Cap. 5, Cap. 6 e Cap. 7

Universidade Federal de Goiás
junho de 2021
Aluno: Matheus Lázaro Honório da Silva - 201801523
Disciplina: Cálculo Numérico

Terceira atividade avaliativa

Apresente todos os detalhes das suas respostas. Para resolver os sistemas lineares, pode utilizar um dos códigos programados em python. Para os cálculos de integrais, pode utilizar calculadora / computador, utilize arredondamento com 4 casas decimais.

① Determine de três formas diferentes (sistema linear, forma de Lagrange e forma de Newton) o polinômio dos pontos $(-1,5), (0,1), (1,3), (2,11)$. Apresente todos os detalhes, incluindo a tabela de diferenças divididas.

· Resolução do Sistema Linear, para $(-1,5), (0,1), (1,3), (2,11)$

x	-1	0	1	2
$f(x)$	5	1	3	11

Vamos encontrar um polinômio de grau ≤ 3

Temos que $p_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$

$$p_3(x_0) = f(x_0) \Leftrightarrow a_0 + a_1(-1) + a_2(-1)^2 + a_3(-1)^3 = 5 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \boxed{a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = 5}$$
$$p_3(x_1) = f(x_1) \Leftrightarrow a_0 + a_1(0) + a_2(0)^2 + a_3(0)^3 = 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \boxed{a_0 = 1}$$
$$p_3(x_2) = f(x_2) \Leftrightarrow a_0 + a_1(1) + a_2(1)^2 + a_3(1)^3 = 3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \boxed{a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 3}$$
$$p_3(x_3) = f(x_3) \Leftrightarrow a_0 + a_1(2) + a_2(2)^2 + a_3(2)^3 = 11 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \boxed{a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 = 11}$$

/ /

Resolvendo o sistema linear:

$$\begin{cases} a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = 5 \\ a_0 = 1 \\ a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 3 \\ a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 = 11 \end{cases} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \\ 11 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 11 \end{bmatrix} \underset{\sim}{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 11 \end{bmatrix} L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -4 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 11 \end{bmatrix} L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -4 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & 3 & 9 & 6 \end{bmatrix} \sim L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & 3 & 9 & 6 \end{bmatrix} L_4 \leftarrow L_4 - 3L_2 \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & 6 & 18 \end{bmatrix} L_4 \leftarrow L_4 - 3L_3 \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} a_0 - a_1 + a_2 - a_3 &= 5 \\ a_1 - a_2 + a_3 &= -4 \\ 2a_2 &= 6 \\ 6a_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned} a_0 &= 1 \\ a_1 &= -1 \\ a_2 &= 3 \\ a_3 &= 0 \end{aligned}} \quad \therefore \; p_3(x) = 1 - x + 3x^2$$

$$\boxed{p_3(x) = 3x^2 - x + 1}$$ 1´ o polinômio que interpola $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$.

credeal

Forma de Lagrange para $(-1,5), (0,1), (1,3), (2,11)$

	x_0	x_1	x_2	x_3
x	-1	0	1	2
$f(x)$	5	1	3	11

$$L_k(x) = \frac{\prod_{j=0,\, j\neq k}^{n} (x - x_j)}{\prod_{j=0,\, j\neq k}^{n} (x_k - x_j)}$$

Temos que:

$$p_3(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x) + y_3 L_3(x)$$

$n=3,\ k=0$

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = \frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(-1-0)(-1-1)(-1-2)} = \frac{-x^3+3x^2-2x}{6}$$

$n=3,\ k=1$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{(0+1)(0-1)(0-2)} = \frac{x^3-2x^2-x+2}{2}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = \frac{(x+1)(x-0)(x-2)}{(1+1)(1-0)(1-2)} = \frac{-x^3+x^2+2x}{2}$$

$n=3,$

$$L_3(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \frac{(x+1)(x-0)(x-1)}{(2+1)(2-0)(2-1)} = \frac{x^3-x}{6}$$

Assim, $p_3(x) = 5\left(\frac{-x^3+3x^2-2x}{6}\right) + \left(\frac{x^3-2x^2-x+2}{2}\right) + 3\left(\frac{-x^3+x^2+2x}{2}\right) +$

$+ 11\left(\frac{x^3-x}{6}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow p_3(x) = x(3x-1)+1 \Leftrightarrow \boxed{p_3(x) = 3x^2-x+1}$

Forma de Newton para $\overset{x_0}{(-1,5)}, \overset{x_1}{(0,1)}, \overset{x_2}{(1,3)}, \overset{x_3}{(2,11)}$

Tabela de diferenças divididas:

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	Ordem 3
-1	5	-4	3	0
0	1	2	3	
1	3	8		
2	11			

Ordem 0: $f[x_0] = f(x_0)$

Ordem 1: $f[x_0,x_1] = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$

Ordem 2: $f[x_0,x_1,x_2] = \dfrac{f[x_1,x_2] - f[x_0,x_1]}{x_2 - x_0}$

Ordem 3: $f[x_0,x_1,x_2,x_3] = \dfrac{f[x_1,x_2,x_3] - f[x_0,x_1,x_2]}{x_3 - x_0}$

$f[x_0,x_1] = \dfrac{1-5}{0+1} = -4$; $f[x_1,x_2] = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \dfrac{3-1}{1-0} = 2$

$f[x_2,x_3] = \dfrac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} = \dfrac{11-3}{2-1} = 8$

$f[x_0,x_1,x_2] = \dfrac{2+4}{1+1} = \dfrac{6}{2} = 3$; $f[x_0,x_1,x_2] = \dfrac{8-2}{2-0} = \dfrac{6}{2} = 3$

$f[x_0,x_1,x_2,x_3] = \dfrac{3-3}{2+1} = 0$

$p_3(x) = f(x_0) + (x-x_0)f[x_0,x_1] + (x-x_0)(x-x_1)f[x_0,x_1,x_2] +$
$+ (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)f[x_0,x_1,x_2,x_3] \Rightarrow$
$\Rightarrow p_3(x) = 5 + (x+1)(-4) + (x+1)(x-0)(3) + \cancel{(x+1)(x-0)(x-1)\cdot 0}$
$\Rightarrow \boxed{p_3(x) = 3x^2 - x + 1}$

② Utilize o método dos mínimos para resolver as letras a) e b) do exercício 2 do cap. 6 do livro texto, pg 287.
Obs.: a) é ajuste linear; b) é ajuste por uma quadrática.

a) Ajuste os dados abaixo pelo método dos quadrados mínimos utilizando: uma reta:

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	0,5	0,6	0,9	0,8	1,2	1,5	1,7	2,0

Dada a tabela de pontos (x,y), deve-se determinar pelo método dos quadrados mínimos a equação da reta que melhor se ajuste a esses pontos.

• Como $n = 8$ pontos

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 36 \; ; \; \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 204$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = 9{,}2 \; ; \; \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 50{,}5$$

Equações normais do problema:

$$\begin{cases} 204a + 36b = 50{,}5 \\ 36a + 8b = 9{,}2 \end{cases} \qquad \begin{aligned} a &= 13/60 \\ b &= 7/40 \end{aligned}$$

Reta que melhor se ajusta à tabela de pontos:

$$\boxed{y = \frac{7}{40} + \frac{13}{60}x}$$

/ /

11) Uma parábola do tipo ax^2+bx+c

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	0,5	0,6	0,9	0,8	1,2	1,5	1,7	2,0

$\sum_{i=1}^{n} x_i = 36$; $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 204$; $\sum_{i=1}^{n} x_i^3 = 1296$; $\sum_{i=1}^{n} x_i^4 = 8772$

$\sum_{i=1}^{n} y_i = 9,2$; $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 50,5$; $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i = 319,1$

Equações normais:

$$\begin{cases} 8c + 36b + 204a = 9,2 \\ 36c + 204b + 1296a = 50,5 \\ 204c + 1296b + 8772a = 319,1 \end{cases}$$

$a = 13/840$
$b = 13/168$
$c = 57/140$

$$\boxed{P(x) = \frac{13}{840}x^2 + \frac{13}{168}x + \frac{57}{140}}$$

Ajuste de curvas pelo met. dos min quadrados

③ Resolva o Exercício 5 pag. 238-239 do cap. 6 do livro texto

A tabela abaixo fornece o número de habitantes do Brasil (em milhões) desde 1872:

Ano	1872	1890	1900	1920	1940	1950	1960	1970	1980	1991
Habitantes	9,9	14,3	17,4	30,6	41,2	51,9	70,2	93,1	119,0	146,2

a) Obtenha uma estimativa para a população brasileira no ano 2000. Analise seu resultado.

· Exponencial

· Podemos mudar a escala dos anos por: $t = \frac{(ano - 1800)}{10}$

Ano	7,2	9	10	12	14	15	16	17	18	19,1
Habitantes	9,9	14,3	17,4	30,6	41,2	51,9	70,2	93,1	119,0	146,2

Realizando o ajuste: $f(x) = \alpha_1 e^{\alpha_2 x}$

A "linearização" a ser feita é: $z = \ln(y) \cong \ln(\alpha_1 e^{\alpha_2 x}) = \ln(\alpha_1) + \alpha_2 x =$

$= \phi(x)$

Ajustando $z = \ln(y)$ por mínimos quadrados, encontrando

$\phi(x) = a_1 + a_2 x$, onde $a_1 = \ln(\alpha_1)$ e $a_2 = \alpha_2$

$g_1(x) = 1$, $g_2(x) = x$

Temos

x	7,2	9	10	12	14	15	16	17	18	19,1
$z = \ln(y)$	2,293	2,660	2,856	3,421	3,718	3,949	4,251	4,534	4,779	4,985

/ /

~~a1 a2 a2~~ solução do sistema:

$$\begin{cases} \left[\sum_{k=1}^{10} g_1(x_k) g_1(x_k)\right] a_1 + \left[\sum_{k=1}^{10} g_2(x_k) g_1(x_k)\right] a_2 = \sum_{k=1}^{10} z(x_k) g_1(x_k) \\ \left[\sum_{k=1}^{10} g_1(x_k) g_2(x_k)\right] a_1 + \left[\sum_{k=1}^{10} g_2(x_k) g_2(x_k)\right] a_2 = \sum_{k=1}^{10} z(x_k) g_2(x_k) \end{cases}$$

$$g_1(x) = 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{10} g_1(x_k) g_1(x_k) = \sum_{k=1}^{10} 1 = 10 = a_{11}$$

$$g_2(x) = x \Rightarrow \sum_{k=1}^{10} g_2(x_k) g_2(x_k) = \sum_{k=1}^{10} x_k^2 = 2031{,}65 = a_{22}$$

$$\sum_{k=1}^{10} g_1(x_k) g_2(x_k) = \sum_{k=1}^{10} 1 \cdot x_k = 137{,}3 = a_{12} = a_{21}$$

$$b_1 = \sum_{k=1}^{10} z(x_k) g_1(x_k) = \sum_{k=1}^{10} z(x_k) = 37{,}446$$

$$b_2 = \sum_{k=1}^{10} z(x_k) g_2(x_k) = \sum_{k=1}^{10} z(x_k) x_k = 547{,}6781$$

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 137{,}3 \\ 137{,}3 & 2031{,}65 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 37{,}446 \\ 547{,}6781 \end{bmatrix}$$

$a_1 = 0{,}6013 \Rightarrow \alpha_1 = e^{a_1} \Rightarrow \alpha_1 = e^{0{,}6013} \Rightarrow \boxed{\alpha_1 \cong 1{,}8245}$

$a_2 = 0{,}2289 \quad \alpha_2 = a_2 \Rightarrow \boxed{\alpha_2 = 0{,}2289}$

$\boxed{f(x) = 1{,}8245 e^{0{,}2289x}}$ $\quad pop(2009) = f(20) = 177{,}5595$

$f(20) = 1{,}8245 e^{0{,}2289 \cdot 20} = 177{,}5595$

④ Utilize a regra do trapézio e a regra de Simpson repetida utilizando pelo menos 4 subintervalos para estimar as integrais das funções.

a) $e^{\operatorname{sen} x}$ no intervalo $[0, \pi]$

$$\int_0^{\pi} e^{\operatorname{sen}(x)}\,dx$$ Regra do Trapézio

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{\Delta x}{2}\left(f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + 2f(x_3) + \dots + 2f(x_{n-2}) + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)\right), \text{ onde } \Delta x = \frac{b-a}{n}$$

Temos: $a = 0$, $b = \pi$, $n = 4$

Portanto, $\Delta x = \frac{\pi - 0}{4} = \frac{\pi}{4}$

Dividindo o intervalo $[0, \pi]$ em $n = 4$ subintervalos de comprimento $\Delta x = \frac{\pi}{4}$, com os seguintes pontos finais: $a = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi = b$

Agora, avaliando a função nesses terminais:

$f(x_0) = f(0) = 1$

$2f(x_1) = 2f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2e^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \approx 4{,}0562$

$2f(x_2) = 2f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2e \approx 5{,}4366$

$2f(x_3) = 2f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 2e^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \approx 4{,}0562$

$f(x_4) = f(\pi) = 1$

Somando os valores e multiplicando por $\frac{\Delta x}{2} = \frac{\pi}{8}$

$$\frac{\pi}{8}\left(1 + 4{,}0562 + 5{,}4366 + 4{,}0562 + 1\right) = \frac{\pi}{8}(15{,}549) \approx 6{,}1061$$

credeal

/ /

Regra de Simpson $\int_0^{\pi} e^{\operatorname{sen}(x)}\,dx$

$$\int_a^b f(x) \approx \frac{\Delta x}{3}\left(f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+2f(x_4)+\dots+4f(x_{n-3})+\right.$$

$a=0,\ b=\pi$

$$\left.+2f(x_{n-2})+4f(x_{n-1})+f(x_n)\right), \text{ onde } \Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{\pi-0}{4}=\frac{\pi}{4}$$

Dividindo o intervalo $[0,\pi]$ em $n=4$ subintervalos de tamanho $\Delta x=\frac{\pi}{4}$ com os 4 seguintes pontos: $a=0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi=b$

Avaliando a função nesses termos:

$f(x_0)=f(0)=1$

$4f(x_1)=4f\left(\frac{\pi}{4}\right)=4e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\approx 8{,}1125$

$2f(x_2)=2f\left(\frac{\pi}{2}\right)=2e\approx 5{,}4366$

$4f(x_3)=4f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=4e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\approx 8{,}1125$

$f(x_4)=f(\pi)=1$. Somando os valores, multiplicando por $\frac{\Delta x}{3}=\frac{\pi}{12}$

$$\frac{\pi}{12}\left(1+8{,}1125+5{,}4366+8{,}1125+1\right)=\frac{\pi}{12}(23{,}6616)\approx 6{,}1946$$

credeal

b) e^{-x^2} no intervalo $[0,2]$ $\int_0^2 e^{-x^2}dx$, $n=4$

Seguindo o esquema do item a), para a regra do trapézio

temos $a=0$, $b=2$, $n=4$

$\Delta x = \frac{2-0}{4} = \frac{1}{2}$

Dividindo o intervalo $[0,2]$ em $n=4$ subintervalos de tamanho

$\Delta x = \frac{1}{2}$, com os pontos $a=0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2=b$

Avaliando a função nos termos

$f(x_0) = f(0) = 1$

$2f(x_1) = 2f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{e^{\frac{1}{4}}} \approx 1,5576$

$2f(x_2) = 2f(1) = \frac{2}{e} \approx 0,7358$

$2f(x_3) = 2f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{2}{e^{\frac{9}{4}}} \approx 0,2108$

$f(x_4) = f(2) = e^{-4} \approx 0,0183$

Somando os valores e multiplicando por $\frac{\Delta x}{2} = \frac{1}{4}$

$\frac{1}{4}\left|1+1,5576+0,7358+0,2108+0,0183\right| = \frac{1}{4}(3,5225) \approx 0,8806$

credeal

Regra de Simpson $\int_0^2 e^{-x^2}$

Seguindo o esquema empregado no item a) para a regra de Simpson.

$a=0,\ b=2,\ n=4$

$\Delta x = \dfrac{2-0}{4} = \dfrac{1}{2}$

Dividindo o intervalo $[0,2]$ em $n=4$ subintervalos de tamanho $\Delta x = \dfrac{1}{2}$ com os pontos $a=0, \dfrac{1}{2}, 1, \dfrac{3}{2}, 2=b$

$f(x_0) = f(0) = 1$

$4f(x_1) = 4f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{4}{e^{\frac{1}{4}}} \approx 3,1152$

$2f(x_2) = 2f(1) = \dfrac{2}{e} \approx 0,7358$

$4f(x_3) = 4f\left(\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{4}{e^{\frac{9}{4}}} \approx 0,4216$

$f(x_4) = f(2) = e^{-4} \approx 0,0183$

Somando os valores e multiplicando por $\dfrac{\Delta x}{3} = \dfrac{1}{6}$

$\dfrac{1}{6}\left(1 + 3,1152 + 0,7358 + 0,4216 + 0,0183\right) =$

$= \dfrac{1}{6}(5,2909) \approx 0,8818$