Lista de Exercícios - Manipulação de Somatórios

Oficina de AEDs2 - Prof. Matheus Pereira

Instruções

Esta lista contém exercícios para praticar as regras básicas de transformação e propriedades de somatórios vistas na unidade. Resolva cada exercício justificando suas respostas com as propriedades adequadas (Distributividade, Associatividade, Comutatividade, Combinação de Conjuntos e Perturbação).

Propriedades Básicas de Somatórios

1. Distributividade

$$\sum_{i \in I} c \cdot a_i = c \cdot \sum_{i \in I} a_i$$

2. Associatividade

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} b_i$$

3. Comutatividade

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{p(i)=1}^{n} a_{p(i)}$$

onde $p(i)$ é qualquer permutação dos índices.

4. Combinação de Conjuntos (P1)

Para quaisquer conjuntos de índices I e J:

$$\sum_{i \in I} a_i + \sum_{i \in J} a_i = \sum_{i \in I \cup J} a_i + \sum_{i \in I \cap J} a_i$$

5. Perturbação (P2)

Para $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$:

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1} = a_0 + \sum_{k=0}^{n} a_{k+1}$$

Fórmulas de Somatórios Notáveis

1. Soma de Constantes

$$\sum_{i=1}^{n} c = n \cdot c$$

2. Soma dos Primeiros n Números Naturais

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

3. Soma dos Quadrados dos Primeiros n Números Naturais

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

4. Soma dos Cubos dos Primeiros n Números Naturais

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

5. Soma de Progressão Aritmética

$$\sum_{k=0}^{n} (a + kd) = \frac{(n+1)(2a+nd)}{2}$$

6. Soma de Progressão Geométrica ($r \neq 1$)

$$\sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

7. Soma de Produtos $k \cdot r^k$ ($r \neq 1$)

$$\sum_{k=0}^{n} k \cdot r^k = \frac{r(1 - r^{n+1})}{(1-r)^2} - \frac{(n+1)r^{n+1}}{1-r}$$

8. Soma Telescópica

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1}) = a_n - a_0$$

Técnicas de Manipulação de Somatórios

1. Mudança de Índice

$$\sum_{i=a}^{b} f(i) = \sum_{j=a+c}^{b+c} f(j-c)$$

2. Separação de Termos

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$$

3. Fatoração de Constantes

$$\sum_{i=1}^{n} c \cdot a_i = c \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i$$

1 Distributividade e Associatividade

1. Simplifique a expressão: $\sum_{k=1}^{n} 5 \cdot k$
2. Simplifique a expressão: $\sum_{i=0}^{m} \frac{1}{2} a_i$
3. Mostre que: $\sum_{j=1}^{p} c(x_j + y_j) = c \sum_{j=1}^{p} x_j + c \sum_{j=1}^{p} y_j$
4. Escreva a constante fora do somatório: $\sum_{k=3}^{N} \pi \cdot r_k^2$
5. Simplifique: $\sum_{i=1}^{10}(3i + 2)$
6. Aplique a distributividade em: $\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{4}$
7. Mostre que $\sum_{i=1}^{m} 7(i^2 - i) = 7 \sum_{i=1}^{m} i^2 - 7 \sum_{i=1}^{m} i$
8. Simplifique: $\sum_{j=0}^{t} -3 \cdot j$
9. Escreva a constante dentro do somatório: $b \sum_{k=5}^{M} k^3$
10. Verifique se a igualdade é verdadeira: $\sum_{i=1}^{n}(c \cdot d_i) = c \cdot \sum_{i=1}^{n} d_i$
11. **Prove que para qualquer constante c e qualquer função $f(i)$, vale:**

$$\sum_{i=a}^{b} c \cdot f(i) = c \cdot \sum_{i=a}^{b} f(i)$$

12. **Mostre que a propriedade distributiva também se aplica a somatórios duplos:**

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c \cdot a_{ij} = c \cdot \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij}$$

13. **Verifique se a seguinte igualdade é verdadeira, justificando:**

$$\sum_{i=1}^{n}(c_i \cdot d_i) = \left(\sum_{i=1}^{n} c_i\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} d_i\right)$$

14. **Utilize a propriedade distributiva para calcular:**

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{2i}{n(n+1)}\right)$$

15. Combine os somatórios: $\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$
16. Separe o somatório: $\sum_{k=0}^{m}(x_k - y_k)$
17. Mostre que: $\sum_{j=1}^{p}(2j + 3j^2) = 2 \sum_{j=1}^{p} j + 3 \sum_{j=1}^{p} j^2$
18. Combine os somatórios: $\sum_{i=0}^{5} i^2 + \sum_{i=0}^{5} 2i$
19. Separe o somatório: $\sum_{k=1}^{N}(5 - 3k + k^3)$
20. Verifique se a igualdade é verdadeira: $\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i + c_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i + \sum_{i=1}^{n} c_i$

21. Combine: $\sum_{t=1}^{T}(t+1) + \sum_{t=1}^{T}(t-1)$
22. Separe: $\sum_{j=10}^{20}(j^2 + 3j - 4)$
23. Mostre que: $\sum_{k=0}^{m}(c - d_k) = \sum_{k=0}^{m} c - \sum_{k=0}^{m} d_k$
24. Combine: $\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} i^2 + \sum_{i=1}^{n} i^3$
25. **Prove que:**
$$\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$$
26. **Mostre que a associatividade vale para três sequências:**
$$\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i + c_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i + \sum_{i=1}^{n} c_i$$
27. **Demonstre que:**
$$\sum_{i=1}^{n}(a_i - b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} b_i$$
28. **Calcule:**
$$\sum_{i=1}^{2n} i - \sum_{i=1}^{n}(2i)$$

2 Comutatividade

1. Reescreva o somatório invertendo a ordem dos termos: $\sum_{i=0}^{4} f(i)$
2. Mostre que $\sum_{k=1}^{n} k = \sum_{k=1}^{n}(n - k + 1)$
3. Escreva o somatório começando do índice máximo até o mínimo: $\sum_{j=5}^{9} g(j)$
4. Prove que: $\sum_{i=0}^{m} h(i) = \sum_{j=0}^{m} h(m - j)$
5. Reescreva $\sum_{t=2}^{8} p(t)$ de trás para frente.
6. Mostre que a soma dos elementos de um vetor é a mesma, independente da ordem de acesso.
7. Verifique se $\sum_{k=0}^{L}(2k+1) = \sum_{k=0}^{L}(2(L-k)+1)$
8. Prove que $\sum_{i=1}^{10} i^2 = \sum_{j=0}^{9}(10 - j)^2$
9. **Prove que a soma dos elementos de um conjunto finito não depende da ordem:**
$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{n} a_{\sigma(j)}$$
10. **Mostre que:**
$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}$$
11. **Utilize a comutatividade para calcular:**
$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} j$$

3 Combinação de Conjuntos (Propriedade P1)

1. Combine os somatórios: $\sum_{i=1}^{m} a_i + \sum_{i=m+1}^{n} a_i$ (assumindo $1 \leq m < n$)
2. Separe $\sum_{i=1}^{n} a_i$ em $\sum_{i=1}^{k} a_i e \sum_{i=k+1}^{n} a_i$
3. Dado $\sum_{i \in A} x_i + \sum_{i \in B} x_i$, escreva usando união e interseção de conjuntos.
4. Se $A = \{1, 3, 5\}$ e $B = \{2, 3, 4\}$, escreva $\sum_{i \in A} i + \sum_{i \in B} i$ como um único somatório junto com a interseção e calcule o resultado.
5. Combine: $\sum_{k=0}^{r} k^2 + \sum_{k=r+1}^{s} k^2$ (assumindo $0 \leq r < s$)
6. Separe $\sum_{j=0}^{T} j^3$ em dois somatórios com metade dos valores de T cada (assuma T par).
7. Combine $\sum_{t=1}^{10} t + \sum_{t=5}^{20} t$
8. Mostre que $\sum_{i=1}^{m} a_i + \sum_{i=m}^{n} a_i = (\sum_{i=1}^{n} a_i) + a_m$ (para $1 \leq m \leq n$)
9. **Prove que para quaisquer conjuntos de índices I e J:**

$$\sum_{i \in I} a_i + \sum_{i \in J} a_i = \sum_{i \in I \cup J} a_i + \sum_{i \in I \cap J} a_i$$

10. **Mostre que se I e J são disjuntos, então:**

$$\sum_{i \in I} a_i + \sum_{i \in J} a_i = \sum_{i \in I \cup J} a_i$$

11. **Demonstre que:**

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{k} a_i + \sum_{i=k+1}^{n} a_i$$

4 Perturbação (Propriedade P2)

1. Para $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, mostre que $S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$.
2. Para $S_n = \sum_{k=0}^{n} r^k$, use o método da perturbação para encontrar a fórmula fechada (assuma $r \neq 1$).
3. Aplique a perturbação em $S_n = \sum_{k=0}^{n} k \cdot r^k$.
4. Para $S_n = \sum_{i=0}^{n} i^2$, escreva S_{n+1} de duas formas diferentes.
5. Use perturbação para encontrar a soma dos primeiros n números ímpares: $\sum_{k=0}^{n}(2k+1)$.
6. Mostre, usando perturbação, que $\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$.
7. Aplique a técnica de perturbação na soma $S_n = \sum_{k=0}^{n}(a + kd)$ (Progressão Aritmética).
8. **Use o método da perturbação para encontrar a fórmula fechada de:**

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} k^2$$

9. **Utilize perturbação para resolver:**

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} r^k, \quad r \neq 1$$

10. **Aplique perturbação para encontrar:**

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (2k+1) r^k, \quad r \neq 1$$

5 Exercícios Gerais / Mistos

1. Simplifique $\sum_{i=1}^{n}(4i^3 - 6i^2 + 3i - 9)$.
2. Mostre que $\sum_{j=0}^{m}(2j+1) = (m+1)^2$.
3. Encontre a fórmula fechada para $\sum_{k=1}^{n}(3k-1)$.
4. Calcule $\sum_{t=0}^{n}(t^2+t)$ usando as propriedades de somatório.
5. Verifique se $\sum_{i=5}^{10} i = \sum_{j=0}^{5}(j+5)$.
6. Para qual valor de c a igualdade $\sum_{i=1}^{n} c = n \cdot c$ é verdadeira?
7. Mostre que $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$.
8. Use as propriedades para calcular $\sum_{i=1}^{100}(2i+5)$.
9. Encontre o erro na passagem: $\sum_{i=1}^{n}(i+1)^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2 + \sum_{i=1}^{n} 1 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + n$.
10. **Calcule:**

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} (i+j)$$

11. **Prove que:**

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (i-j)^2 = \frac{n^2(n^2-1)}{6}$$

Exercícios de Indução Matemática

1. Prove por indução matemática que a fórmula para a soma dos primeiros n números naturais é verdadeira:
$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

2. Prove por indução matemática que a fórmula para a soma dos quadrados dos primeiros n números naturais é válida:
$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

3. Prove por indução matemática que a fórmula para a soma dos cubos dos primeiros n números naturais é correta:
$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

4. Prove por indução matemática que a seguinte fórmula é verdadeira para todo $n \geq 0$:
$$\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$$

5. Prove por indução matemática que a seguinte identidade é válida para todo $n \geq 1$:
$$\sum_{i=1}^{n} (2i-1) = n^2$$

6. Prove por indução matemática que a seguinte fórmula é verdadeira para todo $n \geq 0$:
$$\sum_{i=0}^{n} i \cdot 2^i = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$$

7. Prove por indução matemática que a seguinte fórmula é verdadeira para todo $n \geq 0$:
$$\sum_{i=0}^{n} (3i+1) = \frac{(n+1)(3n+2)}{2}$$

8. Prove por indução matemática que a seguinte identidade é válida para todo $n \geq 1$:
$$\sum_{i=1}^{n} i(i+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

Exercícios de Análise de Complexidade de Algoritmos

1. **Análise do Algoritmo de Seleção**
   Analise o seguinte algoritmo de ordenação por seleção e determine sua complexidade assintótica em termos do número de comparações:

```
    void selectionSort(int[] arr) {
        int n = arr.length;
        for (int i = 0; i < n-1; i++) {
            int minIndex = i;
            for (int j = i+1; j < n; j++) {
                if (arr[j] < arr[minIndex]) {
                    minIndex = j;
                }
            }
            int temp = arr[minIndex];
            arr[minIndex] = arr[i];
            arr[i] = temp;
        }
    }

```

2. **Análise de Algoritmo com Loop Duplo**
   Analise o seguinte algoritmo e determine sua complexidade assintótica:

```
    void complexAlgorithm(int n) {
        int count = 0;
        for (int i = 1; i <= n; i *= 2) {
            for (int j = 1; j <= i; j++) {
                count++;
            }
        }
    }

```

3. **Análise de Algoritmo com Três Loops Aninhados**
   Analise o seguinte algoritmo e determine sua complexidade assintótica:

```
    void tripleLoop(int n) {
        int count = 0;
        for (int i = 1; i <= n; i++) {
            for (int j = 1; j <= i; j++) {
                for (int k = 1; k <= j; k++) {
                    count++;
                }
            }
        }
    }

```

4. **Análise de Algoritmo com Loop Externo Logarítmico**
   Analise o seguinte algoritmo e determine sua complexidade assintótica:

```
    void logAlgorithm(int n) {
        int count = 0;
        for (int i = n; i > 0; i /= 2) {
            for (int j = 1; j <= n; j++) {
                count++;
            }
        }
```

```
    }

```

5. **Análise de Algoritmo com Loop Dependente de Valor Externo**
   Analise o seguinte algoritmo e determine sua complexidade assintótica:

```
    void complexDependentLoop(int n) {
        int count = 0;
        for (int i = 1; i <= n; i++) {
            for (int j = 1; j <= i*i; j++) {
                if (j % i == 0) {
                    for (int k = 1; k <= j; k++) {
                        count++;
                    }
                }
            }
        }
    }

```

Gabarito - Soluções

Distributividade e Associatividade

1. $\sum_{k=1}^{n} 5 \cdot k = 5 \cdot \sum_{k=1}^{n} k = 5 \cdot \frac{n(n+1)}{2}$
2. $\sum_{i=0}^{m} \frac{1}{2} a_i = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{m} a_i$
3. $\sum_{j=1}^{p} c(x_j + y_j) = c \sum_{j=1}^{p} x_j + c \sum_{j=1}^{p} y_j$ (Verdadeiro pela distributividade)
4. $\sum_{k=3}^{N} \pi \cdot r_k^2 = \pi \sum_{k=3}^{N} r_k^2$
5. $\sum_{i=1}^{10} (3i + 2) = 3 \sum_{i=1}^{10} i + \sum_{i=1}^{10} 2 = 3 \cdot 55 + 20 = 185$
6. $\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{4} = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{n} a_k$
7. $\sum_{i=1}^{m} 7(i^2 - i) = 7 \sum_{i=1}^{m} i^2 - 7 \sum_{i=1}^{m} i$ (Verdadeiro)
8. $\sum_{j=0}^{t} -3 \cdot j = -3 \sum_{j=0}^{t} j$
9. $b \sum_{k=5}^{M} k^3 = \sum_{k=5}^{M} b \cdot k^3$
10. $\sum_{i=1}^{n} (c \cdot d_i) = c \cdot \sum_{i=1}^{n} d_i$ (Verdadeiro)
11. **Prove que para qualquer constante c e qualquer função $f(i)$, vale:**

$$\sum_{i=a}^{b} c \cdot f(i) = c \cdot \sum_{i=a}^{b} f(i)$$

Solução:

$$\sum_{i=a}^{b} c \cdot f(i) = c \cdot f(a) + c \cdot f(a+1) + \ldots + c \cdot f(b) = c \cdot (f(a) + f(a+1) + \ldots + f(b)) = c \cdot \sum_{i=a}^{b} f(i)$$

12. **Mostre que a propriedade distributiva também se aplica a somatórios duplos:**

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c \cdot a_{ij} = c \cdot \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij}$$

Solução:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c \cdot a_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \left(c \cdot \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \right) = c \cdot \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij}$$

13. **Verifique se a seguinte igualdade é verdadeira, justificando:**

$$\sum_{i=1}^{n} (c_i \cdot d_i) = \left(\sum_{i=1}^{n} c_i \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} d_i \right)$$

Solução:
A igualdade é falsa. Contraexemplo: seja $n = 2, c_1 = 1, c_2 = 2, d_1 = 3, d_2 = 4$.
Lado esquerdo: $1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 3 + 8 = 11$
Lado direito: $(1 + 2) \cdot (3 + 4) = 3 \cdot 7 = 21$
Portanto, não são iguais.

14. **Utilize a propriedade distributiva para calcular:**

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2i}{n(n+1)}\right)$$

Solução:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2i}{n(n+1)}\right)=\frac{2}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n}i=\frac{2}{n(n+1)}\cdot\frac{n(n+1)}{2}=1$$

15. $\sum_{i=1}^{n} a_i+\sum_{i=1}^{n} b_i=\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)$

16. $\sum_{k=0}^{m}(x_k-y_k)=\sum_{k=0}^{m} x_k-\sum_{k=0}^{m} y_k$

17. $\sum_{j=1}^{p}(2j+3j^2)=2\sum_{j=1}^{p} j+3\sum_{j=1}^{p} j^2$ (Verdadeiro)

18. $\sum_{i=0}^{5} i^2+\sum_{i=0}^{5} 2i=\sum_{i=0}^{5}(i^2+2i)$

19. $\sum_{k=1}^{N}(5-3k+k^3)=\sum_{k=1}^{N} 5-3\sum_{k=1}^{N} k+\sum_{k=1}^{N} k^3$

20. $\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i+c_i)=\sum_{i=1}^{n} a_i+\sum_{i=1}^{n} b_i+\sum_{i=1}^{n} c_i$ (Verdadeiro)

21. $\sum_{t=1}^{T}(t+1)+\sum_{t=1}^{T}(t-1)=\sum_{t=1}^{T}[(t+1)+(t-1)]=\sum_{t=1}^{T} 2t$

22. $\sum_{j=10}^{20}(j^2+3j-4)=\sum_{j=10}^{20} j^2+3\sum_{j=10}^{20} j-\sum_{j=10}^{20} 4$

23. $\sum_{k=0}^{m}(c-d_k)=\sum_{k=0}^{m} c-\sum_{k=0}^{m} d_k$ (Verdadeiro)

24. $\sum_{i=1}^{n} i+\sum_{i=1}^{n} i^2+\sum_{i=1}^{n} i^3=\sum_{i=1}^{n}(i+i^2+i^3)$

25. **Prove que:**

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)=\sum_{i=1}^{n} a_i+\sum_{i=1}^{n} b_i$$

Solução:

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)=(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+\ldots+(a_n+b_n)=(a_1+a_2+\ldots+a_n)+(b_1+b_2+\ldots+b_n)=\sum_{i=1}^{n} a_i+\sum_{i=1}^{n} b_i$$

26. **Mostre que a associatividade vale para três sequências:**

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i+c_i)=\sum_{i=1}^{n} a_i+\sum_{i=1}^{n} b_i+\sum_{i=1}^{n} c_i$$

Solução:
Similar à solução anterior, agrupando as três sequências.

27. **Demonstre que:**

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i-b_i)=\sum_{i=1}^{n} a_i-\sum_{i=1}^{n} b_i$$

Solução:

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i-b_i)=\sum_{i=1}^{n} a_i+\sum_{i=1}^{n}(-b_i)=\sum_{i=1}^{n} a_i-\sum_{i=1}^{n} b_i$$

28. **Calcule:**

$$\sum_{i=1}^{2n} i - \sum_{i=1}^{n}(2i)$$

Solução:

$$\sum_{i=1}^{2n} i - \sum_{i=1}^{n}(2i) = \sum_{i=1}^{2n} i - 2\sum_{i=1}^{n} i = \frac{2n(2n+1)}{2} - 2\cdot\frac{n(n+1)}{2} = n(2n+1) - n(n+1) = n^2$$

Comutatividade

1. $\sum_{i=0}^{4} f(i) = f(0)+f(1)+f(2)+f(3)+f(4) = f(4)+f(3)+f(2)+f(1)+f(0)$
2. $\sum_{k=1}^{n} k = \sum_{k=1}^{n}(n-k+1)$ (Verdadeiro, é uma reordenação)
3. $\sum_{j=5}^{9} g(j) = g(5)+g(6)+g(7)+g(8)+g(9) = g(9)+g(8)+g(7)+g(6)+g(5)$
4. $\sum_{i=0}^{m} h(i) = \sum_{j=0}^{m} h(m-j)$ (Verdadeiro, índice reverso)
5. $\sum_{t=2}^{8} p(t) = p(2)+p(3)+\cdots+p(8) = p(8)+p(7)+\cdots+p(2)$
6. A soma é a mesma pois a adição é comutativa
7. $\sum_{k=0}^{L}(2k+1) = \sum_{k=0}^{L}(2(L-k)+1)$ (Verdadeiro, mesma soma em ordem reversa)
8. $\sum_{i=1}^{10} i^2 = \sum_{j=0}^{9}(10-j)^2$ (Verdadeiro, mudança de índice)
9. **Prove que a soma dos elementos de um conjunto finito não depende da ordem:**

   $$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{n} a_{\sigma(j)}$$

   Solução:
   A adição é comutativa, então a ordem dos termos não altera a soma. Qualquer permutação dos índices não altera o conjunto de termos, apenas a ordem.

10. **Mostre que:**

    $$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}$$

    Solução:
    Ambos os lados representam a soma de todos os a_{ij} para $i = 1, \ldots, n$ e $j = 1, \ldots, m$. A ordem da soma não altera o resultado.

11. **Utilize a comutatividade para calcular:**

    $$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} j$$

    Solução:

    $$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} j = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n} j = \sum_{j=1}^{n} j\cdot(n-j+1) = \sum_{j=1}^{n}(nj - j^2 + j)$$

    $$= n\sum_{j=1}^{n} j - \sum_{j=1}^{n} j^2 + \sum_{j=1}^{n} j = n\cdot\frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}$$

    $$= \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

Combinação de Conjuntos

1. $\sum_{i=1}^{m} a_i + \sum_{i=m+1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i$
2. $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{k} a_i + \sum_{i=k+1}^{n} a_i$
3. $\sum_{i\in A} x_i + \sum_{i\in B} x_i = \sum_{i\in A\cup B} x_i + \sum_{i\in A\cap B} x_i$
4. $\sum_{i\in A} i + \sum_{i\in B} i = (1+3+5)+(2+3+4) = 18 = \sum_{i\in A\cup B} i + \sum_{i\in A\cap B} i = (1+2+3+4+5)+3 = 15+3 = 18$
5. $\sum_{k=0}^{r} k^2 + \sum_{k=r+1}^{s} k^2 = \sum_{k=0}^{s} k^2$
6. $\sum_{j=0}^{T} j^3 = \sum_{j=0}^{T/2} j^3 + \sum_{j=T/2+1}^{T} j^3$
7. $\sum_{t=1}^{10} t + \sum_{t=5}^{20} t = \sum_{t=1}^{20} t + \sum_{t=5}^{10} t$
8. $\sum_{i=1}^{m} a_i + \sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i + a_m$ (Verdadeiro, elemento a_m é contado duas vezes)
9. **Prove que para quaisquer conjuntos de índices I e J:**

$$\sum_{i\in I} a_i + \sum_{i\in J} a_i = \sum_{i\in I\cup J} a_i + \sum_{i\in I\cap J} a_i$$

Solução:
A soma sobre I e J deve contar os elementos da interseção duas vezes. Portanto, para obter a soma sobre $I \cup J$, unimos as duas somas e somamos com a interseção.

10. **Mostre que se I e J são disjuntos, então:**

$$\sum_{i\in I} a_i + \sum_{i\in J} a_i = \sum_{i\in I\cup J} a_i$$

Solução:
Se I e J são disjuntos, então $I \cap J = \varnothing$, e a soma sobre o conjunto vazio é 0.

11. **Demonstre que:**

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{k} a_i + \sum_{i=k+1}^{n} a_i$$

Solução:
Os conjuntos {1,2,...,k} e {k+1,...,n} são disjuntos e sua união é {1,2,...,n}.

Perturbação

1. Para $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, mostre que $S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$.

Por definição de somatório:

$$S_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} a_k = a_0 + a_1 + \cdots + a_n + a_{n+1}$$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$$

Portanto:

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$$

2. Para $S_n = \sum_{k=0}^{n} r^k$, use o método da perturbação para encontrar a fórmula fechada (assuma $r \neq 1$).

   Aplicando a propriedade P2:

$$S_{n+1} = S_n + r^{n+1} = r^0 + \sum_{k=0}^{n} r^{k+1} = 1 + \sum_{k=0}^{n} r^{k+1}$$

$$S_n + r^{n+1} = 1 + r\sum_{k=0}^{n} r^k = 1 + rS_n$$

   Reorganizando:

$$S_n - rS_n = 1 - r^{n+1}$$

$$S_n(1-r) = 1 - r^{n+1}$$

$$S_n = \frac{1 - r^{n+1}}{1-r}$$

3. Aplique a perturbação em $S_n = \sum_{k=0}^{n} k \cdot r^k$.

   Aplicando a propriedade P2:

$$S_{n+1} = S_n + (n+1)r^{n+1} = (0 \cdot r^0) + \sum_{k=0}^{n}(k+1)r^{k+1}$$

$$S_n + (n+1)r^{n+1} = r\sum_{k=0}^{n}(k+1)r^k = r\left(\sum_{k=0}^{n} kr^k + \sum_{k=0}^{n} r^k\right)$$

$$S_n + (n+1)r^{n+1} = r(S_n + T_n) \quad \text{onde } T_n = \sum_{k=0}^{n} r^k$$

$$S_n + (n+1)r^{n+1} = rS_n + rT_n$$

$$S_n - rS_n = rT_n - (n+1)r^{n+1}$$

$$S_n(1-r) = r \cdot \frac{1 - r^{n+1}}{1-r} - (n+1)r^{n+1}$$

$$S_n = \frac{r(1 - r^{n+1})}{(1-r)^2} - \frac{(n+1)r^{n+1}}{1-r}$$

4. Para $S_n = \sum_{i=0}^{n} i^2$, escreva S_{n+1} de duas formas diferentes.

   Primeira forma (definição):

$$S_{n+1} = \sum_{i=0}^{n+1} i^2 = 0^2 + 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 = S_n + (n+1)^2$$

   Segunda forma (perturbação):

$$S_{n+1} = \sum_{i=0}^{n+1} i^2 = 0 + \sum_{i=1}^{n+1} i^2 = \sum_{j=0}^{n}(j+1)^2$$

$$= \sum_{j=0}^{n}(j^2 + 2j + 1) = \sum_{j=0}^{n} j^2 + 2\sum_{j=0}^{n} j + \sum_{j=0}^{n} 1$$

$$= S_n + n(n+1) + (n+1)$$

5. Use perturbação para encontrar a soma dos primeiros n números ímpares: $\sum_{k=0}^{n}(2k+1)$.

   Aplicando a propriedade P2:

$$S_{n+1} = S_n + [2(n+1)+1] = 1 + \sum_{k=0}^{n}[2(k+1)+1]$$

$$S_n + (2n+3) = 1 + \sum_{k=0}^{n}(2k+3)$$

$$= 1 + 2\sum_{k=0}^{n} k + 3\sum_{k=0}^{n} 1 = 1 + n(n+1) + 3(n+1)$$

$$S_n = 1 + n(n+1) + 3(n+1) - (2n+3)$$

$$= n^2 + n + 3n + 3 + 1 - 2n - 3 = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

6. Mostre, usando perturbação, que $\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$.

   Aplicando a propriedade P2:

$$S_{n+1} = S_n + 2^{n+1} = 1 + \sum_{k=0}^{n} 2^{k+1}$$

$$S_n + 2^{n+1} = 1 + 2\sum_{k=0}^{n} 2^k = 1 + 2S_n$$

$$S_n - 2S_n = 1 - 2^{n+1}$$

$$-S_n = 1 - 2^{n+1}$$

$$S_n = 2^{n+1} - 1$$

7. Aplique a técnica de perturbação na soma $S_n = \sum_{k=0}^{n}(a+kd)$ (Progressão Aritmética).

   Aplicando a propriedade P2:

$$S_{n+1} = S_n + [a + (n+1)d] = a + \sum_{k=0}^{n}[a + (k+1)d]$$

$$S_n + a + (n+1)d = a + \sum_{k=0}^{n}(a + d + kd)$$

$$= a + (n+1)(a+d) + d\sum_{k=0}^{n} k$$

$$= a + (n+1)(a+d) + d \cdot \frac{n(n+1)}{2}$$

   Resolvendo para S_n, obtemos:

$$S_n = \frac{(n+1)(2a+nd)}{2}$$

8. Use o método da perturbação para encontrar a fórmula fechada de:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} k^2$$

Aplicando a propriedade P2:

$$S_{n+1} = S_n + (n+1)^2 = 0 + \sum_{k=0}^{n} (k+1)^2$$

$$S_n + (n+1)^2 = \sum_{k=0}^{n} (k^2 + 2k + 1) = S_n + 2\sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} 1$$

$$(n+1)^2 = n(n+1) + (n+1)$$

Esta identidade é verdadeira, mas não nos dá S_n diretamente.

Para encontrar S_n, usamos a perturbação na soma de cubos:

$$T_n = \sum_{k=0}^{n} k^3$$

$$T_{n+1} = T_n + (n+1)^3 = 0 + \sum_{k=0}^{n} (k+1)^3$$

$$T_n + (n+1)^3 = \sum_{k=0}^{n} (k^3 + 3k^2 + 3k + 1) = T_n + 3S_n + \frac{3n(n+1)}{2} + (n+1)$$

$$(n+1)^3 = 3S_n + \frac{3n(n+1)}{2} + (n+1)$$

Resolvendo para S_n:

$$3S_n = (n+1)^3 - (n+1) - \frac{3n(n+1)}{2}$$

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

9. Utilize perturbação para resolver:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} r^k, \quad r \neq 1$$

Aplicando a propriedade P2:

$$S_{n+1} = S_n + r^{n+1} = 1 + \sum_{k=0}^{n} r^{k+1}$$

$$S_n + r^{n+1} = 1 + r\sum_{k=0}^{n} r^k = 1 + rS_n$$

$$S_n - rS_n = 1 - r^{n+1}$$

$$S_n(1-r) = 1 - r^{n+1}$$

$$S_n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

10. Aplique perturbação para encontrar:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (2k+1)r^k, \quad r \neq 1$$

Aplicando a propriedade P2:

$$S_{n+1} = S_n + [2(n+1)+1]r^{n+1} = 1 + \sum_{k=0}^{n} [2(k+1)+1]r^{k+1}$$

$$S_n + (2n+3)r^{n+1} = 1 + r\sum_{k=0}^{n} (2k+3)r^k$$

$$= 1 + r\left(2\sum_{k=0}^{n} kr^k + 3\sum_{k=0}^{n} r^k\right)$$

$$= 1 + r(2A_n + 3B_n) \quad \text{onde } A_n = \sum_{k=0}^{n} kr^k, \quad B_n = \sum_{k=0}^{n} r^k$$

Resolvendo o sistema de equações, obtemos:

$$S_n = \frac{r(1-r^{n+1})}{(1-r)^2} + \frac{1-r^{n+1}}{1-r} - \frac{(2n+3)r^{n+1}}{1-r}$$

Exercícios Gerais

1. $\sum_{i=1}^{n}(4i^3 - 6i^2 + 3i - 9) = 4\sum i^3 - 6\sum i^2 + 3\sum i - \sum 9$
2. $\sum_{j=0}^{m}(2j+1) = 2\sum j + \sum 1 = 2\frac{m(m+1)}{2} + (m+1) = (m+1)^2$
3. $\sum_{k=1}^{n}(3k-1) = 3\sum k - \sum 1 = 3\frac{n(n+1)}{2} - n$
4. $\sum_{t=0}^{n}(t^2+t) = \sum t^2 + \sum t = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}$
5. $\sum_{i=5}^{10} i = \sum_{j=0}^{5}(j+5)$ (Verdadeiro, mudança de índice)
6. A igualdade é verdadeira para qualquer c constante
7. $\sum_{i=1}^{100}(2i+5) = 2\sum i + \sum 5 = 2 \cdot \frac{100 \cdot 101}{2} + 500 = 10100 + 500 = 10600$
8. $\sum_{j=1}^{n}(a_j - a_{j-1}) = a_n - a_0$ (Verdadeiro, soma telescópica)
9. O erro está em assumir que $(i+1)^2 = i^2 + 1$, o correto é $(i+1)^2 = i^2 + 2i + 1$
10. **Calcule:**

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}(i+j)$$

Solução:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}(i+j) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i} i + \sum_{j=1}^{i} j\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(i^2 + \frac{i(i+1)}{2}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{3}{2}i^2 + \frac{1}{2}i\right)$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{4} + \frac{n(n+1)}{4} = \frac{n(n+1)(n+1)}{2}$$

11. **Prove que:**

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(i-j)^2 = \frac{n^2(n^2-1)}{6}$$

Solução:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(i-j)^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(i^2-2ij+j^2) = n\sum i^2 - 2\left(\sum i\right)^2 + n\sum j^2$$

$$= 2n\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 2\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \frac{n^2(n^2-1)}{6}$$

Soluções dos Exercícios de Indução

1. **Prove por indução matemática que a fórmula para a soma dos primeiros n números naturais é verdadeira:**

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Solução:

Base de indução (n=1):

$$\sum_{i=1}^{1} i = 1 = \frac{1(1+1)}{2} = 1$$

Hipótese de indução: Suponha que a fórmula é válida para $n = k$, ou seja:

$$\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}$$

Passo indutivo: Vamos provar para $n = k + 1$:

$$\sum_{i=1}^{k+1} i = \sum_{i=1}^{k} i + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Portanto, a fórmula é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

2. **Prove por indução matemática que a fórmula para a soma dos quadrados dos primeiros n números naturais é válida:**

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Solução:

Base de indução (n=1):

$$\sum_{i=1}^{1} i^2 = 1 = \frac{1(1+1)(2 \cdot 1+1)}{6} = 1$$

Hipótese de indução: Suponha que a fórmula é válida para $n = k$:

$$\sum_{i=1}^{k} i^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

Passo indutivo: Vamos provar para $n = k + 1$:

$$\sum_{i=1}^{k+1} i^2 = \sum_{i=1}^{k} i^2 + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2$$

$$= \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6} = \frac{(k+1)[k(2k+1) + 6(k+1)]}{6}$$

$$= \frac{(k+1)(2k^2+k+6k+6)}{6} = \frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6}$$
$$= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

Portanto, a fórmula é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

3. **Prove por indução matemática que a fórmula para a soma dos cubos dos primeiros n números naturais é correta:**

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

Solução:

Base de indução (n=1):

$$\sum_{i=1}^{1} i^3 = 1 = \left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^2 = 1$$

Hipótese de indução: Suponha que a fórmula é válida para $n = k$:

$$\sum_{i=1}^{k} i^3 = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2$$

Passo indutivo: Vamos provar para $n = k+1$:

$$\sum_{i=1}^{k+1} i^3 = \sum_{i=1}^{k} i^3 + (k+1)^3 = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 + (k+1)^3$$
$$= \frac{k^2(k+1)^2 + 4(k+1)^3}{4} = \frac{(k+1)^2(k^2+4k+4)}{4}$$
$$= \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} = \left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2$$

Portanto, a fórmula é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

4. **Prove por indução matemática que a seguinte fórmula é verdadeira para todo $n \geq 0$:**

$$\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$$

Solução:

Base de indução (n=0):

$$\sum_{i=0}^{0} 2^i = 1 = 2^{0+1} - 1 = 1$$

Hipótese de indução: Suponha que a fórmula é válida para $n = k$:

$$\sum_{i=0}^{k} 2^i = 2^{k+1} - 1$$

Passo indutivo: Vamos provar para $n = k + 1$:

$$\sum_{i=0}^{k+1} 2^i = \sum_{i=0}^{k} 2^i + 2^{k+1} = (2^{k+1} - 1) + 2^{k+1} = 2 \cdot 2^{k+1} - 1 = 2^{k+2} - 1$$

Portanto, a fórmula é válida para todo $n \geq 0$.

5. **Prove por indução matemática que a seguinte identidade é válida para todo $n \geq 1$:**

$$\sum_{i=1}^{n} (2i - 1) = n^2$$

Solução:

Base de indução (n=1):

$$\sum_{i=1}^{1} (2i - 1) = 1 = 1^2$$

Hipótese de indução: Suponha que a fórmula é válida para $n = k$:

$$\sum_{i=1}^{k} (2i - 1) = k^2$$

Passo indutivo: Vamos provar para $n = k + 1$:

$$\sum_{i=1}^{k+1} (2i - 1) = \sum_{i=1}^{k} (2i - 1) + [2(k + 1) - 1] = k^2 + (2k + 1) = (k + 1)^2$$

Portanto, a fórmula é válida para todo $n \geq 1$.

6. **Prove por indução matemática que a seguinte fórmula é verdadeira para todo $n \geq 0$:**

$$\sum_{i=0}^{n} i \cdot 2^i = (n - 1) \cdot 2^{n+1} + 2$$

Solução:

Base de indução (n=0):

$$\sum_{i=0}^{0} i \cdot 2^i = 0 = (0 - 1) \cdot 2^{0+1} + 2 = -2 + 2 = 0$$

Hipótese de indução: Suponha que a fórmula é válida para $n = k$:

$$\sum_{i=0}^{k} i \cdot 2^i = (k - 1) \cdot 2^{k+1} + 2$$

Passo indutivo: Vamos provar para $n = k + 1$:

$$\sum_{i=0}^{k+1} i \cdot 2^i = \sum_{i=0}^{k} i \cdot 2^i + (k + 1) \cdot 2^{k+1}$$

$$= [(k - 1) \cdot 2^{k+1} + 2] + (k + 1) \cdot 2^{k+1} = 2^{k+1}[(k - 1) + (k + 1)] + 2$$
$$= 2^{k+1} \cdot 2k + 2 = k \cdot 2^{k+2} + 2 = [(k + 1) - 1] \cdot 2^{(k+1)+1} + 2$$

Portanto, a fórmula é válida para todo $n \geq 0$.

7. **Prove por indução matemática que a seguinte fórmula é verdadeira para todo $n \geq 0$:**

$$\sum_{i=0}^{n}(3i+1) = \frac{(n+1)(3n+2)}{2}$$

Solução:

Base de indução (n=0):

$$\sum_{i=0}^{0}(3i+1) = 1 = \frac{(0+1)(3\cdot 0+2)}{2} = 1$$

Hipótese de indução: Suponha que a fórmula é válida para $n = k$:

$$\sum_{i=0}^{k}(3i+1) = \frac{(k+1)(3k+2)}{2}$$

Passo indutivo: Vamos provar para $n = k+1$:

$$\sum_{i=0}^{k+1}(3i+1) = \sum_{i=0}^{k}(3i+1) + [3(k+1)+1]$$

$$= \frac{(k+1)(3k+2)}{2} + (3k+4) = \frac{(k+1)(3k+2)+2(3k+4)}{2}$$
$$= \frac{3k^2+2k+3k+2+6k+8}{2} = \frac{3k^2+11k+10}{2}$$
$$= \frac{(k+2)(3k+5)}{2} = \frac{((k+1)+1)(3(k+1)+2)}{2}$$

Portanto, a fórmula é válida para todo $n \geq 0$.

8. **Prove por indução matemática que a seguinte identidade é válida para todo $n \geq 1$:**

$$\sum_{i=1}^{n} i(i+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

Solução:

Base de indução (n=1):

$$\sum_{i=1}^{1} i(i+1) = 2 = \frac{1(1+1)(1+2)}{3} = 2$$

Hipótese de indução: Suponha que a fórmula é válida para $n = k$:

$$\sum_{i=1}^{k} i(i+1) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3}$$

Passo indutivo: Vamos provar para $n = k+1$:

$$\sum_{i=1}^{k+1} i(i+1) = \sum_{i=1}^{k} i(i+1) + (k+1)(k+2)$$

$$= \frac{k(k+1)(k+2)}{3} + (k+1)(k+2) = (k+1)(k+2)\left(\frac{k}{3} + 1\right)$$
$$= (k+1)(k+2)\left(\frac{k+3}{3}\right) = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$$

Portanto, a fórmula é válida para todo $n \geq 1$.

Soluções Exercícios de Complexidade de Algoritmos

1. **Solução do Exercício 1**
   O algoritmo de seleção possui dois loops aninhados. O loop externo executa $n-1$ vezes.
   O loop interno executa $n-i-1$ vezes na iteração i.
   O número total de comparações é dado por:

   $$\sum_{i=0}^{n-2}(n-i-1) = \sum_{j=1}^{n-1} j = \frac{(n-1)n}{2} = \Theta(n^2)$$

   Portanto, a complexidade é $\Theta(n^2)$.

2. **Solução do Exercício 2**
   O loop externo executa $\lfloor \log_2 n \rfloor + 1$ vezes. O loop interno executa i vezes na iteração i.
   O número total de operações é dado por:

   $$\sum_{k=0}^{\lfloor \log_2 n \rfloor} 2^k = 2^{\lfloor \log_2 n \rfloor + 1} - 1 = \Theta(n)$$

   Portanto, a complexidade é $\Theta(n)$.

3. **Solução do Exercício 3**
   O número total de operações é dado pelo somatório triplo:

   $$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\sum_{k=1}^{j} 1 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} j = \sum_{i=1}^{n} \frac{i(i+1)}{2} = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} i^2 + \sum_{i=1}^{n} i\right)$$
   $$= \frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}\right) = \Theta(n^3)$$

   Portanto, a complexidade é $\Theta(n^3)$.

4. **Solução do Exercício 4**
   O loop externo executa $\lfloor \log_2 n \rfloor + 1$ vezes. O loop interno executa n vezes em cada iteração.
   O número total de operações é dado por:

   $$(\lfloor \log_2 n \rfloor + 1) \cdot n = \Theta(n \log n)$$

   Portanto, a complexidade é $\Theta(n \log n)$.

5. **Solução do Exercício 5**
   O loop mais interno só é executado quando j é múltiplo de i. Para cada i, j varia de 1 a i^2, mas apenas para $j = i, 2i, 3i, \ldots, i^2$ o loop interno é executado.
   Para cada i, há i valores de j que são múltiplos de i. Para cada um desses j, o loop interno executa j vezes.
   O número total de operações é dado por:

   $$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{i}(k \cdot i) = \sum_{i=1}^{n} i \sum_{k=1}^{i} k = \sum_{i=1}^{n} i \cdot \frac{i(i+1)}{2} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(i^3 + i^2) = \Theta(n^4)$$

   Portanto, a complexidade é $\Theta(n^4)$.