REVISTA Mundi
Engenharia, Tecnologia e Gestão
INSTITUTO FEDERAL Paraná

ALGORITMOS PARA CARTEIRAS DE INVESTIMENTOS NAS VERSÕES MONO E MULTIOBJETIVO

ALGORITHMS FOR INVESTMENT PORTFOLIOS IN THE MONO AND MULTIOBJECTIVE VERSIONS

Maisa Kely de Melo[1]
Rodrigo Tomás Nogueira Cardoso[2]

Resumo: A composição das carteiras de investimentos, visando aumentar os retornos, minimizando a exposição ao risco, tem sido um assunto de crescente interesse entre os brasileiros. O objetivo deste trabalho é comparar o desempenho de três algoritmos que realizam a otimização de um portfólio baseado em dados históricos do mercado de ações do Brasil. Na versão mono-objetivo, para a minimização do risco, o Algoritmo Elipsoidal e o Algoritmo Genético foram considerados. Na versão multiobjetivo, que visa minimizar o risco e maximizar o retorno do portfólio, foi considerado o Algoritmo Elipsoidal com o método de escalarização P_ϵ. A análise da versão mono-objetivo mostra que ambos os métodos convergiram na mesma tendência, desconsiderando no portfólio as empresas que apresentaram maior instabilidade. O algoritmo elipsoidal gerou soluções com maior diversidade, e o Algoritmo Genético obteve carteiras de investimentos com retornos mais elevados. Os resultados obtidos pela versão multiobjetivo mostraram que o algoritmo foi capaz de obter carteiras diversificadas, com todos os retornos positivos e riscos muito próximos de zero. Em geral, o desempenho dos algoritmos foi considerado satisfatório porque conseguiram capturar as oscilações do mercado e propor carteiras compostas por empresas com menos exposição ao risco.

Palavras-chave: Carteira de Investimento. Algoritmo Genético. Método Elipsoidal. Método P_ϵ.

Abstract: The composition of investment portfolios, looking for increasing returns, minimizing exposure to risk, has been a subject of growing interest among Brazilians. The aim of this work is to compare the performance of three algorithms that optimizing of a portfolio based on historical data of the Brazilian stock market. In the mono-objective version, for the risk minimization, the Ellipsoidal Algorithm and the Genetic Algorithm were considered. In the multiobjective version, which aims to minimize the risk and maximize the portfolio return, the Ellipsoidal Algorithm was considered with the P_ϵ scaling method. The analysis of the mono-objective version shows that both methods converged on the same trend, disregarding in the portfolio the companies that presented greater instability. The Ellipsoidal Algorithm generated solutions with greater diversity, and the Genetic Algorithm obtained investment portfolios with higher returns. The results obtained by the multiobjective version showed that the algorithm was able to obtain diversified portfolios, with all positive returns and risks very close to zero. In general, the performance of the algorithms was considered satisfactory because they were able to capture the market oscillations and to propose portfolios composed of companies with less exposure to risk.

Keywords: Investment Portfolio. Genetic Algorithm. Elipsoidal Algorithm. P_ϵ Algorithm.

[1]Mestre, Instituto Federal de Minas Gerais *Campus* Formiga, maisa.melo@ifmg.edu.br
[2]Doutor, Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, rodrigoc@des.cefetmg.br

1 Introdução

A otimização de carteiras de ações é um assunto em pauta que demanda muita atenção. Esta motivação tem origem nos interesses dos investidores, que visam obter o maior retorno possível expondo-se a um risco tão pequeno quanto desejável. Este interesse pelos investidores é bem enraizado e pertinente uma vez que, o mercado de ações movimenta negócios no mundo inteiro, mobilizando diariamente um respeitável volume financeiro. As empresas dos mais diversos segmentos (bancário, alimentos, papel e celulose, petróleo,...) possuem ações sendo negociadas em bolsas de valores e estão sujeitas às oscilações inerentes ao mercado. Em vista dessa vulnerabilidade gerada pela constante "mudança de personalidade" do mercado, é justificável os investidores inclinarem-se em busca de mecanismos que possam lhe dar informações sobre o comportamento do mercado.

Estes mecanismos capazes de expressar o comportamento do mercado são modelos matemáticos que se baseiam nas séries históricas das cotações das ações para aferir, por argumentos distintos, sobre a tendência adotada por estas ações no período analisado, além de análises técnicas sobre as empresas. A discussão gira em torno de qual método é mais eficiente para "captar" as informações contidas nas séries históricas, a estes métodos dá-se o nome de medidas de risco. Como asseguram Righi e Ceretta (2014), a mensuração de risco é um aspecto fundamental para uma gestão correta ao lidar com carteiras de investimentos. Em tempos passados, a intuição prática se contentava em basear-se apenas nas medidas de risco variância, volatilidade e valor em risco. Hoje em dia, sabe-se que um grande empenho teórico se fez necessário para garantir melhores propriedades para medidas de risco.

Em 1952, em seu artigo *Portfolio Selection*, Markowitz (1952) trouxe uma nova concepção sobre o gerenciamento da composição das carteiras de investimentos. De acordo com Soares (2011), Markowitz propõe que a redução do risco associado a um nível considerado de retorno no investimento ocorre quando a carteira é formada com base no conceito de diversificação. Nesta mesma vertente, Elton et al. (2004), afirmam que as características de retorno de carteiras de ativos podem diferir das características dos retornos de ativos individuais, mais precisamente, combinações adequadamente escolhidas de dois ativos apresentarão menos risco do que o menos arriscado dos dois ativos.

Para Elton et al. (2004), o retorno de uma carteira de ativos é a média ponderada dos retornos dos ativos individuais. Já para Soares (2011), retorno é definido como o total de ganhos ou perdas ocorridas após um dado período de tempo. Segundo Gonçalves Jr et at. (2002), o risco de um investimento está ligado a probabilidade de se ganhar menos do que o esperado. Tecnicamente falando, o risco de mercado está divididos em duas partes: o risco diversificável e o risco não diversificável. O risco diversificável refere-se aos riscos que afetam um número pequeno de empresas o qual exerce pouca influência no mercado. O não diversificável é o mais preocupante, pois refere-se a acontecimentos que afetam o mercado como um todo, como por exemplo a diminuição da taxa base de juros, a oscilação da inflação, o nível de desemprego entre outros. De acordo com Mangram (2013), o risco não diversificável não é passivo de ser eliminado.

Para Mineiro (2007), a análise para elaboração de um portfólio começa com a informação ligada a ativos individuais e termina com conclusões para todo o portfólio. O objetivo desta análise é determinar o portfólio que melhor atende as espectativas do investidor. As melhores respostas da análise constituem a fronteira eficiente. Para Mangram (2013), a fronteira eficiente representa as melhores combinações, aquelas que produzem o retorno máximo para um risco determinado. Ela descreve a relação entre a expectativa de retorno e risco do portfólio.

Este trabalho teve dentre os objetivos implementar dois algoritmos que realizaram a otimização mono-objetivo de minimização do risco pelo desvio padrão de uma carteira de investimentos no intuito de averiguar se existe diferença em termos da escolha da carteira estabelecida por cada algoritmo. Os métodos utilizados para o desenvolvimento dos algoritmos são o método elipsoidal e o algoritmo genético. O primeiro é um método determinístico que segue o critério de exclusão de regiões enquanto o segundo é um método estocástico que utiliza os princípios básicos de algoritmos genéticos. Por virem de naturezas diferentes, os algoritmos elaborados agem de maneiras distintas na busca pelo ponto ótimo. Ainda, foi implementada uma versão multiobjetivo do algoritmo elipsoidal para maximização do retorno e minimização do risco, a fim de apresentar uma diversidade de carteiras de acordo com diferentes perfis de investidores das carteiras.

O trabalho foi desenvolvido seguindo os tópicos: Na Seção 2 é definida a concepção sobre elaboração de carteira de investimentos com base nos princípios propostos por Markowitz. São discutidos os aspectos teóricos inerentes aos conceitos de retorno e risco de uma carteira de investimentos. São apontadas as características da variância como medida de risco. Na Seção 3.1 encontra-se a formulação matemática do problema de otimização de carteira de investimentos, bem como os modelos utilizados neste artigo. A descrição dos dados, definição dos parâmetros e das estratégias/critérios encontram-se na Seção 3.4. Na Seção 4 são apresentados e discutidos os resultados obtidos e suas principais implicações. Conclui-se o artigo na Seção 5 onde são descritas as principais contribuições deste artigo.

2 Otimização de Carteiras de Investimentos

De posse das ideias disseminadas pela teoria de Markowitz (MARKOWITZ, 1952), um dos passos a seguir é buscar ferramentas matemáticas que auxiliem na construção da fronteira eficiente. Na prática, procuram-se modelos que representam o risco ou o retorno e que possam ser otimizados levando em consideração algumas restrições. Segundo Assaf Neto (2009), os modelos de avaliação almejam delinear o comportamento futuro dos ativos financeiros com base nas cotações de suas séries históricas.

A fim de corroborar com a otimização para determinação da fronteira eficiente existem vários métodos. Mas, como afirmado por Mineiro (2007), estes métodos podem apresentar problemas que dificultem sua execução, tais como, problemas com a falta de continuidade das funções a serem otimizadas ou das restrições, ou ainda das funções não serem convexas ou serem multimodais. Com o leque de opções disponíveis, há métodos que não exigem a hipótese da convexidade, mas exigem a hipótese da diferenciabilidade e vice-versa. Em suma, não existe um método que seja ideal para qualquer caso, (MINEIRO, 2007, p.49). Sendo que, como abordado por Oliveira et al. (2011), os métodos matemáticos empregados são bastante distintos, mas os elementos fundamentais, em geral, são os mesmos.

Segundo Mineiro (2007), para a moderna teoria de portfólio, selecionar a carteira definida como ótima com base no critério de investimento é selecionar a carteira que oferece o maior retorno possível para determinado grau de risco ou, de forma equivalente, selecionar a carteira que produza o menor risco possível para determinado nível de retorno esperado. Devido a ambiguidade existente entre minimizar o risco para um dado nínvel de retorno ou maximizar o retorno admitindo-se certo nível de risco, existem várias formulações para otimização do problema, mas são equivalentes, por isso, “justifica-se otimizar apenas uma” (SOARES, 2011, p.16).

Como afirmado em Elton et at. (2002), a variância é uma medida de risco apropriada para obter carteiras bem diversificadas, uma vez que é uma medida para distribuições simétricas. Para enfatizar o uso da variância estes autores ainda complementam que a variância ou o desvio padrão são comumente usados na literatura.

Em consonância com o trecho acima, Elton et al. (2002) enfatizam que o uso da variância como medida de dispersão também é interessante pelo que valores muito pequenos para variância fornecem mais segurança para o investidor obter o retorno almejado diminuindo a possibilidade de atrair retornos indesejados. Ainda nesta direção, Elton et al. (2002), afirmam que o risco de uma combinação de ativos é muito diferente de uma média simples dos riscos dos ativos individuais, sendo que, a variância de uma combinação de dois ativos pode ser inferior à variância de qualquer um dos ativos isoladamente.

3 Desenvolvimento

3.1 Modelagem do Problema

A seguir são definidas as equações que representam o risco e o retorno de um ativo e o risco e o retorno de uma carteira. Para elaborar a carteira de investimentos deste trabalho foram considerados 40 ativos, o quais são identificados pelo índice i. As variáveis da otimização são os X_i, ($i = 1, \cdots, 40$) que representam o peso que deve ser atribuído a cada ativo na composição da carteira. Assim, ao final da otimização, farão parte da carteira aqueles ativos que possuírem valor positivo para X_i.

O retorno de uma carteira de ativos é a média ponderada dos retornos individuais. Já a média (μ_i) da soma dos retornos do ativo (i) no período t, sendo T o número de períodos considerados é dada por

$$\mu_i = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} r_i^t \tag{1}$$

O retorno do ativo i na Equação (1) é dado pela soma dos retornos multiplicada pela proporção X_i destinada ao ativo i:

$$r_i^t = \sum_{i=1}^{T} r_i^t X_i \tag{2}$$

Sendo o retorno médio de um ativo i dado pela Equação (3)

$$\overline{r}_i = \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T} X_i \mu_i \tag{3}$$

segue que a média do retorno de uma carteira é dada pela Equação (4)

$$\overline{r} = \sum_{i=1}^{T} X_i \left(\frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} r_i^t \right) \tag{4}$$

O conceito de risco utilizado para definir a função que será minizada é a variância entre os retornos dos ativos, mais precisamente, o desvio padrão (a raiz quadrada da variância). A variância da média do retorno de uma carteira de investimentos é dada pela Equação (5)

$$\sigma^2 = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(r^t - \overline{r})^2 \tag{5}$$

enquanto a covariância entre um ativo i e um ativo j é dada pela Equação (6). Conforme Elton et al. (2004), a covariância é uma medida de como os retornos dos ativos variam em conjunto.

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(r_i^t - \mu_i)(r_j^t - \mu_j) \tag{6}$$

Substituindo os valores das expressões (2), (4) e (6) em (5) conclui-se que a variância da média do retorno de uma carteira pode ser dada em função da covariância entre um ativo i e uma ativo j, isto é,

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} X_i X_j \sigma_{ij} \tag{7}$$

Como citado anteriormente, a função que será otimizada neste trabalho é o desvio padrão dos retornos dos ativos. Mais especificamente, será otimizada a função

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} X_i \cdot X_j \cdot \sigma_{ij}} \tag{8}$$

sujeita às restrições

$$0 \leq X_j \leq 1, \;\; j = 1, 2, \cdots, N \tag{9}$$

$$\sum_{j=1}^{N} X_j = 1 \tag{10}$$

onde X_i é a proporção do valor total da carteira aplicada no ativo i e σ_{ij} é a covariância entre os ativos i e j.

3.2 Otimização Mono-objetivo

O Método Elipsoidal pertence à família dos métodos de exclusão de semi-espaços. Em suma, o algoritmo inicia-se por um elipsóide, com centro definido pelo usuário, a partir do qual através de averiguações dos subgradientes da função objetivo e de exclusões de semi-espaços é construída uma sequência de novos elipsóides com volumes cada vez menores a qual converge para um elipsóide de volume zero que contém o ponto ótimo Takahashi (2007). A versão básica para construção dos centros (x_k, $x \in \mathbb{R}^n$) que darão origem à sequência de elipsóides é dada em (TAKAHASHI, 2007, p.145) como segue:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k - \beta_1 \frac{Q_k g_k}{(g_k^T Q_k g_k)^{\frac{1}{2}}} \\ Q_{k+1} &= \beta_2 \left(Q_k - \frac{\beta_3 (Q_k g_k)(Q_k g_k)^T}{g_k^T Q_k g_k} \right) \end{aligned}$$

com

$$\beta_1 = \frac{1}{n+1} \quad \beta_2 = \frac{n^2}{n^2 - 10} \quad \beta_3 = \frac{2}{n+1}$$

Sendo g_k um subgradiente da restrição mais violada $f_i(x_k)$, $i \geq 1$, ou, no caso de x_k estar na região factível, um subgradiente da função objetivo naquele ponto e Q_k uma matriz simétrica definida positiva.

O Algoritmo Genético é um algoritmo que pertence à família dos Algoritmos Evolutivos. Estes algoritmos são inspirados na teoria evolucionista de Charles Darwin e assumem que a seleção natural visa privilegiar os indivíduos mais aptos buscando preservar as diferenças individuais e variações que são favoráveis a estes indívidos e não preservar as características que não favorecem os indivíduos conforme indicado por Coello, Lamont e Veldhuizen (2002). Segundo Hanaoka (2014), os algoritmos genéticos tratam as soluções do problema como indivíduos, os quais através de operadores genéticos que usam ténicas de diversificação (mutação e cruzamento) e de seleção (aptidão) são escolhidos e “transformados” de modo a compor as próximas gerações (iterações).

3.3 Otimização Multiobjetivo

O modelo que definiu a otimização multiobjetivo está descrito nas Equações (11) a (13).

$$\min_{X_1,\cdots,X_N} \sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N} X_i X_j \sigma_{ij} \tag{11}$$

$$\max_{X_1,\cdots,X_N} \sum_{i=1}^{N} X_i \mu_i \tag{12}$$

$$sujeito\ a: \begin{cases} \sum_{i=1}^{N} X_i = 1 \\ 0 \leq X_i \leq 1, i = 1, \cdots, N \end{cases} \tag{13}$$

Na Equação (11) X_i é o peso atribuído ao ativo i, σ_{ij} é a covariância entre um ativo i e um ativo j e μ_i, na Equação (12), é a média dos retornos do ativo i no período considerado.

A função retorno é uma função linear, em particular convexa. E a função risco possui matriz hessiana dada por $H = 2C$, onde C é a matriz de covariância dos preços de fechamento dos ativos. A matriz H possui todos os seus autovalores nulos ou positivos, o que mostra que H é uma matriz semidefinida positiva e por isso, a função risco também é convexa.

Na busca de um algoritmo que lidasse bem com as funções objetivo desse problema o algoritmo P_ϵ surge como uma alternativa competente, uma vez que, ambas as funções são convexas e o algoritmo P_ϵ apresenta bom desempenho ao processar funções desse tipo. Sendo assim, foi implementado um algoritmo P_ϵ tomando como função a ser otimizada o retorno e estabelecendo o risco como restrição.

3.4 Metodologia

Para este estudo de natureza qualitativa, foram analisadas as 40 principais empresas que compunham a carteira de investimento do Ibovespa em dois períodos de tempo: $01/10/2013$ a $30/09/2014$ e $01/10/2014$ a $30/09/2015$. As empresas selecionadas para a análise foram as 40 empresas que apresentavam as maiores participações na carteira teórica do Ibovespa no dia 31/10/2013. As coletas de dados foram realizadas pelo *software* Economática. Em todos os algoritmos foi considerado $N = 40$.

Para o método elipsoidal o critério de parada foi o valor da forma quadrática do elipsóide formado com centro no ponto obtido na iteração. Foi exigido que o tamanho desse elipsóide fosse menor que 10^{-4}, sendo considerado o centro inicial com 2 em todas as coordenadas. Para definição do centro inicial foram realizadas simulações com outros valores, sendo que o centro desta maneira foi o que apresentou convergência mais rápida, valores maiores que 2 tornavam o custo computacional muito alto. Neste trabalho, o centro do elipsóide corresponde a uma carteira de investimento, sendo que cada coordenada do centro representa o peso de um ativo da carteira. O algoritmo busca o centro que fornece o menor risco possível.

O algoritmo genético foi implementado com as restrições acrescentadas como uma penalidade na função objetivo. Para as restrições de desigualdade foram adicionadas à função objetivo as parcelas $\sum_{i=1}^{40} \left\{max(0, X_i) + max(0, X_i)^2\right\}$ com um fator de ponderação 10 e para a restrição de igualdade foram adicionadas a função objetivo as parcelas $|\sum_{i=1}^{40} X_i - 1| + |\sum_{i=1}^{40} X_i - 1|^2$ com um fator de ponderaçao 100. Inicialmente são gerados 100 indivíduos de maneira aleatória, com a função rand do Matlab, os vetores gerados são normalizados de forma que a soma das coordenadas seja um e como são gerados somente valores positivos, os indivíduos gerados são factíveis. Devido a aleatoriedade da população inicial não é possível interferir na convergência do método através da condição inicial. A seleção dos indivíduos para cruzamento ocorreu por meio da roleta. A taxa de cruzamento e de mutação foram respectivamente 0.07 e 0.01. O critério de parada foi o número de iterações (100).

Para o Algoritmo Genético foi considerada a média obtida para o menor risco em dez simulações, para cada risco foi observado seu respectivo retorno e efetuada a média destes dez retornos. Para o Algoritmo Elipsoidal foi efetuada a média dos valores obtidos para o risco quando considerou-se os valores de centro $0,75; 1; 1,2; 1,5; 1,8$ e 2, para cada risco foi associado seu respectivo retorno e efetuada a média destes.

Para o modelo multiobjetivo, o intervalo de variação do risco foi definido por $[risco(X_1), risco(X_2)]$, sendo que X_1 é o ponto ótimo do problema mono-objetivo de minimização do *risco* e X_2 é o ponto ótimo do problema mono-objetivo de minização de $-$ *retorno*. Este intervalo foi subvidido em 20 pontos e para cada ponto ϵ_i no interior do intervalo foi realizada uma otimização mono-objetivo de $-$ *retorno* tendo como uma das restrições $g(X) = risco(X) - \epsilon_i$. Esta otimização mono-objetivo foi realizada com o Algoritmo Elipsoidal.

Os parâmetros do Algoritmo Elipsoidal são: matriz inicial é uma matriz diagonal cujos elementos da diagonal principal são $\sqrt{2}(\overset{=1}{X_{max}} - \overset{=0}{X_{min}})$. Critério de parada: quantidade de iterações até $5e^7$. Degeneralização desejada do elipsóide: 0.

Para a restrição $\sum_{i=1}^{40} X_i = 1$: foi considerado $X_{40} = 1 - \sum_{i=1}^{39} X_i$ e a variável X_{40} foi substituída nas funções objetivo e nas restrições, tornando o problema com 39 variáveis. Foram definidas as restrições de desigualdade

$$g_1(X) = -soma(X) \quad e \quad g_2(X) = soma(X) - 1.$$

Para a restrição $0 \leq X_i \leq 1, i = 1, \cdots, 39$ foram definidas as restrições

$$g_3(X) = X - X_{max} \quad e \quad g_4(X) = X_{min} - X.$$

Para cada $i = 2, \cdots, 19$, a restrição $g_5(X) = risco(X) - \epsilon_i$ foi concatenada juntamente com as demais.

Todos algoritmos foram implementados no *software* Matlab.

4 Análise e Discussões

4.1 Modelo Mono-objetivo

Analisando o desempenho dos métodos na definição do ponto ótimo, pode-se considerar que os mesmos apresentaram desenvoltura condizente com a realidade do mercado nos períodos estudados. Uma vez que o objetivo de cada algoritmo era minimizar a função desvio padrão, os algoritmos foram sensíveis o suficiente para perceber constantes oscilações nos retornos das empresas que concentravam a maior proporção na carteira estudada e buscaram distribuir estes pesos dentre as empresas com perfil de retorno mais regular. O resultado dos valores médios obtidos para o risco e o retorno são apresentados na Tabela 1. Observa-se que ambos os algoritmos apresentam riscos semelhantes mas o Algoritmo Genético exibe valores superiores para o retorno em todos os casos.

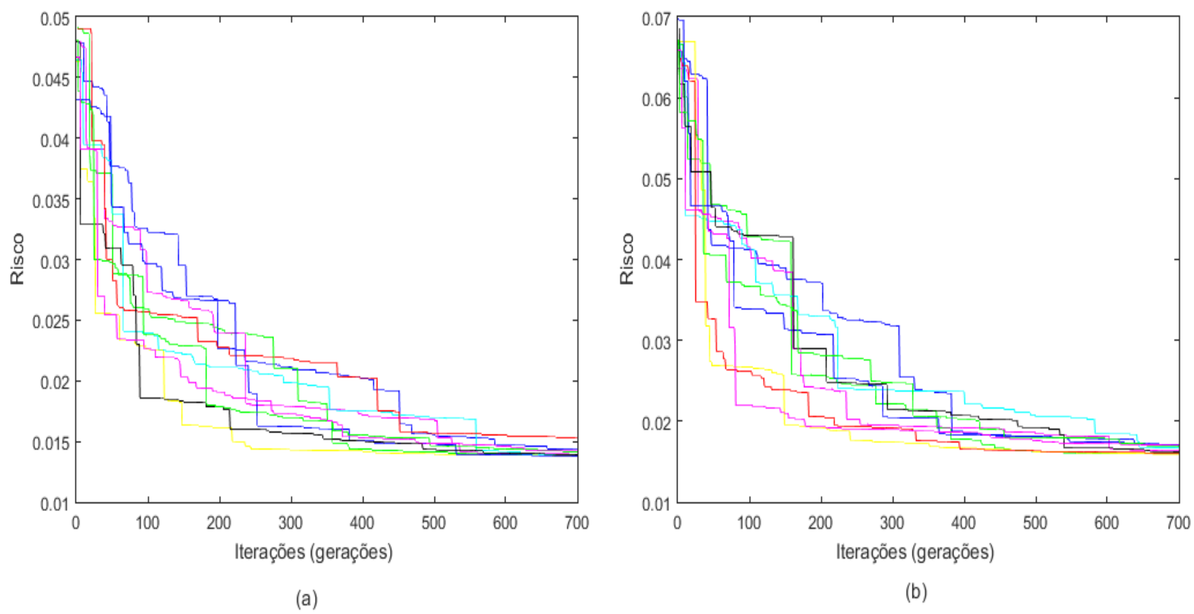
Tabela 1: Riscos e retornos obtidos pela carteira otimizada

	Algoritmo Genético		Algoritmo Elipsoidal	
	Risco	Retorno	Risco	Retorno
$01/10/2013$ a $30/09/2014$	0,01	0,08	0,02	0,01
$01/10/2014$ a $30/09/2015$	0,02	0,20	0,01	-0,11

O Algoritmo Genético possui estabilidade de convergência com 700 gerações nas dez simulações realizadas, este fato pode ser observado na Figura 1 onde está esboçada a evolução do menor risco de cada geração em dez simulações. A imagem (a) refere-se ao período $01/10/2013$ a $30/09/2014$ e a imagem (b) refere-se ao período $01/10/2014$ a $30/09/2015$. Atentando-se a amplitude do menor risco obtido na 700^a geração percebe-se uma diversidade muito baixa, com desvio padrão zero, o que indica que em todas as simulações o algoritmo convergiu para valores muito próximos.

Para análise do Algoritmo Elipsoidal foram considerados vários centros do elipsóide. Ao traçar a evolução do risco de acordo com as iterações conforme consta na Figura 2 constata-se que quanto maior o valor do centro, mais iterações são necessárias para a convergência do algoritmo. Este comportamento pode ser visto ao notar que os

Figura 1: **Curva de Convergência do Algoritmo Genético**



traços referentes aos centros menores terminam logo no início da imagem enquanto os traços dos centros maiores se estendem até o fim da imagem, como é o caso para $a = 2$. Percebe-se também a oscilação em torno dos valores do risco no decorrer das iterações, característica dos métodos de exclusão de regiões e, ainda que, os valores médios obtidos para o risco são muito próximos em qualquer dos centros, com desvio padrão zero.

Os algoritmos requerem tempos computacionais de execução distintos: o Algoritmo Genético apresentou convergência mais rápida (em média 390 segundos) em ambos os períodos, enquanto o Algoritmo do Elipsoidal apresentou tempos de convergência que diferem muito de acordo com o centro. Na Tabela 2 são apresentados os tempos obtidos pelo Algoritmo Elipsoidal em cada período, sendo que Período 1 refere-se a $01/10/2013$ a $30/09/2014$ e Período 2 refere-se $01/10/2014$ a $30/09/2015$. Para o centro $a = 0,75$ o tempo médio aproxima-se daquele obtido para o Algoritmo Genético, para todos os outros centros o tempo é significativamente superior.

Devido ao contexto político dos períodos selecionados, as empresas estatais foram

Figura 2: **Evolução do risco do Algoritmo Elipsoidal**

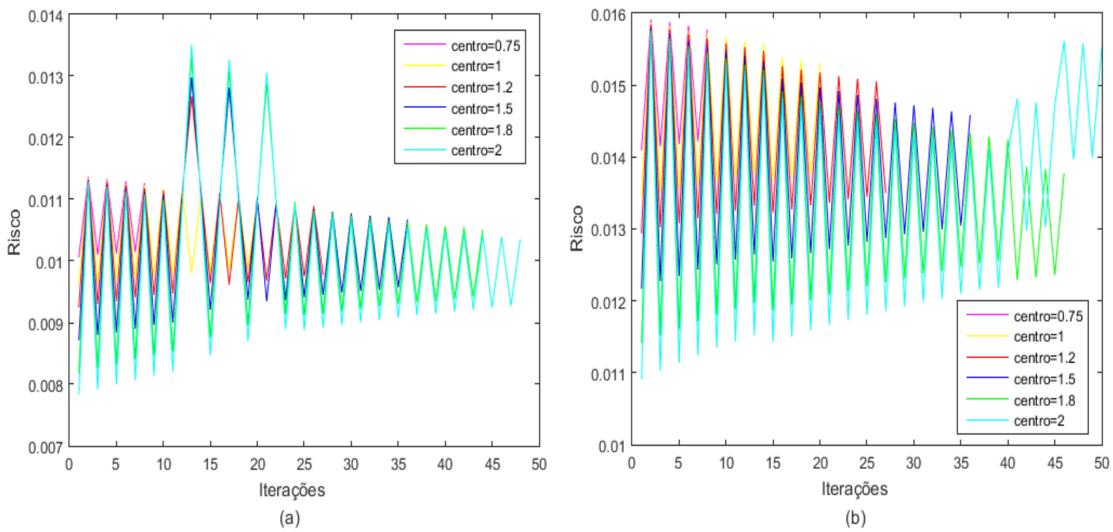


Tabela 2: Tempo médio do Algoritmo Elipsóide

	Período 1	Período 2
Centro	Tempo (minutos)	
0,75	7,42	5,60
1	16,00	14,28
1,2	22,67	20,41
1,5	33,36	27,44
1,8	38,35	37,47
2	45,00	39,75

as mais afetadas, seguidas pelos bancos, pelas escolhas de ambos os algoritmos. Uma vez que, na corrida presidencial de 2014 as variações das ações e do dólar flutuavam à luz dos resultados das pesquisas eleitorais. Ainda, de acordo com Lima (2015), o período de seleção dos dados foi exatamente o período das primeiras fases da operação lava jato, deflagrada em março de 2014, o que colocou a Petrobrás no foco de especulações que culminaram por rebaixar sua nota por agências de classificação de risco. Os impactos destes fatos podem ser evidenciados nas oscilações (negativas) do valor da ação da Petrobrás (PTR4): em 01/10/2013 era R$17,55$ enquanto que em 30/09/2015 era de R$7,24$.

Ao analisar os resultados obtidos pela otimização dos algoritmos foi possível constatar que todas as soluções encontradas satisfazem as restrições estabelecidas e que o Algoritmo Elipsoidal convergiu para uma carteira mais diversificada. Mesmo com pesos pequenos, indicou investimento na maioria das empresas. Já o Algoritmo Genético manteve uma carteira diversificada, porém com menos ativos. Pode-se dizer que este último método é mais sensível à variação dos retornos, por isso, apresentou uma tendência por não incluir na carteira de investimentos otimizada os ativos que apresentaram mais instabilidade. Ao proporem carteiras com distribuição de pesos menos concentrada, os algoritmos se distanciaram da carteira teórica do Ibovespa, a qual aglomerava mais de 26% de sua composição em cinco empresas. Na Tabela 3 encontram-se as cinco empresas da carteira teórica do Ibovespa.

Tabela 3: Empresas com maior participação na carteira teórica do Ibovespa

Empresa	Código da Ação	Participação $\%$
Petrobrás	PETR4	5,5
Vale	VALE5	8,3
Banco Itaú Unibanco	ITBU4	5,0
Banco Bradesco	BBDC4	3,9
Banco do Brasil	BBAS3	3,3

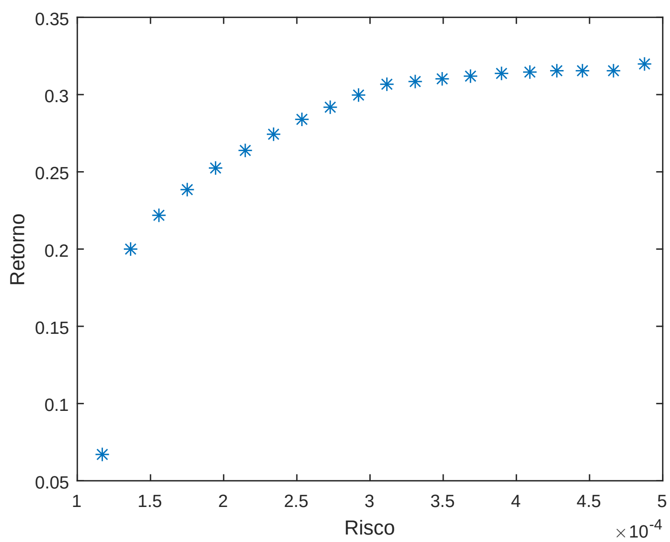
Fonte: Dados retirados do site da Bovespa em outubro de 2015.

4.2 Modelo Multiobjetivo

A otimização multiobjetivo ocorreu para os dados no período $01/10/2014$ a 30/09/2015. Ao fim do processo de otimização foram geradas 20 carteiras de investimentos atendendo aos critérios da otimização. Como haviam muitos retornos negativos na série histórica de retornos, o algoritmo obteve um resultado satisfatório, pois conseguiu se desvencilhar dos retornos negativos alocando massivamente os pesos nas empresas que apresentavam retornos positivos. Como resultado, todas as carteiras propostas obtiveram retornos positivos e riscos próximos de zero com precisão de 4 casas decimais.

A Fronteira Eficiente gerada pela otimização pode ser vista na Figura 3. Na figura é possível constatar que o Algoritmo P_ϵ atuando juntamente com o Algoritmo Elipsoidal propuseram apenas carteiras ótimas não dominadas e com resultados para as funções objetivo condizentes com o esperado: retorno consideravelmente alto e risco praticamente nulo.

Figura 3: **Fronteira Eficiente - Risco *versus* Retorno**



Na Tabela 4, podem ser observadas cinco das vinte carteiras propostas como solução. Também consta na tabela o retorno médio de cada empresa no período considerado. É evidente que o algoritmo teve a tendência de desconsiderar as empresas com retornos negativos e concentrar os maiores pesos naquelas empresas que apresentaram retornos médios positivos. Muito possivelmente esses retornos negativos vieram seguidos de grandes oscilações, o que prejudica essas empresas também quanto ao risco, uma vez que a variância preza por priorizar as empresas com maior estabilidade no preço de fechamento das ações.

Tabela 4: Amostra de cinco carteiras propostas

Empresas	Retorno Médio	Carteira 1	Carteira 2	Carteira 3	Carteira 4	Carteira 5
PETR4	-0,33	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
VALE5	-0,26	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
ITUBR4	-0,06	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
BBDC4	-0,13	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
BBAS3	-0,16	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
PETR3	-0,24	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
BVMF3	0,01	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
ITSA4	-0,05	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
VALE3	-0,21	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
GGBR4	-0,27	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
USIM5	-0,28	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
CSNA3	-0,25	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
PDGR3	-1,15	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
CIEL3	0,08	**0,08**	**0,06**	**0,04**	**0,01**	0,00
OGXP3	-0,41	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
CMIG4	-0,29	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
BRML3	-0,22	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
CCRO3	-0,06	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
HYPE3	-0,08	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
MRVE3	-0,11	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
OIBR4	-0,62	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
GFSA3	-0,17	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
BRFS3	0,09	**0,05**	**0,01**	0,00	0,00	0,00
TIMP3	-0,14	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
CYRE3	-0,15	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
SANB11	-0,07	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
NATU3	-0,25	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
LREN3	0,11	**0,11**	**0,12**	**0,12**	**0,11**	**0,10**
JBSS3	0,28	**0,08**	**0,12**	**0,15**	**0,18**	**0,20**
HGTX3	-0,17	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
SBSP3	-0,08	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
BBDC3	-0,09	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
VIVT4	-0,05	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
PCAR4	-0,3	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
SUZB5	0,32	**0,17**	**0,22**	**0,24**	**0,28**	**0,29**
LAME4	0,06	**0,02**	0,00	0,00	0,00	0,00
GOLL4	-0,5	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
CTIP3	0,07	**0,19**	**0,18**	**0,15**	**0,12**	**0,09**
ELET6	-0,08	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
FIBR3	0,32	**0,27**	**0,27**	**0,28**	**0,28**	**0,30**

5 Considerações Finais

Neste trabalho foram estudados três modelos para composição de carteiras de investimentos. Os métodos são de naturezas distintas, sendo dois dos métodos mono-objetivo (um determinístico e um estocástico) e o terceiro método é multiobjetivo (e determinístico).

Para os métodos mono-objetivo este trabalho teve como objetivo analisar a performance e precisão dos modelos propostos, de forma a evidenciar as diferenças nos resultados apresentados por cada um. Os dois métodos convergiram numa mesma tendência, embora o algoritmo genético tenha sido mais criterioso na seleção, desconsiderando aquelas empresas que apresentaram mais instabilidade e o elipsoidal gerou mais diversidade. Esta seleção mais criteriosa resultou em retornos maiores que aqueles apresentados pelo método elipsoidal. Já para o método multiobjetivo, foi considerado o algoritmo P_ϵ com a otimização sendo realizada pelo Algoritmo Elipsoidal. Os resultados obtidos foram satisfatórios porque o algoritmo conseguiu obter carteiras com retornos positivos e riscos muito próximos de zero, o que é ideal no cenário de investimentos.

Ao confrontar os resultados obtidos pelos algoritmos mono-objetivo e o algoritmo multiobjetivo constata-se que os menores valores de risco obtidos pelos algoritmo elipsoidal e o algoritmo genético, respectivamente, fora foram 0,015 e 0,02, sendo que ao risco de 0,015 estava associado um retorno de -0,113 e ao risco de 0,02 estava associado um retorno de 0,197. Os resultados obtidos pelo algoritmo multiobjetivo atingiram valores mais significativos, o menor valor para o retorno foi 0,01 associado ao risco $1,1 \times 10^{-4}$ e o maior retorno foi 0,33 associado ao risco $4,4 \times 10^{-4}$. Um dos fatores que podem ter proporcionado este melhor rendimento é o fato que o mesmo problema foi abordado em sua forma multiobjetivo, que busca os melhores valores não somente para o risco, mas também para o retorno. De toda forma, esta comparação reitera que os resultados obtidos pela parceria do Método P_ϵ com o Algoritmo Elipsoidal são satisfatórios e apresentam opções compatíveis com os diferentes perfis de investidores, o que é esperado pelos investidores.

Referências

ASSAF NETO, A. **Mercado Financeiro**. 1. ed. São Paulo: Atlas, 1999.

BOVESPA (2015). http://www.bmfbovespa.com.br/pt_br/produtos/indices/indices-amplos/indice-ibovespa-composicao-da-carteira.htm. Acessado em: 21 out. 2015.

COELLO, C.A.C.; LAMONT, G. B.; VELDHUIZEN, D.A.V. **Evolutionary Algorithms for Solving Multi-Objective Problems**. 2. ed. New York: Springer, 2007.

ELTON, E. et al. **Moderna Teoria de Carteiras e Análise de Investimentos**. Tradução: Antonio Zoratto Sanvicente. São Paulo: Atlas, 2004.

HANAOKA, G. P. **Seleção de Carteiras de Investimentos Através da Otimização de Modelos Restritos Multiobjetivos Utilizando Algoritmos Evolutivos**. Dissertação (Mestrado em Modelagem Matemática e Computacional). Programa de Pós Graduação em Modelagem Matemática e Computacional, CEFETMG, Belo Horizonte, 2014

GONÇALVES JR, C.; PAMPLONA, E.; MONTEVECHI, J.A.B. Seleção de Carteiras Através do Modelo de Markowitz Para Pequenos Investidores (Com o Uso de Planilhas Eletrônicas). In: IX Simpep, 2002, Bauru.

LIMA, P.C.R. **A Situação Econômica, Financeira e Operacional da Petrobrás.** Brasília: Câmara dos Deputados, 2015.

MARKOWITZ, H. Portfolio Selection, **The Journal of Finance**, v. 7, n. 1, p.77–91, 1952.

MANGRAM, M.E. A Simplified Perspective of the Markowitz Portfolio Theory, **Global Journal of Business Research**, v. 7, n.1, p.59–70, 2013.

MINEIRO, A.A.C. **Aplicação de Programação Não-Linear como ferramenta de auxílio à tomada de decisão na gestão de um clube de investimento**. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção). Programa de Pós Graduação em Engenharia de Produção, Universidade Federal de Itajubá , Itajubá, 2007.

OLIVEIRA, M.R.G. et al. Otimizando Uma Carteira de Investimentos: Um Estudo Com Ativos do Ibovespa no Período de 2009 a 2011. **Revista Razão Contábil & Finanças**, Fortaleza, v.2, n. 2, 2011.

SOARES, V.C.A. **Aplicações do Problema de Otimização de Carteiras de Investimentos**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Instituto de

Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, 2011.

TAKAHASHI, R.H.C. **Otimização Escalar e Vetorial, Volume 2**. Departamento de Matemática, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2007.

Edição especial - XX ENMC (Encontro Nacional de Modelagem Computacional) e VIII ECTM (Encontro de Ciência e Tecnologia dos Materiais), realizado entre 16 e 19 de outubro de 2017 na cidade de Nova Friburgo - RJ.
Editor - Mateus das Neves Gomes