

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO

YURI LAIO TEIXEIRA VERAS SILVA

UMA META-HEURÍSTICA PARA UMA CLASSE DE
PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO DE CARTEIRAS DE
INVESTIMENTOS

JOÃO PESSOA
2017

YURI LAIO TEIXEIRA VERAS SILVA

**UMA META-HEURÍSTICA PARA UMA CLASSE DE PROBLEMAS DE
OTIMIZAÇÃO DE CARTEIRAS DE INVESTIMENTOS**

Dissertação apresentada e aprovada, em 16 fevereiro de 2017, como requisito à obtenção do grau de Mestre em Engenharia de Produção do Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção da Universidade Federal da Paraíba

Orientador: Prof. Dr. Anand Subramanian

**JOÃO PESSOA
2017**

S586u Silva, Yuri Laio Teixeira Veras.
Uma meta-heurística para uma classe de problemas de
otimização de carteiras de investimentos / Yuri Laio Teixeira
Veras Silva.- João Pessoa, 2017.
93f. : il.
Orientador: Anand Subramanian
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CT
1. Engenharia de produção. 2. Problema de seleção.
3. Carteiras de investimentos. 4. Otimização multiobjetivo.
5. Particle Swarm Optimization. 6. Média-variância.

UFPB/BC

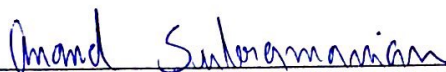
CDU: 62:658.5(043)

YURI LAIO TEIXEIRA VERAS SILVA

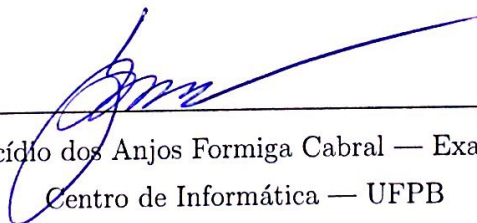
**UMA META-HEURÍSTICA PARA UMA CLASSE DE PROBLEMAS DE
OTIMIZAÇÃO DE CARTEIRAS DE INVESTIMENTOS**

Dissertação apresentada e aprovada, em 16 de fevereiro de 2017, como requisito à obtenção do grau de Mestre em Engenharia de Produção do Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção da Universidade Federal da Paraíba, pela comissão formada pelos seguintes membros.

BANCA EXAMINADORA



Prof. D.Sc. Anand Subramanian — Orientador
Departamento de Engenharia de Produção — UFPB



Prof. D.Sc. Lucídio dos Anjos Formiga Cabral — Examinador Interno
Centro de Informática — UFPB

Prof. D.Sc. Artur Alves Pessoa — Examinador Externo
Departamento de Engenharia de Produção — UFF

Resumo

O problema de seleção de carteiras de investimentos (PSP) consiste na alocação de recursos a um número finito de ativos, objetivando, em sua abordagem clássica, superar um *trade-off* entre o retorno esperado e o risco da carteira. Tal problema é uma das temáticas mais importantes voltadas a questões financeiras e econômicas da atualidade. Desde os pioneiros trabalhos de Markowitz, o assunto é tratado como um problema de otimização com esses dois objetivos citados. Entretanto, nos últimos anos, diversas restrições e mensurações de riscos adicionais foram consideradas na literatura, como, por exemplo, restrições de cardinalidade, de lote mínimo de transação e de pré-seleção de ativos. Tal prática visa aproximar o problema da realidade encontrada nos mercados financeiros. Neste contexto, o presente trabalho propõe uma meta-heurística denominada *Adaptive Non-dominated Sorting Multiobjective Particle Swarm Optimization* para a otimização de vários problemas envolvendo PSP, de modo que permita a resolução do problema considerando um conjunto de restrições escolhidas pelo investidor.

Palavras-chave: Problema de Seleção de Carteiras de Investimentos. Otimização Multiobjetivo. Particle Swarm Optimization. Média-variância.

Abstract

The problem in investment portfolio selection consists in the allocation of resources to a finite number of assets, aiming, in its classic approach, to overcome a trade-off between the risk and expected return of the portfolio. This problem is one of the most important topics targeted at today's financial and economic issues. Since the pioneering works of Markowitz, the issue is treated as an optimisation problem with the two aforementioned objectives. However, in recent years, various restrictions and additional risk measurements were identified in the literature, such as, for example, cardinality restrictions, minimum transaction lot and asset pre-selection. This practice aims to bring the issue closer to the reality encountered in financial markets. In that regard, this paper proposes a metaheuristic called Particle Swarm for the optimisation of several PSPs, in such a way that allows the resolution of the problem considering a set of restrictions chosen by the investor.

Keywords: Portfolio Selection Problem. Multiobjective Optimization. Particle Swarm Optimizaiton. Mean-variance.

Sumário

Glossário	vii
Glossário	viii
Lista de Figuras	ix
Lista de Tabelas	x
1 Introdução	1
1.1 Definição do Tema	1
1.2 Justificativa	2
1.3 Objetivos	3
1.3.1 Objetivo Geral	3
1.3.2 Objetivos Específicos	4
1.4 Estrutura do Trabalho	4
2 Revisão da Literatura	5
2.1 Problema de Seleção de Carteiras	5
2.1.1 Otimização Multiobjetivo	6
2.1.2 Otimização Média-Variância	7
2.1.3 Otimização de Carteiras de Investimento com Restrições	8
2.1.3.1 Restrições de Piso e Teto de Proporção de Investimento	9
2.1.3.2 Restrições de Cardinalidade	9
2.1.3.3 Restrições de Lote Mínimo de Transação	10

2.1.3.4	Pré-Seleção de Ativos	11
2.1.3.5	Outras Restrições	11
2.1.4	Mensuração de Riscos	12
2.2	Trabalhos Relacionados	13
3	Aspectos Metodológicos	23
3.1	Problemas Abordados	23
3.2	<i>Adaptive Non-dominated Sorting Multiobjective Particle Swarm Optimization</i>	24
3.2.1	Inicialização	27
3.2.2	Avaliação	27
3.2.3	<i>Adaptive Non-dominated Sorting Crowding Distance</i>	28
3.2.3.1	Seleção de Melhor Posição Local e Global	31
3.2.4	Mutação	32
3.2.5	Mecanismos de Viabilização	33
4	Resultados Computacionais	36
4.1	Instâncias	36
4.2	Parâmetros e Avaliação das Soluções	37
4.3	Métricas de Desempenho	37
4.3.1	<i>Spacing</i> (S)	37
4.3.2	<i>Generational Distance</i> (GD)	38
4.3.3	<i>Diversity Metric</i> (Δ)	39
4.3.4	<i>Hypervolume</i> (HV)	40
4.3.5	<i>Error Ratio</i> (Er)	40
4.3.6	<i>Convergence Metric</i> (C)	41
4.3.7	Outras Métricas	42
4.4	UPSP	44
4.4.1	Comparação dos Resultados	44

4.5	CCPSP	46
4.5.1	Formulação do Problema	46
4.5.2	Comparação dos Resultados	46
4.5.3	Comparação entre MOPSO e ANSMOPSO	52
4.6	CDPSP	54
4.6.1	Formulação do Problema	54
4.6.2	Comparação dos Resultados	55
4.7	CDS-PSP	57
4.7.1	Formulação do Problema	57
4.7.2	Comparação dos Resultados	57
4.8	CCLS-PSP	58
4.8.1	Formulação do Problema	58
4.8.2	Comparação dos Resultados	59
5	Considerações Finais e Trabalhos Futuros	62
	Referências	64
	Apêndice A	72

Glossário

ACO	: <i>Ant Colony Optimization</i>
B&B	: <i>Branch-and-Bound</i>
CCPSP	: <i>Cardinality Constrained Portfolio Selection Problem</i>
CSND	: Conjunto de Soluções Não-Dominadas
CVaR	: <i>Conditional Value-at-Risk</i>
DE	: <i>Differential Evolution</i>
DEA	: Análise Envoltória de Dados
e-MOEA	: <i>Envelope-based Multi-objective Evolutionary Algorithm</i>
FSGA	: <i>Fuzzy Simulation based Genetic Algorithm</i>
GA	: Algoritmo Genético
GARCH	: <i>Generalized AutoRegressive Conditinal Heteroscedasticity</i>
GD	: <i>Generational Distance</i>
GLS	: <i>Greedy Local Search</i>
GRASP	: <i>Greedy Randomized Adaptive Search Procedure</i>
HC	: <i>Hill Climbing</i>
HGA	: Algoritmo Genético Híbrido
HS	: <i>Harmony Search</i>
ILS	: <i>Iterated Local Search</i>
LS	: Busca Local
MABC	: <i>Modified Artificial Bee Colony Algorithm</i>
MAD	: Desvio Médio Absoluto
MOBFO	: <i>Multiobjective Bacteria Foraging Optimization</i>
MOEA	: <i>Multiobjective Evolutionary Algorithm</i>
MOGLSA	: <i>Multi Objective Genetic Local Search Algorithm</i>
MOMA	: Algoritmo Memético Multiobjetivo
MV	: Média-variancia
NN	: Redes Neurais
NPGA	: <i>Niched Pareto Genetic Algorithm</i>
NSGA	: <i>Non-dominated Sorting Genetic Algorithm</i>

Glossário

MOPSO	:	<i>Multiobjective Particle Swarm Optimization</i>
MOSSwA	:	<i>Multiobjective Scatter Search with External Archive</i>
MODEwAwL	:	<i>Learning-guided Multiobjective Evolutionary Algorithm</i>
PAES	:	<i>Pareto-Archived Evolution Strategy</i>
PBIL	:	<i>Population Based Incremental Learning</i>
PESA	:	<i>Pareto Envelope-based Selection Algorithm</i>
PHNN	:	<i>Particle Swarm Optimization Hopfield Neural Network</i>
PQIM	:	Problema Quadrático Inteiro Misto
PSO	:	<i>Particle Swarm Optimization</i>
PSP	:	<i>Portfolio Selection Problem</i>
RVND	:	<i>Random Variable Neighborhood Descent</i>
S	:	<i>Spacing</i>
SA	:	<i>Simulated Annealing</i>
SPEA	:	<i>Strength Pareto Evolutionary Algorithm</i>
SOEA	:	<i>Single Objective Evolutionary Algorithm</i>
TS	:	Busca Tabu
VaR	:	<i>Value-at-Risk</i>

Lista de Figuras

3.1	Mecanismo <i>Non-dominated Sorting</i>	29
3.2	Procedimento de Ranqueamento das Soluções	30
3.3	Mecanismo <i>Crowding Distance</i>	31
3.4	Mecanismo de Custo Benefício	32
4.1	Métrica <i>Generational Distance</i>	38
4.2	Métrica <i>Diversity</i>	39
4.3	Métrica <i>Hypervolume</i>	41
4.4	Comparação das fronteiras de GA, NN e ANSMOPSO - CCPSP - Nikkei 225	51
4.5	Desempenho de MOPSO e ANSMOPSO em S, Δ e GD para Nikkei 225 . .	53
4.6	Desempenho de MOPSO e ANSMOPSO em S, Δ e GD para Nikkei 225 . .	54
4.7	Comparação dos resultados obtidos na instância S&P 100 para o CCLS-PSP	61
A.1	Comparação das fronteiras obtidas para o CCPSP - HANG SENG	72
A.2	Comparação das fronteiras obtidas para o CCPSP - DAX 100	73
A.3	Comparação das fronteiras obtidas para o CCPSP - FTSE 100	74
A.4	Comparação das fronteiras obtidas para o CCPSP - S&P 100	75
A.5	Comparação das fronteiras obtidas para o CCPSP - Nikkei 225	76
A.6	Comparação dos resultados obtidos para o CCLS-PSP - Hang Seng	77
A.7	Comparação dos resultados obtidos para o CCLS-PSP - DAX 100	78
A.8	Comparação dos resultados obtidos para o CCLS-PSP - FTSE 100	79
A.9	Comparação dos resultados obtidos para o CCLS-PSP - S&P 100	80
A.10	Comparação dos resultados obtidos para o CCLS-PSP - Nikkei 225	81

Lista de Tabelas

2.1	Restrições, Mensuração de Riscos, Objetivos Adicionais e Métodos	21
2.2	Restrições, Mensuração de Riscos, Objetivos Adicionais e Métodos	22
3.1	Restrições Consideradas no Método Proposto	24
3.2	Problemas Tratados	24
3.3	Exemplo de Viabilização de Solução Via Normalização	34
4.1	Instâncias	36
4.2	Métodos, Parâmetros e Métricas para o UPSP	44
4.3	Resultados para o UPSP nas métricas MPE e MedPE - V	45
4.4	Resultados para o UPSP nas métricas S, GD, Δ e Er - V - Nikkei 225 . . .	45
4.5	Métodos, Parâmetros e Métricas para o CCPSP	47
4.6	Resultados para o CCPSP nas métricas VRE, MRE e Tempo - V	48
4.7	Resultados para CCPSP nas métricas S, GD, Δ - V - Nikkei 225	49
4.8	Resultados para o CCPSP nas métricas de MPE - V e H	49
4.9	Resultados para CCPSP nas métricas de MPE - H	50
4.10	Comparação das abordagens PSO em S, Δ e GD - V - Nikkei 225	52
4.11	Métodos, Parâmetros e Métricas para o CDPSP	55
4.12	Resultados para o CDPSP na métrica HV	56
4.13	Resultados para o CDPSP nas métricas S, GD, Δ e Er, na instância Nikkei 225	56
4.14	Parâmetros e Métricas para o CDS-PSP	57
4.15	Resultados para o CDS-PSP nas métricas GD e Δ	58
4.16	Parâmetros e Métricas para o CCLS-PSP	59

Capítulo 1

Introdução

1.1 Definição do Tema

O problema de seleção de carteiras de investimentos, PSP (do inglês, *portfolio selection problem*), que consiste na alocação de recursos a um número finito de ativos, é uma das temáticas mais importantes voltadas a questões financeiras e econômicas da atualidade. Como há um *trade-off* a ser superado (entre retornos e riscos), a seleção da carteira de ativos visa decidir em quais ativos deve-se investir e em que proporções, considerando o capital disponível.

Uma das primeiras abordagens baseadas em Pesquisa Operacional para tratar essa problemática foi proposta por Markowitz (1952), um modelo denominado de média-variância. A formulação consiste em um problema com dois objetivos não lineares que visam maximizar o retorno e minimizar o risco da carteira. Tal modelo também pode ser descrito como um problema de programação quadrática, no qual objetiva a minimização do risco da carteira, e o menor retorno aceitável é tratado através de uma restrição linear.

Há diversos fatores que influenciam na disposição das pessoas em assumir riscos, como, por exemplo, o nível social, a idade e as perspectivas futuras. Por isso, de acordo com Skolpadungket, Dahal e Harnpornchai (2007), não existe uma carteira de ativos que satisfaça os interesses de todos, visto que diferentes tipos de investidores estão dispostos a assumir diferentes riscos e, conseqüentemente, terem perspectivas de retornos distintos.

O modelo de média-variância proposto por Markowitz (1952) foi fundamental para que a temática de otimização de carteiras de ativos fosse difundida e amplamente estudada em todo o mundo. Desde os trabalhos seminais de Markowitz, o assunto é tratado como um problema de otimização com os dois objetivos não lineares citados: o retorno esperado, que

pode ser mensurado pela média e deve ser maximizado; e o risco da carteira, mensurado, geralmente, através da variância do retorno, e que deve ser minimizado (MARKOWITZ, 1952; SHARPE, 1989).

Como esse tipo de problema envolve dois objetivos que não podem ser otimizados simultaneamente, não há apenas uma solução ótima a ser encontrada, mas um conjunto de soluções eficientes ou Pareto-ótimo, oferecendo um leque de opções para o investidor, possibilitando uma tomada de decisão adequada, de acordo com os riscos que se deseja assumir (SKOLPADUNGKET; DAHAL; HARNPORNCHAI, 2007).

Tal conjunto de soluções geralmente é denominado de fronteira eficiente ou fronteira de Pareto. Branke et al. (2009) afirmam que uma das principais motivações para que seja determinada a fronteira eficiente ocorre em decorrência de que, em diversas aplicações, é importante que haja um conjunto de soluções com diferentes *trade-offs* em relação aos critérios de otimização adotados em questão. Isso permite que, por exemplo, possa ser obtida uma solução ótima (que maximize o retorno esperado) quando um determinado fator de risco aceitável pelo investidor seja dado. Tal fronteira pode ser obtida pela resolução da programação quadrática do problema para todos os *trade-offs* entre retornos e riscos.

Com o avanço de pesquisas sobre a temática, diversas formulações foram propostas considerando objetivos e restrições adicionais, inclusive abordagens diferentes de mensuração do risco da carteira. Além disso, devido a complexidade dos problemas, estudos envolvendo novas abordagens heurísticas ou melhorias em métodos consolidados tem recebido uma maior atenção nos últimos anos, com o objetivo de se obter um melhor desempenho na resolução de PSPs.

1.2 Justificativa

A alocação eficiente de recursos tem sido uma questão amplamente abordada nos estudos de finanças. O processo de seleção de carteiras de ativos baseia-se em encontrar, em um determinado conjunto de possíveis ativos, as proporções de investimento individuais a serem adquiridas por cada uma, de maneira que minimizam o risco da carteira para um determinado nível de retorno desejado pelo investidor. Nesse contexto, a otimização surge como ferramenta de aumento da rentabilidade dos investidores, auxiliando-os na tomada de decisão de acordo com os objetivos por eles pretendidos.

Diversas abordagens exatas e heurísticas têm sido utilizadas para resolver problemas

de otimização de carteiras. Tais abordagens, em geral, visam analisar um grande número de possíveis combinações, que cresce exponencialmente de acordo com o tamanho do problema, podendo vir a torná-lo inviável de ser resolvido em um tempo computacional aceitável (SKOLPADUNGKET; DAHAL; HARNPORNCHAI, 2007). A problemática pode ser ainda mais complexa quando são consideradas determinadas restrições. Moral-Escudero, Ruiz-Torrubiano e Suárez (2006), por exemplo, provou que o PSP considerando restrições de cardinalidade e de piso e teto de proporção de investimento por ativo (CCPSP) é NP-Difícil.

De maneira geral, o problema de seleção de carteira de ativos tem como premissa dois objetivos, retorno e risco, que pelo método clássico são medidos, respectivamente, através da média do retorno esperado e da variância da carteira, além de restrições de não-negatividade e que limitam o investimento a 100% do montante disponível. Entretanto, há diversos métodos que consideram restrições presentes nos mercados financeiros, além de diferentes mensurações de retornos e de riscos.

Em decorrência da alta competitividade nos mercados financeiros, a importância de se considerar determinados fatores nos métodos de resolução do PSP ganhou força. Um estudo realizado por Metaxiotis e Liagkouras (2012) mostra que aproximadamente 96,5% dos trabalhos realizados em PSP consideram quatro ou menos restrições, e 68,7% no máximo duas restrições. Entretanto, observando sua análise, é possível perceber que, considerando apenas trabalhos dos últimos dez anos, tais percentuais diminuíram para, respectivamente, 88,5% e 45,7%, o que mostra uma tendência de maior preocupação dos trabalhos recentes de tratarem fatores extras.

Nesse contexto, com tantas restrições possíveis de serem considerados, há uma grande quantidade de problemáticas distintas do PSP, que podem ser configuradas de acordo com os objetivos e estratégias de momento do investidor. Assim, a existência de um método que considere diferentes restrições, visando tratar de uma classe de PSPs, se torna importante para a sua utilização de forma prática em mercados.

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo Geral

O presente trabalho objetiva apresentar uma abordagem heurística para a resolução de uma classe de PSPs, de modo que permita a resolução do problema considerando um conjunto de restrições escolhidas pelo investidor. A abordagem baseia-se em um

Multiobjective Particle Swarm Optimization (MOPSO) que utiliza um procedimento de elitismo proposto em sua estrutura, baseado em três mecanismos: *Non-dominated Sorting*, *Crowding Distance* e Custo Benefício.

1.3.2 Objetivos Específicos

De modo a alcançar o objetivo geral apresentado, os seguintes objetivos específicos foram traçados:

- Realização de uma ampla revisão acerca dos métodos, objetivos e restrições considerados na literatura;
- Implementação do *Adaptive Non-dominated Sorting Multiobjective Particle Swarm Optimization* (ANSMOPSO);
- Comparação dos resultados obtidos com os principais resultados presentes na literatura;

1.4 Estrutura do Trabalho

A presente dissertação está organizada da seguinte forma: No Capítulo 2, são abordados os principais conceitos que envolvem o PSP, desde o trabalho pioneiro de Markowitz (1952), denominado *Mean-Variance Optimization*, até as tendências mais atuais, que tratam o problema com objetivos diferentes e/ou restrições práticas presentes nos mercados. Além disso, é também tratado no Capítulo 2 a temática de algoritmos multiobjetivos, a fronteira de Pareto e as relações de dominância. Em seguida, há ampla revisão dos trabalhos relacionados.

No Capítulo 3 é apresentada a metodologia do presente trabalho, onde é justificada e detalhada a implementação do método proposto. No Capítulo 4 são apresentados os resultados obtidos a partir da abordagem proposta e as comparações feitas com os principais trabalhos na literatura.

Capítulo 2

Revisão da Literatura

Nesta Seção são descritos alguns conceitos e definições relacionadas a teoria de seleção de carteiras, assim como os problemas observados na literatura, incluindo suas restrições e mensurações de retorno e risco. Em seguida, é apresentada uma revisão dos principais trabalhos relacionados ao tema.

2.1 Problema de Seleção de Carteiras

Um dos princípios fundamentais na área de investimentos financeiros é a possibilidade que permite os investidores diversificarem seus investimentos em diferentes ativos/ações. Carteiras diversificadas tendem a reduzir a exposição do investidor à riscos, e em segundo aspecto busca-se maximizar o retorno esperado. Essa é uma premissa base de como é tratado a problemática em um problema de otimização multiobjetivo.

Há diversas abordagens que permite a resolução de um problema de otimização multiobjetivo, uma delas é a sua transformação em uma problemática monoobjetivo. Na literatura, há duas principais formas de realizar essa transformação em PSP. A primeira, proposta por Markowitz (1952), visa selecionar uma das funções objetivos como a função objetivo a ser otimizada, na medida em que as demais são definidas como restrições do problema. A segunda, consiste em definir uma única função objetivo que irá considerar todos os objetivos do problema através de parâmetros de ponderação.

Por outro lado, diversos trabalhos tratam o PSP através de uma abordagem multiobjetivo, a maioria sendo métodos evolucionários ou que utilizam algum mecanismo evolucionário. Nestas abordagens, geralmente utiliza-se um procedimento denominado ranqueamento de soluções não-dominadas que será responsável por indicar e armazenar a construção iterativa da solução do problema.

2.1.1 Otimização Multiobjetivo

De acordo com Mishra, Panda e Majhi (2014a), abordagens multiobjetivo visam otimizar simultaneamente múltiplas funções objetivos, que são conflitantes por natureza. Trata-se de um problema onde há um vetor de variáveis de decisão que devem, tanto satisfazer um conjunto de restrições do problema, como otimizar um conjunto de funções objetivos do problema, conforme pode ser observado no modelo genérico a seguir.

$$\text{Min/Max } f_m(\vec{x}), m = 1, \dots, M \quad (2.1)$$

Sujeito a:

$$g_j(\vec{x}) \geq 0, j = 1, \dots, J \quad (2.2)$$

$$x_i^I \leq x_i \leq x_i^S, i = 1, \dots, N \quad (2.3)$$

Onde \vec{x} é o conjunto de variáveis de decisão do problema, $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)^T$.

O espaço de busca é limitado por $x_i^I \leq x_i \leq x_i^S, \forall i = 1, \dots, N$, onde x_i^I e x_i^S representam, respectivamente, o limite inferior e superior que podem ser assumidos pela variável x_i . N indica o número de variáveis de decisão do problema, M o número de funções objetivo e J a quantidade das demais restrições do problema.

Um dado vetor solução $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_N)^T$ é dito como dominante de outro $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_N)^T$ se, e somente se:

$$f_i(\vec{u}) \succeq f_i(\vec{v}), \forall i = 1, \dots, M \quad (2.4)$$

$$f_i(\vec{u}) \succ f_i(\vec{v}), \exists i = 1, \dots, M \quad (2.5)$$

Onde a relação \succeq indica que uma solução é melhor ou igual a uma outra para um determinado objetivo, enquanto \succ indica que a solução é melhor. Assim, conforme as Equações (2.4) e (2.5) mostram, para que a solução \vec{u} seja dita como dominante da solução \vec{v} , seu desempenho deve ser melhor ou igual para todas as funções objetivo do problema, tendo ainda, obtido em ao menos uma delas, desempenho melhor. Todas as demais soluções do problema que não sejam dominadas por alguma solução, são chamadas de soluções não-dominadas, sendo responsáveis por formar o conjunto que compõe a fronteira

de Pareto, que representa a solução para um problema multiobjetivo. Tal solução é dada através de uma curva na qual estão indicados todas as soluções não-dominadas obtidas para o problema.

2.1.2 Otimização Média-Variância

A abordagem proposta por Markowitz (1952) consiste em um problema de otimização bi-objetivo de duas funções não-lineares, que representam o retorno e o risco da carteira. A carteira de investimento trata-se de um conjunto de ativos no qual se investe um determinado montante. Em seu modelo clássico, a variância é utilizada para mensurar o risco da carteira, devendo ser minimizada na função objetivo (2.6). Por sua vez, o retorno da carteira é tratado através da função objetivo (2.7) e deve ser maximizada. As restrições presentes no problema limitam que o investimento, tanto total na carteira (2.8) como individual nos ativos (2.9), não ultrapassem os 100% do montante total que pode ser investido, conforme pode ser observado pela formulação a seguir.

$$z_1 = \min \sum_{j \in A} \sum_{k \in A} w_j w_k \sigma_{jk} \quad (2.6)$$

$$z_2 = \max \sum_{j \in A} w_j r_j \quad (2.7)$$

Sujeito a:

$$\sum_{j \in A} w_j = 1 \quad (2.8)$$

$$0 \leq w_j \leq 1, j \in A \quad (2.9)$$

Onde A representa o número de ativos disponíveis para compor a carteira, σ_{jk} indica a covariância entre os ativos j e k . w_j indica a proporção de investimento em cada ativo, enquanto r_j representa o retorno médio do ativo j .

A segunda abordagem para resolver o problema clássico consiste em tratar o retorno esperado e o risco da carteira na mesma função, ponderando os objetivos em função de um parâmetro $\lambda \in [0, 1]$, que indica a aversão à riscos do investidor. Dessa forma, quanto menor o λ , menor a aversão à riscos do investidor, enquanto quanto maior for λ , menor será o risco aceitável da carteira. A formulação para o problema é apresentada a seguir.

$$z = \min \lambda \left[\sum_{j \in A} \sum_{k \in A} w_j w_k \sigma_{jk} \right] - (1 - \lambda) \sum_{j \in A} w_j r_j \quad (2.10)$$

Sujeito a:

$$\sum_{j \in A} w_j = 1 \quad (2.11)$$

$$0 \leq w_j \leq 1, j \in A \quad (2.12)$$

Conforme pode ser observado anteriormente, esse procedimento transforma o problema em monoobjetivo, que busca minimizar o risco da carteira e maximizar o retorno esperado na medida em que se varia o parâmetro de aversão à riscos (λ), como mostra a função objetivo (2.10). As restrições (2.11) e (2.12) delimita, respectivamente, o máximo das somas de investimentos total da carteira e o máximo e mínimo investimento por ativo. Com a variação de λ são obtidos diferentes *trade-offs* entre retornos e riscos. Nesta forma de tratamento do problema, a fronteira de Pareto é formada a partir das soluções não-dominadas obtidas com a resolução do problema para cada variação de λ .

2.1.3 Otimização de Carteiras de Investimento com Restrições

O PSP é um problema bastante complexo de ser tratado, devido, principalmente, à possível presença de diversas restrições práticas a serem levadas em conta no modelo, como preferências do mercado, alocação de recursos, custos de transação, cardinalidade e vários outras. Em geral, o objetivo de abordar tais restrições é tornar o método mais realista, aproximando o modelo da realidade encontrada nos mercados. Entretanto, a inclusão de algumas restrições para o PSP pode o tornar intratável por métodos exatos até mesmo para pequenas instâncias, como observa Mishra (2012).

A abordagem proposta por Markowitz (1952) baseia-se em tomadas de decisão que formarão um conjunto de carteiras base para a construção da fronteira de Pareto. O modelo se baseia em um mercado simplista, sem diversos fatores que estão associados no mercado financeiro da realidade, como, por exemplo, lote mínimo de transação. Entretanto, a simples inclusão de restrições de cardinalidade no problema clássico o torna em um problema quadrático inteiro misto (PQIM), provado ser \mathcal{NP} -Difícil por Moral-Escudero, Ruiz-Torrubiano e Suárez (2006). Os métodos de otimização tradicionais utilizados para

resolver este tipo de problema limita-se a obter soluções de mínimos locais. Para superar essa dificuldade, diversas abordagens heurísticas eficientes foram desenvolvidas nos últimos anos (CURA, 2009; MISHRA, 2012). Tais abordagens são apresentadas e explicadas na Seção (2.2).

Devido a grande quantidade de fatores que podem ser considerados em PSPs, muitos estudos foram desenvolvidos nos últimos anos considerando diferentes restrições práticas. Apesar disso, há uma carência de trabalhos e instâncias que busquem abordar esse leque de restrições simultaneamente, algo importante para uma aproximação da abordagem com a realidade dos mercados.

2.1.3.1 Restrições de Piso e Teto de Proporção de Investimento

Restrições de piso e teto de proporção de investimento determinam os limites inferior (ϵ_j) e superior (δ_j) das proporções que podem ser investidas em cada ativo, conforme mostra a Equação (2.13). No geral, representam preferências dos investidores a determinados ativos ou setores da economia. Nos casos em que tais restrições não estão presentes no modelo, como, por exemplo, no modelo clássico, são utilizadas as restrições de não-negatividade (2.14), que não irão permitir investimentos negativos, além de limitar o máximo de proporção de investimento por ativo a 1.

As restrições de piso e teto também podem estar associadas a grupos de ativos ou setores da economia, geralmente sendo representadas conforme as equações (2.13) e (2.14) a seguir.

$$\epsilon_j z_j \leq w_j \leq \delta_j z_j, j \in A \quad (2.13)$$

$$w_j \geq 0, j \in A \quad (2.14)$$

2.1.3.2 Restrições de Cardinalidade

Na área de economia e finanças, a cardinalidade de uma carteira diz respeito a quantidade de ações/ativos que fazem parte dela. Neste caso, restrições de cardinalidade restringem a quantidade de ativos que podem compor a carteira. Sua inclusão envolve novas variáveis binárias z_j , que indicam 1 quando o ativo j estiver presente na carteira, e

o caso contrário.

As restrições de cardinalidade podem ser tratadas de diversas formas em PSP. Alguns trabalhos consideram a restrição de cardinalidade como sendo de igualdade (2.15), outros com limite inferior e superior (2.16), enquanto em Woodside-Oriakhi, Lucas e Beasley (2013) tratam da cardinalidade no rebalanceamento da carteira, definindo K^s , K^b , K^t como sendo as quantidades de ativos vendidos, compradas e que houveram negociações, sejam de vendas ou de compras (2.17, 2.18, 2.19).

$$\sum_{j \in A} z_j = K \quad (2.15)$$

$$K_{min} \leq \sum_{j \in A} z_j \leq K_{max} \quad (2.16)$$

$$\sum_{j \in A} z_j^s \leq K^s \quad (2.17)$$

$$\sum_{j \in A} z_j^b \leq K^b \quad (2.18)$$

$$\sum_{j \in A} (z_j^s + z_j^b) \leq K^t \quad (2.19)$$

É importante citar que a grande maioria dos trabalhos que abordam a restrição de cardinalidade, também consideram restrições de limites de investimentos. Chang et al. (2000) foram os primeiros autores a abordarem o fator cardinalidade em PSP. Nos últimos anos vários trabalhos trataram o PSP com restrições de cardinalidade e limites de investimentos (STREICHERT; ULMER; ZELL, 2004; SKOLPADUNGKET; DAHAL; HARNPORNCHAI, 2007; HOCHREITER, 2007; FERNÁNDEZ; GÓMEZ, 2007; CHIAM; TAN; MAMUM, 2008; CHANG; YANG; CHANG, 2009; PAI; MICHEL, 2009; BRANKE et al., 2009; SOLEIMANI; GOLMAKANI; SALIMI, 2009; DASTKHAN; GHARNEH; GOLMAKANI, 2011; DENG; LIN; LO, 2012; SALAH et al., 2014; RUIZ-TORRUBIANO; SUÁREZ, 2015).

2.1.3.3 Restrições de Lote Mínimo de Transação

Indicam que determinados ativos só podem ser adquiridos em múltiplos de uma determinada quantidade, ou seja, em lotes. Assim, a proporção de investimento por ativo tratada comumente por w_j , passa a ser tratada através de $l_j y_j$, onde l_j representa a proporção mínima de investimento que deve ser adquirida do ativo j , e y_j um número inteiro positivo que indica a quantidade de lotes do ativo j a ser adquirida (PONSICH; JAIMES;

COELLO, 2013). Assim, w_j pode ser obtido como:

$$w_j = l_j y_j, \forall j \in A, y_j \in \mathbb{Z}_+ \quad (2.20)$$

Há diversos trabalhos que introduziram restrições de lote mínimo em suas resoluções, tendo recebido maior atenção nos últimos anos (SKOLPADUNGKET; DAHAL; HARNPORNCHAI, 2007; SOLEIMANI; GOLMAKANI; SALIMI, 2009; DASTKHAN; GHARNEH; GOLMAKANI, 2011).

2.1.3.4 Pré-Seleção de Ativos

As restrições de pré-seleção indicam a preferência do investidor por determinados ativos, indicando que um determinado conjunto de ativos (U) deve ser necessariamente selecionados para serem investidos, enquanto os demais podem ou não serem selecionados. Assim, para cada ativo, há um dado binário de entrada u_j associado, no qual $u_j = 1$ indica que o ativo j deve necessariamente ser selecionado para ser investido, enquanto $u_j = 0$ indica que o ativo pode ou não ser selecionado.

$$z_j \geq u_j, \forall j \in A \quad (2.21)$$

2.1.3.5 Outras Restrições

Além das restrições citadas, há outras que em geral são utilizadas em problemas de *trading*, isto é, envolvendo seleção de carteiras multiperíodo. Restrições de capitalização de setor, de custos de transação, *turnover* e de *trading* são as principais observadas na literatura para esse conjunto de problemas.

Introduzidas por Soleimani, Golmakani e Salimi (2009), o conjunto de restrições de capitalização de setor indica que os investidores tendem a investir seus recursos em ativos pertencentes a setores com um maior valor de mercado, de modo a reduzir seus riscos.

As restrições de custos de transação são apresentadas de várias formas na literatura. Entretanto, no geral apresentam o mesmo objetivo, quantificar em forma de custos de transação a quantidade de ativos vendidos ou comprados entre um período e outro.

Por fim, as restrições de *turnover* buscam limitar a quantidade máxima e mínima

de compra e venda de um determinado ativo j do período t para $t + 1$. Enquanto as restrições de *trading* restringem a quantidade máxima e mínima de compra e venda de um determinado ativo, independente do período e da proporção de investimento corrente do ativo em questão.

2.1.4 Mensuração de Riscos

Alguns trabalhos defendem a utilização de mensuração de riscos e retornos diferentes na função objetivo do PSP. Como há diversas possíveis estratégias de investimento a serem utilizadas, a mensuração de risco e retorno podem ser realizadas de forma diferente, de modo que aproxime o método utilizado com a estratégia adotada pelo investidor.

Nesse contexto, o *Skewness*, que consiste numa medida de assimetria de dados, tem sua relevância destacada em alguns trabalhos (YU; WANG; LAI, 2008; LI; QIN; KAR, 2010; BRIEC; KERSTENS; WOESTYNE, 2013; BARAK; ABESSI; MODARRES, 2013) porque, conforme mostra Konno e Yamazaki (1991), as taxas de retorno dos investimentos não são simetricamente distribuídas. Com relação a semivariância, alguns trabalhos (CHANG; YANG; CHANG, 2009; GUPTA; MEHLAWAT; MITTAL, 2012) a utilizam por ser uma medida assimétrica de riscos que leva em conta a variância somente para retornos abaixo de um limite pré-estabelecido, o que ocasiona em uma carteira menos sujeita instabilidades na mensuração do risco.

Alguns autores utilizaram o Desvio Médio Absoluto (MAD) como uma alternativa ao desvio médio, visando reduzir o impacto dos valores extremos no desvio. Para se calcular, utiliza-se a mediana, que é uma medida menos afetada pelas extremidades do que a média. Alguns trabalhos relatam seu uso e sua relevância na temática (MANSINI; SPERANZA, 1999; LI; QIN; KAR, 2010; CHEN, 2015).

Value-at-Risk (VaR) é uma abordagem de mensuração de risco na análise de investimento que consiste em expressar o pior cenário possível do risco em uma carteira, dado um intervalo de confiança. Há diversas técnicas para determinar o VaR, relatadas em diversos trabalhos na literatura (BABAEI; SEPEHRI; BABAEI, 2015; RANKOVIĆ et al., 2016). Por sua vez, o *Conditional Value-at-Risk* (CVaR) é uma variante do VaR, com elementos que buscam minimizar grandes perdas. A medida é muito utilizada em estratégias conservadoras, e foi considerado nas problemáticas propostas por He e Qu (2014) e Anagnostopoulos e Mamanis (2011b).

No presente trabalho, para todos os subproblemas tratados, a mensuração de risco é

dada seguindo o modelo clássico e mais utilizado, baseada na variância e covariância dos ativos.

2.2 Trabalhos Relacionados

A abordagem clássica de tratar o problema de PSP média-variância (PSP-MV), conforme proposto por Markowitz (1952), ainda é a abordagem mais estudada na literatura. Nas últimas décadas diversas restrições e mensurações de risco passaram a ser considerados por diferentes autores, conforme mostrou a Seção (2.1.3).

Speranza (1996) implementou um procedimento heurístico para o PSP com restrições de cardinalidade, de limitantes de investimentos por ativo, custos de transação e de lote mínimo de transação. O método foi aplicado em instâncias obtidas do *Milan Stock Market*.

Chang et al. (2000) utilizaram três métodos para resolução do problema de PSP com restrições de cardinalidade e limitantes de investimentos por ativo (CCPSP): Algoritmo Genético (GA), Busca Tabu (TS) e *Simulated Annealing* (SA). Os resultados alcançados nas instâncias presentes na OR-Library (BEASLEY, 1990) mostraram-se bastante eficazes à época. O trabalho permitiu ainda concluir que a existência de restrições de cardinalidade implica em uma fronteira de eficiência não contínua.

Lin e Wang (2002) implementaram um GA multiobjetivo baseado em um *Non-dominated Sorting Genetic Algorithm* (NSGA) melhorado, que foi denominado NSGA-II. Os autores aplicaram o método para o PSP com restrições de lote mínimo e custos de transação.

Schaerf (2002) aplicaram técnicas de busca local, como *Hill Climbing* (HC), SA e TS, utilizando um conjunto de vizinhanças proposto para resolver o CCPSP.

Crama e Schyns (2003) propuseram um SA para o problema de PSP que inclui, além de restrição de cardinalidade, outras restrições realistas do mercado financeiro, como restrições de piso e teto de investimento por ação, restrições de *turnover* e de *trading*. O procedimento foi testado em uma instância contendo 151 ativos.

Maringer e Kellerer (2003) aplicaram uma abordagem híbrida para o CCPSP, com limites de piso e teto genéricos (0 e 1). O método baseia-se em uma abordagem que combina princípios de SA com estratégias evolucionárias. Os resultados indicaram que o método foi capaz de alcançar um desempenho competitivo nos testes realizados.

Ehrgott, Klamroth e Schwehm (2004) incrementou um método no qual se baseia na aplicação de quatro diferentes técnicas de solução heurísticas (LS, TS, SA e GA). Os

autores utilizaram problemas com até 1416 ativos.

Armananzas e Lozano (2005) utilizaram três abordagens para tratar o CCPSP: *Greedy Local Search* (GLS), SA e *Ant Colony Optimization* (ACO). Os métodos são testados nas instâncias da OR-Library e discutidas as fronteiras de Pareto obtidas pelos métodos.

Moral-Escudero, Ruiz-Torrubiano e Suárez (2006) implementaram um Algoritmo Genético Híbrido (HGA), que combina algoritmo genético com programação quadrática, para o CCPSP, incluindo retrições de máximo e mínimo investimento por ativo e/ou grupo de ativos, uma variação das restrições de piso e teto mencionadas na Seção (2.1.3.1).

Streichert e Tanaka-Yamawaki (2006) propuseram um Algoritmo Memético Multiobjetivo (MOMA) para resolver o CCPSP, que combina MOEA com busca local baseada em programação quadrática. O método consiste na geração de diversos portfólios, onde a proporção investida em cada ativo é definida resolvendo uma programação quadrática. Os autores apresentaram resultados para duas instâncias da OR-Library.

Fernández e Gómez (2007) trataram o CCPSP através de uma heurística baseada em redes neurais (NN), denominada *Hopfield network*. Além disso, os autores implementaram as heurísticas propostas por Chang et al. (2000), e compararam os resultados obtidos nas instâncias da OR-Library. Os resultados indicaram que nenhum método foi claramente superior aos demais.

Lin e Liu (2008) aplicaram abordagens baseadas em algoritmo genético para o PSP clássico com lote mínimo de transação.

Chiam, Tan e Mamun (2008) propuseram um MOEA com representação baseada em ordenadas para a resolução do CCPSP com restrições de lote mínimo. Apesar de ter formulado o problema com restrições de lote mínimo, os autores optaram por reportar apenas os testes sem a sua utilização, devido a ausência de tais informações nas instâncias da OR-Library.

Branke et al. (2009) utilizaram uma abordagem denominada *Envelope-based Multi-objective Evolutionary Algorithm* (e-MOEA) para resolver o CCPSP. O método consiste em permitir que o MOEA encontre subconjuntos convexos dentro de conjunto de todas as carteiras viáveis, resolva um algoritmo de linha crítica (MARKOWITZ, 1956) para cada subconjunto e, posteriormente, mescle as soluções parciais. Os testes foram executados em quatro instâncias, sendo três da OR-Library, e a quarta proposta por Hirschberger, Qi e Steuer (2007), com 500 ativos.

Cura (2009) implementaram um *Particle Swarm Optimization* (PSO) para a resolução

do CCPSP. Os resultados foram comparados com os alcançados pelos métodos propostos por Chang et al. (2000), notando-se que nenhum dos métodos apresentou uma grande superioridade aos demais. Apesar disso, o PSO mostrou-se mais eficaz quando as instâncias demandam uma carteira com baixo risco de investimento.

Pai e Michel (2009) trataram o CCPSP através de uma abordagem baseada em MOEA, que utiliza um procedimento *k-means clustering* para eliminar restrições de cardinalidade e simplificar o modelo. Os autores consideraram ainda restrições de classe, um conjunto de restrições semelhantes as restrições de capitalização de setor discutidas anteriormente na Seção (2.1.3).

Soleimani, Golmakani e Salimi (2009) apresentaram um GA para o CCPSP com algumas restrições adicionais, como restrições lotes mínimos por ativo e de proporção investida por setor (conjunto de ativos do mesmo ramo). Foram realizados teste em grandes instâncias, de até 1318 ativos. De acordo com o trabalho desenvolvido, o método mostrou-se vantajoso na busca por redução do risco total da carteira. Entretanto, como é observado por Jarraya (2013), a inclusão de tais restrições torna o problema mais difícil de ser resolvido.

Anagnostopoulos e Mamanis (2009) desenvolveram um GA baseado em NSGA para resolver o CCPSP. Os autores utilizaram o método para solucionar instâncias de *Athens Stock Exchange* e os resultados alcançados foram comparados com um GA genérico implementado. Os resultados indicaram que o método desenvolvido é bastante promissor para essa classe de problemas.

Recentemente Anagnostopoulos e Mamanis (2010) apresentaram o PSP como um problema de otimização tri-objetivo, buscando encontrar *trade-offs* entre o retorno esperado, risco e cardinalidade da carteira. Os autores implementaram três algoritmos, NSGA-II, *Pareto Envelope-based Selection Algorithm* (PESA) e *Strength Pareto Evolutionary Algorithm 2* (SPEA2), e compararam os resultados obtidos com outros métodos da literatura.

Chen e Zhang (2010) trataram o PSP clássico com custos de transação e restrições de limites de piso e teto de proporção de investimento por ativo. Para isso, os autores propuseram um novo PSO adaptado para alcançar uma melhor eficiência na problemática em questão.

Anagnostopoulos e Mamanis (2011a) propuseram cinco algoritmos evolucionários para resolver o CCPSP, denominados *Niched Pareto Genetic Algorithm 2* (NPGA2), NSGA-II, PESA, SPEA2 e *E-multi-objective Evolutionary Algorithm* (e-MOEA).

Woodside-Oriakhi, Lucas e Beasley (2011) aplicaram três algoritmos para tratar o CCPSP e realizaram um estudo com relação aos desempenhos de suas fronteiras eficientes, sendo um GA, um TS e um SA. Eles compararam os resultados com os obtidos por Chang et al. (2000), mostrando que suas abordagens alcançaram resultados competitivos.

Zhu et al. (2011) apresentam um PSO para o problema clássico do PSP. O método foi utilizado para resolver instâncias com até 49 ativos e os resultados comparados com os obtidos por um GA e um *solver* implementado em VBA, tendo o PSO alcançado resultados promissores e superiores aos demais na maioria dos testes.

Golmakani e Fazel (2011) propuseram um PSO para o CCPSP com restrições adicionais, de lotes mínimos de transação e de capitalização de setor. Os resultados foram comparados com um GA e mostram que o desempenho do PSO é superior ao do GA, mais notavelmente em instâncias maiores.

Deng e Lin (2010b) desenvolveram um PSO para resolução do CCPSP. Os resultados obtidos foram comparados com os alcançados por Chang et al. (2000), apresentando superioridade na maioria dos casos, em relação aos anteriores, principalmente para carteira com baixo risco de investimento.

Deng, Lin e Lo (2012) implementaram um PSO melhorado, que tanto melhora a velocidade de convergência da busca, como aumenta o espaço de exploração na busca inicial. O método foi aplicado no CCPSP e os resultados obtidos indicaram, na maioria dos testes, uma superioridade da abordagem quando comparada com o desempenho de outros métodos, como: PSO genérico, GS, SA e TS. Em outro trabalho, Deng e Lin (2010a) propuseram um algoritmo baseado em ACO para o mesmo problema. Os testes se mostraram competitivos com o PSO melhorado, apresentando mais robustez e melhores desempenhos principalmente para carteiras de baixo risco de investimento.

Sadigh et al. (2012) implementaram uma abordagem híbrida que combina PSO com NN para o CCPSP. Também propondo um algoritmo híbrido para o mesmo problema, Lwin e Qu (2013) buscaram combinar um *population based incremental learning* com *differential evolution*, enquanto Corazza, Fasano e Gusso (2013) utilizaram uma abordagem que combina MIQP com PSO.

Cesarone, Scozzari e Tardella (2013) reformularam o problema do CCPSP como um problema de programação quadrática padrão. No trabalho é apresentado detalhadamente o método e a obtenção da formulação, e os resultados obtidos nas instâncias da OR-Library são comparados com outros métodos da literatura.

Mishra, Panda e Majhi (2014a) utilizaram uma abordagem MOEA baseada em *Multiobjective Particle Swarm Optimization* (MOPSO) para a problemática do CCPSP. Os resultados obtidos foram comparados com outros cinco MOEAs, sendo um deles baseado em decomposição (MOEA/D), além de quatro algoritmos monoobjetivos, GA, SA, TS e PSO. Foram utilizadas nos testes seis instâncias, com a maior contendo 500 ativos. Os resultados indicaram que o método é capaz de encontrar soluções de qualidade em um tempo razoável.

Liagkouras e Metaxiotis (2014) propuseram um mecanismo denominado *Probe Guided Mutation* para tratar o CCPSP. O método é baseado no clássico *Polynomial Mutation*, com o qual foi comparado. Os mecanismos foram implementados juntamente com um NSGA-II e um SPEA2. Os resultados obtidos através de testes nas instâncias da OR-Library mostraram que o mecanismo proposto apresenta um desempenho superior em todos os indicadores propostos no trabalho.

Mishra, Panda e Majhi (2014b) desenvolveram um algoritmo baseado em MOEA para o CCPSP com restrição apenas de piso. O método, chamado de *Multiobjective Bacteria Foraging Optimization* (MOBFO) pelos autores, obteve resultados competitivos e foi capaz de gerar uma fronteira de Pareto de qualidade semelhante a outros métodos da literatura.

Salahi et al. (2014) propuseram duas abordagens heurísticas para resolução do CCPSP, um baseado no método PSO e outra em Busca Harmônica (HS). Foram testadas as instâncias da OR-Library, e os resultados indicaram que o HS foi significativamente superior ao PSO, principalmente nas instâncias maiores. Seguindo esta mesma linha, Sabar e Kendall (2014) implementou um algoritmo baseado em HS para resolver o CCPSP, mostrando através dos resultados que o método é capaz de obter soluções de qualidade para a problemática. Já Baykasoğlu, Yunusoglu e Özsoydan (2015) aplicaram pela primeira vez um algoritmo *Greedy Randomized Adaptive Search Procedure* (GRASP) para o CCPSP, comparando os resultados obtidos com os alcançados por Fernández e Gómez (2007).

Recentemente, Chen (2015) tratou o CCPSP com custos de transação. O autor implementou um *Modified Artificial Bee Colony Algorithm* (MABC) para resolver a problemática. Os testes foram realizados em um problema real da *Shanghai Stock Exchange* com 30 ativos.

Algumas abordagens multicritério também foram propostas na literatura. Xidonas et al. (2011) aplicaram uma abordagem multicritério baseada em DSS para o CCPSP com restrições de capitalização de setor. O método foi validado e testado em problemas da *Athens Stock Exchange*. Já Gupta, Mehlawat e Mittal (2012) trataram o problema do

CCPSP através de uma abordagem multicritério, porém com outra abordagem diferente da clássica MV. Os autores consideraram a performance do retorno em curto prazo (12 meses) e longo prazo (3 anos), e o risco através da semivariância e da liquidez da carteira. Com relação ao método, inicialmente eles utilizaram um vetor para classificar os ativos em três classes pré-definidas, de acordo com seus desempenhos em alguns critérios financeiros importantes. Posteriormente, os autores implementaram um GA para resolver o problema considerando as preferências do investidor.

Bermúdez, Segura e Vercher (2012) propuseram um algoritmo genético para tratar de uma variante do PSP clássico, onde o retorno esperado é incerto, sendo obtido através de números fuzzy trapezoidais, e uma função de riscos decrescente, que indica a aversão do investidor a determinados níveis de riscos. O procedimento foi utilizado para testar uma instância real do *Spanish Market Exchange*. Qin (2014) também resolveram a mesma problemática, tendo realizado testes em problemas da *Shanghai Stock Exchange*. Já Lim, Oh e Zhu (2014), trataram o problema através de uma abordagem multicritério baseada em Análise Envoltória de Dados (DEA). Os autores aplicaram o método em problemas do *Korean Stock Market*.

Nos últimos anos, problemas do PSP que consideram o rebalanceamento de uma carteira existente e abordagens multiperíodo tem ganhado força.

Woodside-Oriakhi, Lucas e Beasley (2013) trataram a problemática de rebalanceamento de uma carteira existente, considerando custos de transação V-Shaped para cada mudança na proporção de investimentos nos ativos da carteira, onde tais custos de transação podem ser fixos ou variáveis, levando em conta também o horizonte do investimento. Chen et al. (2014) trataram a problemática de maneira semelhante, entretanto sem restrições de cardinalidade e assumindo que os retornos dos ativos nos períodos são números fuzzy trapezoidais. A abordagem considera ainda quatro tipos de custos: côncavos, convexos, lineares e um tipo genérico. Seguindo a mesma linha de Chen et al. (2014), He e Qu (2014) desenvolveram um algoritmo híbrido que integra um procedimento *Branch-and-Bound* (B&B) com uma busca local para resolver o problema de maneira heurística. Os resultados indicam que o método proporciona boas soluções em um tempo computacional razoável. Já Guo et al. (2016) aplicaram um algoritmo que combina características de simulação fuzzy e GA, denominado *Fuzzy Simulation based Genetic Algorithm* (FSGA).

Mansini e Speranza (1999) trataram o PSP multiperíodo com restrições de lote mínimo de transação, utilizando como mensuração do risco o Desvio Médio Absoluto (MAD), conforme abordagem proposta por Konno e Yamazaki (1991). Bertsimas e Pachamanova

(2008) e Liu et al. (2015) utilizaram uma abordagem baseada em otimização robusta para o PSP clássico multiperíodo, enquanto Palczewski et al. (2015) abordaram a problemática com custos de transação e considerando horizontes de tempo de até 40 anos.

Recentemente, Ruiz-Torrubiano e Suárez (2015) propuseram uma abordagem híbrida que combina GA com programação quadrática para tratar o problema do CCPSP multiperíodo com custos de transação e restrições de *trading*. Outras abordagens de rebalanceamento e multiperíodo podem ser vistas em Jana, Roy e Mazumder (2009).

Outros trabalhos que consideram restrições e objetivos menos comuns também foram observados na literatura. Alguns buscam a inclusão de métodos e variáveis consolidadas na área de análise de investimentos (PARRA; TEROL; URIA, 2001; BRIEC; KERSTENS; WOESTYNE, 2013), enquanto outros buscam a aplicação de conhecimentos empíricos (DERIGS; NICKEL, 2001).

Yu, Wang e Lai (2008), Li, Qin e Kar (2010), Briec, Kerstens e Woestyne (2013) e Barak, Abessi e Modarres (2013) trataram o PSP tri-objetivo, como média-variância-*skewness*. Os primeiros autores implementaram um algoritmo baseado em redes neurais e na teoria de multiplicadores de Lagrange para o PSP sem restrições adicionais. Já Li, Qin e Kar (2010), consideraram retornos incertos obtidos através de números fuzzy trapezoidais, e desenvolveram um método que combina GA e simulação fuzzy para resolver o problema, enquanto Briec, Kerstens e Woestyne (2013) aplicaram uma abordagem multicritério baseada em *Polynomial Goal Programming*. Por sua vez, Barak, Abessi e Modarres (2013) utilizaram um algoritmo híbrido, que combina um GA com simulação fuzzy, denominado FCTPM. Os autores tratam a problemática do CCPSP com restrições de *turnover* de duas formas, a primeira como um clássico MV, e a segunda com retornos obtidos através de números fuzzy trapezoidais.

Alguns trabalhos consideram a mensuração do risco no problema através de *Value-at-Risk* (VaR) ou *Conditional Value-at-Risk* (CVaR). Babaei, Sepehri e Babaei (2015) implementaram quatro abordagens MOEA para tratar o CCPSP, dois algoritmos baseados em MOPSO, um NSGA-II e um SPEA2. Os testes realizados indicaram que um dos MOPSO propostos apresentou um desempenho superior aos demais métodos. Ranković et al. (2016) consideraram a mesma problemática considerando que VaR é estimado através do modelo de volatilidade *Generalized AutoRegressive Conditinal Heteroscedasticity* (GARCH). Os autores utilizaram um NSGA-II e aplicaram o método no S&P 100. Anagnostopoulos e Mamanis (2011b) utilizaram três métodos baseados em MOEA para resolver o CCPSP, considerando, além da abordagem clássica (média-variância), VaR e CVaR. Outras abor-

dagens considerando VaR ou CVaR podem ser vistas em Benati e Rizzi (2007), Wang, Li e Watada (2011), Baixauli-Soler, Alfaro-Cid e Fernandez-Blanco (2011), Ranković et al. (2014).

Outra abordagem de mensuração de risco observada na literatura foi o Desvio Médio Absoluto (MAD). Dastkhan, Gharneh e Golmakani (2011) aplicaram um algoritmo que combina GA e um mecanismo denominado *fuzzy weighted max-min operator* para o PSP-MAD. O método foi testado em um problema envolvendo 75 ativos do *New York Stock Exchange*. Por sua vez, Moon e Yao (2011) utilizou uma abordagem baseada em otimização robusta para o problema. Os autores relataram circunstâncias em que a abordagem alcançou um desempenho competitivo e outras onde a abordagem apresentou piores resultados que outros métodos da literatura.

Chang, Yang e Chang (2009) propuseram um método baseado em GA para resolver o CCPSP com três formas diferentes de mensuração de risco: MAD, *Skewness* e semivariância. Os autores apresentaram os resultados obtidos para três das cinco instâncias da OR-Library.

Parra, Terol e Uria (2001) trataram o PSP média-variância-liquidez com retornos aleatórios. Os autores aplicaram uma abordagem multicritério baseado em *Fuzzy Goal Programming* (FGP).

Mashayekhi e Omrani (2016) propuseram dois algoritmos para tratar o PSP sem restrições adicionais, considerando os objetivos *média-variância-eficiência*. O primeiro deles, baseado em DEA, e o segundo, no NSGA-II. Os autores consideram os retornos incertos, obtidos através de números fuzzy trapezoidais.

Noroozi et al. (2016) introduziram a aplicação de um modelo probabilístico denominado CVX para o problema clássico com restrições de piso e teto de investimento por ativo e retornos incertos e aleatórios.

A Tabela (2.1) a seguir apresenta uma melhor ilustração das configurações dos PSPs tratados nos trabalhos citados, assim como os métodos utilizados pelos autores.

Table 2.1: Restrições, Mensuração de Riscos, Objetivos Adicionais e Métodos

Trabalho	Período		Abordagem			Restrições										Métodos	Risco/Objetivo
	UN	MT	HE	HY	EX	PT	CD	LM	CT	SC	NN	PS	TN	TR			
Speranza (1996)	✓		✓			✓	✓	✓	✓							OTH	VA
Mansini et al. (1999)		✓		✓				✓			✓					OTH	MAD
Chang et al. (2000)	✓		✓			✓	✓									GA; SA; TS	VA
Parra et al. (2001)	✓		✓								✓					MC	VA; RAI; LI
Derigs et al. (2001)	✓		✓								✓					DSS	VA
Lin et al. (2002)	✓		✓					✓	✓		✓					GA; SA; TS	VA
Schaerf (2002)	✓		✓			✓	✓									SA; TS; HC	VA
Crama et al. (2003)	✓		✓			✓	✓						✓	✓		SA; TS; HC	VA
Maringer et al. (2003)	✓		✓				✓				✓					SA; TS; HC	VA
Ehrgott et al. (2004)	✓		✓								✓					GA; SA; TS; LS	DA; DR1; DR3; VM1; RSPS
Armananzas et al. (2005)	✓		✓			✓	✓									GA; ACO; SA; LS	VA
Moral-Escudero et al. (2006)	✓			✓		✓	✓					✓				GA; QP	VA
Streichert et al. (2006)	✓			✓		✓	✓									GA; LS; QP	VA
Fernández et al. (2007)	✓		✓			✓	✓									NN	VA
Benati et al. (2007)	✓				✓						✓					OTE	VaR
Chiam et al. (2008)	✓		✓			✓	✓	✓								OM	VA
Yu et al. (2008)	✓		✓								✓					NN	VA; SK
Lin et al. (2008)	✓		✓					✓			✓	✓				GA	VA
Bertsimas et al. (2008)		✓	✓								✓					RO	VA
Branke et al. (2009)	✓		✓			✓	✓									OM	VA
Cura (2009)	✓		✓			✓	✓									PSO	VA
Chang et al. (2009)	✓		✓			✓	✓									GA	SK; MAD; SV
Pai et al. (2009)	✓		✓			✓	✓			✓						OM	VA
Soleimani et al. (2009)	✓		✓			✓	✓	✓		✓						GA	VA
Anagnostopoulos et al. (2009)	✓		✓			✓	✓									GA	VA
Jana et al. (2009)	✓		✓			✓	✓		✓							MC	VA; RNFT
Anagnostopoulos et al. (2010)	✓		✓			✓	✓									GA; OM	VA; CD
Chen et al. (2010)	✓		✓			✓			✓							PSO	VA
Deng et al. (2010)	✓		✓			✓	✓									ACO	VA
Li et al. (2010)	✓		✓								✓					GA; MC	VA; MAD; RNFT
Anagnostopoulos et al. (2011a)	✓		✓			✓	✓									GA; OM	VA
Anagnostopoulos et al. (2011b)	✓		✓			✓	✓									GA; OM	SK; CVaR
Woodside-Oriakhi et al. (2011)	✓		✓			✓	✓									GA; SA; TS	VA
Moon et al. (2011)	✓		✓								✓					RO	VA; MAD
Dastkhan et al. (2011)	✓		✓								✓					GA; MC	VA; MAD
Xidonas et al. (2011)	✓		✓			✓	✓									DSS	VA
Zhu et al. (2011)	✓		✓								✓					GA; PSO	VA
Golmakani et al. (2011)	✓		✓			✓	✓	✓		✓						GA; PSO	VA
Wang et al. (2011)	✓		✓								✓					PSO	VA; VaR
Baixauli-Soler et al. (2011)	✓		✓					✓	✓		✓					GA	VaR
Gupta et al. (2012)	✓		✓			✓	✓									MC	SV; DR1; DR3; LI

Table 2.2: Restrições, Mensuração de Riscos, Objetivos Adicionais e Métodos

Trabalho	Período		Abordagem			Restrições									Métodos	Risco/Objetivo
	UN	MT	HE	HY	EX	PT	CD	LM	CT	SC	NN	PS	TN	TR		
Deng et al. (2012)	✓		✓			✓	✓								PSO	VA
Bermúdez et al. (2012)	✓		✓								✓				GA; MC	RNFT; RFD
Sadigh et al. (2012)	✓		✓			✓	✓								PSO; NN	VA
Lwin et al. (2013)	✓		✓			✓	✓	✓				✓			OM	VA
Barak et al. (2013)	✓		✓			✓	✓						✓		GA; MC	VA; SK; RNFT
Cesarone et al. (2013)	✓			✓		✓	✓								PSO; QP	VA
Briec et al. (2013)	✓		✓								✓				MC	VA; SK
Corazza et al. (2013)	✓			✓		✓	✓								PSO; MIQP	VA
Woodside-Oriakhi et al. (2013)	✓				✓	✓	✓		✓						MIQP	VA
Chen et al. (2014)	✓		✓			✓	✓		✓						ABC	VA; RNFT
He et al. (2014)		✓		✓		✓	✓		✓					✓	LS; B&B	VA; CVaR
Mishra et al. (2014a)	✓		✓			✓	✓								PSO	VA
Liagkouras et al. (2014)	✓		✓			✓	✓								GA; OM	VA
Lim et al. (2014)	✓		✓									✓			MC	VA
Mishra et al. (2014b)	✓		✓			✓	✓								OM	VA
Ranković et al. (2014)	✓		✓								✓				GA	VaR
Salahi et al. (2014)	✓		✓			✓	✓					✓			PSO; HS	VA
Sabar et al. (2014)	✓		✓			✓	✓								HS	VA
Qin (2014)	✓				✓						✓				QP	VA; RAI
Babaei et al. (2015)	✓		✓			✓	✓								GA; PSO; OM	VA; VaR
Palczewski et al. (2015)		✓		✓		✓			✓						LS; DP	VA
Ruiz-Torrubiano et al. (2015)		✓		✓		✓	✓		✓					✓	GA; QP	VA
Baykasoglu et al. (2015)	✓		✓			✓	✓								GR	VA
Liu et al. (2015)		✓		✓							✓	✓			PSO; RO	VA
Chen et al. (2015)	✓		✓			✓	✓		✓						ABC	MAD; RNFT; EF
Mashayekhi et al. (2016)	✓		✓								✓				GA; MC	VA; RAI
Guo et al. (2016)		✓	✓			✓	✓		✓						GA; MC	VA; RNFT
Noroozi et al. (2016)	✓		✓			✓									OTH	VA
Ranković et al. (2016)	✓		✓								✓				GA	VaR

UN – Único; MT – Multi; HEU – Heurístico; HYB – Híbrido; EXA – Exato; PT – Piso e Teto; CD – Cardinalidade; CT – Custos de Transação;
 SC – Capitalização de Setor; NN – Não Negatividade; PS – Pré-Seleção de Ativos; TN – Turnover; TR – Trading; MAD – Desvio Médio Absoluto; DA – Dividendos Anuais;
 CD – Cardinalidade; DR1 – Desempenho do Retorno em 1 Ano; DR3 – Desempenho do Retorno em 3 Anos; VM1 – Desempenho da Volatilidade em 1 Ano;
 SPS – Standard and Poors Star Ranking RNFT – Retorno por Números Fuzzy Trapezoidais; RUR – Retorno Incertos e Aleatórios; RFD – Risco Fuzzy Decrescente;
 EF – Eficiência; LI – Liquidez; GA – Algoritmo Genético; PSO – Particle Swarm Opt.; ACO – Ant Colony Opt.; SA – Simulated Annealing;
 ABC – Artificial Bee Colony Opt.; OM – Others Multiobjective Evolutionary Algorithm; TS – Busca Tabu; NN – Redes Neurais; LS – Busca Local;
 DSS – Metaheuristic-based Decision Support System; HC – Hill Climbing; GR – Greedy Randomized Adaptive Search Procedures; MC – Multicritério;
 HS – Busca Harmônica; OTH – Outros Métodos Heurísticos; BNB – Branch-and-Bound; QP – Programação Quadrática; RO – Otimização Robusta;
 MIQP – Programação Quadrática Inteira Mista; DP – Programação Dinâmica; OTE – Outros Métodos Exatos

Capítulo 3

Aspectos Metodológicos

Neste capítulo é apresentado o método proposto para a resolução de uma classe de problemas de seleção de carteiras de investimentos. Em um primeiro momento, é apresentada uma introdução sobre PSO. Posteriormente, é apresentado o método proposto, baseado em um MOPSO, que utiliza uma estrutura de elitismo proposta. O método foi denominado *Adaptive Non-dominated Sorting Multiobjective Particle Swarm Optimization* (ANSMOPSO). Além disso, é apresentado um resumo dos problemas tratados pelo método.

3.1 Problemas Abordados

No Capítulo anterior foram apresentadas e discutidas uma série de restrições abordadas na literatura para problemas de seleção de carteiras. Com o intuito de se atingir um dos objetivos deste trabalho (de resolução de uma classe de PSPs), foram consideradas, na resolução do método, as seguintes restrições, apresentadas na Tabela (3.1). Em geral, como as restrições de custos de transação, *turnover* e *trading* são abordadas em problemas multiperíodo, não foram consideradas no método proposto.

A partir das restrições citadas, pode-se abordar diversos problemas de seleção de carteiras. O Quadro (3.2) apresenta a relação dos problemas observados e com resultados reportados na literatura. Além dos problemas citados, há diversas outras combinações possíveis entre tais restrições que também são tratáveis pelo método proposto. Entretanto, por não terem sido abordados ou não terem resultados reportados na literatura, não foram realizados experimentos.

Table 3.1: Restrições Consideradas no Método Proposto

Restrição	Tratada no Método
Piso e Teto de Investimentos por Ativo	✓
Cardinalidade (Igualdade)	✓
Cardinalidade (Desigualdade)	✓
Lote Mínimo de Transação	✓
Pré-Seleção de Ativos	✓
Capitalização de Setor	
Custos de Transação	
<i>Turnover</i>	
<i>Trading</i>	

Table 3.2: Problemas Tratados

Restrições dos Problemas	PT	CD _i	CD _m	LM	PS
Clássico, sem restrições adicionais (UPSP)	✓				
Cardinalidade (CCPSP)	✓	✓			
Cardinalidade Desigualdade (CDPSP)	✓		✓		
Cardinalidade Desigualdade e Pré-Seleção (CDS-PSP)	✓		✓		✓
Cardinalidade, Lote Mínimo de Transação e Pré-Seleção (CCLS-PSP)	✓	✓		✓	✓

3.2 Adaptive Non-dominated Sorting Multiobjective Particle Swarm Optimization

Conforme foi apresentado na Tabela 2.1, algoritmos evolucionários têm sido bastante utilizados na literatura para tratar de diversos PSPs. Uma dessas abordagens, PSO, trata-se de uma meta-heurística de busca populacional, baseada na simulação do comportamento social de um enxame de partículas em busca por comida. De maneira geral, o método consiste em um enxame de partículas, onde a posição de cada partícula representa uma solução para o problema. Tais partículas podem se movimentar em um espaço de busca multidimensional através de vetores velocidade, que são dinamicamente ajustados após cada iteração do problema (KENNEDY et al., 2001; DENG; LIN; LO, 2012).

Em cada iteração t , a i th partícula do enxame tem sua posição $x_{i,j}^t$ atualizada através de sua velocidade $v_{i,j}^{t+1}$, para todas as dimensões j . Assim, a posição da próxima iteração é atualizada conforme a equação 3.1.

$$x_{i,j}^{t+1} = x_{i,j}^t + v_{i,j}^{t+1} \quad (3.1)$$

Onde $x_{i,j}^{t+1}$ e $v_{i,j}^{t+1}$ representam, respectivamente, a posição (solução) e a velocidade da partícula i na dimensão (ativo) j do espaço de busca na iteração $t + 1$. A velocidade da partícula, responsável pela mudança de sua posição ao longo das iterações, é obtida

através da equação 3.2.

$$v_{i,j}^{t+1} = Wv_{i,j}^t + C_1r_1(p_{i,j} - x_{i,j}^t) + C_2r_2(p_{g,j} - x_{i,j}^t) \quad (3.2)$$

Onde $p_{i,j}$ indica a melhor posição local que a partícula i já esteve no espaço de busca, enquanto $p_{g,j}$ indica a melhor posição global, isto é, a melhor posição já alcançada por qualquer partícula, desde a iteração inicial. Por se tratar de um problema multiobjetivo, determinar qual $p_{i,j}$ e $p_{g,j}$ a cada iteração não é tarefa trivial. Devido à sua grande influência no desempenho geral do método, seu estudo tem recebido atenção de diversos autores nos últimos anos (MOSTAGHIM; TEICH, 2003; QU; SUGANTHAN; DAS, 2013; JORDEHI; JASNI, 2013).

W corresponde ao peso inercial, responsável por ponderar o grau de influência das velocidades na iteração anterior na atualização das posições correntes, sendo importante na convergência da busca. r_1 e r_2 são valores aleatórios, tradicionalmente entre 0 e 1 obtidos através de uma distribuição uniforme. Tais valores representam o fator estocástico do algoritmo e podem ser ajustados de modo a seguir uma estratégia adotada para o problema. Os parâmetros C_1 e C_2 indicam os coeficientes de aceleração das partículas usados para ponderar a contribuição dos componentes cognitivos e sociais, onde c_1 indica a confiança de uma partícula baseada apenas na posição dela, enquanto c_2 expressa a confiança da partícula em relação as demais (DENG; LIN; LO, 2012). Tais valores podem ser utilizados e atualizados de diferentes maneiras, a depender da estratégia que se busca adotar na resolução do problema. No presente trabalho, foram realizados testes e definidos os seguintes valores para os parâmetros: W como sendo inicialmente 0.95, e decrescendo até 0.85 a cada iteração, em proporções de $\frac{0.10}{max_iter}$, enquanto $C_1 = 2.05$ e $C_2 = 1.95$.

Em geral, valores bem balanceados entre c_1 e c_2 resultam em uma melhor cooperação entre as partículas, isto é, torna mais efetiva e equilibrada a maneira como o conjunto se desloca no espaço de busca. Valores altos para tais parâmetros resultam em trajetórias bruscas, permitindo que as partículas se movam rapidamente entre uma região e outra, enquanto valores baixos demais podem tornar a movimentação da partícula lenta e muito concentrada em relação ao tamanho do espaço de busca.

A realização eficiente da calibração dos parâmetros do método, assim como mecanismos para guardar e ranquear as soluções, são os principais pontos de estudo atualmente em abordagens baseadas em PSO. Tal fato se dá devido à grande influência que ambos apresentam tanto com relação a seleção das melhores posições locais e global, como na

convergência do método em si.

Neste contexto, o método proposto baseia-se em um *Multiobjective Particle Swarm Optimization* que utiliza um mecanismo proposto baseado em *non-dominated sorting*, *crowding distance* e custo benefício para realizar o ranqueamento das partículas e a seleção da melhor posição global. O Algoritmo (3.1) descreve as etapas do método.

Algoritmo 3.1 Método ANSMOPSO

```

1: Estabeleça os parâmetros do problema
2: enquanto  $\lambda < 1$  faça
3:   Inicialize as posições iniciais ( $x_{i,j}^t$ ) para as  $N$  partículas respeitando as restrições do
     problema
4:   Inicialize as velocidades iniciais ( $v_{i,j}^t = 0$ )
5:   Inicialize a melhor posição local de cada partícula ( $p_{i,j}$ )
6:   Determine a melhor posição global ( $p_{g,j}$ )
7:   Avalie as partículas
8:   Cheque o melhor candidato a ser adicionado em  $V$ 
9:   Guarde as soluções não-dominadas em  $H$ 
10:  enquanto  $iter < max\_iter$  faça
11:    Ordene  $H$  utilizando Non-dominated Sorting
12:    Calcule o valor de Crowding Distance (CD) para cada partícula em  $H$ 
13:    Calcule o valor de Custo Benefício (CB) para cada partícula em  $H$ 
14:    Obtenha o ranqueamento ( $RK_1$ ) de  $H$  para os valores de CD
15:    Obtenha o ranqueamento ( $RK_2$ ) de  $H$  para os valores de CB
16:    Reorganize o  $H$  baseado em  $RK_1$  e  $RK_2$ 
17:    Selecione  $p_{g,j}$ 
18:    Atualize  $v_{i,j}^t$ 
19:    Atualize  $x_{i,j}^t$ 
20:    Cheque a viabilidade das partículas e, caso necessário, faça os ajustes
21:    se  $iter < max\_iter * pMut$  então
22:      Realize mutação nas partículas
23:    fim se
24:    Avalie as partículas
25:    Atualize  $H$ 
26:    Atualize  $p_{i,j}$ 
27:  fim enquanto
28:  Atualize  $V$ 
29:  Incremente  $\lambda$ 
30: fim enquanto
  
```

Os conjuntos V e H representam soluções não-dominadas obtidas no decorrer do método e, a razão para ambos serem mantidos e atualizados, assim como para a utilização da variável λ , são explicadas posteriormente na Seção (3.2.2).

3.2.1 Inicialização

A etapa de inicialização do método consiste em, dado o PSP identificado, gerar o enxame de partículas inicial do problema, respeitando todas as restrições e considerando os seus objetivos. A construção do primeiro enxame baseia-se em construir uma carteira de forma iterativa, de modo que os valores das proporções de investimentos dos ativos sejam obtidos através de um procedimento aleatório em que se busca uma carteira com investimentos equilibrados.

Para resolução do CCPSP, por exemplo, tal processo deve respeitar a quantidade exata de ativos na carteira (K_{eq}), ou, no caso do CDPSP, a quantidade mínima (K_{min}) e máxima (K_{max}), além das restrições que limitam o investimento mínimo e máximo por ativo, representados por, respectivamente, ϵ_j e δ_j , conforme mostra o Algoritmo (3.2).

Algoritmo 3.2 Inicialização

- 1: **Procedimento** Inicialização($K_{min}, K_{eq}, K_{max}, u_j, l_j, \epsilon_j, \delta_j$)
 - 2: $ub = 1$ (Montante a ser alocado)
 - 3: **enquanto** Restrições de cardinalidade não forem satisfeitas **faça**
 - 4: Selecione aleatoriamente um ativo j na carteira
 - 5: Obtenha w_j através de um procedimento aleatório, respeitando $\epsilon_j \leq w_j \leq \delta_j$ e $w_j \leq ub$
 - 6: Atualize o limite restante a ser alocado: $ub = ub - w_j$
 - 7: **fim enquanto**
-

3.2.2 Avaliação

A fase de avaliação busca determinar a aptidão das partículas do enxame, calculando, para cada partícula, os valores obtidos para os m objetivos do problema. A partir dos cálculos feitos, o conjunto de soluções não-dominadas (H) é atualizado, ou seja, são armazenadas as soluções que irão compor a fronteira de Pareto, explicado na Seção (2.1.1). Assim, após cada iteração, caso alguma das partículas do enxame corrente não seja dominado por nenhum outro presente no H corrente, ele será adicionado. Além disso, caso ele domine algum dos indivíduos já presentes em H , tais indivíduos serão eliminados.

Por se tratar de um método para resolver uma classe de problemas, assim como devido as diferentes maneiras de como os resultados são reportados na literatura, a fase de avaliação do método foi realizada ainda de uma segunda maneira, classificando a qualidade das partículas baseado na função objetivo (3.3).

$$f(p) = \lambda \left[\sum_{j \in A} \sum_{k \in A} w_j w_k \sigma_{jk} \right] - (1 - \lambda) \sum_{j \in A} w_j r_j \quad (3.3)$$

Desse modo, a cada iteração de λ , todas as partículas presente em H são avaliadas pela equação (3.3) e, a que obtiver o menor valor, é guardada no conjunto V . Assim, o total de partículas presente em V será limitada a quantidade de iterações de λ no método.

3.2.3 Adaptive Non-dominated Sorting Crowding Distance

O processo de elitismo das partículas ao longo das iterações é realizado por um procedimento proposto, denominado *Adaptive Non-dominated Sorting Crowding Distance*. Muito comum em algoritmos genéticos, *Non-dominated Sorting* (NS) foi proposto por Deb et al. (2002), associado a um NSGA-II. Mishra, Panda e Majhi (2014a) foram os primeiros a incorporarem a lógica do procedimento para um PSO, constatando resultados competitivos quando comparado com vários métodos.

No método proposto o procedimento de ranqueamento tem duas funções:

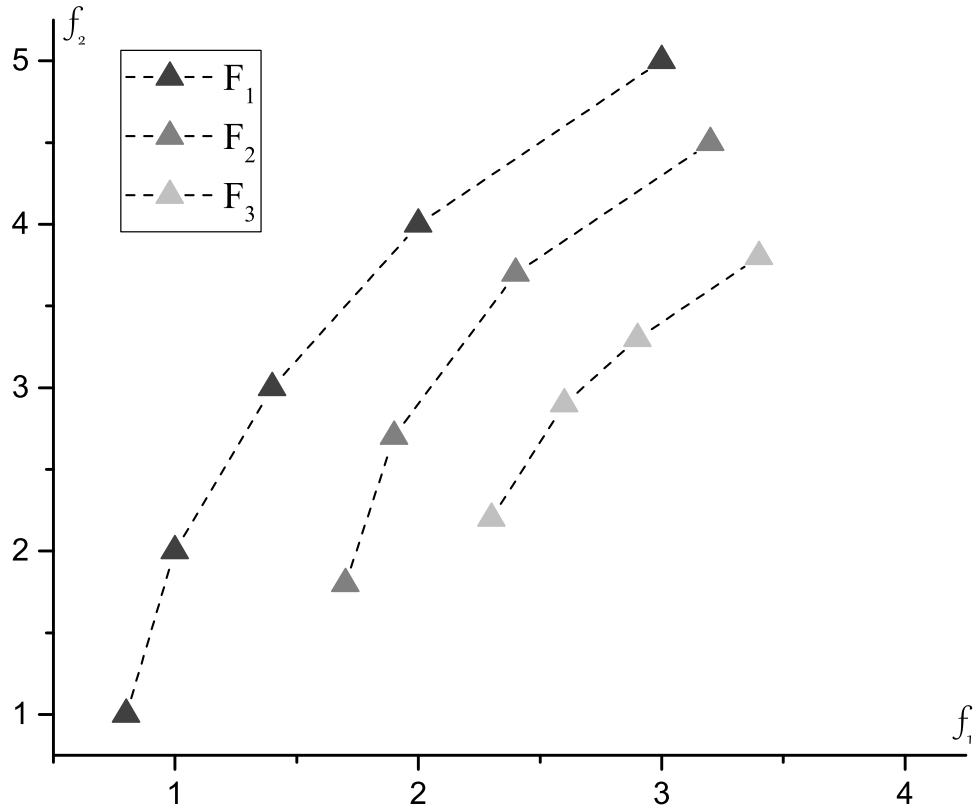
- i) Permitir determinar a melhor posição global a cada iteração;
- ii) Permitir selecionar quais partículas serão excluídas de H , caso o limite de partículas definido seja ultrapassado.

O procedimento se inicia com a execução do NS. O mecanismo consiste em, dado um conjunto de soluções viáveis para o problema, construir todas as possíveis fronteiras de pareto e, em seguida, ordená-las em níveis hierarquicos baseado na qualidade das fronteiras. A Figura (3.1) ilustra o processo para um conjunto com 13 soluções arbitrárias.

Após o NS ser realizado, as fronteiras obtidas são utilizadas em dois mecanismos que avaliam os pontos a elas pertencentes, denominados *Crowding Distance* (CD) e Custo Benefício (CB). A partir de tais avaliações são realizados dois ranqueamentos distintos que, por fim, permitirá a obtenção do ranqueamento final das soluções. A Figura (3.2) ilustra o procedimento, onde P_1 representa as posições correntes do enxame, e P_2 o conjunto H .

O cálculo de cd_i (valor de CD de uma partícula i) baseia-se na distância da partícula i para as duas partículas mais próximas, $i + 1$ e $i - 1$, de modo que o retângulo formado entre $i + 1$ e $i - 1$ seja o menor possível, e que a partícula i seja a única da fronteira a que pertence inclusa na região formada. Assim, o mecanismo permite estimar a densidade de partículas ao redor de uma determinada partícula, conforme ilustra a Figura (3.3).

Inicialmente, é realizado um ordenamento dos valores de cada função objetivo (m). Os valores obtidos para as partículas de maior e menor valores de função objetivo no ordenamento são dadas como infinito, já que não há ao menos dois vizinhos próximos para se calcular da maneira padrão. Após o ordenamento ser realizado para cada função

Figure 3.1: Mecanismo *Non-dominated Sorting*

objetivo, é calculado o valor de $d_{i,m}$ para cada partícula e objetivo, que é obtido através da diferença entre os objetivos das partículas $i - 1$ e $i + 1$. Em seguida, é feito o primeiro ranqueamento (RK_1) com base no valor final de d_i , obedecendo a ordem dos níveis das fronteiras obtidas com o NS. O Algoritmo (3.3) descreve o processo do cálculo de CD.

Algoritmo 3.3 Procedimento *Crowding Distance*

- 1: Input: H
 - 2: **enquanto** $m < max_m$ **faça**
 - 3: Rankeie as partículas de acordo com o objetivo m
 - 4: **enquanto** $i < A$ **faça**
 - 5: $d_{i,m} = \frac{f_{i+1,m} - f_{i-1,m}}{f_m^{max} - f_m^{min}}$ (distância da partícula i na função objetivo m)
 - 6: $cd_i = cd_i + d_{i,m}$
 - 7: **fim enquanto**
 - 8: $cd_0 = cd_A = \infty$
 - 9: **fim enquanto**
-

Posteriormente, é utilizado um mecanismo proposto denominado Custo Benefício, que realizará um segundo ranqueamento (RK_2) em separado, buscando selecionar as melhores partículas baseado na relação de custo benefício entre os valores obtidos para as funções objetivo do problema. Assim como ocorre no mecanismo de obtenção do CD, as fronteiras

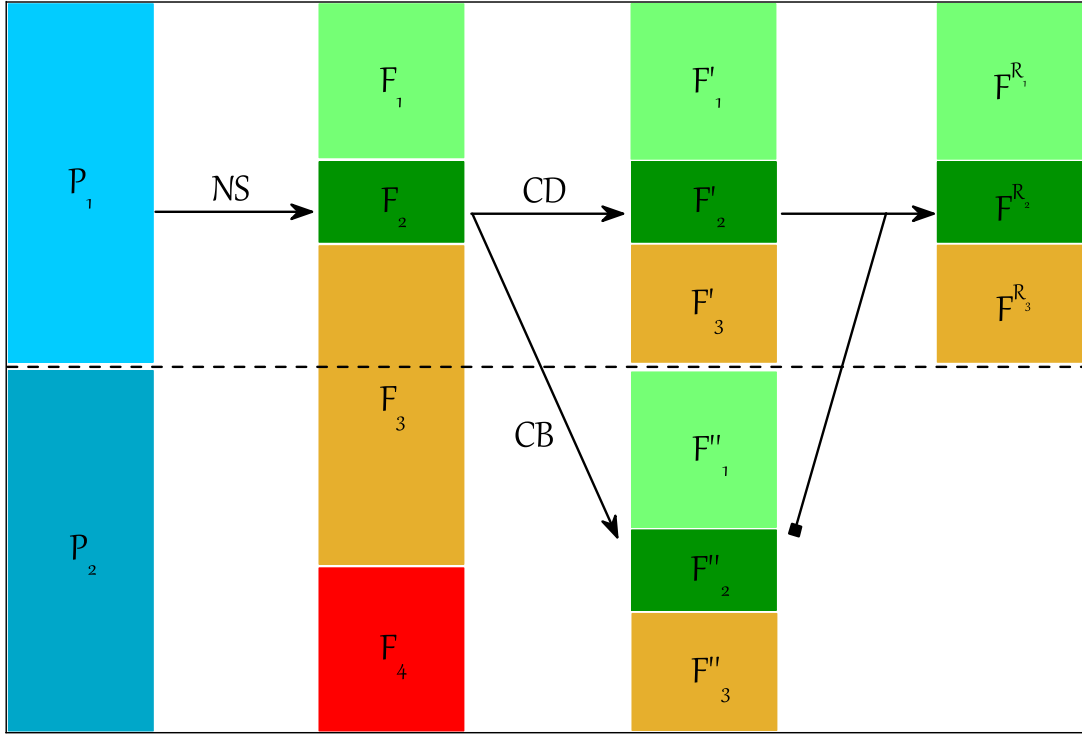
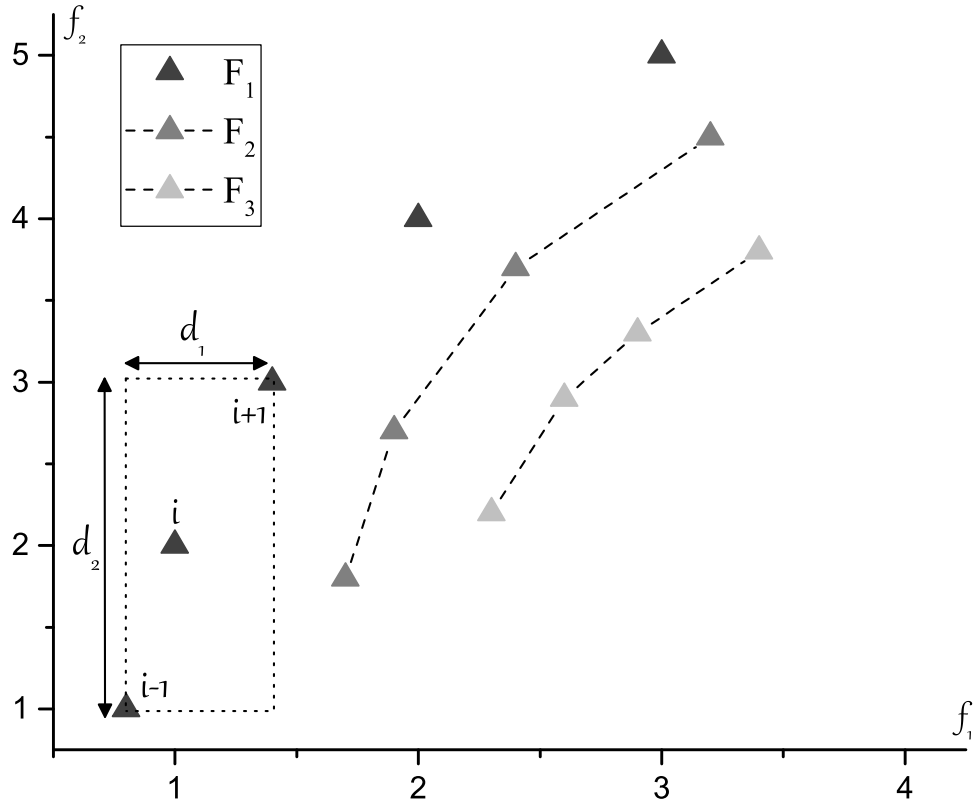


Figure 3.2: Procedimento de Ranqueamento das Soluções

obtidas após o NS ser realizado também são utilizadas para no cálculo do CB. O CB de cada partícula (CB_i) é obtido através da razão entre o retorno esperado e o risco associado a posição da partícula no espaço de busca, conforme mostra a Equação (3.4). Quanto maior o valor de CB_i , mais próxima da fronteira ótima estará a partícula i . A Figura (3.4) ilustra como se dá sua obtenção para cada partícula.

$$CB_i = \frac{f_{i,1}}{f_{i,2}}, \forall i \in H \quad (3.4)$$

Por fim, com os dois ranqueamentos realizado, é feito um procedimento para efetuar o ranqueamento final. A cada partícula i , é dada uma pontuação associada a sua posição em cada ranking. Após as pontuações serem estabelecidas, são somadas e cada partícula tem sua pontuação final determinada. Em seguida, as partículas são ranqueadas em ordem crescente, isto é, a partícula de menor pontuação será a primeira da lista, que será preenchida até a de maior pontuação. Em caso de empate entre partículas, a com melhor CB_i é considerada melhor. Caso o tamanho de H esteja superando o seu tamanho estipulado, as partículas com posição no ranqueamento final ultrapassando o limite serão

Figure 3.3: Mecanismo *Crowding Distance*

eliminadas.

3.2.3.1 Seleção de Melhor Posição Local e Global

Por definição, a melhor posição (solução) local de cada partícula representa a melhor posição já ocupada por cada partícula desde o início do método. Ao longo das iterações é realizada uma checagem para detectar se houve melhoria na posição de cada partícula, se houver ocorrido, sua melhor posição local é atualizada. O mecanismo para julgar se houve melhoria baseia-se nos conceitos de dominância. Se a posição $x_{i,j}^t$ obtida por i na iteração t dominar $p_{i,j}$, $p_{i,j}$ é atualizada. Caso $p_{i,j}$ domine a posição obtida, nenhum procedimento é realizado. Por fim, caso nenhuma posição domine a outra, um procedimento aleatório adotado determinará se $p_{i,j}$ será atualizada ou não.

A seleção da melhor posição global é uma das etapas mais importantes de um algoritmo PSO. O mecanismo de seleção adequado irá variar de acordo com a abordagem estratégica definida. Assim, tal procedimento é extremamente importante para se atingir o nível de convergência que se busca no método.

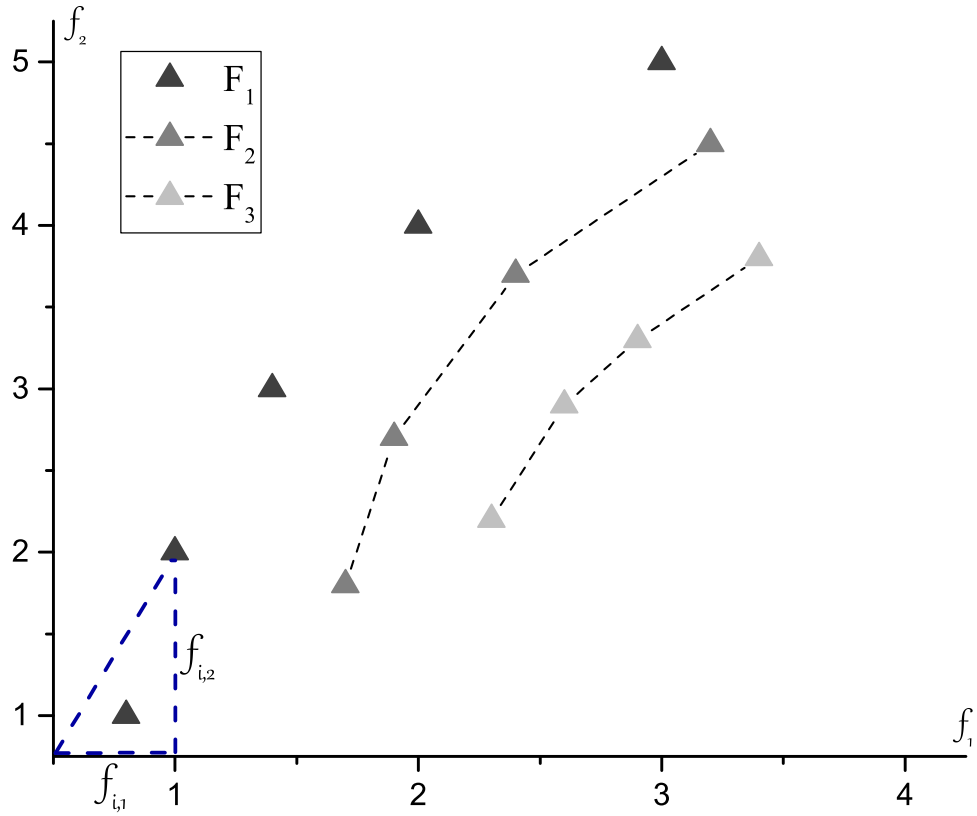


Figure 3.4: Mecanismo de Custo Benefício

No método proposto, a cada iteração o conjunto H é utilizado para determinar a melhor posição global. A melhor posição global é obtida a partir de uma posição aleatória entre as posições que representam as 15% melhores soluções após realizado o ranqueamento através do *crowding distance*, conforme mostra o Algoritmo (3.4).

Algoritmo 3.4 Procedimento de Melhor Posição Global

- 1: Input: B
 - 2: Selecione as 15% melhores posições de partículas para compor o conjunto B
 - 3: Escolha aleatoriamente uma posição de B para atualizar $p_{g,j}$
-

3.2.4 Mutação

A etapa de mutação é responsável por realizar a diversificação do enxame entre uma iteração e outra. Para cada partícula, há uma pequena probabilidade de que ocorra uma mutação em alguma dimensão de sua posição no espaço, ou seja, que seja alterada sua posição em relação as demais.

Tal procedimento só pode ser executado quando a iteração corrente for menor que a

metade do máximo de iterações do método ($iter < max_iter * pMut$), onde $pMut = 0.5$. O objetivo desse parâmetro na mutação é permitir que, no início, o método consiga percorrer por um espaço de busca maior, priorizando a convergência na segunda metade das iterações. O procedimento é descrito no Algoritmo (3.5).

Algoritmo 3.5 Procedimento de Mutação

```

1: Input:  $P$ 
2: para  $i \in P$  faça
3:   se  $mut(i) == 1$  (mecanismo aleatório para determinar se  $i$  deve sofrer mutação) então
4:     Selecione aleatoriamente uma dimensão (ativo)  $j$  da posição (solução) da partícula  $i$ 
5:     Determine os limitantes inferior  $lb$  e superior  $ub$  para a mutação
6:     Gere aleatoriamente um novo valor para a dimensão  $j$  da partícula  $i$  entre  $(lb, ub)$ 
7:   fim se
8: fim para

```

3.2.5 Mecanismos de Viabilização

Durante a execução do método proposto é realizado um procedimento de checagem de viabilidade das soluções. Caso alguma das soluções não seja viável, é executado um mecanismo de viabilização.

Diversos mecanismos de viabilização foram implementados, cada um com o objetivo de corrigir determinadas inviabilidades que possam surgir nas soluções no decorrer da execução do método. Em geral, os mecanismos consistem em alterar os valores referentes às posições em cada dimensão da partícula, de modo a viabilizá-la para respeitar todas as restrições do problema. Os mecanismos foram adaptados baseados em propostas de Xu et al. (2010) e Lwin (2015).

Considerando, por exemplo, um problema com 10 ativos disponíveis, onde uma solução é considerada inviável por não respeitar a restrição que limita a 100% o investimento total da carteira, há o seguinte processo de viabilização da solução, realizado através da Equação (3.5) e representado na Tabela (3.3).

$$w_j = \frac{w_j}{\sum_{j \in A} w_j}, \forall j \in A \quad (3.5)$$

Caso, após a realização do ajuste de normalização, as restrições que limitam a quantidade mínima (ϵ_i) e máxima (δ_i) de investimento por ativo sejam violadas, os seguintes ajustes são realizados nas proporções investidas em cada ativo:

Table 3.3: Exemplo de Viabilização de Solução Via Normalização

Antes	z_j	0	1	1	0	1	1	0	0	1	0	\sum
	w_j	0.00	0.15	0.23	0.00	0.11	0.46	0.00	0.00	0.25	0.00	1.20
Depois	z_j	0	1	1	0	1	1	0	0	1	0	\sum
	w_j	0.00	0.13	0.19	0.00	0.09	0.38	0.00	0.00	0.21	0.00	1.00

$$w_j = \begin{cases} w_j + \psi(\frac{\theta_j}{\delta^*}) & \text{se } \delta_j > w_j \\ \delta_j & \text{se } \delta_j < w_j \\ w_j - \phi(\frac{\varphi_j}{\epsilon^*}) & \text{se } w_j > \epsilon_j \\ \epsilon_j & \text{se } w_j < \epsilon_j \end{cases}$$

$$\theta_j = \delta_j - w_j \quad (3.6)$$

$$\varphi_j = w_j - \epsilon_j \quad (3.7)$$

$$\delta^* = \sum_{j=1}^A \theta_j, \text{ onde } \theta_j > 0 \quad (3.8)$$

$$\psi = \sum_{j=1}^A |\theta_j|, \text{ onde } \theta_j < 0 \quad (3.9)$$

$$\epsilon^* = \sum_{j=1}^A \varphi_j, \text{ onde } \varphi_j > 0 \quad (3.10)$$

$$\phi = \sum_{j=1}^A |\varphi_j|, \text{ onde } \varphi_j < 0 \quad (3.11)$$

Onde δ^* indica a soma de todas as “sobras” entre o máximo que poderia ser investido e o que realmente foi investido nos ativos e ψ representa a soma de todos os excessos investimentos nos ativos, isto é, a soma das proporções de investimentos que ultrapassaram o limite superior de cada ativo. Por sua vez, ϵ^* representa a soma de todas as “sobras” entre o mínimo que deveria ser investido e o que foi investido nos ativos, enquanto ϕ representa a soma de todas as “faltas” de investimentos, isto é, as diferenças entre o mínimo que deveria ser investido e o que realmente foi investido.

Nos problemas em que há restrições de lote mínimo de transação, é realizado um ajuste após serem feitos os mecanismos anteriores. O procedimento calcula, para cada ativo j , o resto da divisão de w_j pelo lote mínimo do ativo l_j , isto é, $w_j \bmod l_j$. Caso a subtração entre w_j e o resto não viole a restrição de investimento mínimo no ativo j , ela é realizada. Caso contrário, o montante $l_j - (w_j \bmod l_j)$ é somado ao ativo w_j . Após o procedimento

ser realizado com todos os ativos, a soma do montante restante a ser investido na carteira é distribuído aleatoriamente em lotes unitários de l_j .

$$w_j = \begin{cases} w_j - (w_j \bmod l_j) & \text{se } w_j - (w_j \bmod l_j) > \epsilon_j \\ w_j + l_j - (w_j \bmod l_j) & \text{se } w_j - (w_j \bmod l_j) < \epsilon_j \end{cases}$$

Capítulo 4

Resultados Computacionais

Neste capítulo são apresentadas as características das instâncias testadas, os resultados obtidos pelo método proposto, assim como as comparações com os principais resultados presentes na literatura.

A abordagem proposta no presente trabalho foi implementada em linguagem de programação C++ e executada em uma máquina com processador Intel Core i7 3.40 GHz, 16 GB de memória RAM e sistema operacional Linux Mint 13.

4.1 Instâncias

Para avaliar o desempenho do método proposto foram utilizadas as instâncias para problemas de otimização de seleção de carteiras da *OR-Library* (CHANG et al., 2000). O conjunto representa instâncias reais, com dados coletados dos principais mercados financeiros, conforme mostra a Tabela (4.1), e são as instâncias mais testadas na literatura, tendo suas fronteiras ótimas irrestritas detalhadas e acessíveis online.

O conjunto é composto por cinco instâncias, contendo 31, 85, 89, 98 e 225 ativos. Para cada ativo, é detalhado seu retorno estimado e seu desvio padrão, além de uma matriz de covariância entre todos os ativos.

Table 4.1: Instâncias

Instâncias	Mercado	Ativos
<i>Hang Seng</i>	Hong Kong	31
<i>DAX 100</i>	Alemanha	85
<i>FTSE 100</i>	Reino Unido	89
<i>S&P 100</i>	Estados Unidos	98
<i>Nikkei 225</i>	Japão	225

4.2 Parâmetros e Avaliação das Soluções

Para comparar os resultados alcançados com os principais da literatura, foi necessário utilizar duas abordagens de construção do conjunto de soluções não-dominadas.

Em uma frente, foi adotado o mesmo procedimento utilizado inicialmente em (CHANG et al., 2000) e seguido por diversos autores, onde as soluções são avaliadas conforme a Equação (3.3), tratando os dois objetivos em uma única função e obtendo uma única solução para cada um dos 50 pesos diferentes do parâmetro λ . Dessa forma, λ é inicializado em 0 e incrementado na proporção de 0.02 até atingir o valor de 1, conforme mostra a Equação (4.1). Assim, o conjunto com as soluções não-dominadas gerado com a solução obtida para cada λ é chamado de V .

$$\lambda_h = (h - 1)/49, \forall h = 1, \dots, 50 \quad (4.1)$$

Por outro lado, diversos autores utilizaram uma abordagem multiobjetivo na avaliação das soluções pelo método, utilizando o conjunto H de soluções não-dominadas, que é atualizado a cada iteração do método, armazenando as soluções não-dominadas obtidas ao longo de sua execução.

4.3 Métricas de Desempenho

Por se tratar de um problema multiobjetivo, os resultados podem ser encontrados de diversas formas na literatura. Assim, nesta Seção é apresentada uma breve explicação das métricas de desempenho utilizadas para comparar os resultados alcançados pelos métodos.

4.3.1 *Spacing* (S)

Proposta por Schott (1995), é responsável por medir a dispersão do conjunto de soluções não-nominadas obtido em comparação com a fronteira ótima, isto é, o quanto varia a distância entre cada solução da fronteira obtida para a solução mais próxima pertencente a fronteira ótima.

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\bar{d} - d_i)^2} \quad (4.2)$$

Onde d_i é a distância euclidiana entre o ponto i da fronteira obtida para o ponto j

mais próximo pertencente a fronteira ótima, \bar{d} a média de todos os d_i e n a quantidade de soluções presentes na fronteira obtida. O espaçamento deve ser o menor possível para que o conjunto de soluções apresentem uma qualidade superior. Assim, $S = 0$ indica que todos os pontos estão igualmente distantes da fronteira ótima.

4.3.2 *Generational Distance (GD)*

Estima a distância entre a fronteira obtida para a fronteira de pareto ótima (VELDHUIZEN; LAMONT, 1998; VELDHUIZEN, 1999). A métrica é calculada a partir da média entre as distâncias euclidianas dos elementos do conjunto de soluções não-dominadas para os respectivos pontos mais próximos pertencentes a fronteira de Pareto ótima.

$$GD = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n d_i^2}}{n} \quad (4.3)$$

Dessa forma, quanto menor o valor de GD, mais próximo está o conjunto obtido da fronteira ótima, de forma que, quando $GD = 0$, isto indica que todas as soluções do conjunto estão presentes na fronteira ótima. A Figura (4.1) ilustra a obtenção de GD.

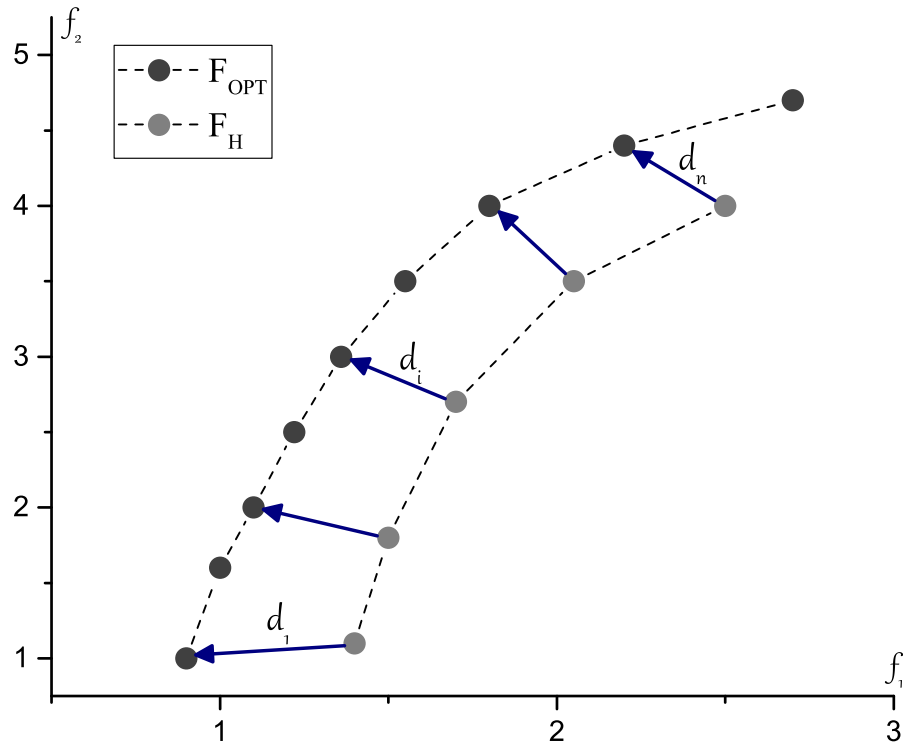


Figure 4.1: Métrica *Generational Distance*

4.3.3 Diversity Metric (Δ)

Mensura a extensão da dispersão do conjunto, isto é, quão uniformemente os pontos são distribuídos entre a aproximação do conjunto no espaço objetivo. Essa métrica não requer necessariamente de uma fronteira ótima, estando relacionada com a distância euclidiana entre as soluções (DEB et al., 2002).

$$\Delta = \frac{d_f + d_l + \sum_{i=1}^{n-1} |d_i - \bar{d}|}{d_f + d_l + (n-1)\bar{d}} \quad (4.4)$$

Onde d_i é a distância euclidiana entre soluções consecutivas na fronteira obtida, \bar{d} é a média dessas distâncias, enquanto d_f e d_l são as distâncias euclidianas entre as soluções das extremidades da fronteira obtida com os pontos mais próximos da fronteira ótima.

Conforme mostra a Figura (4.2), quanto menor o valor de Δ , melhor a diversificação do conjunto de soluções não-dominadas. Dessa forma, $\Delta = 0$ indica que o conjunto é o mais uniformemente distribuído possível.

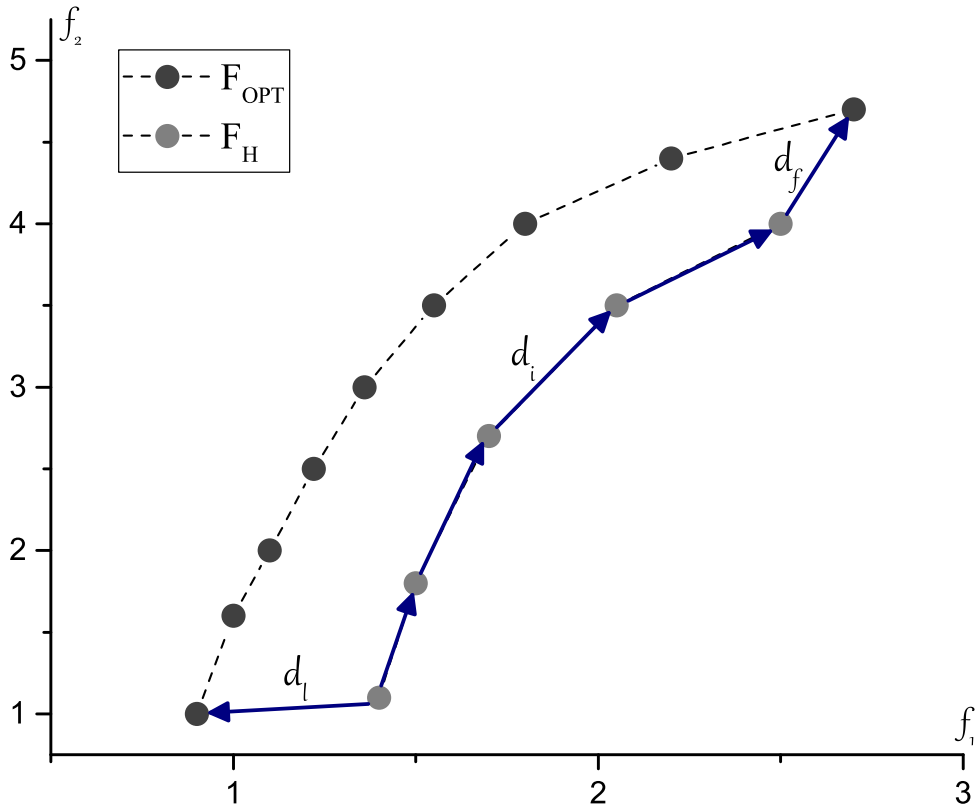


Figure 4.2: Métrica *Diversity*

4.3.4 *Hypervolume* (HV)

A métrica denominada de *Hypervolume* é amplamente utilizada em diversos problemas multiobjetivos na literatura. Em geral, a métrica consiste em calcular a área (ou volume) gerada através da relação dos pontos da fronteira de pareto obtida com um ponto referencial dado, denominado ponto de nadir (R). Como resultado, a métrica permite mensurar o quão próxima é a fronteira obtida da fronteira ideal, assim como a diversidade das soluções obtidas.

O ponto de nadir a ser utilizado pode ser determinado de diversas formas, sendo, a mais conhecida, através de um vetor correspondente aos piores valores de funções objetivo obtidos. Dessa forma, utilizando os piores valores alcançados para cada objetivo do problema, é possível garantir que todas as soluções da fronteira obtida serão dominantes do ponto de Nadirmelhores ou iguais a ela.

Assim, seja um conjunto de soluções não-dominadas H , o HV de H corresponde ao somatório das áreas ou volumes (V_x) formadas entre cada solução $x_i \in H$ e R , conforme observado na Equação (4.5).

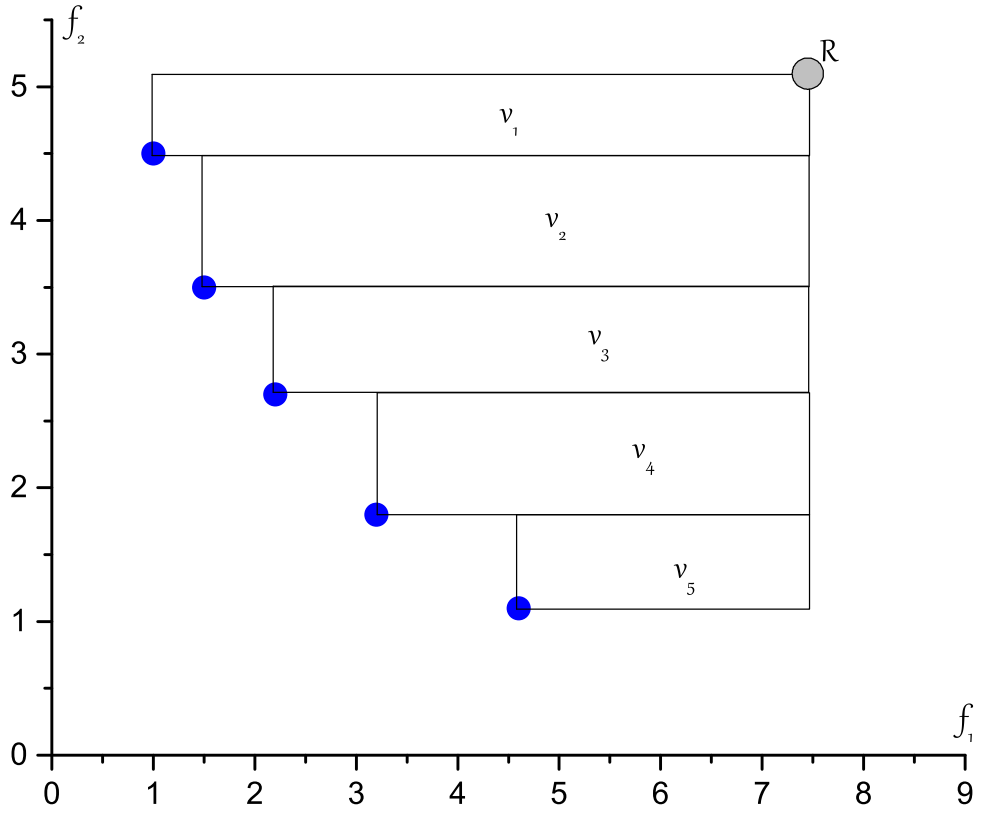
$$HV = \bigcup_{x_i \in H} V_x \quad (4.5)$$

Quanto maior o valor do HV obtido, mais distante a fronteira estará de R e, por consequência, mais próxima da fronteira ótima, além de indicar uma maior diversidade das soluções. Como utiliza o ponto R como referencial, o calculo de HV não depende da existência de uma fronteira ótima para ser feito, uma das razões que justifica sua popularidade em problemas multiobjetivo. A Figura (4.3) ilustra a representação do HV de uma fronteira arbitrária.

4.3.5 *Error Ratio* (Er)

Indica a porcentagem de soluções no conjunto de soluções não-dominadas que não fazem parte da fronteira ótima (VELDHUIZEN; LAMONT, 1998).

Quanto menor o valor obtido para Er, melhor será o conjunto de soluções obtido, uma vez que contará com mais pontos pertencentes a fronteira ótima.

Figure 4.3: Métrica *Hypervolume*

$$Er = \frac{\sum_{i=1}^n e_i}{n} \quad (4.6)$$

Onde e_i são variáveis binárias que indicam 1 caso a solução i não pertença a fronteira ótima, e 0 caso contrário.

4.3.6 Convergence Metric (C)

Definida por Zitzler e Thiele (1999), compara a qualidade de dois conjuntos de soluções não-dominadas. Essa métrica também não leva em consideração uma fronteira de pareto ótima. Sejam A e B dois conjuntos de soluções não-dominadas, a métrica C é definida como:

$$C(A, B) = \frac{|\{b \in B | \exists a \in A : a \pi b\}|}{|B|} \quad (4.7)$$

De maneira geral, a métrica mapeia os pares (A, B) no intervalo $[0, 1]$. Se $C(A, B) = 1$, todas as soluções em B são dominadas por pelo menos uma solução de A . Da mesma forma, caso $C(A, B) = 0$, nenhuma solução de B é dominada por alguma de A .

4.3.7 Outras Métricas

Seja $(v_{i_j}^s, r_{i_j}^s)$ o ponto pertencente a fronteira ótima mais próximo do ponto (v_j^h, r_j^h) da fronteira obtida pela heurística proposta, onde i_j pode ser definido como:

$$i_j = \arg \min_{i=1, \dots, 2000} \sqrt{(v_i^s - v_j^h)^2 + (r_i^s - r_j^h)^2}, \forall j = 1, \dots, n \quad (4.8)$$

O *Variance of Return Error* (VRE) e *Mean Return Error* (MRE) são definidos, respectivamente, como:

$$VRE = \frac{(\sum_{j=1}^n 100|v_{i_j}^s - v_j^h|/v_j^h)}{n} \quad (4.9)$$

$$MRE = \frac{(\sum_{j=1}^n 100|r_{i_j}^s - r_j^h|/r_j^h)}{n} \quad (4.10)$$

Além disso, alguns autores utilizaram o *Mean Percentage Error* para avaliar as fronteiras geradas (FERNÁNDEZ; GÓMEZ, 2007; WOODSIDE-ORIAKHI; LUCAS; BEASLEY, 2011). Sejam (v_i^s, r_i^s) , $(i = 1, \dots, 2000)$ e (v_j^h, r_j^h) , $(j = 1, \dots, n)$, representação, respectivamente, da variância e do retorno médio do i th ponto da fronteira ótima, e do j th ponto na fronteira obtida pelo método proposto. Assim, o ponto pertencente a fronteira ótima mais próximo do retorno médio $(\hat{r}_{i_j}^s)$ e da variância do retorno $(\hat{v}_{i_j}^s)$ do ponto pertencente a fronteira heurística é obtido como:

$$r_{m_j}^s = \min(r_i^s | r_i^s \geq r_j^h), j = 1, \dots, n \quad (4.11)$$

$$r_{n_j}^s = \max(r_i^s | r_i^s \leq r_j^h), j = 1, \dots, n \quad (4.12)$$

$$v_{m_j}^s = \min(v_i^s | v_i^s \geq v_j^h), j = 1, \dots, n \quad (4.13)$$

$$v_{n_j}^s = \max(v_i^s | v_i^s \leq v_j^h), j = 1, \dots, n \quad (4.14)$$

$$\hat{v}_{i_j}^s = v_{n_j}^s + (v_{m_j}^s - v_{n_j}^s) \frac{r_j^h - r_{n_j}^s}{r_{m_j}^s - r_{n_j}^s}, j = 1, \dots, n \quad (4.15)$$

$$\hat{r}_{i_j}^s = r_{n_j}^s + (r_{m_j}^s - r_{n_j}^s) \frac{v_j^h - v_{n_j}^s}{v_{m_j}^s - v_{n_j}^s}, j = 1, \dots, n \quad (4.16)$$

O percentual de desvio da variância (φ_j), retorno (Ψ_j) e do desvio padrão (β) para qualquer ponto alcançado pelo método (v_j^h, r_j^h) são calculados como:

$$\varphi_j = 100 \frac{|v_j^h - \hat{v}_{i_j}^s|}{\hat{v}_{i_j}^s}, j = 1, \dots, n \quad (4.17)$$

$$\Psi_j = 100 \frac{|r_j^h - \hat{r}_{i_j}^s|}{\hat{r}_{i_j}^s}, j = 1, \dots, n \quad (4.18)$$

$$\beta_j = 100 \frac{|\sqrt{v_j^h} - \sqrt{\hat{v}_{i_j}^s}|}{\sqrt{\hat{v}_{i_j}^s}}, j = 1, \dots, n \quad (4.19)$$

Assim, a partir das Equações (4.18) e (4.19) é possível determinar tanto o *Mean Percentage Error* (MPE), como o mínimo (MinPE), máximo (MaxPE) e a mediana (MedPE).

$$MPE = \frac{\sum_{j=1}^n \min(\beta_j, \Psi_j)}{n} \quad (4.20)$$

$$MinPE = \arg \min_{j=1, \dots, n} (\min(\beta_j, \Psi_j)) \quad (4.21)$$

$$MaxPE = \arg \max_{j=1, \dots, n} (\min(\beta_j, \Psi_j)) \quad (4.22)$$

Nas Seções a seguir são apresentadas as comparações dos desempenhos entre o método proposto e os principais apresentados na literatura, de acordo com os problemas resolvidos. No caso do CCPSP, também foi realizada uma comparação entre o ANSMOPSO e uma abordagem baseada em MOPSO proposta na literatura. Além disso, é apresentada uma breve descrição de cada problema.

4.4 UPSP

O problema de seleção de carteiras irrestrito corresponde ao problema clássico proposto por Markowitz (1952) e apresentado na Seção (2.1.2), onde as restrições se resumem a limitar os investimentos dos ativos, indicando que devem ser não-negativos e menores ou iguais a 100% do montante a ser investido, conforme mostrado na Equação (2.9).

4.4.1 Comparação dos Resultados

Os resultados alcançados para o UPSP foram comparados diversas abordagens e métricas presentes na literatura, detalhadas no Quadro (4.2).

Table 4.2: Métodos, Parâmetros e Métricas para o UPSP

Trabalho	Métodos	Parâmetros	Métricas	Conjuntos	Execuções	Máquina
Chang ¹ <i>et al.</i> (2000)	GA; TS; SA	$\epsilon_j = 0.00;$ $\delta_j = 1$	MPE	V	média de 20	Workstation R4000, 100 MHz, 48 MB RAM
Xu ² <i>et al.</i> (2010)	GA; PSO; PBIL	$\epsilon_j = 0.00;$ $\delta_j = 1$	MPE	V	média de 15	-
Lwin ³ <i>et al.</i> (2013)	PBILDE	$\epsilon_j = 0.00;$ $\delta_j = 1$	MPE; Tempo	V, H	média de 20	Core 2 Duo 3.16 GHz, 2 GB RAM
Mishra ⁴ <i>et al.</i> (2014b)	PAES; PESA; Micro-GA; NSGA-II; MOBFO	$\epsilon_j = 0.00;$ $\delta_j = 1$	GD, S, Δ , Er	V	média de 25	MATLAB, Core 2 Duo 3 GHz, 4 GB RAM

Em um primeiro momento, os resultados foram comparados com abordagens baseadas em GA, TS, SA, PSO, além de dois métodos denominados PBIL e PBILDE. Para efeito de comparação, foram consideradas as métricas de desempenho MPE e MedPE, além do tempo de execução, conforme mostra a Tabela (4.3).

Os resultados alcançados demonstraram bastante equilíbrio entre os desempenhos do método proposto e dos algoritmos baseados em PBIL e GA. Nas instâncias com menos ativos o método proposto foi levemente superior aos demais, enquanto na Nikkei 225 a abordagem baseada em GA apresentou uma superioridade acentuada.

Levando em consideração o tempo de execução, o ANSMOPSO obteve um resultado significativamente melhor do que o método PBILDE, sendo mais acentuado nas instâncias maiores. Devido a não divulgação dos tempos de execução dos demais métodos, não foi possível considerá-los nesta comparação.

Além disso, foi observado o desempenho do método proposto com relação as métri-

Table 4.3: Resultados para o UPSP nas métricas MPE e MedPE - V

Instância	Ativos	Métrica	GA ¹	TS ¹	SA ¹	GA ²	PSO ²	PBIL ²	PBILDE ³	ANSMOPSO
Hang Seng	31	MPE	0.0202	0.8973	0.1129	0.0191	0.1422	0.0003	0.0002	0.0002
		MedPE	0.0165	1.0718	0.0161	0.0166	<0.0001	<0.0001	<0.0001	<0.0001
		Tempo (s)	-	-	-	-	-	-	109	15
DAX 100	85	MPE	0.0136	3.5645	0.0394	0.0350	1.1044	0.0023	0.0052	0.0050
		MedPE	0.0123	2.7816	0.0033	0.0124	<0.0001	<0.0001	<0.0001	<0.0001
		Tempo (s)	-	-	-	-	-	-	1445	126
FTSE 100	89	MPE	0.0063	3.2731	0.2012	0.0109	1.143	0.0186	0.0059	0.0064
		MedPE	0.0029	3.0238	0.0426	0.0020	0.0084	<0.0001	<0.0001	<0.0001
		Tempo (s)	-	-	-	-	-	-	1643	141
S&P 100	98	MPE	0.0084	4.4281	0.2158	0.0430	2.0249	0.0137	0.0078	0.0073
		MedPE	0.0085	4.2781	0.0142	0.0085	0.5133	<0.0001	<0.0001	0.0038
		Tempo (s)	-	-	-	-	-	-	2094	160
Nikkei 225	225	MPE	0.0085	15.9163	1.7681	0.3715	8.1781	0.0606	0.2733	0.0721
		MedPE	0.0084	14.2668	0.8107	0.0068	4.7023	<0.0001	<0.0001	0.0244
		Tempo (s)	-	-	-	-	-	-	24823	855
Avg.	-	MPE	0.0114	5.6158	0.4675	0.0959	2.5185	0.0191	0.0584	0.0182

cas S, GD, Δ e Er, comparando-o com as abordagens multiobjetivo implementadas por Mishra, Panda e Majhi (2014a). Conforme pode ser visto na Tabela (4.4), que apresenta os resultados para a instância Nikkei 225, o ANSMOPSO alcançou melhores médias para as métricas GD, Δ e Er. A diferença acentuada nos resultados para GD e Er mostram que, além da fronteira obtida estar significativamente mais próxima da fronteira ótima, o método conseguiu alcançar um maior número de pontos pertencentes a fronteira ótima do que os demais métodos. Por sua vez, considerando a métrica S, o ANSMOPSO foi levemente superado pelo MOBFO, indicando que há uma maior oscilação no distanciamento dos pontos da fronteira ANSMOPSO em comparação com o MOBFO.

Table 4.4: Resultados para o UPSP nas métricas S, GD, Δ e Er - V - Nikkei 225

Métrica		PESA ⁴	Micro-GA ⁴	APAES ⁴	NSGA-II ⁴	MOBFO ⁴	ANSMOPSO
S	Avg.	4.23E-5	2.67E-5	9.73E-6	5.74E-6	4.21E-6	4.35E-6
	Std.	1.03E-5	6.72E-6	1.44E-6	1.43E-6	1.05E-6	1.22E-6
GD	Avg.	1.17E-2	8.32E-3	1.28E-3	8.72E-4	7.15E-4	1.14E-4
	Std.	3.42E-3	2.08E-3	3.20E-4	2.18E-4	1.81E-4	6.45E-5
Δ	Avg.	0.812	0.803	0.786	0.596	0.553	0.308
	Std.	0.203	0.208	0.193	0.148	0.147	0.116
Er	Avg.	0.45	0.41	0.37	0.26	0.19	0.15
	Std.	0.19	0.16	0.12	0.08	0.06	0.06

4.5 CCPSP

4.5.1 Formulação do Problema

O Problema de Seleção de Carteiras de Investimento com Restrições de Cardinalidade (CCPSP) trata do problema clássico apresentado por Markowitz (1952) com a inclusão de restrições de cardinalidade de igualdade e de limitantes de investimento por ativo.

Tal configuração de PSP é uma das mais comumente estudadas e tratadas na literatura. Isso se dá tanto pela sua complexidade, que motiva os pesquisadores a desenvolverem métodos mais eficazes, como pela sua aplicação prática, já que restrições de cardinalidade e de limitantes de investimento por ativo são duas das principais considerações feitas por investidores antes de tomarem decisões. A formulação a seguir expressa o CCPSP.

$$z_1 = \min \sum_{j \in A} \sum_{k \in A} w_j w_k \sigma_{jk} \quad (4.23)$$

$$z_2 = \max \sum_{j \in A} w_j r_j \quad (4.24)$$

Sujeito a:

$$\sum_{j \in A} w_j = 1 \quad (4.25)$$

$$\sum_{j \in A} z_j = K \quad (4.26)$$

$$\epsilon_j z_j \leq w_j \leq \delta_j z_j, j \in A \quad (4.27)$$

$$z_j \in \{0, 1\}, j \in A \quad (4.28)$$

4.5.2 Comparação dos Resultados

Os resultados relatados na presente Seção consideraram os parâmetros $K = 10$, $\epsilon = 0.01$ e $\delta = 1.00$ em seus métodos, entretanto, os desempenhos foram reportados considerando diversas métricas. Assim, foi necessária a realização de várias comparações, tanto para comparar com os principais resultados presentes na literatura, como para melhor reportar o desempenho alcançado pelo método proposto. A Tabela (4.5) apresenta os métodos desenvolvidos por cada trabalho, as métricas de desempenho utilizadas, além de demais configurações de execução e das máquinas utilizadas.

A Tabela (4.6) reporta os resultados obtidos pelo método proposto e diversas abor-

Table 4.5: Métodos, Parâmetros e Métricas para o CCPSP

Trabalho	Métodos	Parâmetros	Métricas	Conjuntos	Execuções	Máquina
Chang ¹ <i>et al.</i> (2000)	GA; TS; SA	$K = 10$; $\epsilon_j = 0.01$; $\delta_j = 1$	MPE; Tempo	V, H	-	Workstation R4000, 100 MHz, 48 MB RAM
Fernández ⁵ <i>et al.</i> (2007)	NN	$K = 10$; $\epsilon_j = 0.01$; $\delta_j = 1$	MPE; Tempo	H	-	-
Cura ⁶ (2009)	PSO	$K = 10$; $\epsilon_j = 0.01$; $\delta_j = 1$	VRE; MRE; Tempo	V	-	Pentium M2.13 GHz, 1 GB RAM
Woodside- Oriakhi ⁷ <i>et al.</i> (2011)	GA; TS; SA	$K = 10$; $\epsilon_j = 0.01$; $\delta_j = 1$	MPE; Tempo	V	-	Core 2 Duo 2.4 GHz, 3.24 GB RAM
Sadigh ⁸ <i>et al.</i> (2012)	PHNN	$K = 10$; $\epsilon_j = 0.01$; $\delta_j = 1$	VRE; MRE	V	-	MATLAB 7.6, Core 2 Duo 2.26 GHz, 2 GB RAM
Lwin ³ <i>et al.</i> (2013)	PBILDE	$K = 10$; $\epsilon_j = 0.01$; $\delta_j = 1$	MPE; Tempo	V, H	média de 20	Core 2 Duo 3.16 GHz, 2 GB RAM
Salahi ⁹ <i>et al.</i> (2014)	ICPSO; IHS	$K = 10$; $\epsilon_j = 0.01$; $\delta_j = 1$	VRE; MRE	V	-	MATLAB 8.0, Core CPU 2.70 GHz, 1 GB RAM
Mishra ¹⁰ <i>et al.</i> (2014a)	PESA-II; SPEA2; NSGA-II; MOPSO	$K = 10$; $\epsilon_j = 0.01$; $\delta_j = 1$	VRE; MRE; S; GD; Δ	V	melhor de 25	MATLAB, Core 2 Duo 3 GHz, 4 GB RAM
Mishra ⁴ <i>et al.</i> (2014b)	PAES; PESA; Micro-GA; NSGA-II; MOBFO	$K = 10$; $\epsilon_j = 0.01$; $\delta_j = 1$	S; GD; Δ ; Er	H	-	MATLAB, Core 2 Duo 3 GHz, 4 GB RAM
Baykasoğlu ¹¹ <i>et al.</i> (2015)	GRASP	$K = 10$; $\epsilon_j = 0.01$; $\delta_j = 1$	VRE; MRE	V, H	-	-

dagens multiobjetivo e monoobjetivo, considerando VRE e MRE. Levando o MRE em consideração, foi constatado bastante equilíbrio nos resultados observados. Os métodos PHNN, IHS, NSGA-II, MOPSO, GRASP e ANSMOPSO obtiveram desempenhos bastante competitivos entre si, tendo o ANSMOPSO alcançado melhores resultados em três instâncias e os métodos PHNN e IHS em uma instância cada um.

Com relação a métrica VRE, o método proposto obteve os melhores resultados em todas as instâncias, com exceção da Nikkei 225, onde foi superado pelo GRASP. A superioridade do ANSMOPSO foi bastante acentuada nas instâncias menores, tendo se aproximado dos resultados dos demais métodos nas instâncias maiores. A mesma superioridade foi observada com relação ao tempo, onde o ANSMOPSO obteve tempos computacionais médios inferior a todas as outras abordagens multiobjetivo, tendo sido superado apenas pelas abordagens monoobjetivas TS e SA.

Table 4.6: Resultados para o CCPSP nas métricas VRE, MRE e Tempo - V

Instância	Ativos	Métrica	GA ¹	TS ¹	SA ¹	PSO ⁶	PHNN ⁸	ICPSO ⁹	IHS ⁹	PESAI ⁵	SPEA2 ¹⁰	NSGAI ¹⁰	MOPSO ¹⁰	GRASP ¹¹	ANSMOPSO
Hang Seng	31	VRE	1.644	1.657	1.662	2.242	2.590	1.900	1.804	1.523	1.487	1.326	1.284	1.640	1.151
		MRE	0.607	0.611	0.624	0.742	0.733	0.641	0.648	0.762	0.689	0.647	0.602	0.606	0.574
		Tempo (s)	18	9	10	34	-	57	55	685	708	675	671	27	7
DAX 100	85	VRE	7.218	9.031	8.548	6.856	5.758	7.206	7.380	9.282	8.243	7.121	6.754	6.759	6.293
		MRE	1.279	1.908	1.282	1.588	1.147	1.188	1.043	2.221	1.592	1.263	1.267	1.277	1.098
		Tempo (s)	99	42	52	179	-	254	159	1606	1653	1586	1566	86	55
FTSE 100	89	VRE	2.866	4.012	3.820	3.059	5.414	3.381	3.248	5.238	3.765	2.987	2.812	2.430	2.184
		MRE	0.328	0.329	0.330	0.364	0.309	0.324	0.320	0.402	0.365	0.333	0.325	0.324	0.307
		Tempo (s)	106	42	55	190	-	269	168	1621	1669	1601	1582	92	67
S&P 100	98	VRE	3.480	5.714	5.425	3.914	5.146	4.589	3.902	7.012	5.432	3.763	3.476	2.521	2.406
		MRE	1.226	0.712	0.842	1.404	0.292	0.896	0.948	2.423	1.211	0.732	0.702	0.906	0.771
		Tempo (s)	126	51	66	214	-	323	186	1641	1680	1617	1602	96	73
Nikkei 225	225	VRE	1.206	1.243	1.201	2.427	4.778	1.841	1.602	3.098	2.042	1.123	0.987	0.836	0.901
		MRE	5.327	0.421	0.413	0.799	0.704	0.433	0.403	1.231	0.865	0.432	0.327	0.418	0.322
		Tempo (s)	742	234	286	919	-	2676	659	4820	4960	4760	4700	409	589

O desempenho do método também foi analisado utilizando as métricas S, GD e Δ . A Tabela (4.7) compara os resultados obtidos pelo ANSMOPSO com diversas abordagens multiobjetivo, utilizando o conjunto de soluções V e a instância Nikkei 225 para os testes. Considerando S e GD, o ANSMOPSO apresentou desempenho melhor que os demais métodos, tendo sido superado apenas em Δ . Assim, os resultados indicam que, apesar do espaçamento entre os pontos da fronteira obtida terem oscilado mais, houve uma aproximação significativa da fronteira ótima, assim como uma maior estabilidade no distanciamento dos pontos entre as fronteiras.

Table 4.7: Resultados para CCPSP nas métricas S, GD, Δ - V - Nikkei 225

Métrica		PESA-II ¹⁰	SPEA2 ¹⁰	NSGA-II ¹⁰	MOPSO ¹⁰	ANSMOPSO
S	Avg.	2.33E-5	6.40E-6	4.70E-6	3.48E-6	3.15E-6
	Std.	5.80E-6	1.60E-6	1.50E-6	8.50E-7	8.39E-7
GD	Avg.	1.76E-2	1.02E-3	6.72E-3	1.45E-4	1.31E-4
	Std.	4.20E-3	2.80E-4	1.48E-3	3.60E-5	3.45E-5
Δ	Avg.	0.593	0.386	0.296	0.133	0.312
	Std.	0.148	0.093	0.078	0.043	0.097

A métrica MPE também foi considerada nas comparações do resultados alcançados para o CCPSP. O desempenho do ANSMOPSO foi comparado com as abordagens propostas por Chang et al. (2000), Xu et al. (2010) e Lwin e Qu (2013), tendo seus desempenhos reportados tanto em termos do conjunto de soluções V, como H. O método proposto obteve melhores resultados na maioria das instâncias e conjuntos, tendo sido inferior em apenas uma delas (conjunto V, instância Nikkei 225). A melhoria no desempenho considerando o conjunto H é significativamente mais expressivo de que no conjunto V, conforme pode ser observado na Tabela (4.8).

Table 4.8: Resultados para o CCPSP nas métricas de MPE - V e H

Instância	Ativos	Métrica	GA ¹		PBIL ²		PBILDE ³		ANSMOPSO	
			V	H	V	H	V	H	V	H
Hang Seng	31	MPE	1.0974	0.9457	1.1026	0.8472	1.1431	0.6196	1.0520	0.5205
		MedPE	1.2181	1.1819	1.2190	1.1013	1.2390	0.4712	0.7917	0.4182
DAX 100	85	MPE	2.5424	1.9515	2.5163	2.0781	2.4251	1.5433	2.1570	1.1182
		MedPE	2.5466	2.1262	2.5739	2.2783	2.5866	1.0986	2.0184	1.0157
FTSE 100	89	MPE	1.1076	0.8784	0.996	0.7658	0.9706	0.8234	0.9128	0.5138
		MedPE	1.0841	0.5938	1.0841	0.4132	1.084	0.5134	0.6642	0.2170
S&P 100	98	MPE	1.9328	1.7157	2.232	1.634	1.6386	1.3902	1.6176	1.0192
		MedPE	1.2244	1.1447	1.1536	0.8453	1.1692	0.7303	1.2170	0.7712
Nikkei 225	225	MPE	0.7961	0.6431	1.0017	0.6451	0.5972	0.3996	0.6178	0.3209
		MedPE	0.6133	0.6062	0.5854	0.5596	0.5896	0.4619	0.2273	0.1730
Avg.	-	MPE	1.4953	1.2269	1.5697	1.1940	1.3549	0.9552	1.2914	0.6985
		MedPE	1.3373	1.1306	1.3232	1.0395	1.3337	0.6551	1.0437	0.5190

Outros autores relataram o MPE apenas para o conjunto H, considerando ainda, além da média (MPE), o mínimo (MinPE), máximo (MaxPE) e a mediana (MedPE). Os

resultados demonstraram bastante equilíbrio entre o método proposto e as abordagens propostas por Woodside-Oriakhi, Lucas e Beasley (2011), não sendo possível destacar que um método se sobressaiu aos demais. Apesar disso, é importante ressaltar que os que obtiveram melhores desempenho foram as abordagens baseadas em GA e TS, juntamente com o método proposto.

Com relação ao tempo computacional, o ANSMOPSO mostrou-se mais eficiente nas instâncias com menos ativos, enquanto na Nikkei 225 o GA foi consideravelmente mais rápido que os demais.

Table 4.9: Resultados para CCPSP nas métricas de MPE - H

Instância	Ativos	Métrica	NN ⁵	GA ⁷	TS ⁷	SA ⁷	PBILDE ³	ANSMOPSO
Hang Seng	31	MPE	1.2310	0.8501	0.8234	1.0589	0.6196	0.5205
		MedPE	-	0.5873	0.3949	0.5355	0.4712	0.4182
		MinPE	-	0.0036	0.0068	0.0349	0.2816	0.0307
		MaxPE	-	2.9034	4.6096	4.6397	0.6768	1.9327
		Tempo (s)	47	76	85	99	-	7
DAX 100	85	MPE	1.5770	0.7740	0.7190	1.0267	1.5433	1.1182
		MedPE	-	0.2400	0.4298	0.8682	1.0986	1.0157
		MinPE	-	0.0000	0.0149	0.0278	0.7537	0.0472
		MaxPE	-	4.6811	2.7770	4.4123	1.6804	2.4820
		Tempo (s)	162	74	113	293	-	55
FTSE 100	89	MPE	1.2510	0.1620	0.3930	0.8952	0.8234	0.5138
		MedPE	-	0.0820	0.2061	0.3944	0.5134	0.2170
		MinPE	-	0.0000	0.0019	0.0230	0.4359	0.0000
		MaxPE	-	0.7210	3.4570	10.2029	0.8695	1.5912
		Tempo (s)	160	95	232	286	-	67
S&P 100	98	MPE	1.7920	0.2922	1.0358	3.0952	1.3902	1.0192
		MedPE	-	0.1809	1.0248	2.1064	0.7303	0.7712
		MinPE	-	0.0007	0.0407	0.8658	0.4816	0.0395
		MaxPE	-	1.6295	3.0061	8.6652	1.5726	2.1361
		Tempo (s)	178	100	222	371	-	73
Nikkei 225	225	MPE	1.4730	0.3353	0.7838	1.1193	0.3996	0.3209
		MedPE	-	0.3040	0.6526	0.6877	0.4619	0.1730
		MinPE	-	0.0180	0.0085	0.0113	0.3739	0.0106
		MaxPE	-	1.0557	2.6082	3.9678	0.4965	1.1293
		Tempo (s)	570	104	414	604	-	589
Avg.		MPE	1.4640	0.4827	0.7510	1.4391	0.9552	0.6985
		MedPE	-	0.2788	0.5416	0.9184	0.6550	0.5190
		MinPE	-	0.0045	0.0146	0.1926	0.4653	0.0081
		MaxPE	-	2.1981	3.2916	6.3776	1.0591	1.3311
		Tempo (s)	223	90	213	331	-	158

As fronteiras H obtidas pelo ANSMOPSO para o CCPSP foram comparadas com as alcançadas pelas abordagens propostas por Fernández e Gómez (2007), baseadas em GA e NN. A Figura (4.4) ilustra as fronteiras alcançadas pelos métodos para a instância Nikkei 225. Através do segundo gráfico, que representa uma ampliação da região destacada no primeiro, é possível observar graficamente alguns dos resultados apresentados, verificando-se uma maior estabilidade e aproximação da fronteira ótima pelo ANS-

MOPSO. É importante destacar que, a cada dez pontos consecutivos, apenas um ponto foi plotado no gráfico, uma vez que as fronteiras completas tornavam o gráfico bastante poluído, dificultando a visualização e a diferenciação dos pontos entre os métodos.

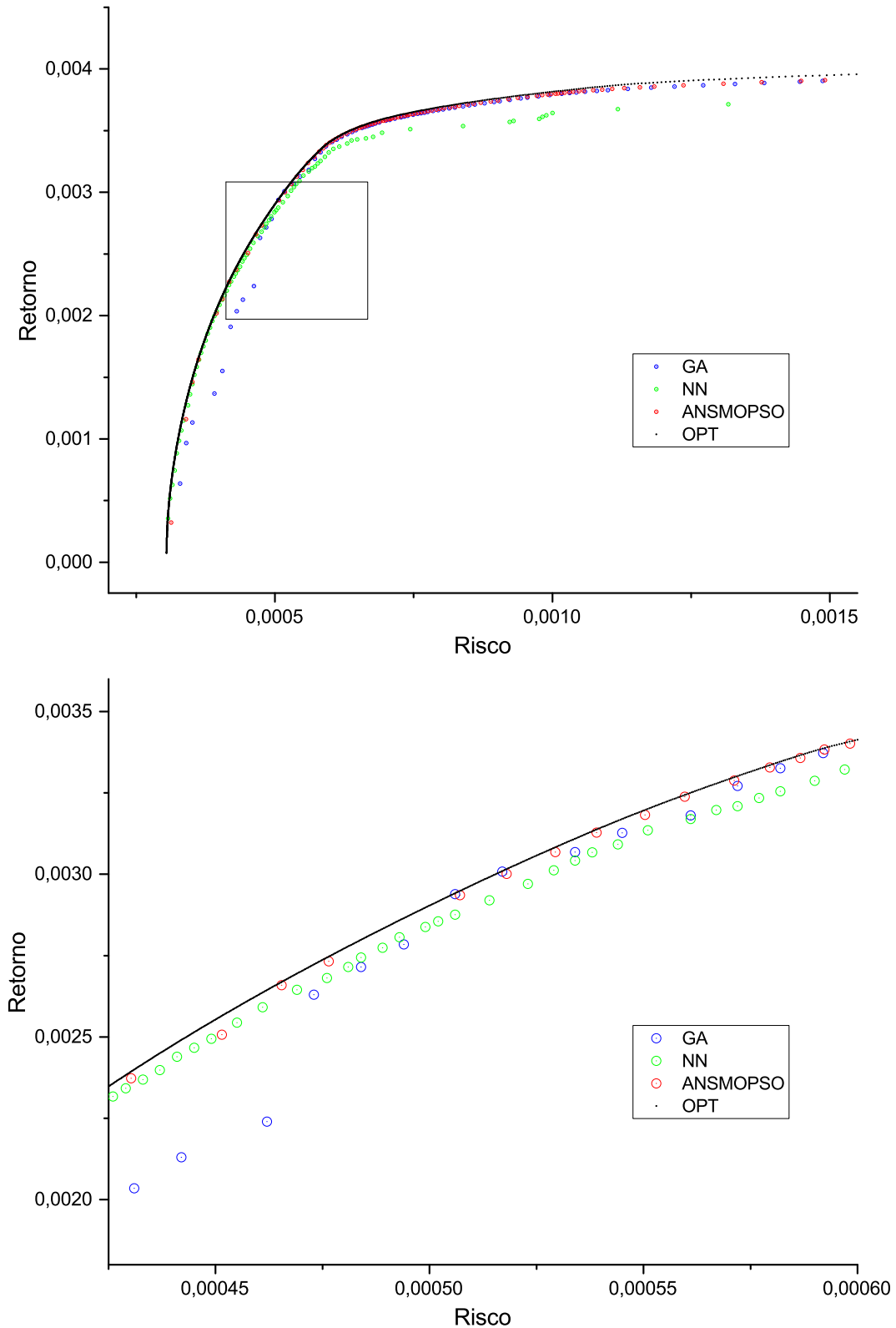


Figure 4.4: Comparação das fronteiras de GA, NN e ANSMOPSO - CCPSP - Nikkei 225

A comparação também foi feita para as demais instâncias, sendo apresentadas no Apêndice A deste trabalho. Os demais autores com resultados reportados neste trabalho foram consultados sobre a possibilidade de envio das fronteiras obtidas. Entretanto, até a finalização deste trabalho, apenas Fernández e Gómez (2007) haviam encaminhado as soluções, o que possibilitou a comparação gráfica entre as fronteiras obtidas pelos autores com a do método proposto.

4.5.3 Comparação entre MOPSO e ANSMOPSO

Para uma melhor comparação entre as abordagens multiobjetivo baseadas em PSO, o método proposto foi comparado com o MOPSO considerando o conjunto de soluções V nas métricas S , Δ e GD na instância Nikkei 225. Os testes seguiram o procedimento adotado em Mishra, Panda e Majhi (2014a), onde foram realizados testes para diversas cardinalidades possíveis, entre 20 e 180, demonstrando os resultados a partir da média e desvio padrão das 20 execuções feitas para cada cardinalidade.

Os resultados obtidos demonstram a superioridade na qualidade dos desempenhos alcançados pelo método proposto em relação ao MOPSO. O ANSMOPSO alcançou melhores resultados para S e GD em todas as cardinalidades testadas, mostrando que o mecanismo implementado baseado em custo benefício permitiu ao método uma melhor aproximação da fronteira ótima, assim como uma maior estabilidade no distanciamento entre os pontos de uma para a outra.

Além disso, o ANSMOPSO conseguiu melhorar levemente a Δ . Conforme pode ser observado pela Tabela (4.10), apesar do MOPSO ter obtido resultados melhores em alguns casos, a margem foi bastante apertada, enquanto nos casos em que o ANSMOPSO venceu (a maioria), a diferença tendeu a ser mais acentuada.

Table 4.10: Comparação das abordagens PSO em S , Δ e GD - V - Nikkei 225

K	S				Δ				GD			
	MOPSO		ANSMOPSO		MOPSO		ANSMOPSO		MOPSO		ANSMOPSO	
	Avg.	Std.	Avg.	Std.	Avg.	Std.	Avg.	Std.	Avg.	Std.	Avg.	Std.
K=20	5.6E-6	1.4E-6	5.5E-6	1.46E-6	0.38	0.09	0.36	0.09	2.5E-4	8.2E-5	2.3E-4	6.1E-5
K=40	7.8E-6	2.1E-6	6.9E-6	1.5E-6	0.39	0.10	0.40	0.10	3.4E-4	1.0E-4	3.0E-4	7.2E-5
K=60	4.4E-5	1.2E-5	3.9E-5	8.6E-6	0.45	0.12	0.41	0.09	4.2E-4	1.3E-4	3.7E-4	1.1E-4
K=80	7.7E-5	1.9E-5	6.6E-5	1.7E-5	0.58	0.14	0.57	0.14	2.2E-3	5.5E-4	1.9E-3	5.3E-4
K=100	8.9E-5	2.5E-5	8.0E-5	1.9E-5	0.67	0.17	0.68	0.16	3.9E-3	9.7E-4	3.3E-3	9.8E-4
K=120	5.2E-4	1.3E-4	4.2E-4	9.3E-5	0.79	0.19	0.70	0.16	4.5E-3	1.4E-3	3.4E-3	1.2E-3
K=140	8.5E-4	2.1E-4	6.9E-4	1.6E-4	0.86	0.21	0.84	0.18	1.4E-2	3.3E-3	1.1E-2	3.2E-3
K=160	2.7E-3	8.9E-4	2.5E-3	7.6E-4	0.95	0.29	0.88	0.28	2.0E-2	5.2E-3	1.4E-2	3.7E-3
K=180	3.2E-3	9.1E-4	3.1E-3	6.8E-4	0.99	0.23	0.91	0.22	3.1E-2	1.0E-2	2.4E-2	9.3E-3

Os desempenhos reportados mostram que houve uma melhora significativa do ANS-MOPSO em comparação com o MOPSO, principalmente em termos de aproximação da fronteira obtida para a fronteira ótima. As Figuras (4.5) e (4.6) ilustram os desempenhos alcançados para cada métrica.

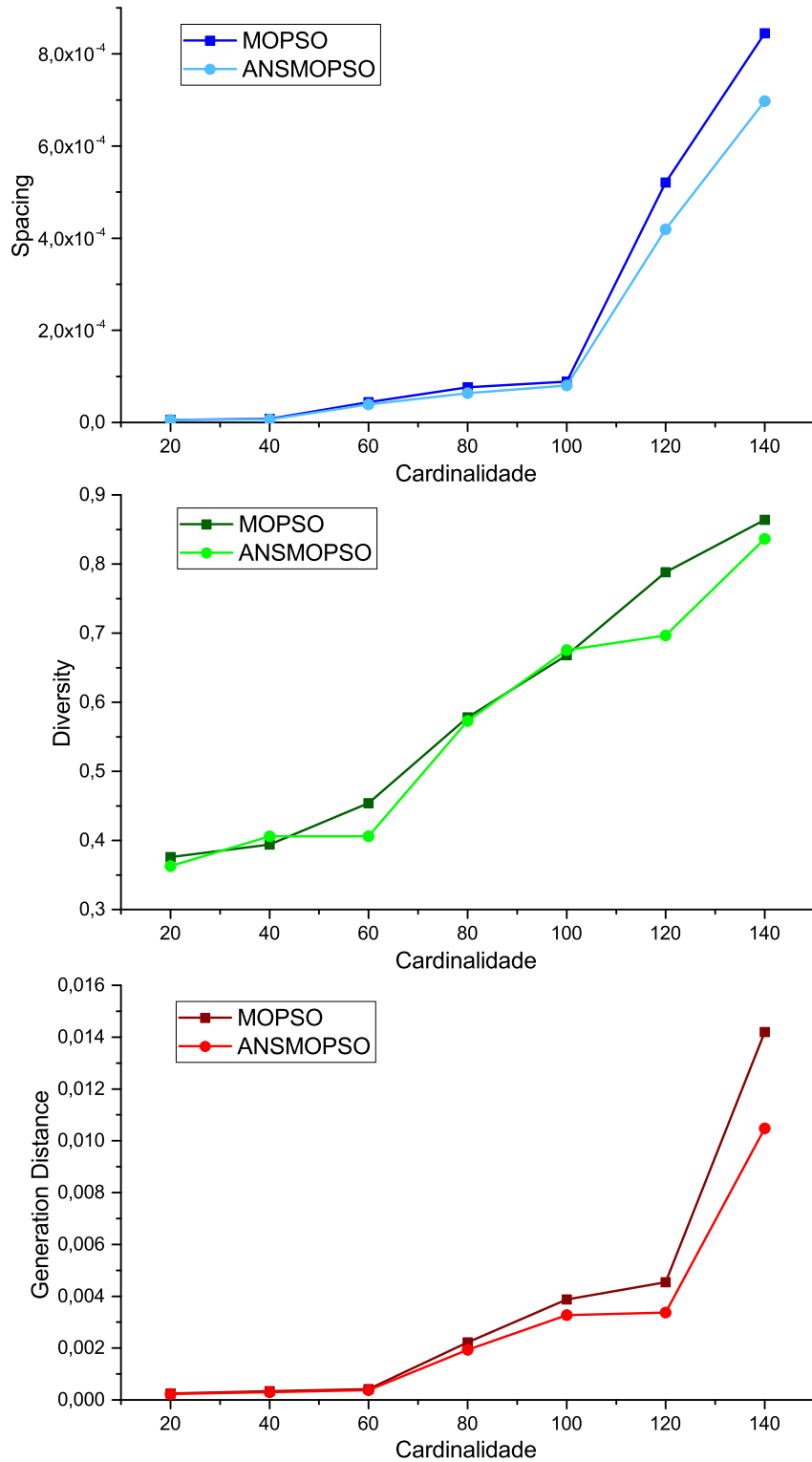


Figure 4.5: Desempenho de MOPSO e ANSMOPSO em S , Δ e GD para Nikkei 225

É possível perceber que, tanto em termos de S , como de GD , a diferença entre os desempenhos dos métodos se torna mais acentuada na medida em que a cardinalidade para o problema é maior. Enquanto isso, em termos de Δ , os resultados oscilaram bastante, não sendo observado uma tendência nos desempenhos alcançados.

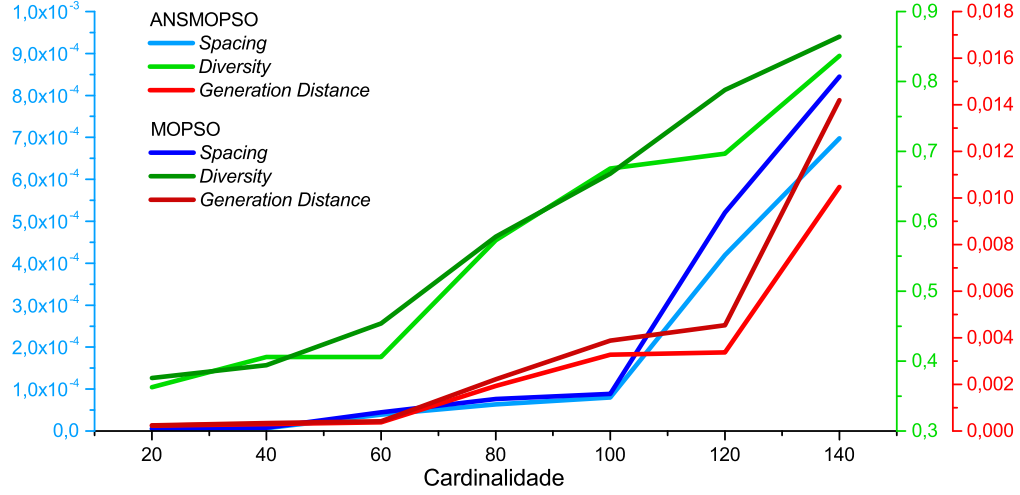


Figure 4.6: Desempenho de MOPSO e ANSMOPSO em S , Δ e GD para Nikkei 225

4.6 CDPSP

4.6.1 Formulação do Problema

Diferentemente do CCPSP, o CDPSP considera a restrição de cardinalidade envolvendo uma desigualdade, considerando um limite mínimo (K_{min}) e máximo (K_{max}) de quantidade de ativos que devem formar a carteira.

$$z_1 = \min \sum_{j \in A} \sum_{k \in A} w_j w_k \sigma_{jk} \quad (4.29)$$

$$z_2 = \max \sum_{j \in A} w_j r_j \quad (4.30)$$

Sujeito a:

$$\sum_{j \in A} w_j = 1 \quad (4.31)$$

$$K_{min} \leq \sum_{j \in A} z_j \leq K_{max} \quad (4.32)$$

$$\epsilon_j z_j \leq w_j \leq \delta_j z_j, j \in A \quad (4.33)$$

$$z_j \in \{0, 1\}, j \in A \quad (4.34)$$

4.6.2 Comparação dos Resultados

Apesar de poucos resultados terem sido publicados para essa variação, por ser frequentemente considerada nas decisões em mercados reais sua aparição tem sido mais frequente em estudos publicados na literatura nos últimos anos (ANAGNOSTOPOULOS; MAMANIS, 2011a). A Tabela (4.11) apresenta os trabalhos comparados para esse problema, assim como os métodos utilizados e demais informações sobre os testes.

Table 4.11: Métodos, Parâmetros e Métricas para o CDPSP

Trabalho	Métodos	Parâmetros	Métricas	Conjuntos	Execuções	Máquina
Anagnostopoulos ¹² <i>et al.</i> (2011)	NSGA-II; SPEA2; E-NGPA2; PESA; e-MOEA; SOEA	$K = 1 - 10$; $\epsilon_j = 0.01$; $\delta_j = 0.1$	HV	V, H	Média de 30	C++, Core 2 Duo 2.1 GHz, 4 GB RAM
Mishra <i>et al.</i> ⁴ (2014b)	PAES; PESA; Micro-GA; NSGA-II; MOBFO	$K = 10 - 15$; $\epsilon_j = 0.01$; $\delta_j = 0.1$	S; GD; Δ ; Er	V, H	-	MATLAB, Core 2 Duo 3 GHz, 4 GB RAM

Anagnostopoulos e Mamanis (2011a) reportaram o desempenho de diversas abordagens multiobjetivo em termos de HV para o CDPSP, algumas já bastante testadas na literatura, como NSGA-II e SPEA2, e outras não consideradas até então, como E-NGPA2 e e-MOEA. Para realização dos testes os autores consideraram $1 < K < 10$. A Tabela (4.12) indica que o ANSMOPSO alcançou um melhor desempenho em quatro das cinco instâncias testadas, tendo sido superado apenas em DAX 100, onde SPEA2 foi superior aos demais.

A superioridade do método considerando o HV para o CDPSP comprova uma melhor aproximação do método para a fronteira ótima, conforme já constatado em outros problemas. Apesar disso, é possível observar que há bastante equilíbrio entre os desempenhos dos métodos, sendo constatados diversos empates, além de resultados levemente melhores

em outras situações.

Table 4.12: Resultados para o CDPSP na métrica HV

Instância	NSGA-II ¹²	SPEA2 ¹²	E-NGPA2 ¹²	PESA ¹²	e-MOEA ¹²	SOEA ¹²	ANSMOPSO
Hang Seng	0.705	0.705	0.704	0.704	0.705	0.704	0.712
DAX 100	0.809	0.810	0.809	0.808	0.809	0.808	0.806
FTSE 100	0.718	0.718	0.717	0.717	0.718	0.717	0.723
S&P 100	0.791	0.791	0.790	0.780	0.791	0.790	0.798
Nikkei 225	0.806	0.806	0.805	0.805	0.806	0.804	0.812

Com relação as métricas S, GD, Δ e Er, o ANSMOPSO teve seu desempenho comparado com abordagens multiobjetivo clássicas, além dos métodos APAES, Micro-GA e MOBFO, este último proposto por Mishra, Panda e Majhi (2014a). Os resultados reportados na Tabela (4.13) foram obtidos a partir da resolução da instância Nikkei 225, e demonstram, considerando os indicadores S, GD e Er, a superioridade do ANSMOPSO em relação a todos os métodos, inclusive considerando o desvio padrão das execuções, com exceção do desvio padrão de Er. Por sua vez, o método MOBFO obteve um desempenho melhor em Δ .

Assim como observado pelo desempenho na métrica HV na Tabela (4.12), os resultados demonstram que o ANSMOPSO alcança fronteiras mais próximas da fronteira ótima, assim como um maior equilíbrio na distância entre os pontos da fronteira obtida para a fronteira ótima. Além disso, o método foi capaz de alcançar mais pontos pertencentes a fronteira ótima que os demais. Com relação a Δ , os resultados mostram que os pontos são levemente mais dispersos no ANSMOPSO de que no MOBFO. Apesar disso, é importante destacar que o MOBFO obteve um dos piores desempenho entre os métodos para GD, enquanto em Δ , onde ANSMOPSO foi superado, conseguiu alcançar resultados competitivos.

Table 4.13: Resultados para o CDPSP nas métricas S, GD, Δ e Er, na instância Nikkei 225

Métrica		PESA ⁴	Micro-GA ⁴	APAES ⁴	NSGA-II ⁴	MOBFO ⁴	ANSMOPSO
S	Avg.	4.34E-4	4.07E-4	7.54E-5	6.54E-5	5.65E-5	5.33E-5
	Std.	1.32E-4	1.21E-4	2.33E-5	2.33E-5	1.98E-5	1.92E-5
GD	Avg.	6.17E-2	4.04E-2	7.32E-3	6.34E-3	8.57E-3	6.09E-3
	Std.	1.87E-2	1.88E-2	2.01E-3	1.89E-3	2.52E-3	1.75E-3
Δ	Avg.	0.932	0.888	0.839	0.866	0.755	0.818
	Std.	0.254	0.232	0.222	0.243	0.201	0.240
Er	Avg.	0.910	0.888	0.824	0.801	0.788	0.776
	Std.	0.299	0.245	0.288	0.234	0.235	0.261

4.7 CDS-PSP

4.7.1 Formulação do Problema

Consiste em uma extensão do problema clássico onde são considerados três conjuntos de restrições adicionais: Restrições de cardinalidade envolvendo desigualdade, de limitantes de investimentos por ativo e de pré-seleção de ativos. O modelo que representa o problema é apresentado a seguir.

$$z_1 = \min \sum_{j \in A} \sum_{k \in A} w_j w_k \sigma_{jk} \quad (4.35)$$

$$z_2 = \max \sum_{j \in A} w_j r_j \quad (4.36)$$

Sujeito a:

$$\sum_{j \in A} w_j = 1 \quad (4.37)$$

$$K_{\min} \leq \sum_{j \in A} z_j \leq K_{\max} \quad (4.38)$$

$$\epsilon_j z_j \leq w_j \leq \delta_j z_j, j \in A \quad (4.39)$$

$$z_j \geq u_j, j \in A \quad (4.40)$$

$$u_j, z_j \in \{0, 1\}, j \in A \quad (4.41)$$

4.7.2 Comparação dos Resultados

Os resultados foram comparados com o desempenho das abordagens propostas por Lwin (2015), baseadas em PESA-II e em *Scatter Search* (MOSSwA). Conforme mostra a Tabela (4.14), onde são apresentadas mais informações com relação aos testes, o ativo 30 foi pré-selecionado para compor a carteira, devendo, necessariamente, receber um investimento entre 0.01 e 1. Além disso, foi considerado $1 \leq K \leq 10$ como os limites de ativos na carteira. Em cada método foram realizadas 20 execuções para cada instância, sendo os valores reportados correspondentes as médias obtidas para cada métrica de desempenho.

Table 4.14: Parâmetros e Métricas para o CDS-PSP

Trabalho	Métodos	Parâmetros	Métricas	Conjuntos	Execuções	Máquina
Lwin (2015)	PESA-II; MOSSwA	$1 \leq K \leq 10$; $\epsilon_j = 0.01$; $\delta_j = 1$; $u = \{30\}$;	GD; Δ	H	20	C#, Core 2 Duo 2.79GHz, 2 GB RAM

Os resultados reafirmam tendências observadas em outros problemas, tanto em termos de GD, como de Δ . Em termos de GD, o ANSMOPSO alcançou desempenho superior aos demais em todas as instâncias, principalmente nas instâncias com menos ativos. Com relação a Δ , o desempenho foi equilibrado, tendo o método proposto alcançado melhores resultados nas instâncias menores, enquanto MOSSwA apresentou superioridade nas maiores.

Table 4.15: Resultados para o CDS-PSP nas métricas GD e Δ

Instância	Métrica	PESA-II	MOSSwA	ANSMOPSO
Hang Seng	GD	6.90E-3	5.50E-4	2.67E-4
	Δ	0.93	0.22	0.18
DAX 100	GD	6.70E-3	5.80E-4	3.09E-4
	Δ	0.91	0.21	0.19
FTSE 100	GD	8.10E-3	1.10E-3	5.78E-4
	Δ	1.19	0.26	0.34
S&P 100	GD	5.20E-3	1.20E-3	6.10E-4
	Δ	1.14	0.28	0.36
Nikkei 225	GD	2.70E-2	2.30E-3	9.73E-4
	Δ	1.28	0.31	0.43

4.8 CCLS-PSP

4.8.1 Formulação do Problema

o CCLS-PSP trata-se do PSP em que são consideradas quatro restrições presentes na realidade dos mercados financeiros: Cardinalidade de igualdade, limitantes de investimento, lote mínimo de transação e pré-seleção de ativos. O problema pode ser expresso matematicamente como:

$$z_1 = \min \sum_{j \in A} \sum_{k \in A} w_j w_k \sigma_{jk} \quad (4.42)$$

$$z_2 = \max \sum_{j \in A} w_j r_j \quad (4.43)$$

Sujeito a:

$$\sum_{j \in A} w_j \leq 1 \quad (4.44)$$

$$\sum_{j \in A} z_j = K \quad (4.45)$$

$$\epsilon_j z_j \leq w_j \leq \delta_j z_j, j \in A \quad (4.46)$$

$$w_j = l_j y_j, j \in A, y_j \in \mathbb{Z}_+ \quad (4.47)$$

$$z_j \geq u_j, j \in A \quad (4.48)$$

$$u_j, z_j \in \{0, 1\}, j \in A \quad (4.49)$$

4.8.2 Comparação dos Resultados

Os resultados foram comparados com várias abordagens multiobjetivo presentes na literatura, além de uma abordagem híbrida proposta por Lwin e Qu (2013). Foram utilizadas as métricas HV, GD, Δ e tempo computacional para medir o desempenho dos métodos, conforme mostra a Tabela (4.16).

Table 4.16: Parâmetros e Métricas para o CCLS-PSP

Trabalho	Métodos	Parâmetros	Métricas	Conjuntos	Execuções	Máquina
Lwin <i>et al.</i> ³ (2013)	NSGA-II;	$K = 10$;	HV; GD; Δ	H	20	C#, Intel Core i7 3.2 GHz, 6 GB RAM
	SPEA2;	$\epsilon_j = 0.01$;				
	PESA-II;	$\delta_j = 1$;				
	PAES;	$u = \{30\}$;				
	MODEwAwL	$l_j = 0.008$				

Visando melhor representar as 20 execuções realizadas por cada método, os desempenhos nas métricas foram reportados em *boxplots*. Os gráficos apresentados na Figura (4.7) ilustram o desempenho dos métodos em termos de HV, GD e Δ para a instância S&P 100. Os desempenhos para as demais instâncias são apresentados no Apêndice A deste trabalho.

Conforme pode ser observado, o ANSMOPSO e o MODEwAwL obtiveram um melhor desempenho em relação aos demais métodos na maioria das métricas e instâncias. Observando o HV, com exceção da instância Hang Seng, houve uma nítida superioridade dos métodos ANSMOPSO e MODEwAwL, que obtiveram resultados competitivos em todas as instâncias, não podendo afirmar que um foi superior ao outro. Além disso, pode ser constatado que na maioria dos casos o ANSMOPSO apresenta extremidades superior e inferior ao MODEwAwL, assim como uma maior variação nos resultados das execuções realizadas.

Considerando GD, o ANSMOPSO apresentou resultados levemente superiores aos obtidos por MODEwAwL nas instâncias maiores (S&P 100 e Nikkei 225), e significativamente melhor que os alcançados pelos demais métodos. Entretanto, nas instâncias menores, foi constatado um certo equilíbrio entre os desempenhos de PAES, MODEwAwL e ANSMOPSO.

Com relação a Δ , as abordagens SPEA2, NSGA-II, MODEwAwL e ANSMOPSO obtiveram desempenhos competitivos entre si para todas as instâncias, não sendo possível destacar que um método superou os demais. Nas instâncias com menos ativos, SPEA2 e NSGA-II alcançaram melhores resultados, enquanto nas maiores, MODEwAwL e ANSMOPSO se sobressaíram.

Os resultados demonstram ainda uma maior dificuldade dos métodos em tratar o CCLS-PSP em comparação com os demais problemas tratados neste trabalho, tanto em termos de HV, como de GD e Δ .

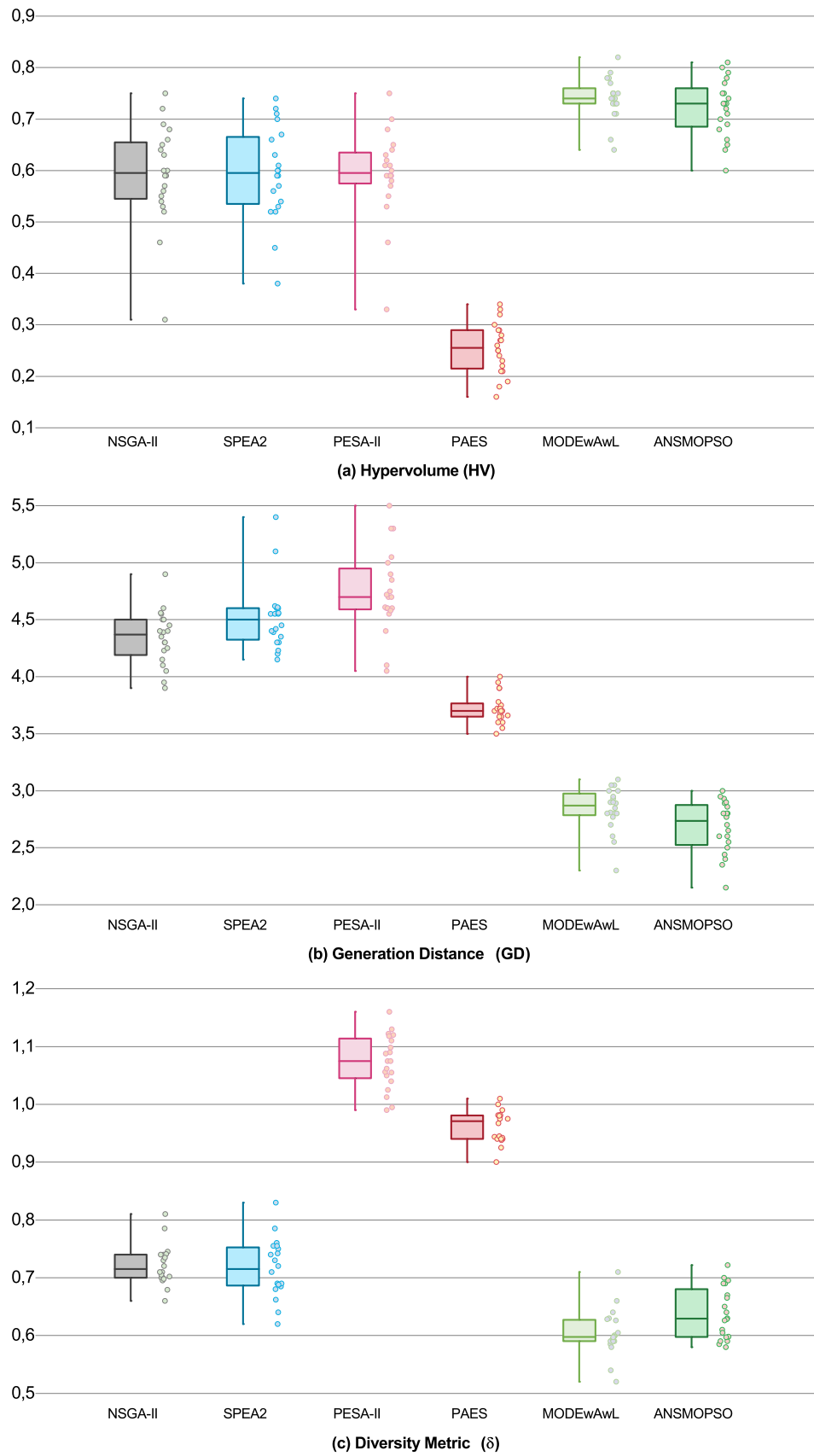


Figure 4.7: Comparação dos resultados obtidos na instância S&P 100 para o CCLS-PSP

Capítulo 5

Considerações Finais e Trabalhos Futuros

Neste trabalho foi realizada uma vasta revisão da literatura, visando identificar as restrições e objetivos, incluindo as mensurações de riscos e retornos, utilizados nos diversos PSPs relatados. Através do levantamento realizado, foi possível constatar que há uma grande quantidade de restrições tratadas em separado na literatura.

Dessa forma, o presente trabalho objetivou a proposição de uma abordagem heurística que pudesse tratar de diversos PSPs, considerando um conjunto de restrições observadas na literatura. Assim, buscou-se tanto contribuições em termos de metodologia de resolução, como de aproximação dos métodos existentes da realidade encontrada nos mercados financeiros, uma vez que, em decorrência da grande complexidade e competitividade presentes nos mercado, é extremamente importante que um método possa ser flexível o suficiente para ser capaz de considerar diferentes estratégias de investidores na prática.

Para isso, foi proposta uma abordagem *Multiobjective Particle Swarm Optimization*, que utiliza um procedimento de elitismo proposto, baseado em três mecanismos: *Non-dominated Sorting*, *Crowding Distance* e Custo Benefício.

O método proposto foi utilizado para tratar cinco variações de PSPs, nas quais foram encontrados resultados reportados na literatura. Tais problemas incluem algumas restrições presentes na realidade dos mercados financeiros, como: Limitantes de investimentos por ativo, cardinalidade (podendo ser de igualdade ou desigualdade), lote mínimo de transação e pré-seleção de ativos.

Os resultados alcançados demonstraram que o ANSMOPSO foi bastante competitivo com os principais trabalhos reportados na literatura em todos os problemas considerados. Além disso, em comparação realizada com uma abordagem MOPSO presente na literatura, foi possível constatar a superioridade do método proposto em todas as métricas

consideradas, sendo a melhoria mais acentuada com relação a GD, demonstrando que a estratégia de elitismo adotada permitiu uma melhor aproximação da fronteira ótima, ao mesmo tempo em que também melhorou ou manteve estável as demais métricas.

O trabalho também permitiu avanços para a aproximação do uso de métodos de otimização na prática dos mercados. Com a possibilidade de seleção de um conjunto de restrições passíveis de escolha, o método permite tratar problemas considerando diversas estratégias e combinações de preferências do investidor.

Como trabalhos futuros, acredita-se que há formas mais eficientes de realizar a viabilização de soluções no decorrer do método. O estudo de abordagens neste sentido podem contribuir tanto para melhorias do procedimento em si, permitindo avanços na busca por uma fronteira de melhor qualidade, como para redução do tempo computacional gasto para realizar sua viabilização.

Em outra frente, a consideração de múltiplos períodos na formação de carteiras de investimentos permite o tratamento do PSP considerando outras estratégias observadas nos mercados, principalmente de curto prazo, como, por exemplo, estratégias de *trading*. Sua consideração no método proposto iria expandir as possíveis utilizações práticas do método, assim como permitiria o tratamento de outras restrições e estratégias presentes nos mercados.

Referências

- ANAGNOSTOPOULOS, K.; MAMANIS, G. Finding the efficient frontier for a mixed integer portfolio choice problem using a multiobjective algorithm. Scientific Research Publishing, 2009.
- ANAGNOSTOPOULOS, K.; MAMANIS, G. A portfolio optimization model with three objectives and discrete variables. *Computers & Operations Research*, v. 37, n. 7, p. 1285 – 1297, 2010. ISSN 0305-0548. Algorithmic and Computational Methods in Retrial Queues. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0305054809002275>>.
- ANAGNOSTOPOULOS, K.; MAMANIS, G. The mean variance cardinality constrained portfolio optimization problem: An experimental evaluation of five multiobjective evolutionary algorithms. *Expert Systems with Applications*, v. 38, n. 11, p. 14208 – 14217, 2011. ISSN 0957-4174.
- ANAGNOSTOPOULOS, K. P.; MAMANIS, G. Multiobjective evolutionary algorithms for complex portfolio optimization problems. *Computational Management Science*, v. 8, n. 3, p. 259–279, 2011. ISSN 1619-6988. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/s10287-009-0113-8>>.
- ARMANANZAS, R.; LOZANO, J. A. A multiobjective approach to the portfolio optimization problem. In: IEEE. *Evolutionary Computation, 2005. The 2005 IEEE Congress on*. [S.l.], 2005. v. 2, p. 1388–1395.
- BABAEI, S.; SEPEHRI, M. M.; BABAEI, E. Multi-objective portfolio optimization considering the dependence structure of asset returns. *European Journal of Operational Research*, v. 244, n. 2, p. 525–539, jul 2015. ISSN 0377-2217. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377221715000454>>.
- BAIXAULI-SOLER, J. S.; ALFARO-CID, E.; FERNANDEZ-BLANCO, M. O. Mean-var portfolio selection under real constraints. *Computational Economics*, Springer, v. 37, n. 2, p. 113–131, 2011.
- BARAK, S.; ABESSI, M.; MODARRES, M. Fuzzy turnover rate chance constraints portfolio model. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 228, n. 1, p. 141–147, 2013.
- BAYKASOĞLU, A.; YUNUSOĞLU, M. G.; ÖZSOYDAN, F. B. A grasp based solution approach to solve cardinality constrained portfolio optimization problems. *Computers & Industrial Engineering*, Elsevier, v. 90, p. 339–351, 2015.
- BEASLEY, J. E. Or-library: distributing test problems by electronic mail. *Journal of the operational research society*, JSTOR, p. 1069–1072, 1990.

- BENATI, S.; RIZZI, R. A mixed integer linear programming formulation of the optimal mean/value-at-risk portfolio problem. *European Journal of Operational Research*, v. 176, n. 1, p. 423 – 434, 2007. ISSN 0377-2217. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377221705005813>>.
- BERMÚDEZ, J. D.; SEGURA, J. V.; VERCHER, E. A multi-objective genetic algorithm for cardinality constrained fuzzy portfolio selection. *Fuzzy Sets and Systems*, Elsevier, v. 188, n. 1, p. 16–26, 2012.
- BERTSIMAS, D.; PACHAMANOVA, D. Robust multiperiod portfolio management in the presence of transaction costs. *Computers & Operations Research*, Elsevier, v. 35, n. 1, p. 3–17, 2008.
- BRANKE, J. et al. Portfolio optimization with an envelope-based multi-objective evolutionary algorithm. *European Journal of Operational Research*, v. 199, n. 3, p. 684 – 693, 2009. ISSN 0377-2217. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377221708003664>>.
- BRIEC, W.; KERSTENS, K.; WOESTYNE, I. Van de. Portfolio selection with skewness: A comparison of methods and a generalized one fund result. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 230, n. 2, p. 412–421, 2013.
- CESARONE, F.; SCOZZARI, A.; TARDELLA, F. A new method for mean-variance portfolio optimization with cardinality constraints. *Annals of Operations Research*, v. 205, n. 1, p. 213–234, 2013. ISSN 02545330.
- CHANG, T.-J. et al. Heuristics for cardinality constrained portfolio optimisation. *Computers & Operations Research*, v. 27, n. 13, p. 1271 – 1302, 2000. ISSN 0305-0548. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S030505489900074X>>.
- CHANG, T.-J.; YANG, S.-C.; CHANG, K.-J. Portfolio optimization problems in different risk measures using genetic algorithm. *Expert Systems with Applications*, v. 36, n. 7, p. 10529 – 10537, 2009. ISSN 0957-4174. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0957417409002188>>.
- CHEN, W. Artificial bee colony algorithm for constrained possibilistic portfolio optimization problem. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Elsevier, v. 429, p. 125–139, 2015.
- CHEN, W. et al. Application of Artificial Bee Colony Algorithm to Portfolio Adjustment Problem with Transaction Costs. *Journal of Applied Mathematics*, Hindawi Publishing Corporation, v. 2014, 2014.
- CHEN, W.; ZHANG, W.-G. The admissible portfolio selection problem with transaction costs and an improved pso algorithm. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Elsevier, v. 389, n. 10, p. 2070–2076, 2010.
- CHIAM, S.; TAN, K.; MAMUM, A. A. Evolutionary multi-objective portfolio optimization in practical context. *International Journal of Automation and Computing*, Springer, v. 5, n. 1, p. 67–80, 2008.

- CORAZZA, M.; FASANO, G.; GUSSO, R. Particle swarm optimization with non-smooth penalty reformulation, for a complex portfolio selection problem. *Applied Mathematics and Computation*, Elsevier, v. 224, p. 611–624, 2013.
- CRAMA, Y.; SCHYNS, M. Simulated annealing for complex portfolio selection problems. *European Journal of Operational Research*, v. 150, n. 3, p. 546 – 571, 2003. ISSN 0377-2217. Financial Modelling. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377221702007841>>.
- CURA, T. Particle swarm optimization approach to portfolio optimization. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, v. 10, n. 4, p. 2396 – 2406, 2009. ISSN 1468-1218. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1468121808001259>>.
- DASTKHAN, H.; GHARNEH, N. S.; GOLMAKANI, H. A linguistic-based portfolio selection model using weighted max–min operator and hybrid genetic algorithm. *Expert Systems with Applications*, Elsevier, v. 38, n. 9, p. 11735–11743, 2011.
- DEB, K. et al. A fast and elitist multiobjective genetic algorithm: Nsga-ii. *IEEE transactions on evolutionary computation*, IEEE, v. 6, n. 2, p. 182–197, 2002.
- DENG, G.-F.; LIN, W.-T. Ant colony optimization for markowitz mean-variance portfolio model. In: *Swarm, Evolutionary, and Memetic Computing*. [S.l.]: Springer, 2010. p. 238–245.
- DENG, G.-F.; LIN, W.-T. Swarm intelligence for cardinality-constrained portfolio problems. In: *Computational Collective Intelligence. Technologies and Applications*. [S.l.]: Springer, 2010. p. 406–415.
- DENG, G.-F.; LIN, W.-T.; LO, C.-C. Markowitz-based portfolio selection with cardinality constraints using improved particle swarm optimization. *Expert Systems with Applications*, Elsevier, v. 39, n. 4, p. 4558–4566, 2012.
- DERIGS, U.; NICKEL, N.-H. On a metaheuristic-based dss for portfolio optimization and managing investment guideleines. In: CITESEER. *Metaheuristics International Conference*. [S.l.], 2001.
- EHRGOTT, M.; KLAMROTH, K.; SCHWEHM, C. An mcdm approach to portfolio optimization. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 155, n. 3, p. 752–770, 2004.
- FERNÁNDEZ, A.; GÓMEZ, S. Portfolio selection using neural networks. *Computers & Operations Research*, Elsevier, v. 34, n. 4, p. 1177–1191, 2007.
- GOLMAKANI, H. R.; FAZEL, M. Constrained portfolio selection using particle swarm optimization. *Expert Systems with Applications*, v. 38, n. 7, p. 8327 – 8335, 2011. ISSN 0957-4174. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0957417411000406>>.
- GUO, S. et al. Fuzzy multi-period portfolio selection with different investment horizons. *European Journal of Operational Research*, Elsevier B.V., v. 0, p. 1–10, 2016. ISSN 03772217. Disponível em: <<http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0377221716302922>>.

- GUPTA, P.; MEHLAWAT, M. K.; MITTAL, G. Asset portfolio optimization using support vector machines and real-coded genetic algorithm. *Journal of Global Optimization*, Springer, v. 53, n. 2, p. 297–315, 2012.
- HE, F.; QU, R. A two-stage stochastic mixed-integer program modelling and hybrid solution approach to portfolio selection problems. *Information Sciences*, v. 289, p. 190–205, dec 2014. ISSN 0020-0255. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020025514008251>>.
- HIRSCHBERGER, M.; QI, Y.; STEUER, R. E. Randomly generating portfolio-selection covariance matrices with specified distributional characteristics. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 177, n. 3, p. 1610–1625, 2007.
- HOCHREITER, R. An evolutionary computation approach to scenario-based risk-return portfolio optimization for general risk measures. In: *Applications of Evolutionary Computing*. [S.l.]: Springer, 2007. p. 199–207.
- JANA, P.; ROY, T.; MAZUMDER, S. Multi-objective possibilistic model for portfolio selection with transaction cost. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Elsevier, v. 228, n. 1, p. 188–196, 2009.
- JARRAYA, B. *Asset allocation and portfolio optimization problems with metaheuristics: a literature survey*. [S.l.], 2013. Disponível em: <<http://EconPapers.repec.org/RePEc:pra:mprapa:53698>>.
- JORDEHI, A. R.; JASNI, J. Parameter selection in particle swarm optimisation: a survey. *Journal of Experimental & Theoretical Artificial Intelligence*, Taylor & Francis, v. 25, n. 4, p. 527–542, 2013.
- KENNEDY, J. et al. *Swarm intelligence*. [S.l.]: Morgan Kaufmann, 2001.
- KONNO, H.; YAMAZAKI, H. Mean-absolute deviation portfolio optimization model and its applications to tokyo stock market. *Management science*, INFORMS, v. 37, n. 5, p. 519–531, 1991.
- LI, X.; QIN, Z.; KAR, S. Mean-variance-skewness model for portfolio selection with fuzzy returns. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 202, n. 1, p. 239–247, 2010.
- LIAGKOURAS, K.; METAXIOTIS, K. A new Probe Guided Mutation operator and its application for solving the cardinality constrained portfolio optimization problem. *Expert Systems with Applications*, Elsevier Ltd, v. 41, n. 14, p. 6274–6290, 2014. ISSN 09574174. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.eswa.2014.03.051>>.
- LIM, S.; OH, K. W.; ZHU, J. Use of DEA cross-efficiency evaluation in portfolio selection: An application to Korean stock market. *European Journal of Operational Research*, Elsevier B.V., v. 236, n. 1, p. 361–368, 2014. ISSN 03772217. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377221713009776>>.
- LIN, C.-C.; LIU, Y.-T. Genetic algorithms for portfolio selection problems with minimum transaction lots. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 185, n. 1, p. 393–404, 2008.

- LIN, D.; WANG, S. A genetic algorithm for portfolio selection problems. *Advanced Modeling and Optimization*, v. 4, n. 1, p. 13–27, 2002.
- LIU, J. et al. Robust multi-period portfolio model based on prospect theory and almv-pso algorithm. *Expert Systems with Applications*, Elsevier, v. 42, n. 20, p. 7252–7262, 2015.
- LWIN, K.; QU, R. A hybrid algorithm for constrained portfolio selection problems. *Applied intelligence*, Springer, v. 39, n. 2, p. 251–266, 2013.
- LWIN, K. T. *Evolutionary approaches for portfolio optimization*. Tese (Doutorado) — University of Nottingham, 2015.
- MANSINI, R.; SPERANZA, M. G. Heuristic algorithms for the portfolio selection problem with minimum transaction lots. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 114, n. 2, p. 219–233, 1999.
- MARINGER, D.; KELLERER, H. Optimization of cardinality constrained portfolios with a hybrid local search algorithm. *OR Spectrum*, v. 25, n. 4, p. 481–495, 2003. ISSN 1436-6304. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/s00291-003-0139-1>>.
- MARKOWITZ, H. Portfolio selection. *Journal of Finance*, v. 7, n. 1, p. 77–91, 1952. Disponível em: <<http://EconPapers.repec.org/RePEc:bla:jfinan:v:7:y:1952:i:1:p:77-91>>.
- MARKOWITZ, H. The optimization of a quadratic function subject to linear constraints. *Naval research logistics Quarterly*, Wiley Online Library, v. 3, n. 1-2, p. 111–133, 1956.
- MASHAYEKHI, Z.; OMRANI, H. An integrated multi-objective markowitz–dea cross-efficiency model with fuzzy returns for portfolio selection problem. *Applied Soft Computing*, Elsevier, v. 38, p. 1–9, 2016.
- METAXIOTIS, K.; LIAGKOURAS, K. Multiobjective evolutionary algorithms for portfolio management: a comprehensive literature review. *Expert Systems with Applications*, Elsevier, v. 39, n. 14, p. 11685–11698, 2012.
- MISHRA, S. K. *Robust and Constrained Portfolio Optimization using Multiobjective Evolutionary Algorithms*. Tese (Doutorado), 2012.
- MISHRA, S. K.; PANDA, G.; MAJHI, R. A comparative performance assessment of a set of multiobjective algorithms for constrained portfolio assets selection. *Swarm and Evolutionary Computation*, Elsevier, v. 16, p. 38–51, 2014.
- MISHRA, S. K.; PANDA, G.; MAJHI, R. Constrained portfolio asset selection using multiobjective bacteria foraging optimization. *Operational Research*, v. 14, n. 1, p. 113–145, 2014. ISSN 18661505.
- MOON, Y.; YAO, T. A robust mean absolute deviation model for portfolio optimization. *Computers & Operations Research*, Elsevier, v. 38, n. 9, p. 1251–1258, 2011.
- MORAL-ESCUADERO, R.; RUIZ-TORRUBIANO, R.; SUÁREZ, A. Selection of optimal investment portfolios with cardinality constraints. In: IEEE. *Evolutionary Computation, 2006. CEC 2006. IEEE Congress on*. [S.l.], 2006. p. 2382–2388.

- MOSTAGHIM, S.; TEICH, J. Strategies for finding good local guides in multi-objective particle swarm optimization (mopso). In: IEEE. *Swarm Intelligence Symposium, 2003. SIS'03. Proceedings of the 2003 IEEE*. [S.l.], 2003. p. 26–33.
- NOROOZI, A. et al. A probabilistic portfolio budget allocation problem with cpi index under risk. *Journal of Industrial and Production Engineering*, Taylor & Francis, v. 33, n. 4, p. 236–246, 2016.
- PAI, G.; MICHEL, T. Evolutionary optimization of constrained-means clustered assets for diversification in small portfolios. *Evolutionary Computation, IEEE Transactions on*, IEEE, v. 13, n. 5, p. 1030–1053, 2009.
- PALCZEWSKI, J. et al. Dynamic portfolio optimization with transaction costs and state-dependent drift. *European Journal of Operational Research*, v. 243, n. 3, p. 921–931, 2015. ISSN 03772217.
- PARRA, M. A.; TEROL, A. B.; URÍA, M. R. A fuzzy goal programming approach to portfolio selection. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 133, n. 2, p. 287–297, 2001.
- PONSICH, A.; JAIMES, A. L.; COELLO, C. A. C. A survey on multiobjective evolutionary algorithms for the solution of the portfolio optimization problem and other finance and economics applications. *Evolutionary Computation, IEEE Transactions on*, IEEE, v. 17, n. 3, p. 321–344, 2013.
- QIN, Z. Mean-variance model for portfolio optimization problem in the simultaneous presence of random and uncertain returns. *European Journal of Operational Research*, Elsevier Ltd., v. 000, p. 1–9, 2014. ISSN 03772217. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.ejor.2015.03.017>>.
- QU, B.-Y.; SUGANTHAN, P. N.; DAS, S. A distance-based locally informed particle swarm model for multimodal optimization. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, IEEE, v. 17, n. 3, p. 387–402, 2013.
- RANKOVIĆ, V. et al. The mean-value at risk static portfolio optimization using genetic algorithm. *Computer Science and Information Systems*, v. 11, n. 1, p. 89–109, 2014.
- RANKOVIĆ, V. et al. Mean-univariate GARCH VaR portfolio optimization: Actual portfolio approach. *Computers and Operations Research*, v. 72, p. 83–92, 2016. ISSN 03050548.
- RUIZ-TORRUBIANO, R.; SUÁREZ, A. A memetic algorithm for cardinality-constrained portfolio optimization with transaction costs. *Applied Soft Computing*, Elsevier, v. 36, p. 125–142, 2015.
- SABAR, N. R.; KENDALL, G. Using harmony search with multiple pitch adjustment operators for the portfolio selection problem. *Proceedings of the 2014 IEEE Congress on Evolutionary Computation, CEC 2014*, p. 499–503, 2014.
- SADIGH, A. N. et al. Cardinality constrained portfolio optimization using a hybrid approach based on particle swarm optimization and hopfield neural network. *Advanced Science Letters*, American Scientific Publishers, v. 17, n. 1, p. 11–20, 2012.

- SALAH, M. et al. PSO and Harmony Search Algorithms for Cardinality Constrained Portfolio Optimization Problem. *Advanced Modeling and Optimization*, v. 16, n. 3, p. 559–573, 2014.
- SCHAERF, A. Local search techniques for constrained portfolio selection problems. *Computational Economics*, v. 20, n. 3, p. 177–190, 2002. ISSN 1572-9974. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1023/A:1020920706534>>.
- SCHOTT, J. R. *Fault Tolerant Design Using Single and Multicriteria Genetic Algorithm Optimization*. [S.l.], 1995.
- SHARPE, W. F. Mean-variance analysis in portfolio choice and capital markets. *The Journal of Finance*, [American Finance Association, Wiley], v. 44, n. 2, p. 531–535, 1989. ISSN 00221082, 15406261. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/2328607>>.
- SKOLPADUNGKET, P.; DAHAL, K.; HARNPORNCHAI, N. Portfolio optimization using multi-objective genetic algorithms. In: IEEE. *Evolutionary Computation, 2007. CEC 2007. IEEE Congress on*. [S.l.], 2007. p. 516–523.
- SOLEIMANI, H.; GOLMAKANI, H. R.; SALIMI, M. H. Markowitz-based portfolio selection with minimum transaction lots, cardinality constraints and regarding sector capitalization using genetic algorithm. *Expert Systems with Applications*, v. 36, n. 3, Part 1, p. 5058 – 5063, 2009. ISSN 0957-4174. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S095741740800328X>>.
- SPERANZA, M. G. A heuristic algorithm for a portfolio optimization model applied to the milan stock market. *Computers & Operations Research*, Elsevier, v. 23, n. 5, p. 433–441, 1996.
- STREICHERT, F.; TANAKA-YAMAWAKI, M. The effect of local search on the constrained portfolio selection problem. In: IEEE. *Evolutionary Computation, 2006. CEC 2006. IEEE Congress on*. [S.l.], 2006. p. 2368–2374.
- STREICHERT, F.; ULMER, H.; ZELL, A. Comparing discrete and continuous genotypes on the constrained portfolio selection problem. In: SPRINGER. *Genetic and Evolutionary Computation—GECCO 2004*. [S.l.], 2004. p. 1239–1250.
- VELDHUIZEN, D. A. V. *Multiobjective evolutionary algorithms: classifications, analyses, and new innovations*. [S.l.], 1999.
- VELDHUIZEN, D. A. V.; LAMONT, G. B. *Multiobjective evolutionary algorithm research: A history and analysis*. [S.l.], 1998.
- WANG, B.; LI, Y.; WATADA, J. A new mopso to solve a multi-objective portfolio selection model with fuzzy value-at-risk. In: *Knowledge-Based and Intelligent Information and Engineering Systems*. [S.l.]: Springer, 2011. p. 217–226.
- WOODSIDE-ORIAKHI, M.; LUCAS, C.; BEASLEY, J. Portfolio rebalancing with an investment horizon and transaction costs. *Omega*, Elsevier, v. 41, n. 2, p. 406–420, 2013.
- WOODSIDE-ORIAKHI, M.; LUCAS, C.; BEASLEY, J. E. Heuristic algorithms for the cardinality constrained efficient frontier. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 213, n. 3, p. 538–550, 2011.

- XIDONAS, P. et al. Ipssis: An integrated multicriteria decision support system for equity portfolio construction and selection. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 210, n. 2, p. 398–409, 2011.
- XU, R.-t. et al. An estimation of distribution algorithm based portfolio selection approach. In: IEEE. *Technologies and Applications of Artificial Intelligence (TAAI), 2010 International Conference on*. [S.l.], 2010. p. 305–313.
- YU, L.; WANG, S.; LAI, K. K. Neural network-based mean–variance–skewness model for portfolio selection. *Computers & Operations Research*, Elsevier, v. 35, n. 1, p. 34–46, 2008.
- ZHU, H. et al. Particle swarm optimization (pso) for the constrained portfolio optimization problem. *Expert Systems with Applications*, Elsevier, v. 38, n. 8, p. 10161–10169, 2011.
- ZITZLER, E.; THIELE, L. Multiobjective evolutionary algorithms: a comparative case study and the strength pareto approach. *evolutionary computation, IEEE transactions on*, IEEE, v. 3, n. 4, p. 257–271, 1999.

APÊNDICE A

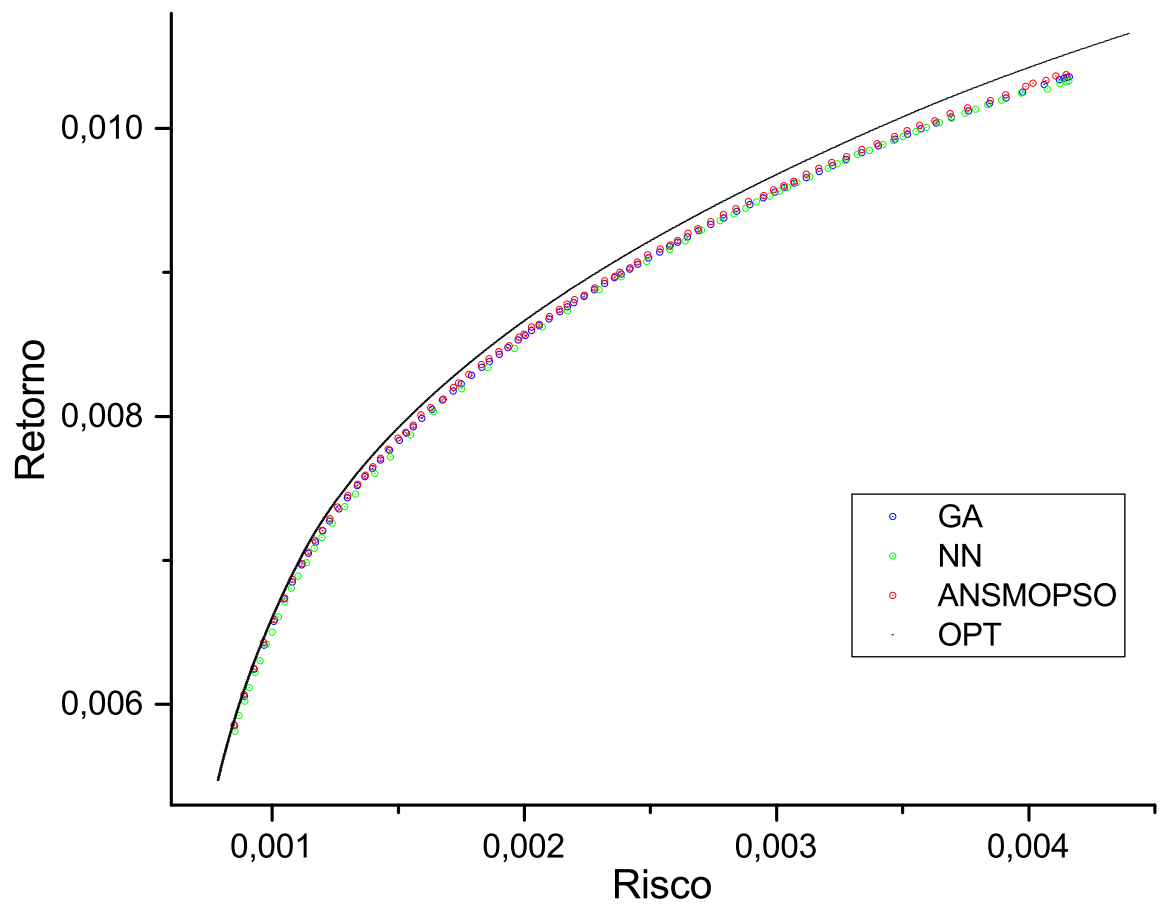


Figure A.1: Comparação das fronteiras obtidas para o CCPSP - HANG SENG

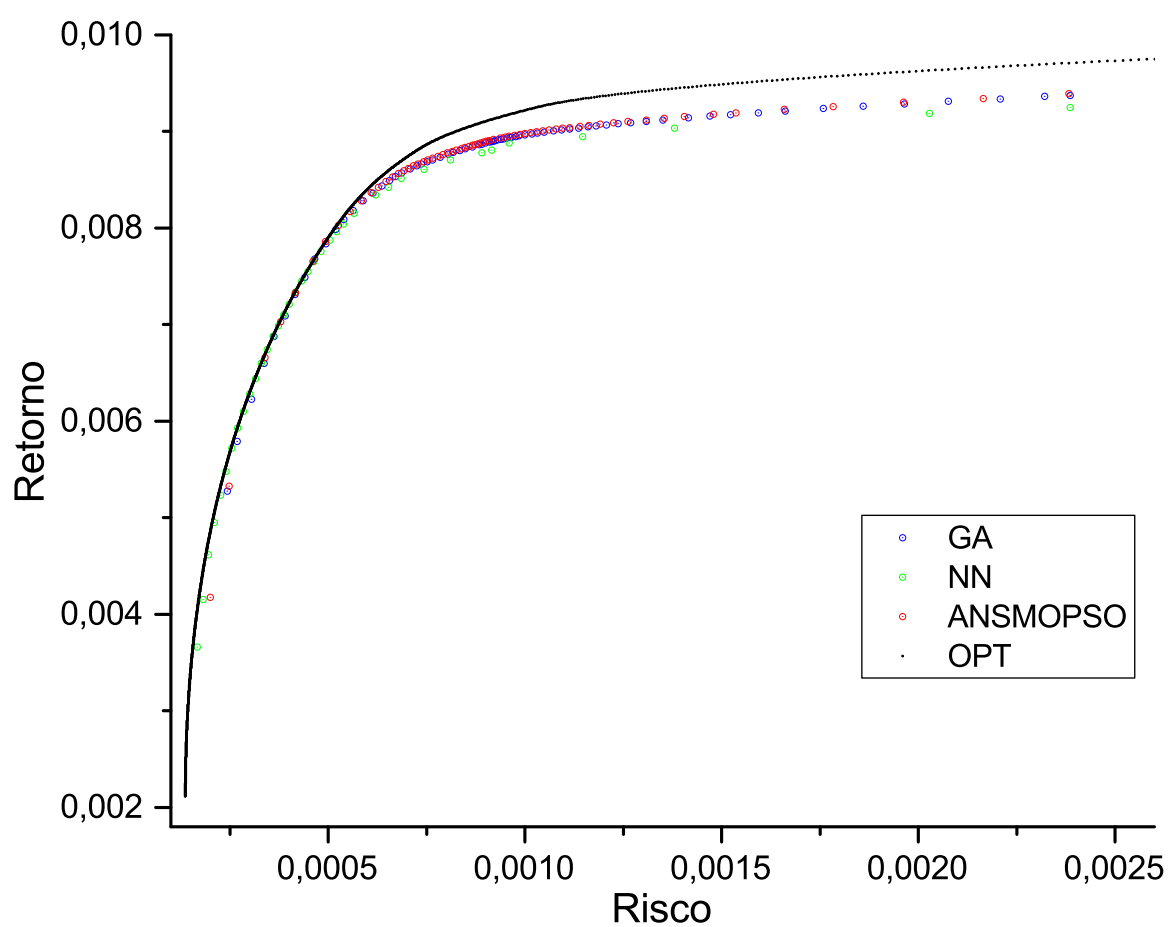


Figure A.2: Comparação das fronteiras obtidas para o CCPSP - DAX 100

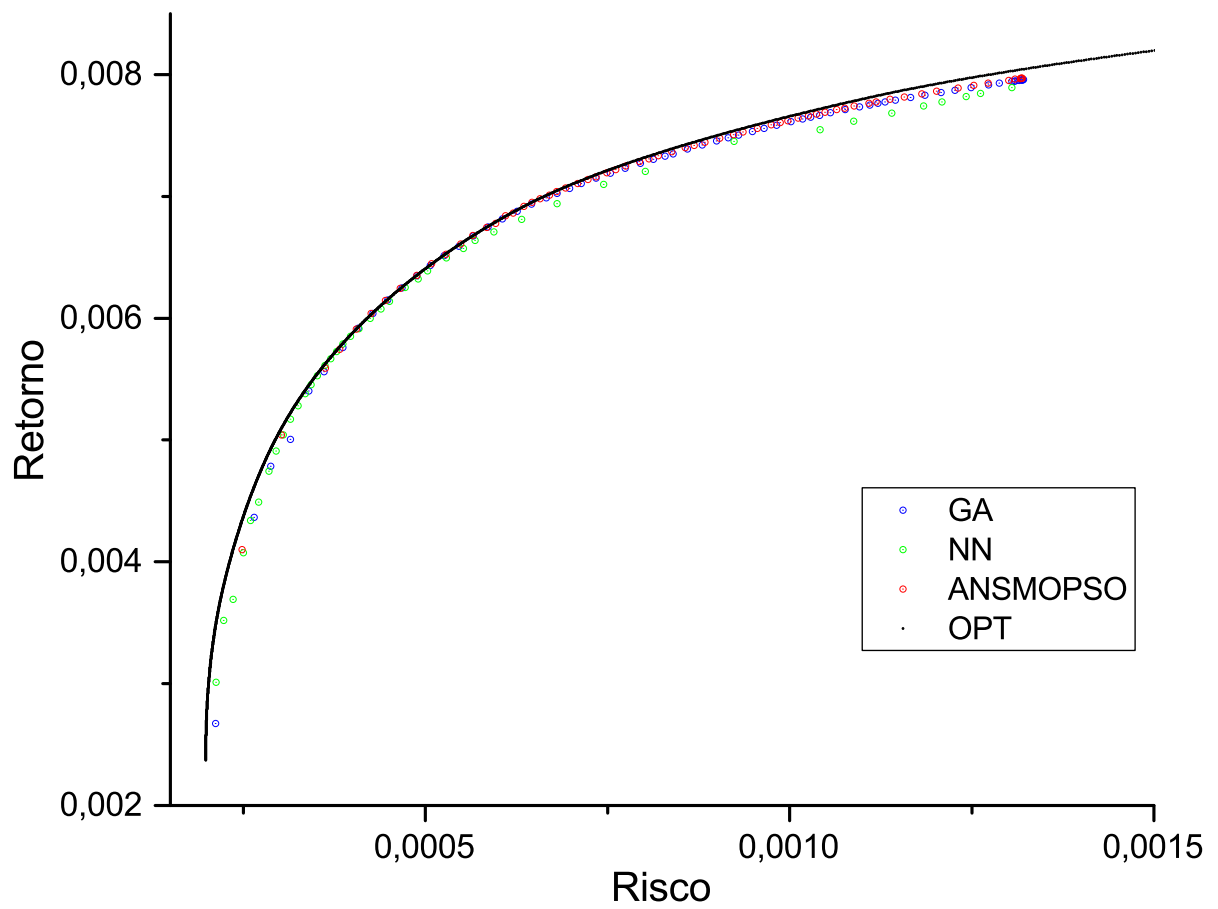


Figure A.3: Comparação das fronteiras obtidas para o CCPSP - FTSE 100

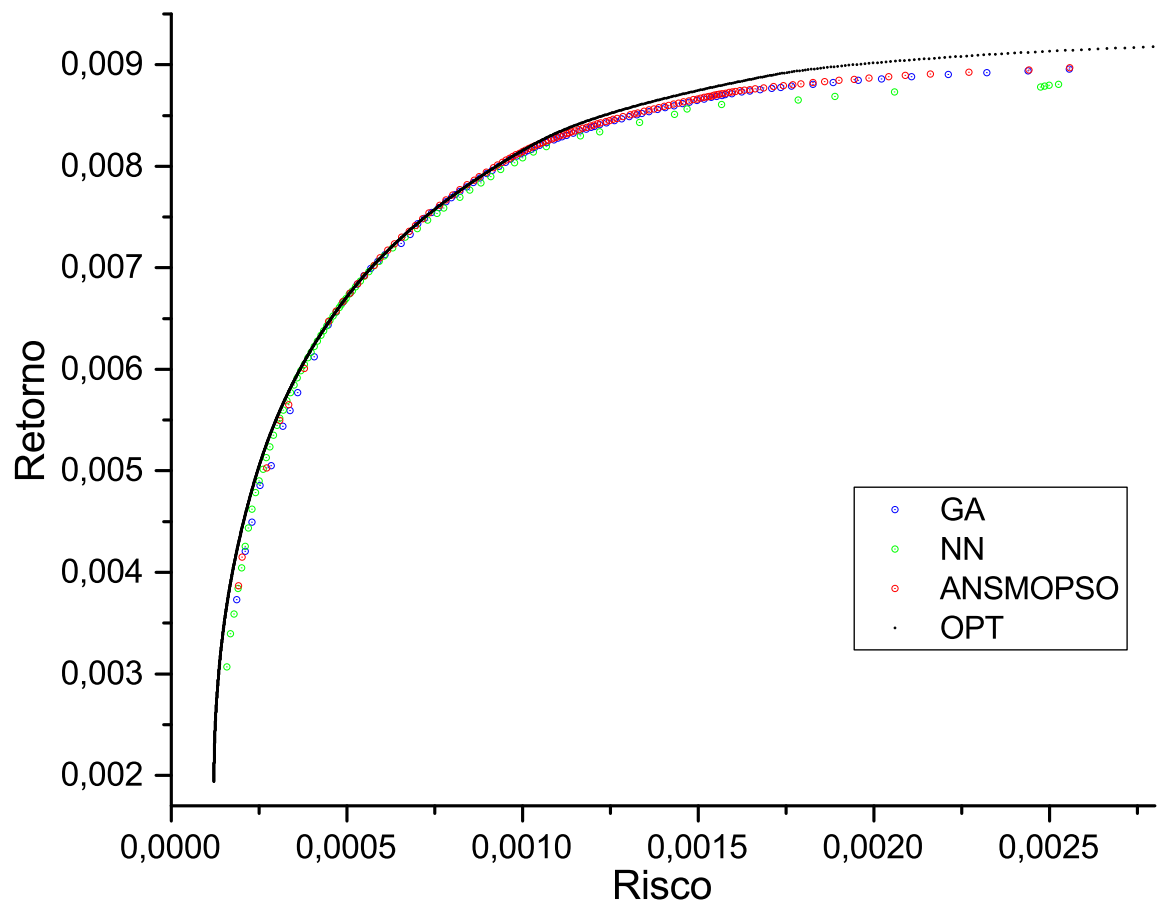


Figure A.4: Comparação das fronteiras obtidas para o CCPSP - S&P 100

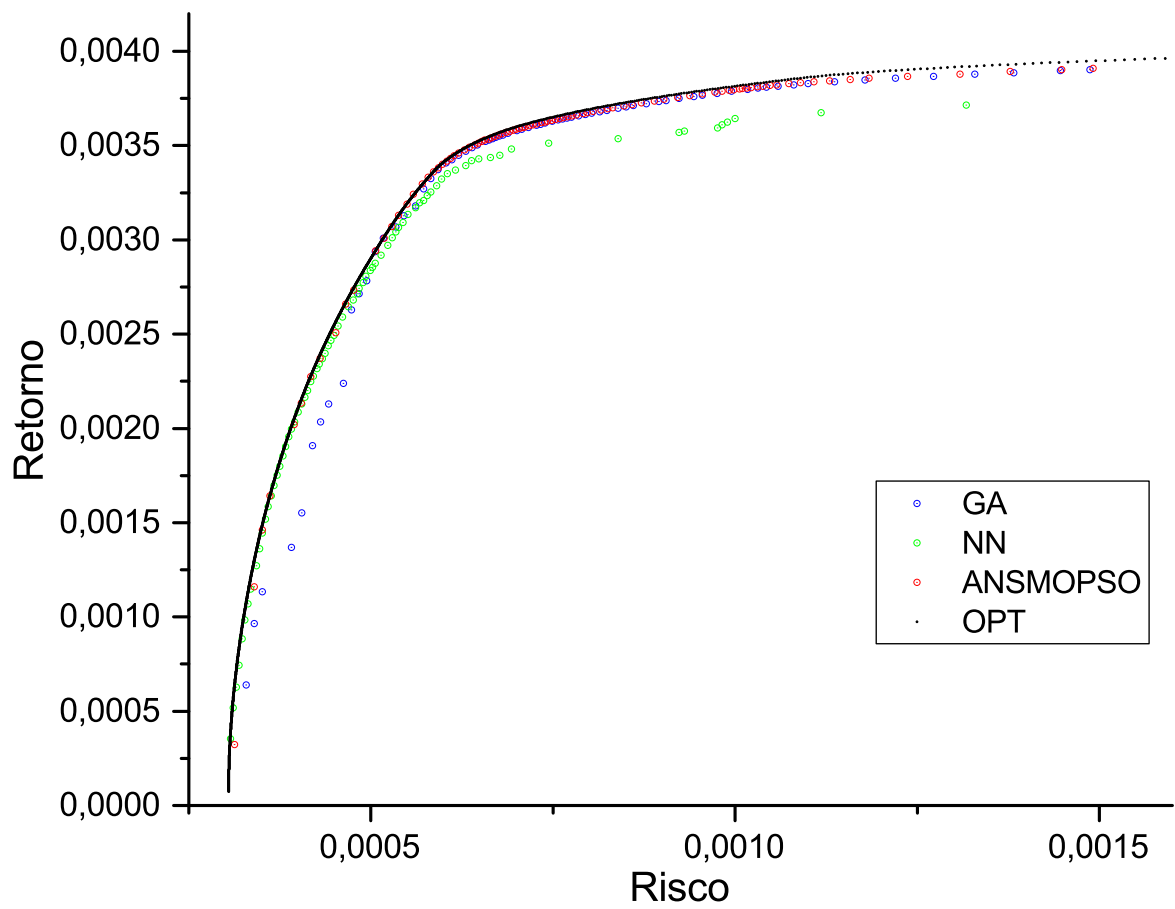


Figure A.5: Comparação das fronteiras obtidas para o CCPSP - Nikkei 225

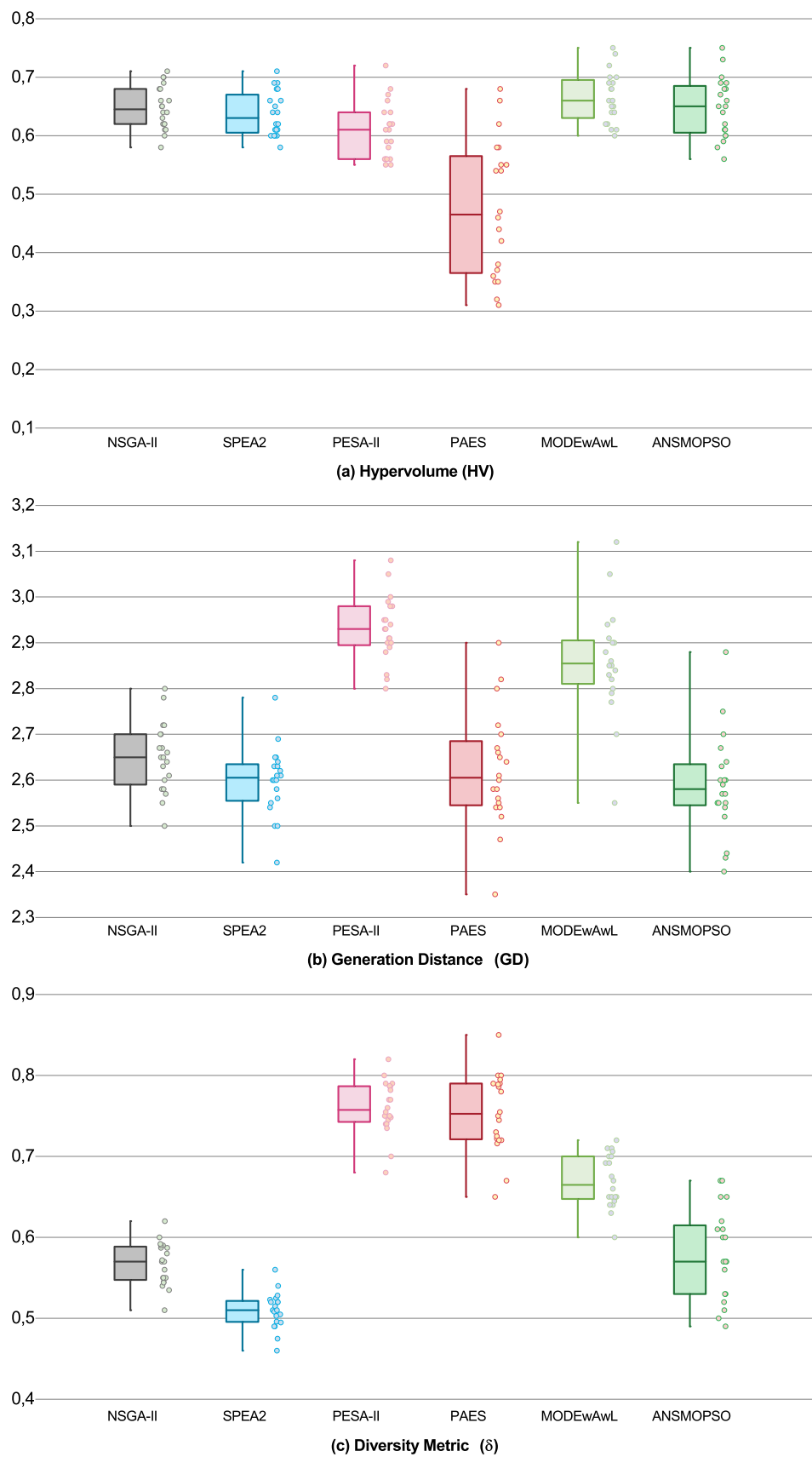


Figure A.6: Comparação dos resultados obtidos para o CCLS-PSP - Hang Seng

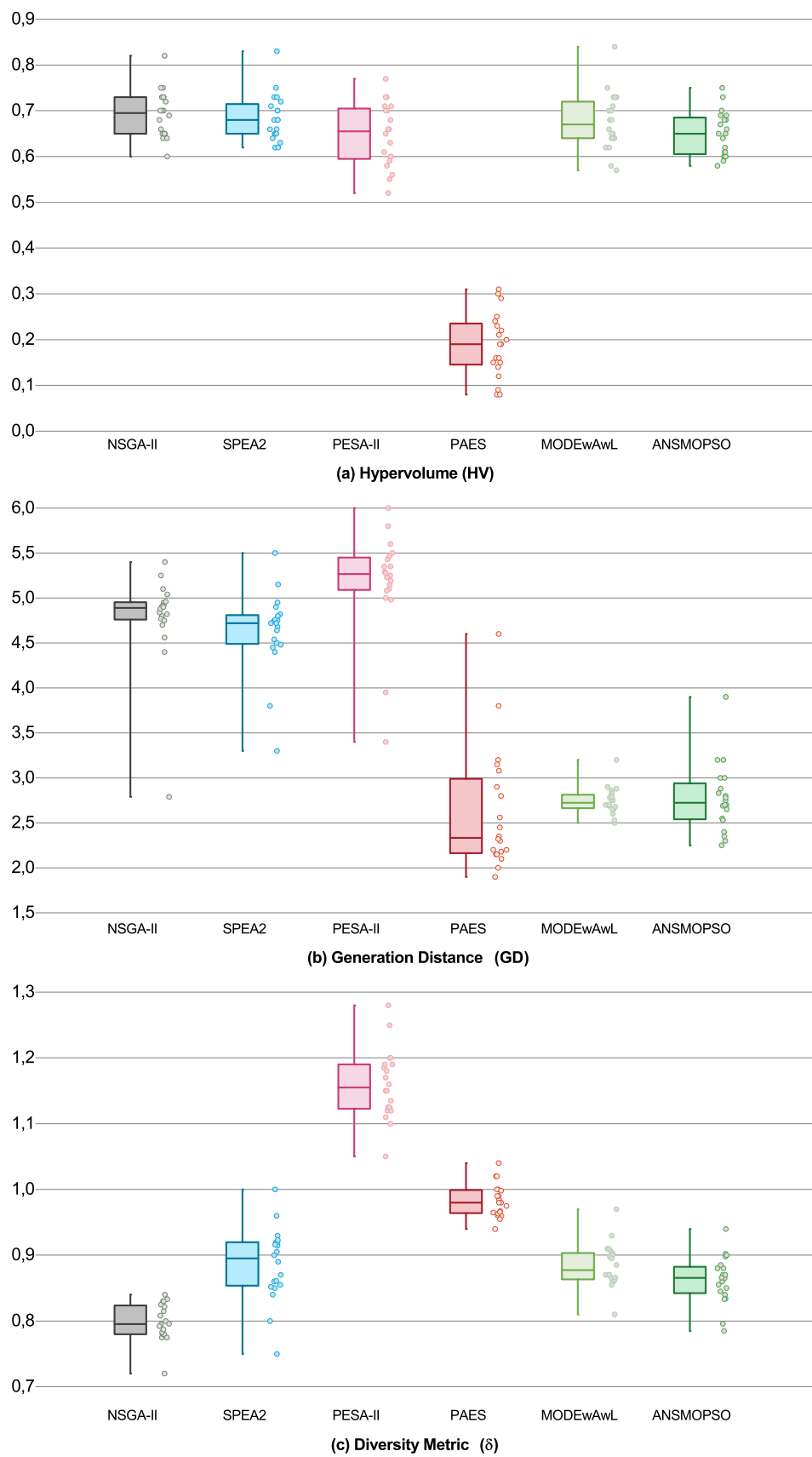


Figure A.7: Comparação dos resultados obtidos para o CCLS-PSP - DAX 100

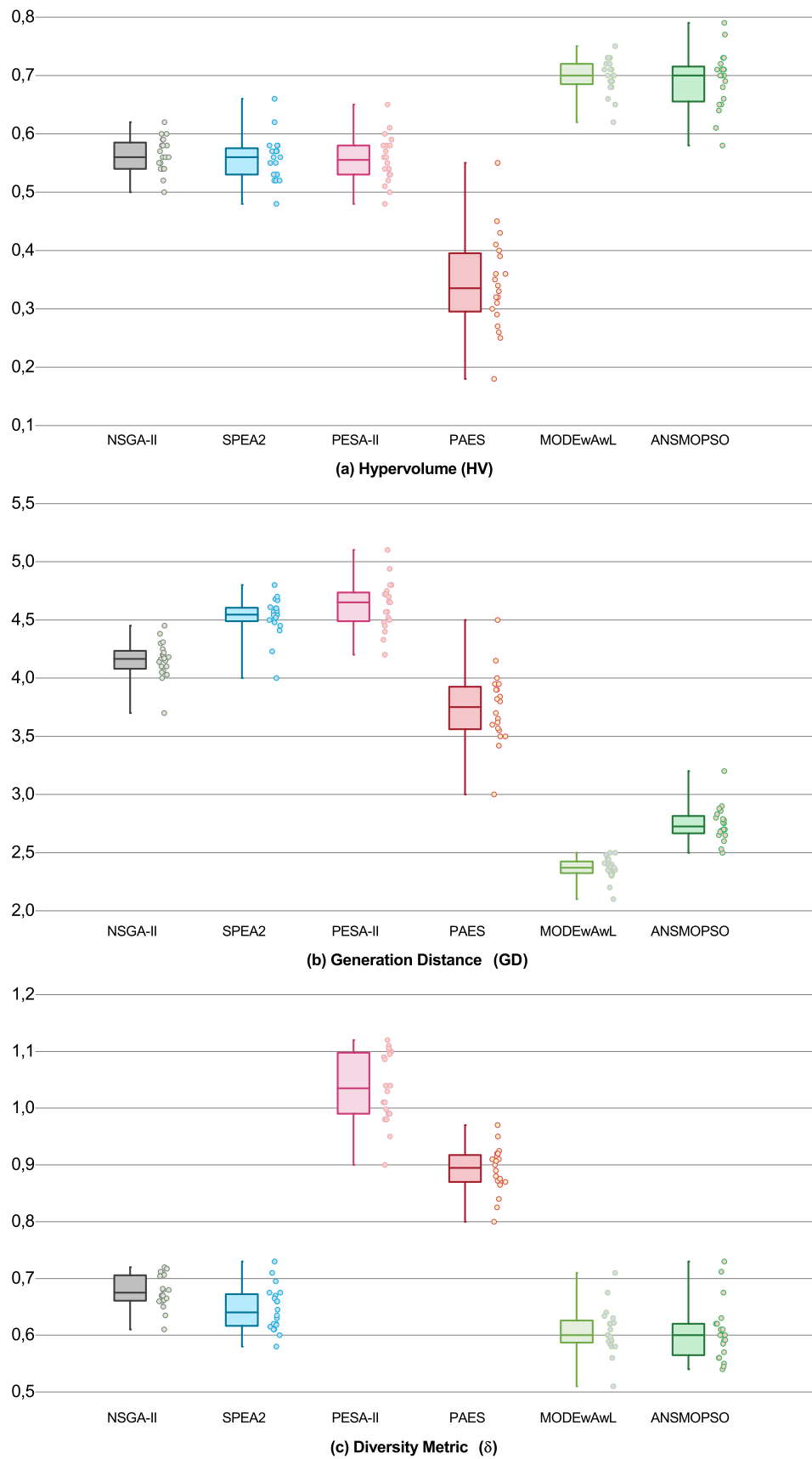


Figure A.8: Comparação dos resultados obtidos para o CCLS-PSP - FTSE 100

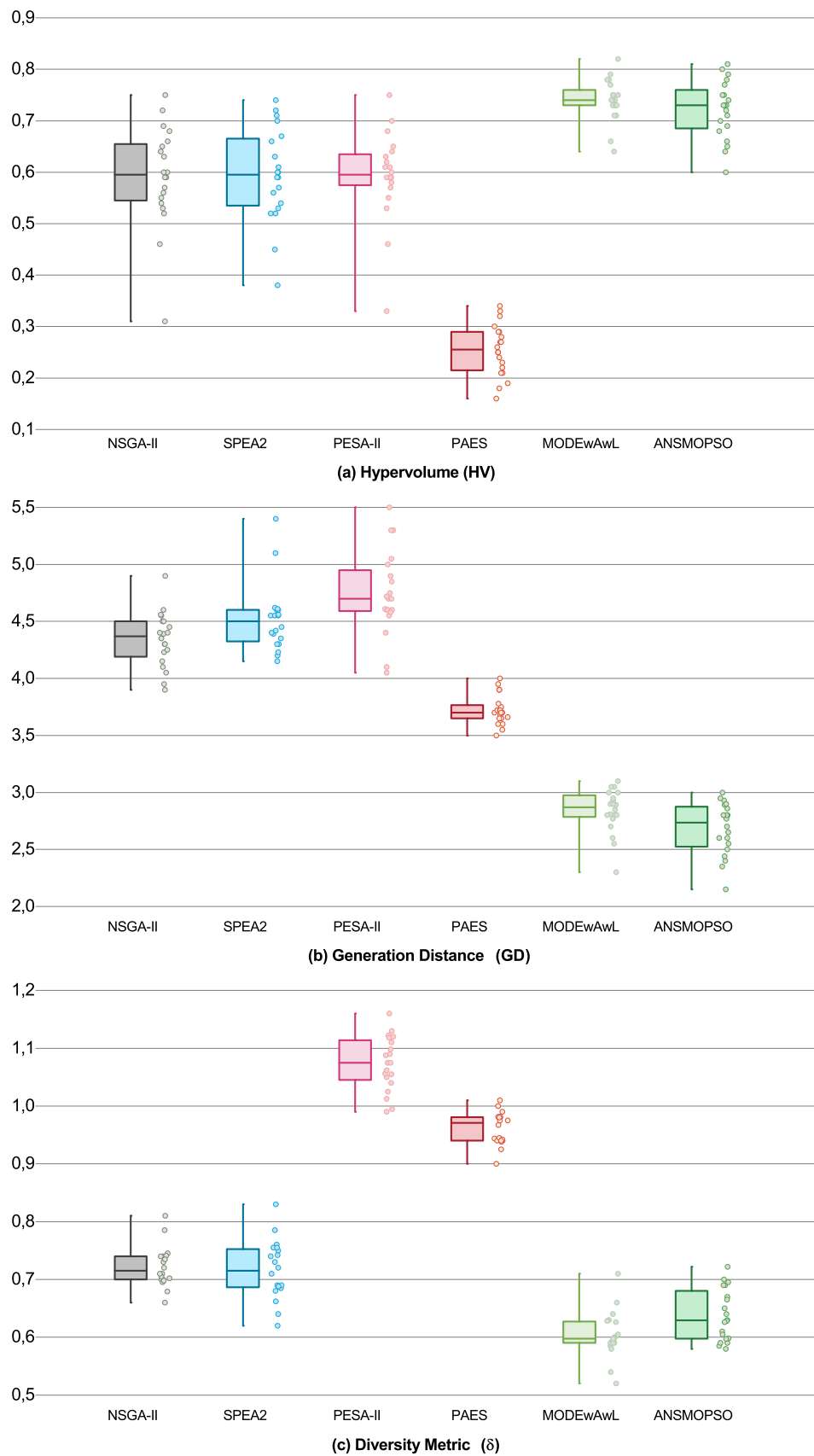


Figure A.9: Comparação dos resultados obtidos para o CCLS-PSP - S&P 100

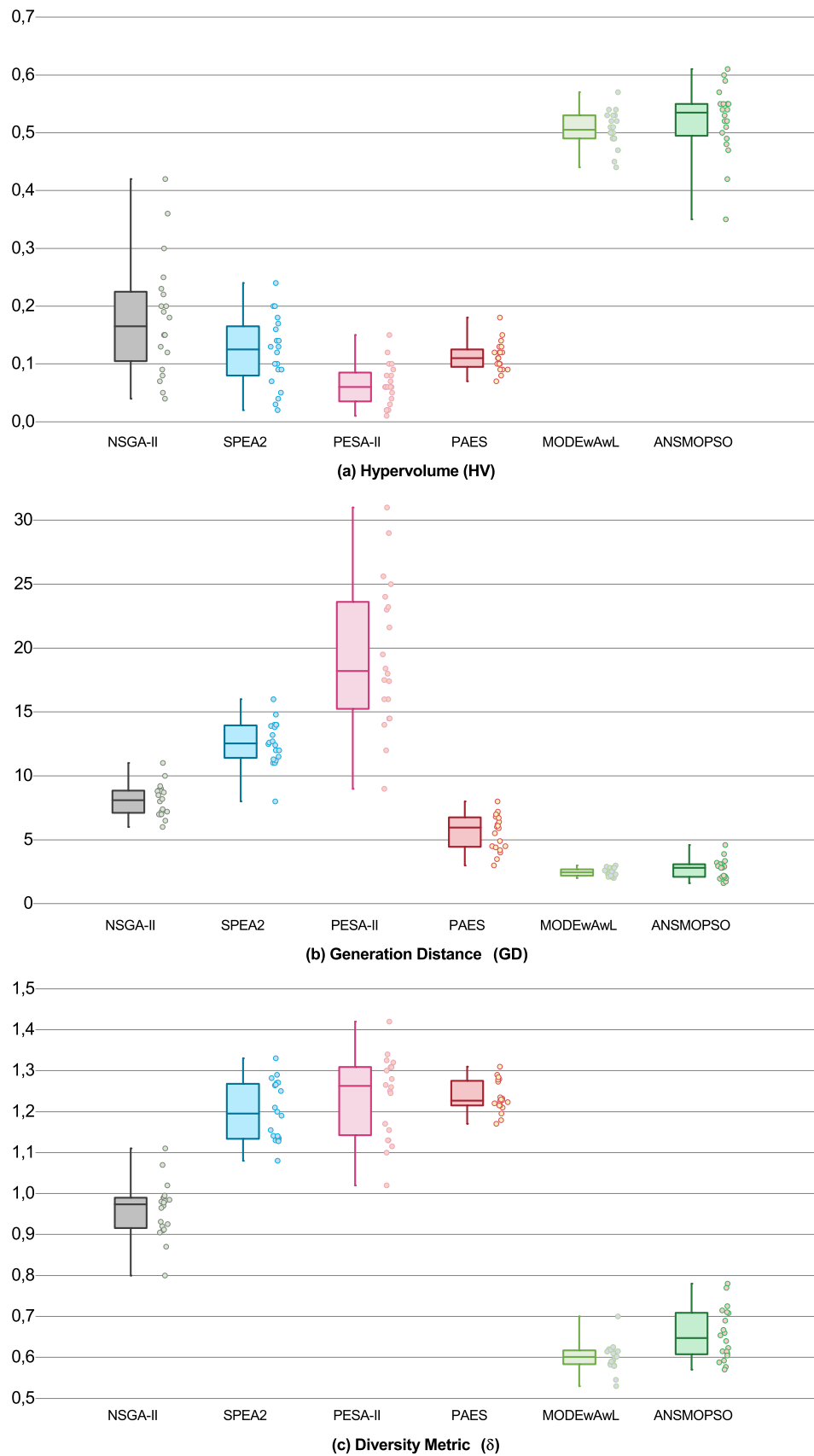


Figure A.10: Comparação dos resultados obtidos para o CCLS-PSP - Nikkei 225