

OTIMIZAÇÃO MULTICRITÉRIO DE CARTEIRA DE INVESTIMENTOS

Menanes Chaves Barros Cardoso

Instituto Tecnológico de Aeronáutica – ITA
Rua H8-C, 322 – CTA – 12.228-462 – São José dos Campos – SP – Brasil
Bolsista PIBIC-CNPq
Correio eletrônico: menanes@gmail.com

Takashi Yoneyama

Instituto Tecnológico de Aeronáutica – ITA
Praça Marechal Eduardo Gomes, 50 – Vila das Acácias – 12.228-900 – São José dos Campos – SP – Brasil
Correio eletrônico: takashi@ita.br

Resumo. *O propósito deste trabalho é desenvolver: uma metodologia para otimização de carteira de investimentos considerando um cenário que contempla múltiplos objetivos do investidor; como retorno sobre o capital investido e risco assumido; implementar a metodologia proposta em um ambiente computacional; e propor diretrizes para seleção dos métodos para solução numérica do problema de otimização de carteira de ações.*

Palavras chave: otimização, programação matemática, ações, bolsa de valores, mercado financeiro.

1. Introdução

O projeto consistiu de três partes bem distintas e que estão cronologicamente relacionadas como mostrado abaixo:

- i. Elaboração de uma metodologia para a otimização de carteiras considerando vários critérios e cenários que podem ser estocásticos ou não;
- ii. Desenvolvimento de um sistema computacional que implemente essa metodologia, utilizando o ambiente ©MATLAB, por se tratar de uma ferramenta com muitos recursos que são adequados ao desenvolvimento do sistema;
- iii. Propor diretrizes para a análise das soluções numéricas obtidas.

Para a elaboração da metodologia, precisou-se adquirir conhecimentos básicos sobre: o que é o risco e quais os tipos; o que é o mercado financeiro (como ele funciona, do que é composto, como as empresas e os investidores podem atuar nesse mercado); o que é um ativo livre de risco (poupança, fundo de renda fixa, CDB); o que é um sistema estocástico e não-estocástico.

Uma vez entendido os tópicos do parágrafo anterior, passou-se ao estudo dos principais índices utilizados pelos investidores na análise de que ativos os investidores devem investir e as quantidades de ações das empresas a serem compradas, afim de formarem suas carteiras.

Uma vez conhecido e entendido os índices, selecionou-se aqueles mais relevantes, podendo os mesmos serem índices fundamentalistas e/ou grafotécnicas, que analisam o desempenho da empresa através de dados fornecidos no balanço patrimonial, pelo desempenho do setor em que atuam, índices de avaliação de risco utilizados pelo mercado financeiro ou ainda serem índices desenvolvidos como resultados de pesquisa científica.

Para ajudar no desenvolvimento do modelo, foi estudado um modelo bastante utilizado no mercado chamado de CAPM (*Capital Asset Pricing Model* – Modelo de Precificação de Ativos Financeiros), formulado por Sharpe (1964) e Treynor (1961). Esse modelo, assim como outros desenvolvidos no mesmo período, apresentava limitado poder explicativo, de modo que, neste trabalho, foram propostas interpretações dos significados no contexto de mercados acionários e de seus agentes, aproximando a teoria criada sobre mercados à prática vivida pelos profissionais da área.

Tendo-se dominado os conceitos sobre os índices para avaliação de risco e estando de posse de um modelo, foi necessário fazer um estudo de viabilidade de implementação dos mesmos. Isso é necessário, pois a segunda e terceira etapas desse projeto dependem, além da qualidade da metodologia criada e de sua aplicabilidade, da capacidade de implementação que a metodologia terá, pois sem essa característica, as etapas posteriores serão inviáveis de serem realizadas. Assim, foi observado que o modelo, bem como os índices escolhidos individualmente, satisfazem essa característica.

Como um requisito desejável da metodologia a ser proposta, o estudo de modelos que tratassem do problema do comportamento estocástico do mercado financeiro fez-se necessário.

Após todo o estudo realizado considerando diversos critérios (tipos de ativos desejados na carteira de investimento, sistema totalmente ou parcialmente observado, índices e modelos conhecidos (amplamente utilizados e aceitos) e capacidade de implementação, maior retorno com o menor risco), procedeu-se o desenvolvimento conceitual do modelo, considerando todos os requisitos mencionados, e possivelmente outros não mencionados; o modelamento da metodologia, para dar forma matemática as idéias desenvolvidas; e por fim, a maneira escolhida para otimizar-se, na terceira fase, o modelo criado.

Formulada a metodologia, pode-se desenvolver então, utilizando-se a ferramenta MATLAB, o ambiente computacional que implementa a metodologia e ao mesmo tempo, permite avaliar seu desempenho, bem como estabelecer comparações a outros índices e metodologias, para se verificar se os objetivos finais (citados no parágrafo anterior) estão sendo atingidos.

Com o sistema computacional pronto, poder-se-á otimizar a metodologia, utilizando-se um método matemático adequado, segundo as premissas estabelecidas como sendo as diretrizes que devem ser otimizadas para que a metodologia criada obtenha seu ponto ótimo de (Exemplo: dada uma carteira de ações, a melhor composição de ações, os preços-alvo que as ações devam possuir, entre outros parâmetros) obter a carteira de investimentos com a melhor rentabilidade e o menor risco, dentre todas as carteiras possíveis de se constituir.

2. Resultados Obtidos

Um tutorial interessante sobre o tema é disponibilizado pela Bovespa em seu site (no formato de arquivo PDF), onde podem ser adquiridos os conhecimentos básicos para se entender o funcionamento do mercado de ações e também sobre a entidade de negociação nesse mercado, que é chamada de ação.

Uma vez entendido o contexto principal sobre o qual a metodologia irá analisar, pode-se analisar alguns dos índices mais utilizados no mercado financeiro. Dentre eles, escolhi alguns para um estudo mais detalhado, entendendo seus fundamentos, visando às melhores escolhas para construir a metodologia que será a base de todo este trabalho.

Os índices escolhidos para o estudo mais detalhado foram:

- Liquidez: é a capacidade que uma ação tem de ser negociada. É um conceito que não dispõe de fórmula matemática para obtê-la, mas pode ser inferida pelo volume negociado, em bolsa de valores, da ação analisada. Quanto maior (menor) é o volume de ações negociadas, maior (menor) é a liquidez da ação;
- Índice de Sharpe: avalia a relação risco x retorno da carteira. É a relação entre o prêmio pago pelo risco que o investidor assume e o risco total do investimento;
- Beta: o coeficiente Beta, no modelo CAPM, indica o risco sistemático de determinado ativo, ou seja, indica a capacidade do ativo de acompanhar as tendências do mercado. Ele é definido como o coeficiente angular ou inclinação de uma reta de regressão linear;
- VTM (Valor Teórico Mínimo): é o valor teórico mínimo que o cotista terá ao fim do período de 1 mês, com 95% de probabilidade, no caso de uma aplicação de R\$ 1.000,00;
- Índice M²: De modo sintético, informa se determinada carteira de ativos apresenta retorno superior ou inferior ao mercado, que no caso brasileiro, é representado pelo Ibovespa.

Para maior clareza dos índices citados acima, segue abaixo suas formulações matemáticas (exceto o de Liquidez):

a) Índice de Sharpe:

$$IS = \frac{R_F - R_f}{\sigma_F} \quad (1)$$

em que:

R_F : Retorno do Fundo

R_f : Retorno do Ativo Livre de Risco (risk free)

σ_F : Risco do Fundo

Observando a fórmula (1), vê-se que quanto maior o IS, maior será o prêmio pago ao investidor (pelo risco assumido), e portanto, melhor o fundo.

Outra forma de representação do Índice de Sharpe é através de gráficos como na figura 1.

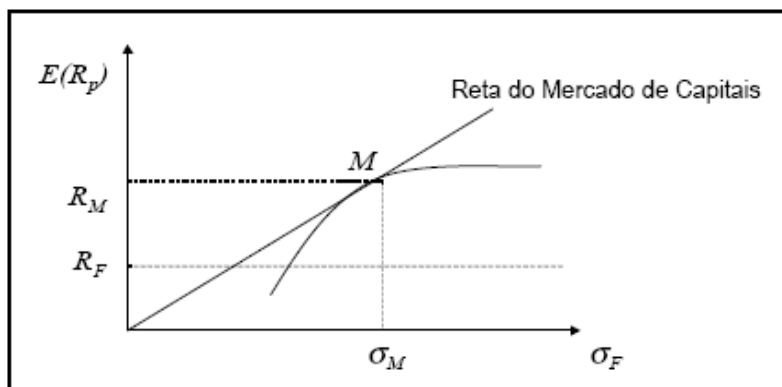


Figura 1. Obtenção, via gráfico, do Índice de Sharpe.

O índice corresponde à inclinação da Reta do Mercado de Capitais (*Capital Market Line*), que passa pelo ponto do retorno do ativo livre de risco (*risk free*) e pelo ponto (σ_M, R_M) .

b) Beta:

$$\beta = \frac{Cov(r_i, r_M)}{\sigma_M^2} \quad (2)$$

em que:

$Cov(a, b)$ é a covariância entre as variáveis aleatórias a e b

r_i = Retorno do ativo i

r_M = Retorno de mercado

β = Inclinação da reta, também chamado de risco sistêmico

σ_M^2 = Variância do mercado

No caso, quanto maior for o valor β , maior é o risco do ativo analisado e ele pode assumir os seguintes valores:

- $\beta > 1$: Quando o ativo tem comportamento mais agressivo que o mercado;
- $\beta = 1$: Quando o ativo acompanha perfeitamente as oscilações do mercado;

- $\beta < 1$: Quando o ativo tem comportamento conservador em relação ao mercado;
- $\beta < 0$: Quando o ativo se movimenta em direção contrária ao mercado.

c) **VTM (Valor Teórico Mínimo):**

$$VTM = 1000 \times [1 + (R_F - (DistribNormal(0,95) \times \sigma_F))] \quad (3)$$

em que:

R_F = Retorno do Fundo

σ_F = Risco do Fundo

d) **Índice M^2 :**

A representação matemática do conceito do Índice M^2 é dada por:

$$M^2 = R(P') - R(BV) \quad (4)$$

em que:

$R(P')$: Retorno da carteira formada pelo portfólio em análise e o ativo livre de risco

$R(BV)$: Retorno do mercado

A obtenção do Índice M^2 é feita mediante a construção de uma carteira formada pelo ativo analisado e um ativo livre de risco equivalente a um existente no mercado. A diferença entre o retorno alcançado por esta carteira e o retorno do mercado determina o Índice M^2 , como mostrado abaixo:

$$M^2 = \left(\frac{R_F - R_f}{\sigma_F} \right) \times S(BV) - (R(BV) - R_f) \quad (5)$$

em que:

R_F : Retorno do portfólio em análise

R_f : Retorno do ativo livre de risco

σ_F : Risco do portfólio em análise

$S(BV)$: Risco do mercado

$R(BV)$: Retorno do mercado

Para a escolha do modelo a ser utilizado como referência (na fase inicial do desenvolvimento da metodologia), foi utilizado como critérios: ser amplamente difundido no meio acadêmico e no mercado financeiro; de fácil formulação matemática (isso é necessário para uma possível implementação futura, em ambiente computacional); que não houvesse restrições com relação a vendas a descoberto de qualquer ativo; não houvesse custos de transação e nem de impostos, para facilitar o desenvolvimento da metodologia.

Por outro lado, o CAPM apresenta como desvantagens: as quantidades de todos os ativos são dadas e fixas; os investidores têm expectativas homogêneas; e todos os ativos são perfeitamente divisíveis e perfeitamente líquidos, ou seja, negociáveis ao preço corrente.

Embora as questões aqui mencionadas como desvantagens do CAPM, sejam algumas deficiências do modelo, são perfeitamente adequadas para este trabalho, pois são objetivos pretendidos nesse trabalho: carteira composta de quantidades variáveis de ativos, bem como de diversos tipos de risco (livre de risco, baixo risco e assim por diante); os investidores têm expectativas diferentes, tanto de rentabilidade quanto no tempo de manterem as posições de suas carteiras; e nem todos os ativos são perfeitamente líquidos, existindo então a necessidade de avaliar quão impactante é a liquidez do ativo para o resultado da carteira possuída por um dado investidor.

A formulação matemática do modelo CAPM é mostrada na equação (6)

$$R_p = R_f + \beta \times (R_m - R_f) \quad (6)$$

em que:

R_p = Taxa de retorno do investimento, também chamada de *taxa de atratividade mínima*

R_f = Taxa de retorno de um investimento livre de risco

β = Beta

R_m = Taxa média de retorno do mercado

Analisando a equação (6), vê-se que ela representa o retorno esperado de um investimento que conduz a uma situação de equilíbrio, isto é, que não deixa espaço para que o mercado faça qualquer tipo de arbitragem. Nesta equação, o beta é o parâmetro que representa o risco sistemático (risco à que estão sujeitas todas as empresas situadas em um mesmo universo econômico, ainda que com diferentes graus de intensidade).

Entendido os índices (de avaliação de risco) escolhidos e do modelo utilizado como referência, para o desenvolvimento de uma nova metodologia que contempla múltiplos objetivos, neste momento do projeto, foi necessário fazer uma análise de viabilidade de implementação desses índices e do modelo escolhido como referência.

Isso foi necessário para estimar a complexidade de criação de um ambiente computacional que tivesse por elementos primários, um ou mais desses índices, bem como o possível uso do modelo CAPM como base do desenvolvimento da futura metodologia. Uma vez que a metodologia a ser desenvolvida não seria necessariamente totalmente inovadora, poder-se-ia ocorrer uma situação em que a metodologia proposta fosse um modelo composto de alguns desses componentes e, portanto, o metodologia a ser implementada posteriormente.

Para se verificar, na prática, a viabilidade de implementação dos itens escolhidos e do modelo CAPM, foi utilizado a ferramenta Microsoft Office Excel 2007, em que foi utilizado todos os seus recursos necessários para se testar cada item, e o ambiente MATLAB para Índice de Sharpe e Índice M^2 , como treino para uso na construção do futuro ambiente computacional. Os testes feitos na ferramenta citada mostraram que é possível implementar, de forma analítica, os itens testados; contudo, os testes foram feitos com cada fórmula, independente umas das outras. Mesmo assim, acredita-se que é possível implementá-las em conjunto, devido ao fato dos parâmetros de cada fórmula não influenciarem, à primeira vista, os parâmetros de outras fórmulas.

Depois de feito o estudo de viabilidade de implementação dos elementos (índices e do modelo CAPM), foi feito um estudo das vantagens e desvantagens de cada índice escolhido e do modelo CAPM, bem como das hipóteses que serviram de fundamento para a criação das respectivas teorias.

Terminado a fase de estudo relatada no parágrafo anterior, os conceitos estabelecidos para a formulação da metodologia foram:

1. A composição da carteira de investimentos pode ser composta de: ativos livres de risco; ativos com risco, desde que sejam enquadrados como ações; e fundos de investimento de ações, por serem de fácil medição dos resultados;

Como foi mostrado por Markowitz, a diversificação de ativos (desde que tenham baixo correlacionamento) diminui o risco que existe quando se tem um único ativo. Assim, seria bom que a metodologia também abordasse os ativos livres de risco, pois embora possuam rentabilidade menor, em épocas de muita volatilidade no mercado de ações e de juros altos, torna-se um ativo bastante atrativo.

2. A expressão matemática deve ser simples, porém deve permitir que se possa interpretar as mais variadas situações da carteira de ativos, considerada no item um (acima);

Ela deve ser de fácil implementação, pois servirá de base para a construção de um ambiente computacional, que posteriormente, deverá ser otimizado numericamente.

3. A metodologia deve ser utilizada em ambientes cujos os parâmetros são totalmente observáveis;

Para o desenvolvimento inicial do projeto, a escolha de um ambiente totalmente observável facilita o estudo e análise dos resultados obtidos, num primeiro momento, e permite que futuramente se possa melhorar o modelo, permitindo que ele seja utilizado em um ambiente parcialmente observável.

4. Maior retorno com o menor risco. Esse é o objetivo de toda metodologia que desenvolvida para essa área;
5. A quantidade de cada ativo, bem como de cada tipo de ativo, pode ser variável. Isso visa a atender aos vários critérios (multicritério) que investidor possa ter;
6. O tempo de permanência e o retorno desejado pelo investidor também podem ser variados;
7. A liquidez dos ativos pode variar dentro da faixa de zero a um, pois nenhum ativo é totalmente líquido ou o contrário. O contexto em que se vivencia influencia diretamente na liquidez dos ativos;
8. Não há nenhum tipo de custo (impostos, corretagem, emolumentos, taxa de administração ou qualquer outro tipo de custo para se manter a carteira criada).

Com os conceitos formalmente estabelecidos, procurou-se uma forma matemática para se representá-los. A forma proposta é mostrada na equação (7):

$$R_P = R_{\text{Livre}} + \frac{\sum_{i=0}^n (R_i + R_{\text{Fundo}}) \times S(BV)}{\sigma_P} \times L(x) \quad (7)$$

em que:

R_P = Retorno médio do portfólio em análise

R_{Livre} = Retorno do ativo livre de risco

R_i = Retorno do ativo i

R_{Fundo} = Retorno do fundo de investimento contratado (empresa ou representante do investidor)

$S(BV)$ = Risco do mercado

σ_P = Risco do portfólio em análise

$L(x)$ = Liquidez do portfólio

x = Fator que depende do momento econômico do setor do ativo e da economia do país em que o ativo é negociado

De posse desse modelo, poderíamos partir para a fase de construção do ambiente computacional, que seria a segunda fase. Contudo, devido ao fato de ter-se gastado muito tempo para formulá-lo, não houve tempo hábil para que se pudesse fazer a construção desse ambiente.

Contudo, uma vez de posse da fórmula matemática e do ambiente de desenvolvimento MATLAB será possível fazer a implementação em ambiente computacional.

Apesar de não ter sido feito as duas últimas fases desse projeto, foi feito um estudo sobre as possíveis metodologias para otimização numérica do modelo, na terceira fase. O resumo desse estudo é mostrado na Tabela 1 (Júnior, 2008)

Tabela 1. Análise Comparativa de Três Metodologias para Estimação

	Análítica	Simulação Histórica	Simulação Monte Carlo
Facilidade para Implementação	Média	Média	Difícil
Facilidade para Assimilação	Média	Média	Difícil
Complexidade Computacional	Média	Média	Alta
Tempo de Execução	Médio	Médio	Alto
Hipóteses Simplificadoras *	Muitas	Poucas	Algumas
Carteiras com Não-Linearidades	Péssimo	Ótimo	Ótimo
<i>Stress Testing</i>	Péssimo	Ótimo	Ótimo
Análise de Sensibilidade	Péssimo	Regular	Ótimo
Modularização e Portabilidade	Pouca	Média	Pouca

* Do ponto de vista matemático

Analisando-se a Tabela (1), vê-se que os métodos mais adequados são a Simulação Histórica e a Simulação de Monte Carlo. Contudo, a escolha de um ou outro método depende dos requisitos pretendidos.

Assim, a Simulação Histórica mostra-se mais viável para um aluno iniciante no assunto, tanto por não ser de compreensão tão difícil quanto pela qualidade dos resultados obtidos. Já a Simulação de Monte Carlo, possui resultados melhores, mas é mais indicada para pessoas mais experientes no assunto, dado a sua maior complexidade.

3. Conclusões

O mercado financeiro é uma área muito ampla e que está, no Brasil, vivenciando um crescimento extraordinário e que se apresenta com um vigor muito grande, devendo crescer ainda por muitos anos à frente. Esse crescimento é apoiado por diversas razões, que dentre elas podemos destacar a estabilidade econômica, o crescimento do número de investidores de pessoa física no Brasil e bom desempenho das grandes empresas brasileiras no cenário da economia global.

Os índices selecionados, bem como a escolha do modelo CAPM, mostraram-se muito pertinentes para este projeto de pesquisa, tendo em vista que os resultados demonstrados por esses índices em pesquisas acadêmicas, nos estudos de caso realizados, apresentaram resultados satisfatórios, apesar de que, em alguns casos específicos, eles não desempenhavam como o esperado. Além disso, a simplicidade desses modelos aliada as hipóteses teóricas, subjacentes aos mesmos, proporcionaram uma base conceitual e uma visão prática muito ampla, que sem estas características, seria muito difícil se chegar a algum modelo. Portanto, as escolhas desses índices e do modelo foram muito importantes e adequadas.

A análise de viabilidade de implementação foi um passo importante no desenvolvimento desse projeto, pois embora se tenha chegado a um modelo próprio, isso poderia não ter ocorrido, e o modelo proposto poderia ser, portanto, a melhoria de algum deles ou um conjunto composto de algumas dessas teorias. Assim sendo, uma vez proposta a

teoria, ela deveria ser de tal forma que fosse possível implementá-la, utilizando o ambiente MATLAB. Portanto, o estudo de viabilidade de implementação é de vital importância para sua implementação.

O estudo dos conceitos, bem como o modelamento matemático da metodologia, mostrou-se muito mais difícil e demorado do que o previsto, uma vez que só foi possível terminar a primeira das três fases desse projeto. Isso se deve a falta de experiência do orientado, pois primeiramente, escolheu um conjunto enorme de requisitos, que na prática, mostrou-se inviável de se modelar. Depois de muito estudo sobre o conjunto selecionado, revisão das teorias anteriores e dos objetivos iniciais do projeto é que foi possível chegar ao conjunto de hipóteses mostrados e comentados nesse relatório.

4. Agradecimentos

Ao CNPq, pela oportunidade de aprendizado, pela oportunidade de desenvolver um trabalho científico e assim permitir a vivência de uma vida acadêmica, além da concessão da bolsa.

Ao Professor Dr. Takashi Yoneyama pela orientação neste projeto e por toda a atenção dedicada.

5. Referências

- Júnior, A. M. D., Trabalho não publicado, “Risco: Definições, Tipos, Medição e Recomendações para seu Gerenciamento”, 11p.
- Ventura, A. M., Forte, D. e Famá, R., 2001, “Análise da estabilidade do beta em três empresas brasileiras após o plano real (1995–2000)”, In: SEMEAD – PESQUISA QUANTITATIVA E FINANÇAS, Anais ... SEMEAD, 11p.
- Moreira, A. P., Moita, D. G. S., 2001, “Avaliação de performance de carteiras otimizadas: Uma abordagem prática da teoria de Markowitz”, In: SEMEAD – PESQUISA QUANTITATIVA E FINANÇAS, Anais ... SEMEAD, 11p.
- BOLSA DE VALORES DE SÃO PAULO, Comprar e Vender Ações, São Paulo, 12p.
- Brigham, E. F. e Ehrhardt, M., 2006, “Administração Financeira: Teoria e Prática”, Tradução: José Nicolas Albuja Salazar, Suely Sonoe Murai Cucci, São Paulo, Pioneira Thomson Learning, 1084p.