UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE TELEINFORMÁTICA (DETI)
CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE COMPUTAÇÃO

MATHEUS GOMES CORDEIRO - 396436
ABEL PINHEIRO DE FIGUEIREDO - 396432
ALLAN CESAR - 408844
ANDRÉ LUIS DANTAS GADELHA - 399184

ESTIMAÇÃO DE PARÂMETROS DE UM MODELO QUE RELACIONA ANGULAÇÃO E POTÊNCIA EM UM ROBÔ

FORTALEZA
2018

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O estudo de sistemas dinâmicos envolve a modelagem matemática, a análise e a simulação de sistemas físicos de interesse da engenharia, tais como os sistemas mecânicos, elétricos, hidráulicos, pneumáticos e térmicos. Também são de particular importância os sistemas híbridos, resultantes da combinação de dois ou mais dos sistemas citados. Nos últimos anos, tem-se observado um vertiginoso crescimento do potencial de sistemas robóticos. Numa primeira etapa, houve um grande desenvolvimento na área de robótica industrial, com a utilização sobretudo de robôs manipuladores. Numa segunda etapa de evolução, pesquisadores em robótica têm concentrado esforços na construção de robôs móveis, introduzindo as capacidades de mobilidade e autonomia para reagir adequadamente ao ambiente, o que abre um vasto campo de novas aplicações e, consequentemente, muitos desafios.

O estudo do movimento (e do repouso) sem incluir ou considerar as forças envolvidas é abordado na Cinemática. Ou seja, dado um ponto, ou um sistema de pontos, ou um corpo rígido, a determinação da posição, da velocidade e da aceleração é feito usando-se a Modelagem Cinemática. Muitos pesquisadores costumam chamar de Modelagem Geométrica a obtenção da posição exclusivamente.

Falando de modo muito simplificado, na robótica é possível obter relações matemáticas (geralmente equações compostas por expressões matemáticas contendo senos e cossenos) para descrever a configuração dos elementos mecânicos que compõem a estrutura do robô e em seguida, usá-las para obter a velocidade e aceleração de pontos na estrutura mecânica do robô, como exemplo podemos citar relações eletromecânicas de um motor CC.

O regime permanente de um motor de CC é caracterizado por valores constantes de tensão, velocidade, torque, etc. Considerando que antes de energizar a máquina estes valores são normalmente nulos, fica claro que um ponto de operação em regime permanente só pode ser obtido depois de um estado transitório. A rigor, qualquer ponto de operação em regime permanente pode ser considerado como um caso particular de um estado transitório. Num determinado ponto de operação da máquina, as quantidades eletromagnéticas, mecânicas e térmicas são constantes. Estas quantidades variam durante o transitório e depois de certo período de tempo atingem seus valores em regime permanente. É natural nas máquinas elétricas que os transitórios eletromagnéticos e mecânicos aconteçam quase que simultaneamente, enquanto que o térmico demore mais. Logo, do ponto de vista dos transitórios eletromagnéticos e mecânicos, o estado térmico da máquina pode ser considerado constante. Portanto, a análise do transitório de uma máquina elétrica é limitada às grandezas eletromagnéticas e mecânicas e a interação entre elas. Pode-se expressar o relacionamento entre as equações mecânicas e elétricas de um motor, por meio de uma Função de Transferência. A Função de Transferência é a representação das equações elétricas e mecânicas, por meio de blocos que regem o princípio de funcionamento dos motores. Para determinar a Função de Transferência de um sistema (nesse caso o motor e a carga), é necessário transformar as equações elétricas e mecânicas no domínio do tempo para o domínio da frequência. Essa mudança é feita usando-se a Transformada de Laplace. Algo semelhante ao mostrado abaixo:

$$L\{e_a = e_b + R_a i_a + L_a \frac{di_a}{dt}\} \Longrightarrow E_a(s) = E_b(s) + R_a I_a(s) + L_a s I_a(s) \tag{1.1}$$

$$L\{T = b\omega + J\frac{d\omega}{dt}\} \Longrightarrow T(s) = bW(s) + JsW(s) \tag{1.2}$$

$$L\{e_b = K_b \omega\} \Longrightarrow E_b(s) = K_b W(s) \tag{1.3}$$

$$L\{T = K i_a\} \Longrightarrow T(s) = K I_a \tag{1.4}$$

As equações acima são identidades eletromecânicas retiradas de um circuito que envolve um motor CC de um robô, elas estão no domínio do tempo e são passadas para o domínio de Laplace onde, b é o coeficiente de atrito viscoso do motor, K_b um constante de proporcionalidade entre o fluxo magnético e um corrente induzida e K a constante de torque do motor, além disso grandezas de resistência, corrente, indutância, velocidade angular, momento angular e tensão são representadas respectivamente por R_a, i_a e I_a, L, ω e W, J, e_a, e_b, E_a e E_b.

2 METODOLOGIA

Tendo em vista a necessidade da identificação desse sistema dinâmico, utilizando um método off-line (presença de intermediário), serão estimados os parâmetros de modelo ARX via mínimos quadrados.

2.1 Etapas

Para isso, seguimos os passos:

- Planejamento Experimental: captação dos dados de entrada e saída via identificação *offline*. Assumimos que o sinal de entrada excitou todos os modos do sistema simulado;
- Seleção da Estrutura do Modelo: utilizamos a modelagem do tipo caixa cinza, onde se tem conhecimento parcial do modelo (ARX) e esperamos estimar seus parâmetros;
- Estimação de Parâmetros: via mínimos quadrados;
- Validação: verificação do erro ao final do estudo.

2.2 Procedimentos

De posse da etapas, são necessárias algumas observações:

2.2.1 Identificação offline

Excita-se o processo com a sequência de entrada (controle $u(k)$) aplicada é uma função degrau unitário a partir de $k = 1$. Em seguida, armazenam-se as medidas de entrada e saída para aplicação e avaliação a posteriori dos algoritmos não recursivos. É necessário o conhecimento da estrutura do modelo, envolvendo ordem e atraso de transporte.

2.2.2 O modelo ARX

Como mencionado anteriormente, serão considerados modelos ARX, de forma mais específica tem-se:

$$y(k) = ay(k-1) + a_1 y(k-2) + bu(k-1) + b_1 u(k-2)$$

Os parâmetros desconhecidos de um modelo matemático devem ser escolhidos de tal forma que o somatório dos quadrados das diferenças entre os valores medidos e os valores verdadeiros, multiplicado por números que medem o grau de precisão, seja mínimo. Supondo que foram feitas N medidas de entrada e saída, dado:

$$u(0), u(1), ..., u(N) \text{ e } y(0), y(1), ..., y(N)$$

Podemos escrever essa equação de forma matricial:

$$\theta = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \\ \cdots \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad Y = \begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(N) \end{bmatrix} \quad e = \begin{bmatrix} e(1) \\ e(2) \\ \vdots \\ e(N) \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} -y(0) & \dots & -y(1-n) & \vdots & u(0) & \cdots & u(1-m) \\ -y(1) & \cdots & -y(2-n) & \vdots & u(1) & \cdots & u(2-m) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -y(N-1) & \dots & -y(N-n) & \vdots & u(N-1 & \dots & u(N-m) \end{bmatrix}$$

Figura 1 – Expansão do modelo ARX em formato matricial para N amostras.

Tem-se:

$$Y = X\theta + e$$

Onde Y é saída que desejamos estimar baseado em X que é matriz formada pelas entradas que aplicamos ao sistema (degrau unitário) junto com os valores de $y(k)$ medidos anteriormente, θ são os coeficientes ou parâmetros que desejamos estimar e e é o erro da estimativa.

2.2.3 Método dos Mínimos Quadrados

Como conhecemos Y e X, desejamos obter o θ ótimo através dos mínimos quadrados. Para isso, devemos escolher este θ que minimize a função erro J:

$$J = \sum_{k=1}^{N} e^2(k) = e^T e$$

Após algum algebrismo:

$$J = (Y - X\theta)^T (Y - X\theta)$$

Como desejamos obter o valor otimizado para o erro, ou seja, o mais próximo de 0 é valor ideal, faremos:

$$\left.\frac{\partial J}{\partial \theta}\right|_{\theta=\hat{\theta}} = 0$$

Para obter:

$$\hat{\theta} = (X^T X)^{-1} X^T Y$$

Basicamente é isso que precisa ser feito computacionalmente para completar nosso modelo.

2.3 Função de transferência

Para uma aplicação de controle é interessante calcular a função de transferência. Uma vez que nosso modelo pode ser expresso por:

$$y(k) = ay(k-1) + a_1 y(k-2) + bu(k-1) + b_1 u(k-2)$$

Por simplicidade, o intervalo de amostragem é T=0.25 segundos. Podemos calcular essa função de transferência utilizando a Transformada Z (para o domínio discreto) e Transformada de Laplace. Para obter:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

ou

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

2.3.1 Transformada Z

Faremos para $H(z)$:

$$Y(z) = az^{-1}Y(z) + a_1 z^{-2} Y(z) + bz^{-1}\tfrac{1}{1-z^{-1}} + b_1 z^{-2}\tfrac{1}{1-z^{-1}}$$

Segue que:

$$Y(z) - az^{-1}Y(z) - a_1 z^{-2} Y(z) = (bz^{-1} + b_1 z^{-2})\tfrac{1}{1-z^{-1}}$$

Continua:

$$Y(z) = \tfrac{(bz^{-1}+b_1 z^{-2})}{(1-az^{-1}-a_1 z^{-2})}\tfrac{1}{1-z^{-1}}$$

Dado que $X(z)$ é transformada de um degrau unitário, temos:

$$H(z) = \frac{(bz^{-1}+b_1z^{-2})}{(1-az^{-1}-a_1z^{-2})}$$

2.3.2 Transformada de Laplace

Faremos para $H(s)$:

$$Y(s) = ae^{-s}Y(s) + a_1e^{-2s}Y(s) + be^{-s}\frac{1}{s} + b_1e^{-2s}\frac{1}{s}$$

Segue que:

$$Y(s) - ae^{-s}Y(s) - a_1e^{-2s}Y(s) = (be^{-s} + b_1e^{-2s})\frac{1}{s}$$

Continua:

$$Y(s) = \frac{(be^{-s}+b_1e^{-2s})}{(1-ae^{-s}-a_1e^{-2s})}\frac{1}{s}$$

Dado que $X(z)$ é transformada de um degrau unitário, temos:

$$H(s) = \frac{(be^{-s}+b_1e^{-2s})}{(1-ae^{-s}-a_1e^{-2s})}$$

.

3 RESULTADOS

Com a utilização da metodologia anterior foram obtidos os seguintes resultados:

3.0.1 Coeficientes do Modelo e Soma do Quadrado dos Erros

$$y(k) = ay(k-1) + a_1 y(k-2) + bu(k-1) + b_1 u(k-2)$$

Da equação acima foram obtidos os seguintes coeficientes:

- a = 1.91655131
- a_1 = -0.9227192
- b = 0.00302465
- b_1 = 0.00315749

E o modelo teve a seguinte Soma do Quadrado dos Erros:

- **e** = 0.07806661461073079

3.0.2 Função de Transferência

Com os coeficientes encontrados as funções de transferência no domínio de **Z** e no domínio de Laplace foram:

$$H(z) = \frac{(0.00302465z^{-1}) + (0.00315749z^{-2})}{1 - (1.91655131z^{-1}) + (0.9227192z^{-2})} \tag{3.1}$$

$$H(s) = \frac{(0.00302465e^{-s}) + (0.00315749e^{-2s})}{1 - (1.91655131e^{-s}) + (0.9227192e^{-2s})} \tag{3.2}$$

3.0.3 Gráfico do Modelo

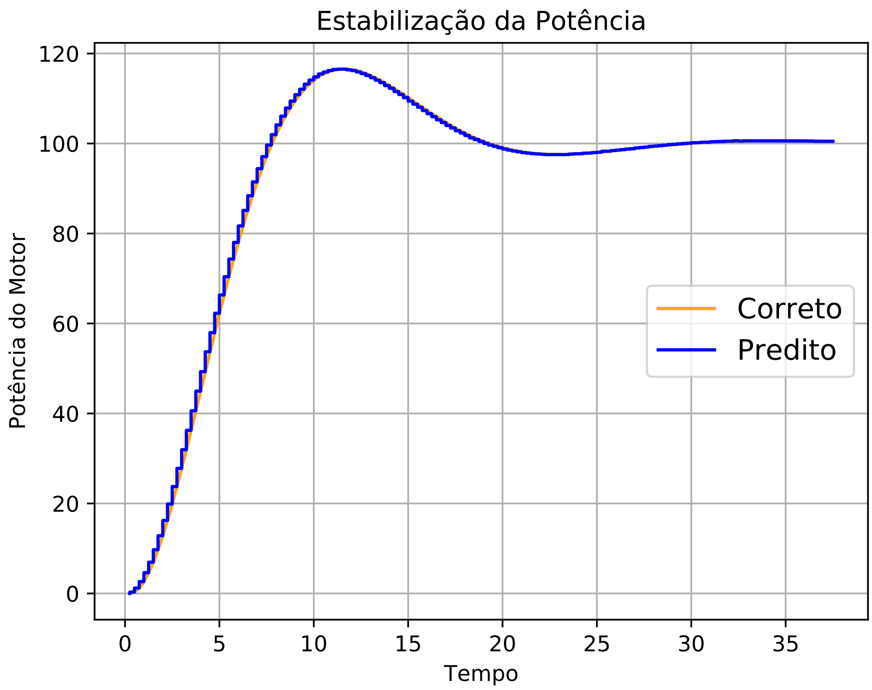

Figura 2 – Gráfico da Estabilização da Potência