1 – Sistema térmico

Considere-se a identificação do sistema térmico mostrado na figura (Fig. 3.1). Um computador digital em malha com o sistema(Fig. 3.2), identifica o modelo discreto da planta, juntamento o conversor analógico-digital (A/D) e o conversor digital-analógico (D/A). Na Fig. 3.1, o enrolamento do aquecedor está embutido no meio 2. É desejado conhecer a temperatura do meio 1 na presença de uma temperatura ambiente variável $T_o(t)$. Se for aplicado o princípio da conservação de energia para cada um dos dois meios, as equações diferenciais resultantes serão:

$$m_1c_1(dT_1/dt) = k_{12}(T_2 - T_1)$$

e

$$m_2c_2(dT_2/dt) = - k_{12}(T_2 - T_1) - k_{20}(T_2 - T_0) + u(t)$$

onde m_i e c_i são as massas e o calor específico do i-ésimo meio, respectivamente, e k_{ij} são as respectivas condutâncias entre as faces térmicas. A situação física é mostrada na Fig. 3.2.

Substituindo-se os parâmetros $m_1c_1 = 0.5$, $m_2c_2 = 2$, $k_{12} = 1$ e $k_{20} = 0.5$, encontram-se as seguintes equações diferenciais:

$$(dT_1/dt) = 2(T_2 - T_1)$$

$$(dT_1/dt) = -0.75T_2 + 0.5T_1 + 0.25T_0 + 0.5u(t)$$

o que resulta na seguinte função de transferência:

$$G(s) = T_1(s)/U(s) = 1/[(s + 0.1957)(s + 2.554)]$$

A sequência de entrada (controle $u(k)$) aplicada é uma função degrau unitário a partir de $k = 0$. A sequência de resposta $y(k)$ gerada pelo conversor A/D é dada na tabela I a ser fornecida às equipes. Por simplicidade, o intervalo de amostragem é $T=0.25$ segundos.

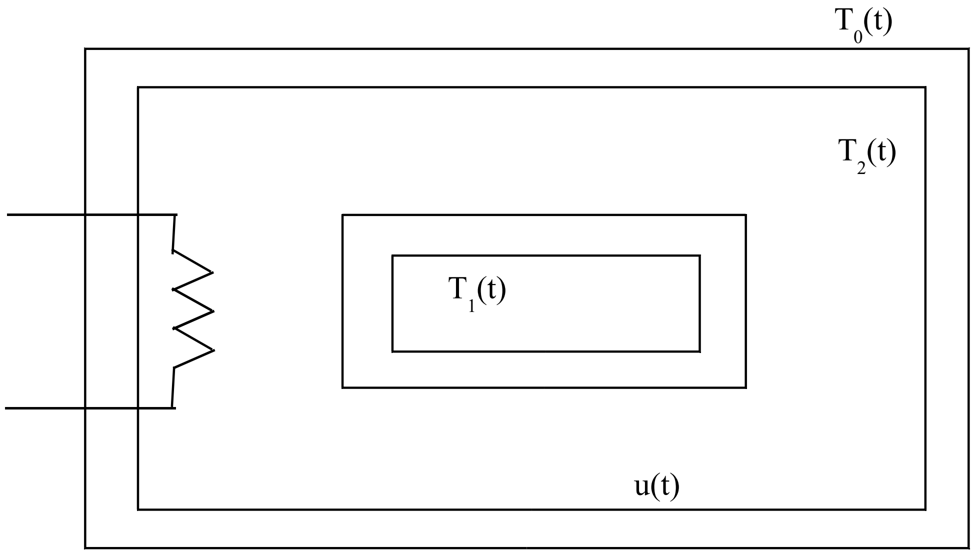

Figura 3.1 Planta do aquecedor

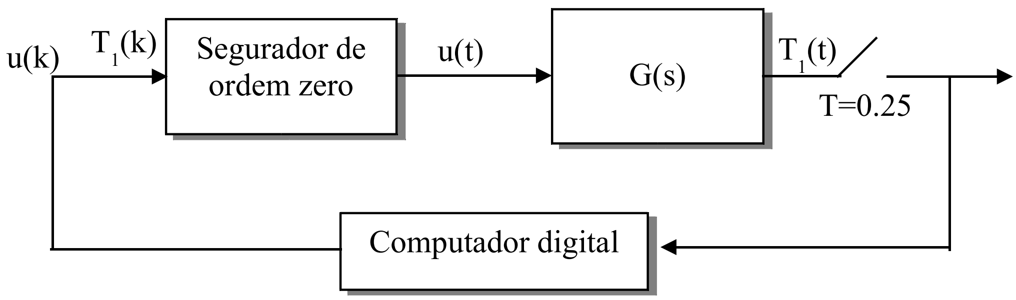

Figura 3.2 Planta do controlador digital

Para este sistema, tem-se a seguinte equação à diferença:

$$y(k) = a_1 y(k-1) + a_0 y(k-2) + b_1 u(k) + b_0 u(k-1)$$

onde os valores de entrada e saída são dados experimentais fornecidos no problema e os valores dos parâmetros a_1, a_0, b_1, b_0, serão estimados.

Atividades

1) Escrever um programa utilizando os ambientes de simulação mencionados para a montagem da equação normal e estimação dos parâmentos.

2) Gerar um gráfico com os valores dos valores de *y(k)* medidos e estimados

3) Verificar o critério de validação do modelo conforme nota de aula

4) Obter a função de transferência no domínio -Z e no domino de Laplace.