UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE TELEINFORMÁTICA (DETI)
CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE COMPUTAÇÃO

MATHEUS GOMES CORDEIRO - 396436
ABEL PINHEIRO DE FIGUEIREDO - 396432
ALLAN CESAR - 408844
ANDRÉ LUIS DANTAS GADELHA - 399184

ESTIMAÇÃO DE PARÂMETROS DE MODELO ARX VIA MÍNIMOS QUADRADOS

FORTALEZA
2018

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Na engenharia, é imprescindível a interdisciplinaridade no âmbito que se refere ao desenvolvimento de um projeto. Em verdade, o profissional muitas vezes é avaliado pela sua capacidade de aglomerar as diferentes esferas de conhecimento no produto desenvolvido. A engenharia de computação, em especial, representa esta característica de forma ainda mais enfática, visto que ela influencia em todos os setores econômicos e está presente nas diferentes formas da sociedade atual.

Desta forma, no contexto da automação, é de grande estima a modelagem matemática e sua respectiva simulação, para que assim se possa, por meio de análises, prever o comportamento de um fenômeno físico prevendo os efeitos e as pertubações geradas na aplicação.Desse modo, foi utilizado para a construção desse projeto muitos conhecimentos advindos da Transferência de Calor. Dentre elas, podemos citar a Lei de Fourier que diz que uma quantidade de calor Q ao atravessar uma parede sob uma diferença de temperatura constante, será diretamente proporcional à área da secção transversal A, à condutividade térmica do material K, à diferença de temperatura ΔT e inversamente proporcional a espessura da parede ΔX. Assim escrevemos:

$$\dot{q} = -kA\frac{\Delta T}{\Delta X} \Longrightarrow \frac{mc\Delta T}{\Delta t} = \frac{-kA}{\Delta X}\Delta T \Longrightarrow \frac{mc\Delta T}{\Delta t} = -K\Delta T \Longrightarrow \frac{mcdT}{dt} = -K(T_2 - T_1) \tag{1.1}$$

Portanto, a transmissão de calor pelo forno em questão seguirá a lei representada acima, realizando o processo de transferência de calor por todo o material do sistema através das trocas de energia entre as partículas adjacentes. Assim é visível que os átomos que se encontram em uma temperatura mais elevada transferem parte de sua energia para os átomos vizinhos com baixa energia. Essa transferência do átomo de maior energia para aquele de menor energia explica o sinal negativo na equação acima, demonstrando também como o sistema visa procurar o equilíbrio térmico.

2 METODOLOGIA

Tendo em vista a necessidade da identificação desse sistema dinâmico, utilizando um método off-line (presença de intermediário), serão estimados os parâmetros de modelo ARX via mínimos quadrados.

2.1 Etapas

Para isso, seguimos os passos:

- Planejamento Experimental: captação dos dados de entrada e saída via identificação *offline*. Assumimos que o sinal de entrada excitou todos os modos do sistema simulado;
- Seleção da Estrutura do Modelo: utilizamos a modelagem do tipo caixa cinza, onde se tem conhecimento parcial do modelo (ARX) e esperamos estimar seus parâmetros;
- Estimação de Parâmetros: via mínimos quadrados;
- Validação: verificação do erro ao final do estudo.

2.2 Procedimentos

De posse da etapas, são necessárias algumas observações:

2.2.1 Identificação offline

Excita-se o processo com a sequência de entrada (controle $u(k)$) aplicada é uma função degrau unitário a partir de $k = 1$. Em seguida, armazenam-se as medidas de entrada e saída para aplicação e avaliação a posteriori dos algoritmos não recursivos. É necessário o conhecimento da estrutura do modelo, envolvendo ordem e atraso de transporte.

2.2.2 O modelo ARX

Como mencionado anteriormente, serão considerados modelos ARX, de forma mais específica tem-se:

$$y(k) = ay(k-1) + a_1 y(k-2) + bu(k-1) + b_1 u(k-2)$$

Os parâmetros desconhecidos de um modelo matemático devem ser escolhidos de tal forma que o somatório dos quadrados das diferenças entre os valores medidos e os valores verdadeiros, multiplicado por números que medem o grau de precisão, seja mínimo. Supondo que foram feitas N medidas de entrada e saída, dado:

$$u(0), u(1), ..., u(N) \text{ e } y(0), y(1), ..., y(N)$$

Podemos escrever essa equação de forma matricial:

$$\theta = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \\ \cdots \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad Y = \begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(N) \end{bmatrix} \quad e = \begin{bmatrix} e(1) \\ e(2) \\ \vdots \\ e(N) \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} -y(0) & \cdots & -y(1-n) & \vdots & u(0) & \cdots & u(1-m) \\ -y(1) & \cdots & -y(2-n) & \vdots & u(1) & \cdots & u(2-m) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -y(N-1) & \cdots & -y(N-n) & \vdots & u(N-1 & \cdots & u(N-m) \end{bmatrix}$$

Figura 1 – Expansão do modelo ARX em formato matricial para N amostras.

Tem-se:

$$Y = X\theta + e$$

Onde Y é saída que desejamos estimar baseado em X que é matriz formada pelas entradas que aplicamos ao sistema (degrau unitário) junto com os valores de $y(k)$ medidos anteriormente, θ são os coeficientes ou parâmetros que desejamos estimar e e é o erro da estimativa.

2.2.3 Método dos Mínimos Quadrados

Como conhecemos Y e X, desejamos obter o θ ótimo através dos mínimos quadrados. Para isso, devemos escolher este θ que minimize a função erro J:

$$J = \sum_{k=1}^{N} e^2(k) = e^T e$$

Após algum algebrismo:

$$J = (Y - X\theta)^T (Y - X\theta)$$

Como desejamos obter o valor otimizado para o erro, ou seja, o mais próximo de 0 é valor ideal, faremos:

$$\left.\frac{\partial J}{\partial \theta}\right|_{\theta=\hat{\theta}} = 0$$

Para obter:

$$\hat{\theta} = (X^T X)^{-1} X^T Y$$

Basicamente é isso que precisa ser feito computacionalmente para completar nosso modelo.

2.3 Função de transferência

Para uma aplicação de controle é interessante calcular a função de transferência. Uma vez que nosso modelo pode ser expresso por:

$$y(k) = ay(k-1) + a_1 y(k-2) + bu(k-1) + b_1 u(k-2)$$

Por simplicidade, o intervalo de amostragem é T=0.25 segundos. Podemos calcular essa função de transferência utilizando a Transformada Z (para o domínio discreto) e Transformada de Laplace. Para obter:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

ou

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

2.3.1 Transformada Z

Faremos para $H(z)$:

$$Y(z) = az^{-1}Y(z) + a_1 z^{-2} Y(z) + bz^{-1}\tfrac{1}{1-z^{-1}} + b_1 z^{-2}\tfrac{1}{1-z^{-1}}$$

Segue que:

$$Y(z) - az^{-1}Y(z) - a_1 z^{-2} Y(z) = (bz^{-1} + b_1 z^{-2})\tfrac{1}{1-z^{-1}}$$

Continua:

$$Y(z) = \tfrac{(bz^{-1}+b_1 z^{-2})}{(1-az^{-1}-a_1 z^{-2})}\tfrac{1}{1-z^{-1}}$$

Dado que $X(z)$ é transformada de um degrau unitário, temos:

$$H(z) = \frac{(bz^{-1}+b_1z^{-2})}{(1-az^{-1}-a_1z^{-2})}$$

2.3.2 Transformada de Laplace

Faremos para $H(s)$:

$$Y(s) = ae^{-s}Y(s) + a_1e^{-2s}Y(s) + be^{-s}\frac{1}{s} + b_1e^{-2s}\frac{1}{s}$$

Segue que:

$$Y(s) - ae^{-s}Y(s) - a_1e^{-2s}Y(s) = (be^{-s} + b_1e^{-2s})\frac{1}{s}$$

Continua:

$$Y(s) = \frac{(be^{-s}+b_1e^{-2s})}{(1-ae^{-s}-a_1e^{-2s})}\frac{1}{s}$$

Dado que $X(z)$ é transformada de um degrau unitário, temos:

$$H(s) = \frac{(be^{-s}+b_1e^{-2s})}{(1-ae^{-s}-a_1e^{-2s})}$$

.

3 RESULTADOS

Com a utilização da metodologia anterior foram obtidos os seguintes resultados:

3.0.1 Coeficientes do Modelo e Soma do Quadrado dos Erros

$$y(k) = ay(k-1) + a_1y(k-2) + bu(k-1) + b_1u(k-2)$$

Da equação acima foram obtidos os seguintes coeficientes:

- a = 0.11461719
- a_1 = 0.19057318
- b = 0.39814248
- b_1 = 0.19700962

E o modelo teve a seguinte Soma do Quadrado dos Erros:

- **e** = $2.444138866364957x10^{-5}$

3.0.2 Função de Transferência

Com os coeficientes encontrados as funções de transferência no domínio de **Z** e no domínio de Laplace foram:

$$H(z) = \frac{(0.39814248z^{-1}) + (0.19700962z^{-2})}{1 - (0.11461719z^{-1}) - (0.19057318z^{-2})} \tag{3.1}$$

$$H(z) = \frac{(0.39814248e^{-s}) + (0.19700962e^{-2s})}{1 - (0.11461719e^{-s}) - (0.19057318e^{-2s})} \tag{3.2}$$

3.0.3 Gráfico do Modelo

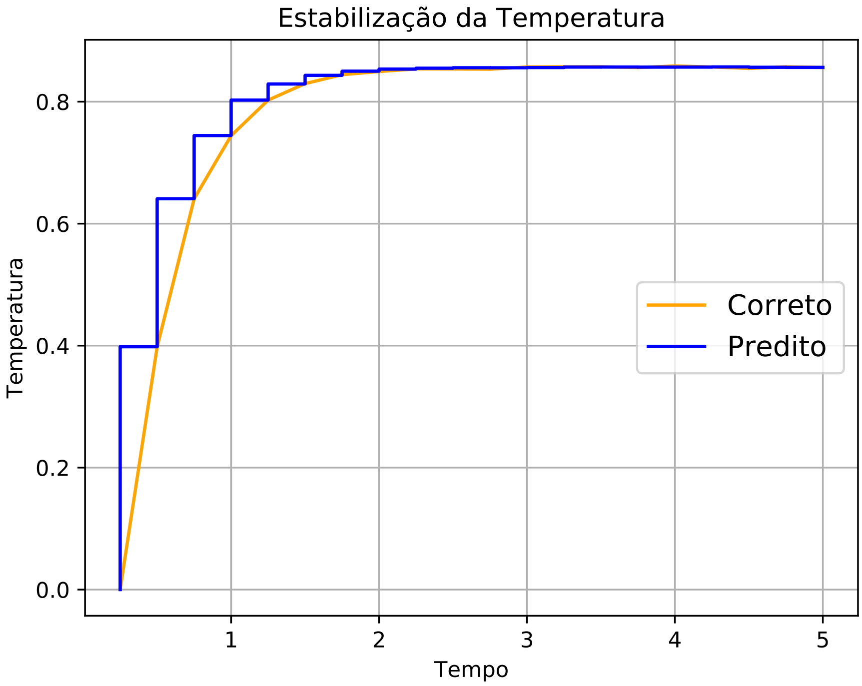

Figura 2 – Gráfico da Estabilização da Temperatura