



Universidade Estadual de Campinas  
Instituto de Matemática, Estatística e  
Computação Científica - IMECC



# *Aplicações do problema de otimização de carteiras de investimento*

Vanessa de Carvalho Alves Soares

vanessa.bandeirantes@hotmail.com

Dissertação de Mestrado

Orientador(a): **Profa. Dra. Luziane Ferreira de Mendonça**

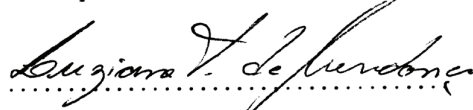
Janeiro de 2011  
Campinas - SP

---

## *Aplicações do problema de otimização de carteiras de investimento*

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por Vanessa de Carvalho Alves Soares e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 07 de Janeiro de 2011.



Profa. Dra. **Luziane Ferreira de Mendonça**  
Orientadora

Banca Examinadora:

**Profa. Dra. Luziane Ferreira de Mendonça** DCC - UFRJ

**Prof. Dr. Lucas Garcia Pedroso** DMAT - UFPR

**Profa. Dra. Véra Lucia da Rocha Lopes** IMECC - UNICAMP

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, **UNICAMP**, como requisito parcial para obtenção de Título de **Mestre em Matemática**.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**  
Bibliotecária: Maria Fabiana Bezerra Müller – CRB8 / 6162

Soares, Vanessa de Carvalho Alves

Sol 1a      Aplicações do problema de otimização de carteiras de investimento  
/ Vanessa de Carvalho Alves Soares-- Campinas, [S.P. : s.n.], 2011.

Orientador : Luziane Ferreira de Mendonça

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Estadual de  
Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1.Otimização de Carteiras de Investimento. 2.Otimização  
matemática. 3.Métodos numéricos. 4.Simplex (Matemática). 5.Fronteira  
eficiente. I. Mendonça, Luziane Ferreira de. II. Universidade Estadual de  
Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.  
III. Título.

Título em inglês: Applications of the problem portfolio optimization

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Portfolio optimization. 2. Optimization  
(Mathematics). 3. Numerical methods. 4. Simplex (Mathematics). 5. Efficient frontier.  
6.Nelder-Mead.

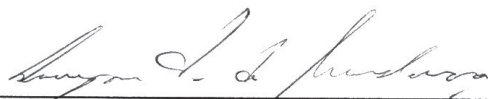
Titulação: Mestre em Matemática

Banca examinadora: Prof<sup>ª</sup>. Dr<sup>ª</sup>. Luziane Ferreira de Mendonça (DCC - UFRJ)  
Prof. Dr. Lucas Garcia Pedroso (DMAT - UFPR)  
Prof<sup>ª</sup>. Dr<sup>ª</sup>. Véra Lucia da Rocha Lopes (IMECC-UNICAMP)

Data da defesa: 07/01/2011

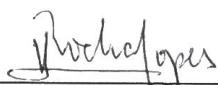
Programa de Pós-Graduação: Mestrado Profissional em Matemática

**Dissertação de Mestrado Profissional defendida em 07 de janeiro de 2011  
aprovada pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.**



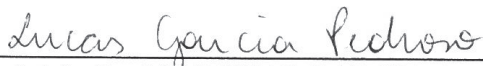
---

**Prof. (a). Dr (a). LUZIANE FERREIRA DE MENDONÇA**



---

**Prof. (a). Dr (a). VERA LUCIA DA ROCHA LOPES**



---

**Prof. (a). Dr (a). LUCAS GARCIA PEDROSO**

“Combati o bom combate, terminei a corrida,  
mantive a fé.” (2 Tim. 4:7)

A Deus, pois tem sido tudo em minha vida,  
aos meus pais, meu esposo, minha irmã e  
meus sogros, por estarem sempre ao meu  
lado, proporcionando amor, incentivo, cari-  
nho, reconhecimento e compreensão. E aos  
meus queridos avós e amigos.

Dedico.

---

# Agradecimentos

---

Hoje um sonho se torna realidade, graças a um Deus que trabalha por aqueles que Nele esperam, e por ter ao meu lado pessoas que são verdadeiros presentes dados por Ele.

Esta conquista não poderia ter sido concretizada sem a ajuda de meus pais, que, no decorrer da minha vida, proporcionaram, além de extenso carinho e amor, os conhecimentos da integridade, da perseverança e de procurar sempre em Deus a força maior para nosso desenvolvimento como ser humano.

Ao meu amado esposo Leandro, que sempre esteve ao meu lado, apoiando-me e caminhando comigo, fazendo dos meus sonhos os sonhos dele. Agradeço por toda compreensão e paciência nas horas mais difíceis.

À minha amada irmã e cunhado, por todo amor e incentivo.

À minha orientadora e amiga Profa. Dra. Luziane Ferreira de Mendonça, que tornou possível a realização deste trabalho. Agradeço por sua orientação, paciência, dedicação, amizade e por dividir comigo seus conhecimentos.

À Profa. Dra. Sueli Irene Rodrigues Costa, por sua luta em tornar-nos profissionais na arte de ensinar.

A todos os nossos professores pelos seus ensinamentos.

À querida Profa. Dra. Véra Lucia da Rocha Lopes, por todo apoio, incentivo e por ter acreditado em meu sonho desde o início.

Ao Cel. Tércio, por todo carinho e dedicação ao longo de todo o mestrado.

A todos os familiares e amigos, por sempre acreditarem e torcerem por mim.

A todos que, direta e indiretamente, auxiliaram na execução deste trabalho.

---

# Resumo

---

Neste trabalho, propomos a determinação de uma carteira de investimento ótima via um método sem derivada. Para isso, utilizamos o modelo de média-variância proposto por Harry M. Markowitz, no qual o problema é formulado de modo a se minimizar o risco do *portfolio* para um dado nível de retorno esperado, ou maximizar o nível de retorno fixado do *portfolio* associado a um dado nível de risco e determinar todas as carteiras ótimas, no sentido risco e retorno, formando a Fronteira Eficiente. Nosso algoritmo é baseado no Método Nelder-Mead, destinado à resolução de problemas de programação não linear irrestritos. Assim, adequamos a formulação do *portfolio*, que depende de restrições, para a utilização do mesmo.

**Palavras-chave:** Otimização de carteiras de investimento. Método Nelder-Mead. Fronteira Eficiente.

---

# Abstract

---

In this work we perform a portfolio optimization by using a derivative-free method. For this, we use the Mean-Variance Analysis proposed by Harry M. Markowitz, in which the problem is formulated as one of minimizing portfolio risk subject to a targeted expected portfolio return. Or, for a particular level of risk, we can find a combination of assets that is going to give the highest expected return and determine all the optimal portfolios, towards risk and return, forming the Efficient Frontier. Our algorithm is based on Nelder-Mead method, for solving problems of unconstrained nonlinear programming. Therefore, the formulation of the portfolio, subject to constraints, was adapted for its use.

**Keywords:** Portfolio Optimization. Nelder-Mead Method. Efficient Frontier.



---

# Sumário

---

<b>Resumo</b>	<b>vi</b>
<b>Abstract</b>	<b>vii</b>
<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Revisão Histórica</b>	<b>3</b>
<b>2 A Teoria Moderna de <i>Portfolio</i></b>	<b>7</b>
2.1 Conceitos fundamentais . . . . .	7
2.2 Considerações iniciais . . . . .	9
2.3 O modelo média-variância e a Teoria Moderna de <i>Portfolio</i> de Markowitz	10
2.4 A Fronteira Eficiente . . . . .	14
2.5 Otimizando a média-variância . . . . .	16
<b>3 Método Nelder-Mead</b>	<b>18</b>
3.1 Método Nelder-Mead . . . . .	18
3.2 Algoritmo . . . . .	21
3.3 Propriedades do Método Nelder-Mead . . . . .	24
3.4 Considerações finais . . . . .	25
<b>4 Testes numéricos</b>	<b>26</b>
4.1 Descrição do problema . . . . .	26
4.1.1 O modelo média-variância . . . . .	28
4.2 Testes numéricos . . . . .	30
<b>Considerações Finais</b>	<b>39</b>

Referências Bibliográficas	41
A Taxa média esperada de retorno e matriz de covariância	43
B Algoritmo do Método Nelder-Mead	49
C Algoritmo - Função objetivo do problema reformulado	56

---

# Lista de Tabelas

---

4.1	Carteira de ações escolhida . . . . .	27
4.2	Retorno esperado e encontrado <b>versus</b> risco associado . . . . .	31
4.3	Carteira ótima para 10% de retorno . . . . .	32
4.4	Retorno esperado e encontrado <b>versus</b> risco associado . . . . .	33
4.5	Carteira ótima para 50% de retorno . . . . .	34
4.6	Carteira ótima para 100% de retorno . . . . .	35
A.1	Colunas 1 a 10 da matriz de covariância. . . . .	44
A.2	Colunas 11 a 20 da matriz de covariância. . . . .	45
A.3	Colunas 21 a 30 da matriz de covariância. . . . .	46
A.4	Colunas 31 a 40 da matriz de covariância. . . . .	47

---

# Lista de Figuras

---

2.1	Fronteira Eficiente de Markowitz . . . . .	15
3.1	Reflexão, expansão, contração interna e externa de um simplex sendo $y^2$ é o pior vértice . . . . .	20
3.2	Redução de um simplex . . . . .	21
4.1	Simplex no $\Re^2$ . . . . .	28
4.2	Simplex no $\Re^3$ . . . . .	29
4.3	Fronteira Eficiente para retorno esperado variando de 10% a 100% . . .	36

---

# Introdução

---

A evolução monetária e a evolução da humanidade sempre caminharam lado a lado. No decorrer da história, os mais diversos materiais foram utilizados para que o homem pudesse usufruir e satisfazer suas necessidades básicas. No século VII a.C., os gregos deram início à caracterização do “dinheiro”, criando a primeira moeda metálica; anos mais tarde, no século XVII, os suecos apresentaram o papel moeda até que, no século XX, surgiam os primeiros cartões de crédito. Neste cenário surgiram a necessidade de valorização do capital adquirido e, por consequência, os primeiros trabalhos em finanças.

Em 1952, foi apresentado o modelo clássico de gestão de carteiras proposto por Harry M. Markowitz, sendo este uma referência para se entender como determinar uma carteira ótima a partir da minimização de uma função de avaliação de risco. Em seu modelo de média-variância, ele propõe que a redução do risco associado a um nível considerado de retorno no investimento ocorre quando a carteira é formada com base no conceito de diversificação e o conjunto de carteiras otimizadas resulta na Fronteira Eficiente, ou seja, o melhor conjunto de carteiras possíveis.

Este trabalho tem como objetivo a otimização de uma carteira de investimento, ou seja, estamos interessados em minimizar o risco sujeito a um retorno mínimo. Para isso, será utilizada uma formulação matemática que mensura o modelo clássico de retorno e risco baseada em 40 ações que compõem a carteira. O método utilizado foi o Nelder-Mead destinado a resolução de problemas de programação não linear irrestritos para determinar uma carteira eficiente e, por consequência, a Fronteira Eficiente, fazendo variar o retorno mínimo esperado tendo como proposta principal a aplicabilidade desta formulação.

Nossa série histórica fará uso de ações reais brasileiras utilizando ações cotadas na Bovespa durante um período de tempo pré-fixado, propondo assim novas formas de soluções baseadas em métodos numéricos.

---

Isso foi realizado estruturando o trabalho da seguinte forma: inicialmente foi realizada uma revisão histórica sobre o tema demonstrando a importância de uma carteira de investimentos nos dias atuais. No Capítulo 2, foram apresentados conceitos fundamentais em finanças, para que definições relevantes ao entendimento do trabalho estejam definidas na modelagem do problema proposto, assim como as formulações clássicas de análise de média-variância e a Teoria Moderna de *Portfolios*. No Capítulo 3, o método Nelder-Mead é apresentado, assim como seu algoritmo. Finalmente, o Capítulo 4 tem como objetivo a implementação do modelo, assim como a apresentação dos resultados numéricos obtidos com a aplicação do mesmo ao problema proposto no presente trabalho, validando o método desenvolvido.

# REVISÃO HISTÓRICA

---

## Introdução

Neste capítulo, apresentamos uma breve revisão histórica do problema de maximização do investimento de capital até o início da década de 50, com o surgimento de estudos no campo da teoria moderna de finanças, por Harry M. Markowitz [11].

No próximo capítulo, estendemos a revisão histórica de modo a abordar as formas clássicas do problema de otimização de carteiras de investimento.

## Revisão histórica

O homem sempre teve dentro de si a necessidade de ter uma moeda de troca para que com ela pudesse suprir suas necessidades básicas. Esta busca de uma convenção para medir riquezas e trocar mercadorias é quase tão antiga quanto a vida em sociedade. Ao longo da história, os mais diversos artigos foram usados com essa finalidade.

A primeira moeda metálica com um valor padronizado pelo Estado foi criada pelos gregos no século VII a.C. [18]. O salto cultural e tecnológico das moedas primitivas constituiu a primeira revolução monetária da história. Já o papel moeda surgiu na Suécia, em 1661, e os cartões de crédito foram inventados no início do século XX por companhias de combustíveis, com objetivo de facilitar a compra [18].

O antropólogo Jack Weatherford, em seu livro “A História do Dinheiro” [18], afirma que, com a informática, o dinheiro se transformou em impulsos eletrônicos invisíveis, livres do espaço, do tempo e do controle de governos e corporações.

Na realidade, o que mais importa não é o dinheiro em si, independente da forma em que ele é apresentado, mas sim as mercadorias e serviços que ele pode comprar. É uma espécie de título que dá a seu portador a capacidade de se considerar credor da sociedade e usufruir, através do poder de compra, de todos os benefícios da sociedade moderna. Esse dinheiro não está presente em um vácuo cultural ou social. Ele constitui uma instituição social. Para ter sua finalidade assegurada enquanto dinheiro, um material não pode existir simplesmente enquanto objeto. É preciso um sistema sociocultural específico. Quando esse sistema passa a existir, muitos objetos diferentes podem servir como dinheiro.

Portanto, pode-se definir a evolução monetária como uma vontade do homem de enquadrar sua situação financeira à realidade de sua economia. Frente a esse cenário, surge a necessidade de se ter um capital para girar os recursos.

O capital passou a ser algo indispensável no dia a dia das pessoas e das empresas em geral. Com o desenvolvimento do capitalismo, o surgimento das transações comerciais entre as empresas, pessoas físicas e instituições financeiras, surgiu a necessidade desses seguimentos possuírem um instrumento que lhes oferecessem a possibilidade de medir a capacidade dos devedores em cumprir com os seus compromissos financeiros e girar a economia a seu favor.

Os mercados financeiros atuam em um campo incerto, pois dependem de agentes econômicos sensíveis a fatores imprevisíveis, sejam materiais ou puramente psicológicos. À medida que a incerteza ia sendo incorporada no conhecimento científico, foram sendo propostos modelos estocásticos destinados a introduzir alguma ordem, um raciocínio lógico, ainda que para uma compreensão qualitativa dos fenômenos.

Nesse contexto, surge o primeiro trabalho notável em finanças, atribuído ao matemático francês Louis Jean-Baptiste Alphonse Bachelier, nascido em Le Havre no ano de 1870 [1]. Seus trabalhos não foram reconhecidos em vida. Um dos primeiros matemáticos a reconhecer os relevantes e pioneiros trabalhos de Bachelier em probabilidade e matemática financeira foi Benoît Mandelbrot. Hoje, Bachelier é reconhecido interna-



cionalmente como o pai da matemática financeira. No ano de 1900, quando defendeu sua tese *Théorie de la spéculation* [1], propôs um modelo para a evolução do valor de um ativo financeiro baseado no princípio de variações discretas aleatórias. Para isso, recorreu à utilização do movimento Browniano.

Esse, por sua vez, é o movimento aleatório de partículas macroscópicas num fluido como consequência dos choques das moléculas do fluido nas partículas. O primeiro a observar esse movimento foi o biólogo Robert Brown. Observando o fato, achou que se tratava de uma nova forma de vida, pois ainda não se tinha completa ciência da existência de moléculas. E as partículas pareciam descrever movimentos por vontade própria. Foi então que em 1905, Albert Einstein explicou corretamente esse movimento, sugerindo que a energia era constituída de moléculas. Em 1880, através de um artigo, no método dos Quadrados Mínimos, Thorvald N. Thiele foi o primeiro a descrever matematicamente o movimento Browniano. Durante anos, esse movimento foi utilizado como base de modelos matemáticos usados em finanças.

Em 1936, Keynes publicava seu livro *A Teoria Geral do Emprego, do Juro e da Moeda* [17], revolucionando o pensamento econômico, sendo Paul Samuelson [17] um dos principais responsáveis pela propagação das ideias de Keynes compreendidas na síntese neoclássica. Dedicou-se a um projeto de pesquisa para estruturação da análise econômica unindo o novo ao velho conhecimento, buscando unicidade e coerência.

Samuelson pode ser descrito como um economista matemático na linha neo-keynesiana, e estava à frente de três grandes ondas da Economia moderna: a revolução keynesiana, a revolução da competição monopolística ou imperfeita e, por fim, a clareza resultante do uso da matemática e Econometria na solução de problemas econômicos. Ele foi um dos maiores contribuintes para a síntese neoclássica. Segundo o economista Kenneth Joseph Arrow, os pilares da doutrina neoclássica são o princípio da otimização pelos agentes econômicos e a coordenação de suas atividades através do mercado.

A maior contribuição no desenvolvimento e entendimento dos mercados financeiros e as tomadas de decisão nesse contexto ocorreu em 1952, quando Harry M. Markowitz publicou no *The Journal of Finance* seu primeiro estudo no campo da teoria moderna de finanças, intitulado *Portfolio Selection* [11]. Em 1959, escreveu um livro com o mesmo nome do seu artigo original abordando o mesmo tema. Seus estudos possibilitaram a

resposta de como alocar fundos entre as possíveis escolhas de investimentos. Ele sugeriu que os investidores devem considerar juntamente risco e retorno e determinar a alocação de fundos entre investimentos alternativos baseados no *trade-off* entre eles. Em 1990, Harry M. Markowitz recebeu o prêmio Nobel em Economia.

Markowitz mostrou que era possível combinar os ativos de forma que, para um nível considerado de retorno, o risco era minimizado e o conjunto de carteiras otimizadas resultava em uma Fronteira Eficiente. Essa redução de risco da carteira baseia-se no conceito da diversificação dos ativos. Podemos descrever a Fronteira Eficiente como sendo o melhor conjunto possível de carteiras, ou seja, o conjunto no qual todas as carteiras têm o mínimo nível de risco para um dado nível de retorno.

A Fronteira Eficiente e a Teoria Moderna de *Portfolio* ainda são muito utilizadas nos dias atuais, como podemos constatar em [7, 10]

Dessa forma, a Teoria Moderna de *Portfolio* está totalmente ligada ao conceito de investimento no mercado financeiro atual, porque indica ao investidor o modo como o investimento deve ser realizado. Esta teoria constitui o fundamento principal de toda a utilização de instrumentos financeiros, onde se enquadram os ativos, visando o retorno e a redução do risco.

---

# A TEORIA MODERNA DE *Portfolio*

---

## 2.1 Conceitos fundamentais

Antes de abordarmos as formulações clássicas de análise de média-variância e a Teoria Moderna de *Portfolios* de Markowitz, faz-se necessária uma apresentação de alguns conceitos fundamentais de finanças para o entendimento do trabalho desenvolvido.

Primeiramente, deve-se ter o conceito de *investimento* [16] bem definido. Este pode ser descrito como sendo o que uma pessoa faz com o dinheiro que não foi utilizado para que este aumente ao longo do tempo. Ou seja, é uma aplicação de capitais com finalidade lucrativa. Já o *portfolio* [16] é formado por um grupo de ativos, ou seja, bens que pertencem a um investidor, pessoa física ou jurídica. Por sua vez, esses ativos podem ser fundos, aplicações imobiliárias, ações, dentre outros.

Outro termo rotineiro no campo das finanças é a *diversificação* [8], que é definida como a maneira com que o investidor divide sua poupança nos diversos ativos financeiros e reais, contribuindo assim para a redução dos riscos de perda.

Na formação de uma carteira de investimentos, a diversificação tem um papel importante, pois através dela podemos incluir ativos com maior e menor nível de risco e rentabilidade, de vários tipos de mercados, reduzindo assim o risco geral da carteira de perdas provocadas por uma rentabilidade baixa ou negativa de um único ativo.

O *risco* [16] é visto como uma possibilidade de que algum acontecimento desfavorável venha a ocorrer. Em um investimento, ele está diretamente ligado à probabilidade de

se ganhar menos que o esperado e pode ser classificado de duas formas: diversificável e não diversificável. O primeiro refere-se aos riscos que afetam um número pequeno de empresas, ou seja, se algo não sair conforme o esperado, apenas uma ou poucas empresas serão afetadas. Já o risco não diversificável, ou o risco de mercado, como é conhecido, é o mais preocupante, pois refere-se a acontecimentos que afetam o mercado como um todo.

É importante ressaltar que a diversificação reduz apenas o risco diversificável, como o próprio nome diz. Isso se deve ao fato de que, quando se diversifica um investimento, o capital total pode sofrer baixa relativa a acontecimentos que afetam apenas um dos ativos que compõe a carteira, podendo os outros ativos reduzir as perdas totais.

Já o *retorno* [16] é definido como o total de ganhos ou perdas ocorridas após um dado período de tempo.

A *volatilidade* [2] é uma das ferramentas mais importantes para quem atua no mercado de opções. É definida como a variação do preço de ações em um determinado período de tempo. Mercados que se movem lentamente são mercados de baixa volatilidade e os que se movem rapidamente são mercados de alta volatilidade.

## Parâmetros estatísticos

Markowitz desenvolveu um modelo de análise da relação risco-retorno, no qual as informações necessárias para a escolha do melhor *portfolio* para quaisquer níveis de risco estão contidas em três parâmetros estatísticos: média, variância e desvio-padrão e covariâncias (ou correlações).

- **Média:** Quando a população for finita com  $N$  valores igualmente prováveis, a função de probabilidade é  $f(x_i) = \frac{1}{N}$  e a média é

$$\mu = \sum_{i=1}^N x_i f(x_i) = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N}.$$

- **Variância:** Quando a população for finita e consistir em  $N$  valores igualmente prováveis, podemos definir a variância da população como

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2}{N}$$

A raiz quadrada positiva da variância ( $\sigma^2$ ) denotará o desvio-padrão da população ( $\sigma$ ).

- **Covariância:** A covariância entre duas variáveis aleatórias reais  $X$  e  $Y$ , com valores esperados  $E(X) = \mu_X$  e  $E(Y) = \mu_Y$  é definida como uma medida de como duas variáveis variam conjuntamente, ou seja, é uma medida de associação entre duas variáveis aleatórias, obtida como o valor esperado do produto de duas variáveis aleatórias em torno de sua média; ou seja,

$$COV(X, Y) = E[(X - \mu_x)(Y - \mu_y)].$$

A covariância é por vezes chamada de medida de dependência linear entre as duas variáveis aleatórias. Já a correlação é um conceito relacionado usado para medir o grau de dependência linear entre duas variáveis.

## 2.2 Considerações iniciais

O objetivo que fundamenta este trabalho é resolver o problema de otimização de uma carteira de investimento, ou *portfolio* [8], definido como o conjunto de ativos financeiros nos quais se investe. A teoria do *portfolio* estabelece que decisões relacionadas à seleção de investimentos devam ser tomadas com base na relação risco-retorno. Para auxiliar nesse processo, modelos de otimização de *portfolio* têm sido desenvolvidos, de modo a serem efetivos. Tais modelos devem ser capazes de quantificar os níveis de risco e retorno dos investimentos. O interesse do investidor, em geral, quando monta uma carteira de investimento, é a maximização do lucro, minimizando o risco de perda de capital. Para que isso se torne possível, o investidor precisa utilizar um modelo matemático que siga esses preceitos.

Todos os conceitos que envolvem a Teoria de Otimização de *Portfolio* e diversificação têm sido instrumentos fundamentais para o desenvolvimento e para a evolução do conhecimento em mercados financeiros e tomadas de decisões. A maior contribuição para a evolução quantitativa e qualitativa no mercado financeiro, como mencionado anteriormente, foi a publicação da Teoria Moderna de *portfolio* de Markowitz [11].

A partir deste estudo, risco e retorno foram avaliados juntamente, e esse fato revolucionou as tomadas de decisões no mercado financeiro, pois possibilita que se faça uma avaliação quantitativa destes fatores como um todo, considerando o retorno do *portfolio*, além de formular o processo de tomada de decisão como um problema de otimização.

## 2.3 O modelo média-variância e a Teoria Moderna de *Portfolio* de Markowitz

O trabalho pioneiro na área de otimização de *portfolio* foi a proposição do modelo média-variância por Markowitz. Tal proposição parte do princípio de que, para o investidor, o retorno esperado e a volatilidade dos prováveis retornos são aspectos cruciais na definição do *portfolio* ótimo. O problema [3] é formulado de modo a se minimizar o risco do *portfolio* para um dado nível de retorno requerido pelo investidor, ou maximizar o nível de retorno esperado do *portfolio* associado a um dado nível de risco.

A análise da média-variância provê a construção e seleção de *portfolios* baseada nos desempenhos dos investimentos e o risco admitido por cada investidor. A teoria de seleção de *portfolios* é normativa, isto é, ela descreve um modelo ou uma norma de comportamento a qual os investidores devem seguir na construção de um *portfolio*. A teoria do apreçamento de ativos (opções) formaliza o relacionamento que deve existir entre o retorno dos ativos e os riscos, se os investidores fazem a construção e seleção dos *portfolios* de acordo com a análise da média-variância, conforme estudaremos a seguir.

## A diversificação e suas implicações

Como citado anteriormente, a *diversificação* consiste no fato do investidor dividir sua poupança nos diversos ativos financeiros e reais, reduzindo assim os riscos de perda. Markowitz quantifica o conceito de diversificação através da noção estatística de covariância entre ações (apólices) individuais e no modelo de variação do *portfolio*.

A diversificação está relacionada com o *Teorema do Limite Central* [13, 14]. A soma de muitas variáveis aleatórias independentes e com mesma distribuição de probabilidade tende à distribuição normal, ou seja, a distribuição Gaussiana.

**Teorema 2.3.1** *Sejam  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$  uma sequência de  $n$  variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com média  $\mu$  e variância  $\sigma^2 > 0$ , ambas finitas. Então:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left( \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu) \leq y \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y e^{-\frac{1}{2}s^2} ds.$$

Portanto, de acordo com o teorema anterior, para um *portfolio* de  $n$  ativos independentes e identicamente distribuídos com retornos  $R_1, R_2, R_3, \dots, R_n$ , o retorno [8] do *portfolio* ( $R_p$ ) é uma variável aleatória que segue a distribuição Gaussiana quando  $n$  for suficientemente grande. Assim:

$$R_p = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n R_i.$$

De forma similar, pelo Teorema do Limite Central, a variância [8] do *portfolio* é dada por:

$$\text{var}(R_p) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \text{var}(R_i) = \frac{1}{n^2} n\sigma^2$$

$$\text{var}(R_p) = \frac{\sigma^2}{n}$$

onde  $\sigma^2$  é a variância dos ativos. Quando  $n$  tende a infinito, a variância do *portfolio* tende a zero.

Recentes estudos [8] apontam que mais de 300 ativos são necessários para prover uma diversificação que seja suficiente. O conceito de diversificação é de certa forma intuitivo e poderoso e continua sendo aplicado em diversas áreas de finanças. Voltaremos a esse assunto na seção 2.4.

## Análise da média-variância

Suponha que um investidor deve escolher um *portfolio* composto de  $n$  ativos que envolvem riscos. Essa escolha pode ser representada por um vetor no  $\mathbb{R}^n$

$$w = (w_1, w_2, w_3, \dots, w_n)^T$$

de pesos, onde cada peso  $w_i$  representa o  $i$ -ésimo percentual do ativo assegurado no *portfolio*. Portanto

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1, \quad w_i \geq 0 \text{ para } i = 1, \dots, n.$$

Supondo-se também que os ativos  $R_1, R_2, R_3, \dots, R_n$  tenham um retorno esperado  $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_n)^T$  e a matriz associada de covariância de  $n$ -ésima ordem seja dada por:

$$COV(R) = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \dots & \sigma_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \sigma_{n1} & \dots & \sigma_{nn} \end{bmatrix}$$

onde  $\sigma_{ij}$  denota a covariância entre o ativo  $i$  e o ativo  $j$  de modo que

$$\sigma_{ij} = \begin{cases} \sigma_i^2, & \text{para } i = j \\ \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j, & \text{para } i \neq j \end{cases}$$



e  $\rho_{ij}$  é a correlação entre o ativo  $i$  e o ativo  $j$ . Portanto, o retorno do *portfolio* com os pesos  $w = (w_1, w_2, w_3, \dots, w_n)^T$  é a variável aleatória

$$R_p = \sum_{i=1}^n w_i R_i$$

com esperança de retorno e variância dados por:

$$\mu_p = w^T \mu$$

$$\sigma_p^2 = w^T COV(R) w.$$

Quando se seleciona o *portfolio* de pesos, o investidor escolhe entre os pares de média-variância disponíveis. Para calcular os pesos para um possível par, escolhe-se uma taxa média esperada de retorno,  $\mu_0$ . Por Markowitz, o problema do investidor é a minimização do risco, ou seja, o investidor deve buscar

$$\min_w w^T COV(R) w \quad (2.1)$$

sujeito às restrições

$$\mu_0 \leq w^T \mu$$

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1$$

$$w \geq 0.$$

Este problema clássico de otimização de média-variância é denotado por *risk minimization formulation* [3, 8]. Este é um problema de otimização quadrática com restrições lineares, e a solução é dada por

$$w = g + h\mu_0$$

onde  $g$  e  $h$  são dois vetores

$$g = \frac{1}{ac - b^2} COV(R)^{-1} [c\mu - b\mu]$$

$$h = \frac{1}{ac - b^2} COV(R)^{-1} [a\mu - b\iota]$$

e

$$a = \iota^T COV(R)^{-1} \iota$$

$$b = \iota^T COV(R)^{-1} \mu$$

$$c = \mu^T COV(R)^{-1} \mu$$

$$\iota^T = [1, 1, \dots, 1].$$

## 2.4 A Fronteira Eficiente

Pode-se conceituar a *Fronteira Eficiente* [8] observando que, dado um conjunto de ações, é possível combiná-las formando novas carteiras. Para isso, considere o plano cartesiano bi-dimensional no qual  $x$  e  $y$  são as coordenadas que representam o risco e o retorno esperado, e o grupo formado por todos os *portfolios* eficientes com todos os possíveis pares de *portfolio* eficiente. Este grupo forma a Fronteira Eficiente. Cada *portfolio* contido nela é obtido solucionando o problema de otimização para as diferentes escolhas de  $\mu_0$ , onde  $\mu_0$  representa a taxa média mínima esperada de retorno.

Em outras palavras, tendo como base a teoria de Markowitz, os investidores podem determinar todas as carteiras ótimas, no sentido risco e retorno, e formar a Fronteira Eficiente. Esta, por sua vez, pode ser descrita como o melhor conjunto possível de carteiras, isto é, todas as carteiras têm o mínimo nível de risco para dado nível de retorno. Os investidores se concentrariam na seleção de uma melhor carteira na Fronteira Eficiente e ignorariam as demais consideradas inferiores.

Graficamente, ela está representada pela Figura 2.1. A interpretação gráfica é tal que a parte superior da borda é formada por todo o conjunto de combinações de carteiras ótimas.

Existem várias terminologias oriundas do estudo sobre Fronteira Eficiente:

- *Portfolios* de variância mínima são chamados de *portfolios* eficientes de média-variância.

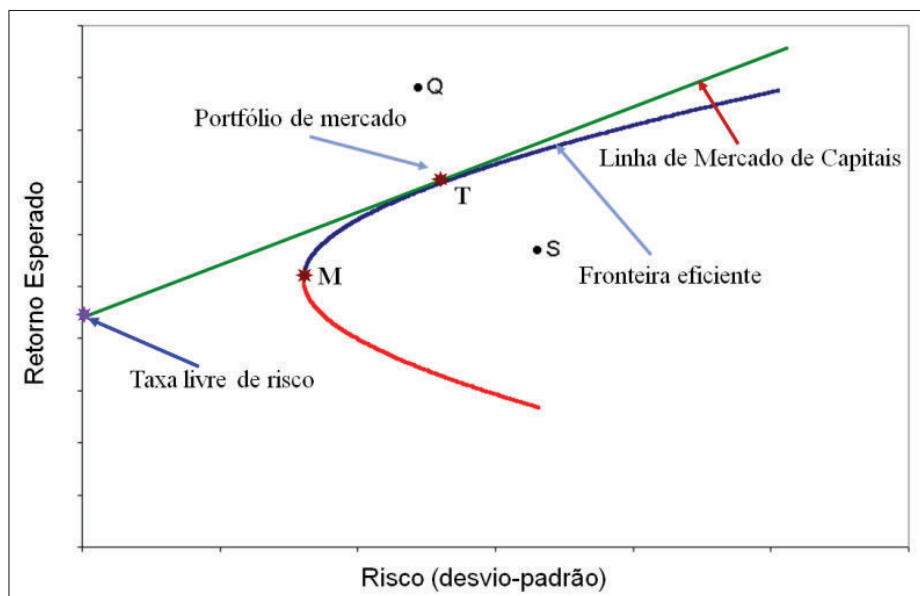


Figura 2.1: Fronteira Eficiente de Markowitz

- O grupo formado por todos estes *portfolios* é chamado de Fronteira Eficiente.
- O *portfolio* localizado na fronteira com a menor variância recebe o nome de *portfolio* de variância mínima global.
- Adicionando o ativo livre de risco, a fronteira eficiente se torna uma linha reta no sistema de coordenadas retorno esperado/risco (desvio-padrão). Esta linha é chamada de *linha de mercado de capitais*.
- O ponto de tangência da fronteira eficiente com somente ativos de risco e a linha de capitais de mercado é chamado *portfolio* tangente (*portfolio* de mercado)

Em suma, percebe-se que a curva da Fronteira Eficiente contém as carteiras com menor nível de risco e maior nível de retorno. Dentro dessa curva, pode-se encontrar diferentes perfis de risco e retorno, os quais devem se adequar ao perfil do investidor. A curva representa as melhores carteiras para diferentes perfis de risco.

A grande maioria dos investidores está interessada em manter sempre o retorno desejado. Para isso, uma questão a ser considerada é a possibilidade de reduzir o risco do *portfolio*, mantendo a expectativa de retorno constante, aumentando o universo de ativos.

Para esta análise, considera-se a variância do *portfolio* dada por:

$$\begin{aligned}
 \text{var}(R_p) &= w^T \text{COV}(R) w \\
 &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \text{var}(R_i) + \frac{1}{n^2} \sum_{i \neq j} \text{COV}(R_i, R_j) \\
 &\leq \frac{1}{n^2} n \sigma_{\max}^2 + \frac{1}{n^2} (n-1)n \times A \\
 &= \frac{\sigma_{\max}^2}{n} + \frac{(n-1)}{n} \times A
 \end{aligned}$$

onde:

$\sigma_{\max}^2$ : é a variância máxima de todos os ativos individualmente

A: a média em pares da covariância dos ativos

$$A = \frac{1}{(n-1)n} \sum_{i \neq j} \text{COV}(R_i, R_j).$$

Se a média em pares da covariância  $A$  e todas as variâncias estão determinadas, conclue-se que a variância do *portfolio* tenderá para  $A$ , quando  $n$  tende ao infinito, implicando que a variância do *portfolio* abordada  $A$  é vista como um grande número de ativos.

Logo, pode-se observar que, em geral, os benefícios da diversificação são limitados. Mesmo quando aumentamos o universo de ativos que compõem a nossa carteira, continuamos atuando em um mercado que envolve riscos, ou seja, não se pode eliminar completamente o risco do *portfolio*.

## 2.5 Otimizando a média-variância

Existem várias formulações equivalentes para o problema de otimização de média-variância que são de grande valia nas aplicações práticas. Por serem equivalentes, essas formulações alcançam a mesma Fronteira Eficiente, analisando o retorno esperado do *portfolio* versus o risco trazido com ele.

Portanto, em nossas implementações utilizamos a formulação apresentada na seção 2.1,

$$\min_w w^T COV(R)w$$

sujeito às restrições

$$\mu_0 \leq w^T \mu$$

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1$$

$$w \geq 0.$$

As restrições de igualdade e desigualdade presentes na formulação acima foram incorporadas na função objetivo utilizando funções de penalização, gerando assim um problema equivalente, que é apresentado no Capítulo 4.

Após a apresentação da Teoria Moderna de *Portfolio* por Markowitz, os investidores passaram a analisar o risco na formação de carteiras de investimentos e no mercado de capitais como um todo. Além de utilizarem o conceito de diversificação melhor aplicado, pois assim um investidor conseguiria obter melhores retornos com mesmo nível de risco.

O objetivo desse trabalho é determinar a Fronteira Eficiente e carteiras ótimas utilizando a formulação apresentada. Para isso, será utilizado o método Nelder-Mead sem restrições, que será abordado no próximo capítulo.

# MÉTODO NELDER-MEAD

O método Nelder-Mead ou o método Simplex foi proposto por a J. A. Nelder e R. Mead em 1965 [15] e constitui um método numérico de busca direta de minimização sem derivadas. Pertencente à classe mais geral de algoritmos de busca, e em seu formato base destina-se à resolução de problemas de programação não linear irrestritos.

O método utiliza uma figura geométrica denotada por simplex [6], o qual é posicionado a cada iteração com o intuito de que seja atraído para a região do domínio que contém o minimizador. Quando isso ocorre, o simplex deverá ter seu tamanho reduzido, até que a obtenção do minimizador fique satisfatória.

O simplex pode ser definido como um politopo de  $n + 1$  vértices em  $n$  dimensões, ou seja, um segmento de linha sobre uma linha, um triângulo sobre um plano, um tetraedro em um espaço de três dimensões e assim sucessivamente.

## 3.1 Método Nelder-Mead

O Nelder-Mead é um método de busca direta que consiste em demarcar uma região com um politopo de  $n + 1$  vértices, ou seja, um simplex. Toda iteração é baseada em um simplex  $Y = \{y^0, y^1, \dots, y^n\}$  de  $n + 1$  vértices ordenados pelo aumento dos valores da função, ou seja,  $f(y_0) < f(y_1) < \dots < f(y^n)$ .

Em cada iteração, um novo simplex é obtido a partir do simplex anterior, movendo o pior vértice de posição, ou reduzindo o simplex.

Os movimentos possíveis nesse método são: reflexão, expansão, contração interna e contração externa. Nessas operações, o pior vértice  $y^n$ , ou seja, aquele que possui maior imagem, é substituído por um ponto na linha que liga  $y^n$  e  $y^c$ , ou seja,

$$y = y^c + \delta(y^c - y^n), \quad \delta \in \mathbb{R},$$

onde  $y^c = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{y^i}{n}$  é um centróide que contém os  $n$  melhores vértices. O valor de  $\delta$  indica o tipo de operação.

Isso significa que o pior vértice é movido na direção do centróide, ou seja, atraído para a região em que se encontram os demais vértices, melhores que ele. Resta determinar qual deve ser o valor de  $\delta$ .

A primeira e principal operação efetuada em cada iteração é a reflexão. Um vértice refletido é obtido refletindo o pior vértice do simplex  $y^n$ , no sentido do centróide dos  $n$  vértices restantes. Isso pode ser obtido da seguinte forma:

$$y^r = y^c + \delta^r(y^c - y^n)$$

em que  $\delta^r = 1$  e  $y^c$  representa o centróide descrito anteriormente.

Neste ponto, faz-se uma avaliação de  $f^r = f(y^r)$ . Se ocorrer  $f^0 \leq f^r < f^{n-1}$ , então troca-se  $y^n$  pelo ponto refletido  $y^r$  obtendo o novo simplex:  $Y_{k+1} = \{y^0, y^1, \dots, y^{n-1}, y^r\}$ .

Um vértice expandido deve ser calculado se ocorrer  $f^r < f^0$ . Então, ele será obtido calculando

$$y^e = y^c + \delta^e(y^c - y^n)$$

onde  $\delta^e > 1$ .

Avalia-se então  $f^e = f(y^e)$ . Se  $f^e \leq f^r$ , troca-se o pior vértice  $y^n$  pelo ponto expandido  $y^e$  obtendo o novo simplex:  $Y_{k+1} = \{y^0, y^1, \dots, y^{n-1}, y^e\}$ . Caso isso não ocorra,  $y_n$  é trocado pelo ponto refletido  $y^r$  obtendo o novo simplex:  $Y_{k+1} = \{y^0, y^1, \dots, y^{n-1}, y^r\}$ .

A contração interna ocorre se  $f^r \geq f^n$ . Ela é calculada a partir de

$$y^{ci} = y^c + \delta^{ci}(y^c - y^n)$$

onde  $-1 < \delta^{ci} < 0$ .

Após calcular a contração interna, analisa-se  $f^{ci} = f(y^{ci})$ . Caso  $f^{ci} < f^n$ , troca-se o pior vértice  $y^n$  pelo ponto de contração interna  $y^{ci}$  formando assim o novo simplex:  $Y_{k+1} = \{y^0, y^1, \dots, y^{n-1}, y^{ci}\}$ .

Um vértice contraído para o exterior calcula-se a partir de

$$y^{ce} = y^c + \delta^{ce}(y^c - y^n)$$

onde  $0 < \delta^{ce} < 1$ . A contração externa irá ocorrer caso  $f^r < f^n$ .

Após efetuá-la, avalia-se  $f^{ce} = f(y^{ce})$ . Se  $f^{ce} \leq f^r$ , troca-se  $y^n$  pelo ponto de contração externa  $y^{ce}$ , formando um novo simplex:  $Y_{k+1} = \{y^0, y^1, \dots, y^{n-1}, y^{ce}\}$ .

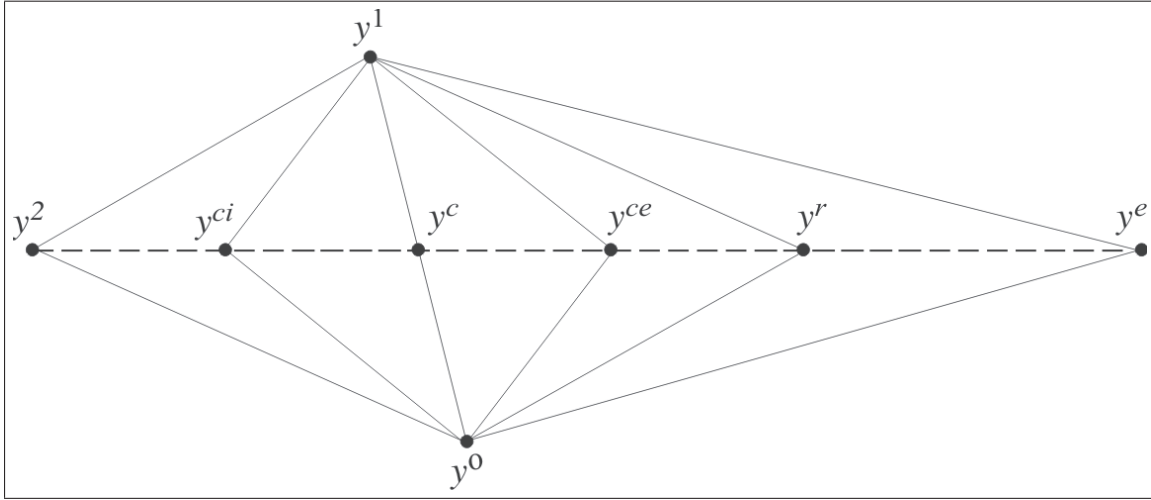


Figura 3.1: Reflexão, expansão, contração interna e externa de um simplex sendo  $y^2$  é o pior vértice

Uma iteração pode gerar uma redução do simplex 3.2, caso as demais operações não tenham sido aceitas. Quando uma redução é efetuada, todos os vértices contidos em  $Y$  são reposicionados, exceto o melhor deles  $y^0$ . Então, computa-se os novos  $n$  vértices contraindo o simplex até  $y^0$

$$y_i = \frac{y_i + y_0}{2}, \quad i = 1, \dots, n.$$



Esse processo é repetido até que a região delimitada pelo simplex seja suficientemente pequena.

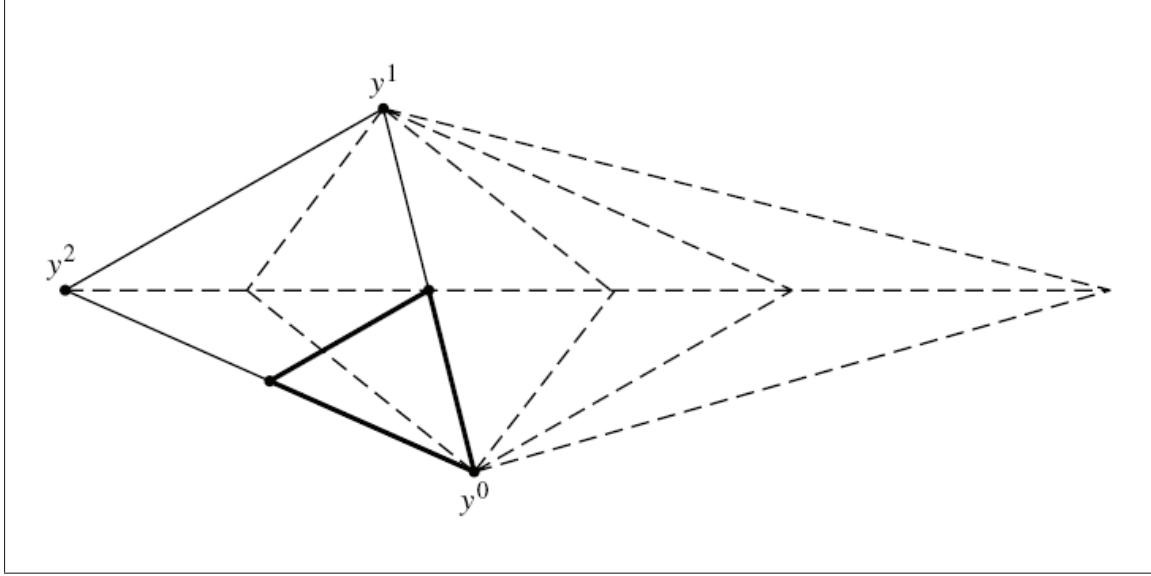


Figura 3.2: Redução de um simplex

## 3.2 Algoritmo

Como visto na seção anterior, o valor de  $\delta$  indica o tipo de operação que está sendo realizada. As escolhas utilizadas na implementação deste trabalho para os coeficientes usados serão:

$$\delta^{ce} = \frac{1}{2}, \quad \delta^{ci} = \frac{-1}{2}, \quad \delta^r = 1, \quad \delta^e = 2$$

A seguir o algoritmo do método Nelder-Mead implementado neste trabalho é apresentado.

Sejam um simplex inicial não degenerado de vértices  $Y_0 = \{y_0^0, y_0^1, \dots, y_0^n\}$ , as constantes:

$$0 < \gamma^s < 1, \quad -1 < \delta^{ci} < 0 < \delta^{ce} < \delta^r < \delta^e$$

e  $\Delta_{tol}$ . Faça  $k = 0$ .

**Passo 1:** Ordene os  $n + 1$  vértices de  $Y_k = \{y^0, y^1, \dots, y^n\}$ , de forma que:

$$f^0 = f(y^0) \leq f^1 = f(y^1) \leq \dots \leq f^n = f(y^n).$$

**Passo 2:** Reflexão

Refleta o pior vértice  $y^n$  através do centróide  $y^c = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{y^i}{n}$  dos  $n$  vértices que restaram:

$$y^r = y^c + \delta^r(y^c - y^n)$$

Avalie  $f^r = f(y^r)$ . Se  $f^0 \leq f^r < f^{n-1}$ , então troque  $y^n$  pelo ponto refletido  $y^r$  obtendo o novo simplex:  $Y_{k+1} = \{y^0, y^1, \dots, y^{n-1}, y^r\}$ . Vá para o passo 6.

**Passo 3:** Expansão

Se  $f^r < f^0$ , então calcule o ponto de expansão

$$y^e = y^c + \delta^e(y^c - y^n)$$

Faça  $f^e = f(y^e)$ . Se  $f^e \leq f^r$ , troque  $y^n$  pelo ponto expandido  $y^e$  obtendo o novo simplex:  $Y_{k+1} = \{y^0, y^1, \dots, y^{n-1}, y^e\}$ . Caso contrário, troque  $y_n$  pelo ponto refletido  $y^r$  obtendo o novo simplex:  $Y_{k+1} = \{y^0, y^1, \dots, y^{n-1}, y^r\}$ . Vá para o passo 6.

**Passo 4:** Contração

Se  $f^r \geq f^{n-1}$ , então a contração é executada.

- **Contração externa**

Se  $f^r < f^n$ , realize a contração externa

$$y^{ce} = y^c + \delta^{ce}(y^c - y^n)$$

e faça  $f^{ce} = f(y^{ce})$ . Se  $f^{ce} \leq f^r$ , troque  $y^n$  pelo ponto de contração externa  $y^{ce}$  e forme um novo simplex:  $Y_{k+1} = \{y^0, y^1, \dots, y^{n-1}, y^{ce}\}$ , e vá para o passo 6. Caso contrário, vá para o passo 5 (realize uma redução).

- **Contração interna** Se  $f^r \geq f^n$ , realize a contração interna

$$y^{ci} = y^c + \delta^{ci}(y^c - y^n)$$

e faça  $f^{ci} = f(y^{ci})$ . Se  $f^{ci} < f^n$ , troque  $y^n$  pelo ponto de contração interna  $y^{ci}$  e forme o novo simplex:  $Y_{k+1} = \{y^0, y^1, \dots, y^{n-1}, y^{ci}\}$ , e vá para o passo 6. Caso contrário, vá para o passo 5 (realize uma redução).

#### **Passo 5:** Redução

Reposicione os  $n$  “piores” vértices, recalculando-os:

$$y_i = y^0 + \gamma^s(y^i - y^0), \quad i = 1, \dots, n,$$

obtendo o novo simplex:  $Y_{k+1} = \{y^0 + \gamma^s(y^i - y^0), i = 0, \dots, n\}$ . Vá para o passo 6.

#### **Passo 6:** Critério de parada

Se

$$dist = \sqrt{\sum_{i=1}^{n+1} \left( \frac{(f(y_i) - f(y_c))^2}{n+1} \right)} < \Delta_{tol}$$

interrompa a execução, exibindo a solução como

$$x^* = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n+1} y_i.$$

Caso contrário, faça  $k = k + 1$  e retorne ao passo 1.

## Critério de parada

A pesquisa do procedimento de Nelder-Mead se encerra quando os valores da função objetivo para o conjunto de pontos tornam-se essencialmente iguais (ver passo 6 do algoritmo).

## Observações

Esta descrição do algoritmo é o que costuma-se chamar de interpretação moderna do algoritmo Nelder-Mead original [6]. A maior diferença entre a versão original e a aqui utilizada é que na versão original o ponto de expansão  $y^e$  é aceito se  $f^e < f^0$ ,

caso contrário, o ponto de reflexão  $y^r$  é aceito. Já o procedimento desta seção permite aceitar o melhor ponto entre  $y^r$  e  $y^e$ .

O algoritmo Nelder-Mead realiza um total de avaliações da função objetivo por iteração, dado por:

- $n + 2$  avaliações de função, se a iteração é uma reflexão;
- $n + 3$  avaliações de função, se a iteração é uma expansão ou contração;
- $2n + 3$  avaliações de função, se a iteração é uma redução.

### 3.3 Propriedades do Método Nelder-Mead

As propriedades mais importantes já demonstradas do algoritmo Nelder-Mead estão descritas nos seguintes teoremas:

**Teorema 3.3.1** *Nenhum passo de redução é realizado quando o método Nelder-Mead é aplicado para uma função estritamente convexa.*

**Demonstração:** Os passos de redução são realizados somente quando as contrações interna e externa são realizadas e falham. O foco será a contração externa, que é tentada apenas quando  $f_k^{n-1} \leq f_k^r < f_k^n$ . Agora, pela convexidade estrita de  $f$  e pelo fato de  $y_k^{ce}$  ser uma combinação convexa de  $y_k^c$  e  $y_k^r$  para o parâmetro  $\lambda \in (0, 1)$ ,

$$f(y_k^{ce}) = f(\lambda y_k^c + (1 - \lambda)y_k^r) < \lambda f(y_k^c) + (1 - \lambda)f(y_k^r) \leq \max\{f_k^c, f_k^r\}$$

Mas  $\max\{f_k^c, f_k^r\} = f_k^r$  desde que  $f_k^{n-1} \leq f_k^r$  e  $f_k^c \leq f_k^{n-1}$  (o último decorre da convexidade estrita de  $f$ ). Então,  $f_k^{ce} < f_k^r$  e a contração externa é aplicada (e a redução não é executada). Se, ao invés disso, uma contração interna é considerada, então um argumento similar será aplicado, baseado no fato de  $y_k^{ci}$  ser uma combinação convexa de  $y_k^n$  e  $y_k^c$ . Note que a convexidade estrita é requerida para este argumento [6].

**Teorema 3.3.2** *O método Nelder-Mead possui convergência global quando  $n = 1$ .*

**Demonstração:** Provado em [9].



## Convergência para pontos não estacionários

Como citado anteriormente, o método de Nelder-Mead possui convergência global para  $n = 1$ , mas o método não possui resultados de convergência para  $n > 2$ .

Encontra-se falha no método como, por exemplo, quando aplicado à uma função não convexa e diferenciável de duas variáveis [19], ou exemplos nos quais o algoritmo, para uma família de funções estritamente convexas e diferenciáveis, converge a pontos não estacionários [12]. Isso é devido à direção de busca se tornar numericamente ortogonal ao gradiente, a direção de menor descida, direção esta que é definida pelo pior vértice e pelo centróide dos vértices que restaram.

## 3.4 Considerações finais

Mesmo não apresentando resultados expressivos de convergência e demonstrando um mau comportamento em alguns problemas, a importância do método Nelder-Mead é indiscutível, fato que pode ser comprovado pelas inúmeras aplicações em computação científica ao longo dos anos, além de poder ser aplicado a qualquer função. Em particular, essa função não precisa ser contínua ou diferenciável.

Pelo fato de ser um método sem derivadas, atende a uma ampla classe de funções e a aproximação inicial não precisa estar próxima do ponto de mínimo, além de possuir a convergência garantida para um minimizador local sob certas condições.

Portanto, no próximo capítulo faz-se uma descrição do problema a ser minimizado, e utiliza-se o método Nelder-Mead para encontrar as soluções pertinentes ao caso considerado.

---

## TESTES NUMÉRICOS

---

Como mencionado anteriormente, este trabalho tem como objetivo a aplicação da Teoria de *Portfolio* de Markowitz, relacionando-a com a análise de carteiras de investimentos ótimos através da Fronteira Eficiente.

Para que esta análise seja efetuada e a solução seja alcançada, neste capítulo serão realizados testes numéricos, a fim de obter uma carteira ótima de investimentos, utilizando como recurso o método de Nelder-Mead.

### 4.1 Descrição do problema

Para que a modelagem proposta 2.1 fosse alcançada com êxito, ou seja, aproximar-se o máximo da realidade de aplicações do problema de otimização de carteiras de investimento, visto que ela visa a funcionalidade e aplicabilidade, foi extraída uma série histórica de ações da Bovespa [5] referente ao ano de 2009. Dentre todas as ações disponíveis, foram escolhidas quarenta para formarem a carteira que será referência para os testes. Elas aparecem listadas a seguir com seus códigos de operação e nomes, respectivamente.

Estes ativos foram escolhidos de forma a se obter um carteira diversificada. Dessa maneira, o risco se torna menor, visto que trabalhamos simultaneamente com ativos com maior e menor nível de risco e rentabilidade.

<i>Nº</i>	<b>Código</b>	<b>Nome da Ação</b>
1	AMBV4	AMBEV
2	BDBC4	BRADESCO
3	CMIG3	CEMIG
4	CSNA3	SID NACIONAL
5	DROG3	DROGASIL
6	EBTP4	EMBRATEL PAR
7	EMBR3	EMBRAER
8	ESTR4	ESTRELA
9	FHER3	FER HERINGER
10	GFSA3	GAFISA
11	GGBR4	GERDAU
12	GOLL4	GOL
13	HGTX3	CIA HERING
14	HOOT4	HOTEIS OTHON
15	IGTA3	IGUATEMI
16	ITAU3	ITAUBANCO
17	LAME3	LOJAS AMERIC
18	LIGT3	LIGHT S/A
19	LREN3	LOJAS RENNER
20	MAGG3	MAGNESITA SA
21	MARI3	MARISA
22	MEDI3	MEDIAL SAUDE
23	MULT3	MULTIPLAN
24	NATU3	NATURA
25	ODPV3	ODONTOPREV
26	PETR3	PETROBRÁS
27	PRGA3	PERDIGAO S/A
28	PSSA3	PORTO SEGURO
29	SANB3	SANTANDER BR
30	SDIA3	SADIA S/A
31	SLED4	SARAIVA LIVR
32	TAMM4	TAM S/A
33	TELB3	TELEBRAS
34	TEND3	TENDA
35	TMAR3	TELEMAR N L
36	TOYB3	TECTOY
37	TPIS3	TRIUNFO PART
38	UBBR3	UNIBANCO
39	VALE3	VALE R DOCE
40	VIVO3	VIVO

Tabela 4.1: Carteira de ações escolhida

A série histórica foi tratada e manipulada utilizando o programa Microsoft Office Excel 2007, e usa os dados referentes ao período de 02 de janeiro de 2009 até 14 de abril de 2009, sendo assim 69 dias úteis de aferição. Através do software, obtivemos o valor do preço médio diário de cada ativo, assim como a rentabilidade média no período

de cada ação e a matriz de covariância. Todos os testes foram realizados utilizando o software Matlab 7.0.1.

#### 4.1.1 O modelo média-variância

Como visto no Capítulo 3, os testes computacionais utilizarão o Método Nelder-Mead que se destina à minimização de funções irrestritas, utilizando o conceito de um simplex, reposicionando-o a cada iteração.

O simplex inicial foi armazenado em uma matriz, e construído de forma que as  $n$  primeiras linhas são formadas por vetores canônicos, sendo o último vetor composto por todas as suas componentes iguais a  $-1$ . Assim, os pontos que o formam nunca estarão no mesmo hiperplano. Vejamos, através das Figuras 4.1 e 4.2, um simplex no  $\mathbb{R}^2$  e um no  $\mathbb{R}^3$ .

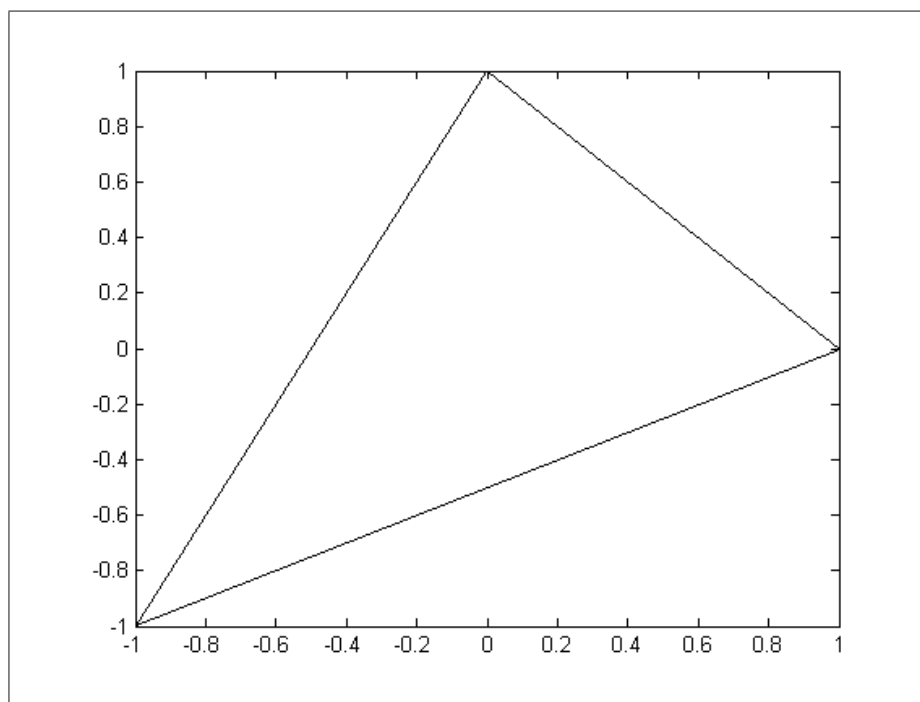
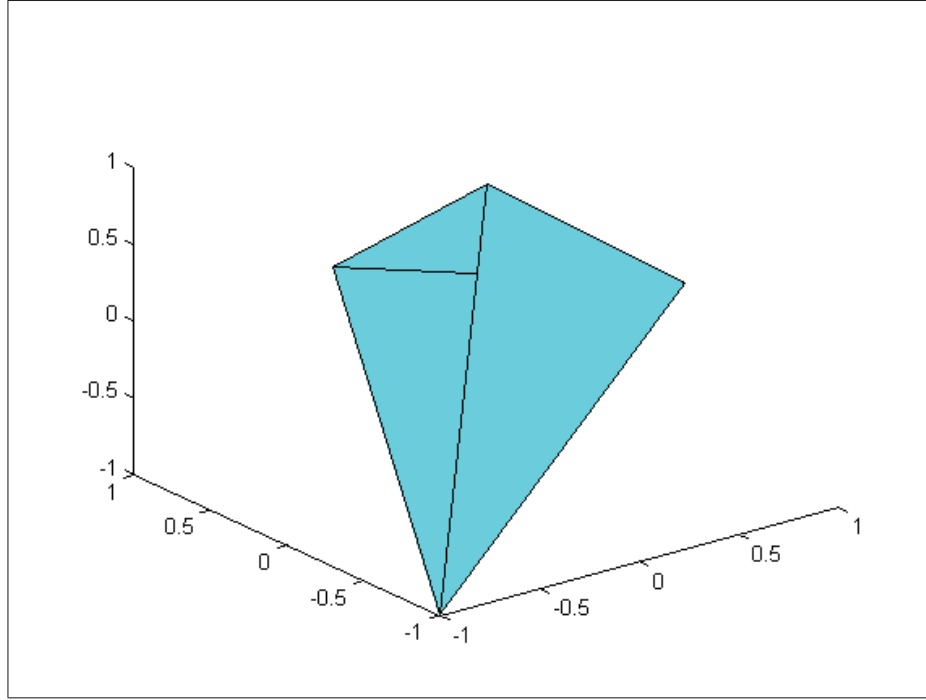


Figura 4.1: Simplex no  $\mathbb{R}^2$



Figura 4.2: Simplex no  $\mathbb{R}^3$ 

A modelagem proposta 2.1 envolve restrições. Assim, antes de resolver o problema, precisamos reformulá-lo. O problema proposto está sujeito às restrições

$$\mu_0 \leq w^T \mu$$

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1$$

$$w \geq 0$$

nas quais  $\mu$  representa a taxa média esperada de retorno e as relações de covariância entre as séries históricas das ações, que são agrupadas formando a matriz de covariância  $COV(R)$ . Elas são encontradas nas Tabelas 1, 2, 3 e 4, no apêndice A.

Para incorporar estas restrições à modelagem, foi criada por nós uma subrotina no Matlab com uma função objetivo do problema reformulado que recebeu o nome  $f = retorno1(x)$ . Chamamos esse processo de penalização [4].

## Processo de penalização

Iremos minimizar o risco adicionado a três novas parcelas.

$$f(w) = w^T COV(R)w + \rho_1 [\min\{0, w^T \mu - \mu_0\}]^2 + \rho_2 \left[ \left( \sum_{i=1}^{40} w_i \right) - 1 \right]^2 + \rho_3 \left[ \sum_{i=1}^{40} (\min\{0, w_i\})^2 \right].$$

Obtemos assim um problema equivalente a 2.1, irrestrito, o que torna possível a aplicação do Método Nelder-Mead. Foram testadas diversas escolhas para os parâmetros de penalização, os quais chamamos de  $\rho_1$ ,  $\rho_2$  e  $\rho_3$ , para garantir que cada parcela se torne grande quando usamos pontos que não satisfaçam a restrição. Os valores que satisfizeram esta condição foram:

$$\rho_1 = 10$$

$$\rho_2 = 10$$

$$\rho_3 = 1000$$

Em cada simulação, fixamos o valor do retorno esperado, com o objetivo de minimizar o risco e maximizar o montante final obtido. Os algoritmos se encontram nos apêndices B e C.

## 4.2 Testes numéricos

Uma vez tendo concluída a formulação matemática, testes iniciais foram efetuados para a validação do modelo. Conforme dito anteriormente, consideramos o período de 02 de janeiro de 2009 até 14 de abril de 2009 e fixamos o valor do retorno esperado em cada simulação, obtendo assim o risco que assumiríamos nesta operação.

Inicialmente assumimos que, na pior das hipóteses, um investidor não esperava nenhum retorno com os ativos que compõem a carteira, e variamos o retorno desejado entre 1% a 10%, para que obtivéssemos resultados mais próximos da realidade. Considerando que um investidor tenha um montante  $\mathbf{X}$  a ser investido, ele obteria como

retorno diário os resultados abaixo:

RETORNO ESPERADO	RETORNO OBTIDO	VALOR DO RISCO	ITERAÇÕES
0	0.04546610911249	0.79420827854222	1569
0,01	0.04708592785755	0.76506107787416	1790
0,02	0.04980608483138	0.76333099340907	1736
0,03	0.05622715220461	0.74275271489910	1457
0,04	0.06447013989965	0.74974848337571	2050
0,05	0.07962967909869	0.77174581898890	1476
0,06	0.08578256122830	0.74277432622323	1474
0,07	0.10596352787207	0.76706106401191	1594
0,08	0.10251593334140	0.72825575789371	2108
0,09	0.10028748102635	0.74270614340563	1915
0,1	0.11410487555443	0.75903517819239	1592

Tabela 4.2: Retorno esperado e encontrado **versus** risco associado

Observa-se que o menor risco encontrado foi de 0.72825575789371. Esse fato se estendeu a todas as simulações realizadas; algumas delas veremos a seguir. Portanto, este é o menor risco associado à otimização do retorno da carteira formulada. Pode-se observar também que a maximização do retorno foi realizada com sucesso, visto que o retorno obtido em cada simulação foi maior do que o retorno fixado.

Para exemplificação do resultado obtido, supõe-se que um investidor deseje obter um retorno de 10 % em um montante  $X$  Reais a ser investido. Assim, a porcentagem a ser investida em cada ação seria de:

$N^o$	Cód.	Ação	Perc. investido
1	AMBV4	AMBEV	13,711926798473
2	BBDC4	BRADESCO	0
3	CMIG3	CEMIG	19,480775442712
4	CSNA3	SID NACIONAL	0
5	DROG3	DROGASIL	1,388892487694
6	EBTP4	EMBRATEL PAR	8,039854122228
7	EMBR3	EMBRAER	0
8	ESTR4	ESTRELA	2,723913772839
9	FHER3	FER HERINGER	0
10	GFSA3	GAFISA	0

<i>Nº</i>	<b>Cód.</b>	<b>Ação</b>	<b>Perc. investido</b>
11	GGBR4	GERDAU	0
12	GOLL4	GOL	3,669274458277
13	HGTX3	CIA HERING	0,011189728722
14	HOOT4	HOTEIS OTHON	0
15	IGTA3	IGUATEMI	4,273430937894
16	ITAU3	ITAUBANCO	0,0870155164738
17	LAME3	LOJAS AMERIC	0
18	LIGT3	LIGHT S/A	10,919620930401
19	LREN3	LOJAS RENNER	0
20	MAGG3	MAGNESITA SA	0,068745780972
21	MARI3	MARISA	7,818185904573
22	MEDI3	MEDIAL SAUDE	4,699281391573
23	MULT3	MULTIPLAN	0
24	NATU3	NATURA	7,672355983170
25	ODPV3	ODONTOPREV	3,110355278249
26	PETR3	PETROBRÁS	0
27	PRGA3	PERDIGAO S/A	0
28	PSSA3	PORTO SEGURO	0,406248465420
29	SANB3	SANTANDER BR	0
30	SDIA3	SADIA S/A	1,673347404333
31	SLED4	SARAIVA LIVR	0,894284685932
32	TAMM4	TAM S/A	0,278223336986
33	TELB3	TELEBRAS	0,617193752786
34	TEND3	TENDA	0
35	TMAR3	TELEMAR N L	0
36	TOYB3	TECTOY	0
37	TPIS3	TRIUNFO PART	0
38	UBBR3	UNIBANCO	0
39	VALE3	VALE R DOCE	0
40	VIVO3	VIVO	5,195906093539

Tabela 4.3: Carteira ótima para 10% de retorno

E dessa forma, ele obteria 11,410487555443% de retorno diário, em uma carteira composta de 21 ativos.

Afastando-se mais da realidade, pôde-se observar que o risco aumenta à medida em que exigimos um lucro diário maior e, mesmo otimizando o retorno, ele sempre é menor que o esperado. Observemos esse fato através das simulações a seguir:

RETORNO ESPERADO	RETORNO OBTIDO	VALOR DO RISCO	ITERAÇÕES
0,2	0.17664895823078	0.77002713585159	1840
0,3	0.22846072531923	0.82703763421484	1679
0,4	0.30663429524776	0.85581097448386	1849
0,5	0.37576092675590	0.94828314946326	2809
0,6	0.44411479989623	1.01899379135295	1862
0,7	0.52791290883341	1.12464459366352	2845
0,8	0.58694379263284	1.21902213010777	2705
0,9	0.65567825802388	1.36221499267556	1812
1	0.73831646906100	1.47105591058549	3121

Tabela 4.4: Retorno esperado e encontrado *versus* risco associado

Frente a este cenário, se o investidor estivesse interessado em obter um lucro diário de 50%, a estimativa real de retorno obtido seria de 37,576092675590%, e para isso ele deveria compor sua carteira com 20 ações, dentre os 40 ativos disponíveis, da seguinte maneira:

<i>Nº</i>	Cód.	Ação	Perc. investido
1	AMBV4	AMBEV	13,749822408664
2	BBDC4	BRADESCO	0
3	CMIG3	CEMIG	7,214168454949
4	CSNA3	SID NACIONAL	0
5	DROG3	DROGASIL	4,746708566476
6	EBTP4	EMBRATEL PAR	10,070841642018
7	EMBR3	EMBRAER	0
8	ESTR4	ESTRELA	0,481860999977
9	FHER3	FER HERINGER	0,969157814784
10	GFSA3	GAFISA	0
11	GGBR4	GERDAU	0
12	GOLL4	GOL	0
13	HGTX3	CIA HERING	0,592571572613
14	HOOT4	HOTEIS OTHON	0,504481996501
15	IGTA3	IGUATEMI	10,907320966743
16	ITAU3	ITAUBANCO	0
17	LAME3	LOJAS AMERIC	0
18	LIGT3	LIGHT S/A	9,109287725615
19	LREN3	LOJAS RENNER	0
20	MAGG3	MAGNESITA SA	0
21	MARI3	MARISA	9,399160308900

<i>Nº</i>	<b>Cód.</b>	<b>Ação</b>	<b>Perc. investido</b>
22	MEDI3	MEDIAL SAUDE	0
23	MULT3	MULTIPLAN	5,525483266175
24	NATU3	NATURA	7,178061816226
25	ODPV3	ODONTOPREV	0,446344157235
26	PETR3	PETROBRÁS	0
27	PRGA3	PERDIGAO S/A	0
28	PSSA3	PORTO SEGURO	0
29	SANB3	SANTANDER BR	0.00372227143475
30	SDIA3	SADIA S/A	3,090550732895
31	SLED4	SARAIVA LIVR	0
32	TAMM4	TAM S/A	0
33	TELB3	TELEBRAS	1,744165923325
34	TEND3	TENDA	6,090299229529
35	TMAR3	TELEMAR N L	0
36	TOYB3	TECTOY	2,402389018655
37	TPIS3	TRIUNFO PART	0
38	UBBR3	UNIBANCO	0
39	VALE3	VALE R DOCE	0
40	VIVO3	VIVO	7,186410223834

Tabela 4.5: Carteira ótima para 50% de retorno

Para uma última análise, observemos como seria a composição da carteira se o investidor fixasse como lucro diário mínimo esperado em 100%:

<i>Nº</i>	<b>Cód.</b>	<b>Ação</b>	<b>Perc. investido</b>
1	AMBV4	AMBEV	0,626450367698
2	BBDC4	BRADESCO	0
3	CMIG3	CEMIG	6,447172835902
4	CSNA3	SID NACIONAL	0
5	DROG3	DROGASIL	16,973868292370
6	EBTP4	EMBRATEL PAR	9,944661306103
7	EMBR3	EMBRAER	0
8	ESTR4	ESTRELA	0
9	FHER3	FER HERINGER	0
10	GFSA3	GAFISA	0
11	GGBR4	GERDAU	0

<i>Nº</i>	<b>Cód.</b>	<b>Ação</b>	<b>Perc. investido</b>
12	GOLL4	GOL	0
13	HGTX3	CIA HERING	0
14	HOOT4	HOTEIS OTHON	0
15	IGTA3	IGUATEMI	0,434378351245
16	ITAU3	ITAUBANCO	0
17	LAME3	LOJAS AMERIC	0
18	LIGT3	LIGHT S/A	0,485459344725
19	LREN3	LOJAS RENNER	0
20	MAGG3	MAGNESITA SA	0
21	MARI3	MARISA	19,238780942209
22	MEDI3	MEDIAL SAUDE	0
23	MULT3	MULTIPLAN	4,403595403643
24	NATU3	NATURA	0,324259491777
25	ODPV3	ODONTOPREV	0
26	PETR3	PETROBRÁS	0
27	PRGA3	PERDIGAO S/A	0
28	PSSA3	PORTO SEGURO	0
29	SANB3	SANTANDER BR	0,997321336639
30	SDIA3	SADIA S/A	7,690544158821
31	SLED4	SARAIVA LIVR	0
32	TAMM4	TAM S/A	0
33	TELB3	TELEBRAS	1,632575973194
34	TEND3	TENDA	22,644570701776
35	TMAR3	TELEMAR N L	0
36	TOYB3	TECTOY	2,526174792960
37	TPIS3	TRIUNFO PART	0
38	UBBR3	UNIBANCO	0
39	VALE3	VALE R DOCE	0
40	VIVO3	VIVO	5,581866095036

Tabela 4.6: Carteira ótima para 100% de retorno

Nesse caso, o lucro obtido seria de 73,831646906100% associado a um risco equivalente a 1.47105591058549. É possível perceber que praticamente todo o investimento foi concentrado em apenas 4 ações, ou seja, o montante seria alocado em 16,974% na Drogasil , 9,945% na Embratel , 19,239% na Marisa e 22,645% nas ações da Tenda.

Dessa maneira, teríamos uma carteira pouco diversificada aumentando assim o risco associado a ela.

Pôde-se observar também que, quanto mais exigente for o investidor a cerca do lucro esperado, maior se torna o risco e o que se obtém é uma carteira pouco diversificada. Dessa maneira, quanto mais nos distanciamos da realidade do mercado financeiro, que é afetado por diversos fatores como interesses políticos e diplomáticos de potências econômicas, dentre outros fatores no dia-a-dia, mais distantes estamos do modelo proposto por Markowitz, visto que ele propõe que a minimização do risco considerando um retorno inicial, ocorre quando a carteira é formada com base no conceito de diversificação.

Como visto anteriormente, é possível determinar todas as carteiras ótimas analisando o risco e o retorno, e formar a Fronteira Eficiente, que é descrita como o melhor conjunto formado por todas as carteiras que possuem o menor nível de risco para dado nível de retorno. Nesse caso, ela foi obtida variando o retorno esperado entre 10% a 100%:

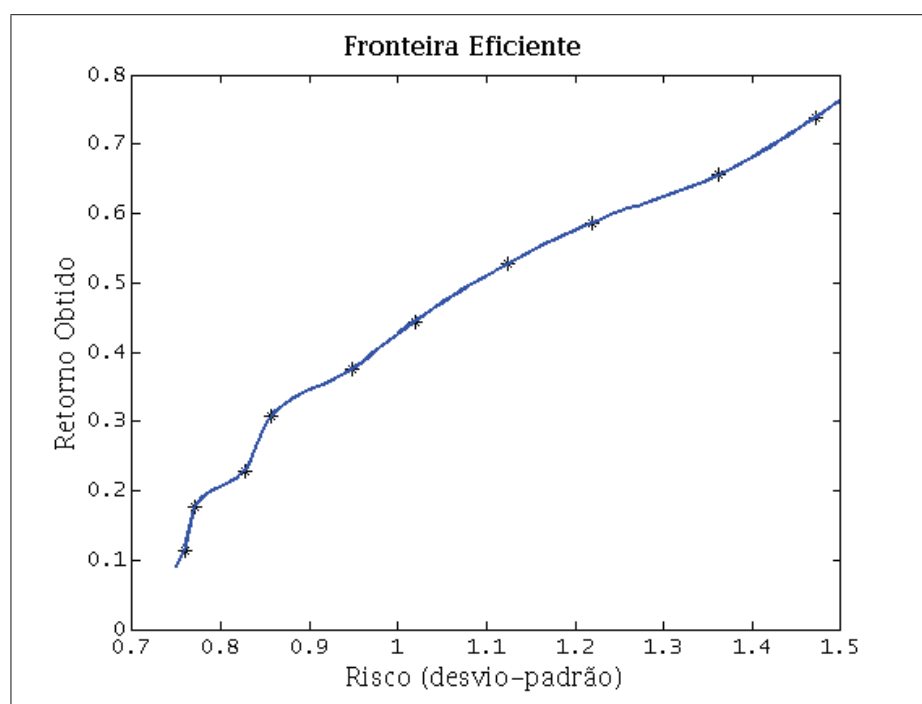


Figura 4.3: Fronteira Eficiente para retorno esperado variando de 10% a 100%



Portanto, através das simulações realizadas e a obtenção da Fronteira Eficiente, pôde-se validar o algoritmo utilizado e a modelagem utilizada.



---

## Considerações finais

---

Neste trabalho foi apresentada uma formulação para obtenção de uma carteira ótima, ou seja, quando fixado um lucro inicial esperado obtivéssemos a maximização deste juntamente com a minimização do risco associado ao investimento.

Para isso, foi utilizada uma série histórica da Bovespa, referente ao ano de 2009, da qual foram selecionadas 40 ações para formarem uma carteira inicial visando a diversificação.

Para encontrarmos a solução numérica do problema proposto, foi utilizado o método Nelder-Mead, que constitui em um método *derivative-free*, ou seja, de minimização sem derivadas, pois as restrições impostas e incorporadas ao modelo, a fim de torná-lo irrestrito, geraram uma função com um certo grau de complexidade.

Conforme visto no capítulo anterior, o método Nelder-Mead obteve a carteira ótima, tornando possível a construção da Fronteira Eficiente validada na literatura. As carteiras ótimas obtidas demonstram explicitamente o papel da diversificação, pois quanto maior foi o valor pré-fixado para um lucro esperado, maior foi o risco associado, gerando assim, uma carteira pouco diversificada. Através dos testes podemos observar que a carteira ótima de menor risco é aquela em que os ativos têm a menor correlação entre si e a carteira de maior risco simulada foi a que concentrou maior parte do montante investido no menor número de ações.



---

## Referências Bibliográficas

---

- [1] BACHELIER, L. *Louis Bachelier's Theory of Speculation - THE ORIGINS OF MODERN FINANCE*, traduzido por DAVIS, M., ETHERIDGE, A.; Princeton University Press, 2006.
- [2] BANCO DO BRASIL S.A. Como administrar a sua carteira de investimentos. Disponível em: <<http://www.bb.com.br/docs/pub/voce/dwn/carteira6.pdf>>. Acesso em: 06 abr. 2010.
- [3] BARTHOLOMEW-BIGGS, M. *Nonlinear Optimization with Financial Applications*; Springer, 2005.
- [4] BIRGIN, E.G., CASTILLO, R. A. e MARTÍNEZ, J. M. *Numerical Comparison of Augmented Lagrangian Algorithms for Nonconvex Problems*; Journal of Computational Optimization and Applications, 2005, v. 31, pp. 31-55.
- [5] BM&FBOVESPA - Bolsa de Valores, Mercadorias e Futuros. Disponível em: <<http://www.bmfbovespa.com.br/shared/iframe.aspx?idioma=pt-br&url=http://www.bmfbovespa.com.br/pt-br/cotacoes-historicas/FormSeriesHistoricas.asp>>. Acesso em: 20 mai. 2010.
- [6] CONN, A.R., SCHEINBERG, K. e VICENTE, L.N. *Introduction to Derivative-free Optimization*; MPS-SIAM, 2009.
- [7] ELTON, E.J., GRUBER, M.J., AGRAWAL, D. E MANN, C. *Factors affecting the valuation of corporate bonds*; New York University, 2002.
- [8] FABOZZI, KOLM, F.J., P.N., PACHAMANOVA, D., FOCARDI, S.M. *Robust Portfolio Optimization and Management*; John Wiley & Sons, 2007.

- 
- [9] LAGARIAS, J.C., REEDS, J.A., WRIGHT, M.H, WRIGHT,P.E. *Convergence properties of the Nelder-Mead simplex method in low dimensions*; SIAM J. Optim.9, 1998, pp. 112-147.
- [10] MACASTROPA, F.C. *A aplicabilidade da moderna teoria de portfolios em títulos de renda fixa internacionais*; Dissertação de mestrado, Universidade de São Paulo, 2006.
- [11] MARKOWITZ, H.M. *Portfolio selection*; Journal of finance, 1952, v.7, pp.77-91.
- [12] MCKINNON, K.I.M. *Convergence of the Nelder-Mead simplex method to a nonstationary point*; SIAM J. Optim., 9, 1998, pp. 148-158.
- [13] MEYER, P.L. *Probabilidade: aplicações à estatística*; LTC, 2009.
- [14] MONTGOMERY, D.C., RUNGER, G.C. *Estatística Aplicada e Probabilidade para Engenheiros*; LTC, 2009.
- [15] NELDER, J.A., MEAD, R. *A simplex method for function minimization*; Comput. J., 7, 1965, pp. 308-313.
- [16] REILLY, F.K., BROWN, K.C. *Investment Analysis Portfolio Management*; South-Western College Pub, 2002.
- [17] SAMUELSON, P.A. *Foundations of Economic Analysis*; Cambridge, Massachusetts e Londres, Harvard University Press, 1975.
- [18] WEATHERFORD, J. *A História Do Dinheiro*; Campus, 2005.
- [19] WOODS, D.J. *An Interactive Approach for Solving Multi-objective Optimization Problems*; PhD thesis, Department of Mathematical Sciences, Rice University, Houston, TX, 1985.

# TAXA MÉDIA ESPERADA DE RETORNO E MATRIZ DE COVARIÂNCIA

---

Neste apêndice encontramos  $\mu$ , que representa a taxa média esperada de retorno e a matriz de covariância referente às 40 ações.

$$\begin{aligned}\mu = & (0,15, 0,13, 0,12, 0,38, 0,30, 0,20, 0,02, 0,24, 0,19, 0,49, 0,01, -0,38, 0,01, 0,25, 0,30, \dots \\ & \dots 0,05, 0,29, 0,07, 0,18, -0,21, 0,33, -0,28, 0,34, 0,18, 0,11, 0,45, 0,07, -0,05, 33,97, 0,25, \dots \\ & \dots 0,10, -0,16, 0,29, 0,92, 0,44, 0,02, 0,55, 0,01, 0,37, 0,17)^T.\end{aligned}$$

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9	C10
Linha 1	3,30	2,30	0,54	2,09	0,81	-1,24	1,89	0,70	0,74	2,73
Linha 2	2,30	5,29	1,19	5,06	1,21	-0,31	3,44	1,33	3,19	5,57
Linha 3	0,54	1,19	1,93	0,76	0,32	0,06	0,76	-0,28	-0,47	1,75
Linha 4	2,09	5,06	0,76	11,34	1,78	-0,14	5,85	2,79	5,13	8,94
Linha 5	0,81	1,21	0,32	1,78	7,77	1,57	1,80	0,51	2,90	1,58
Linha 6	-1,24	-0,31	0,06	-0,14	1,57	10,99	1,74	0,20	0,12	0,89
Linha 7	1,89	3,44	0,76	5,85	1,80	1,74	11,25	0,34	0,26	6,19
Linha 8	0,70	1,33	-0,28	2,79	0,51	0,20	0,34	20,76	2,56	0,49
Linha 9	0,74	3,19	-0,47	5,13	2,90	0,12	0,26	2,56	27,13	7,66
Linha 10	2,73	5,57	1,75	8,94	1,58	0,89	6,19	0,49	7,66	18,04
Linha 11	2,70	5,20	0,86	9,46	2,84	-0,53	6,83	2,92	6,12	8,16
Linha 12	-0,25	2,00	-0,41	4,83	0,39	-0,35	1,87	0,75	5,94	2,91
Linha 13	1,57	2,16	1,11	3,16	2,02	-1,19	3,06	1,17	-0,14	3,91
Linha 14	0,45	3,71	1,14	8,03	2,30	-4,15	4,91	3,50	-1,24	1,85
Linha 15	0,15	1,01	0,30	1,41	0,53	0,40	0,85	0,14	0,54	1,36
Linha 16	2,06	3,74	0,86	4,82	1,11	-1,40	2,38	0,91	1,80	5,75
Linha 17	1,12	3,05	1,14	3,91	1,17	0,35	3,55	-0,29	1,90	3,51
Linha 18	0,50	1,63	0,35	1,15	0,89	-1,12	0,47	0,13	0,83	0,29
Linha 19	1,89	3,75	1,06	4,81	2,80	0,46	3,70	2,05	2,97	5,96
Linha 20	1,51	3,03	0,60	4,51	0,64	-0,28	3,58	2,45	0,92	3,40
Linha 21	0,80	1,52	-0,12	2,73	0,42	0,16	1,10	-0,01	2,39	2,65
Linha 22	-0,32	0,84	0,73	1,26	0,69	1,40	1,12	-4,26	2,24	3,04
Linha 23	1,07	2,00	0,64	3,62	0,69	-0,38	0,68	0,63	4,17	3,37
Linha 24	0,43	1,40	0,65	1,08	-0,21	-0,26	1,42	-0,82	-2,85	1,50
Linha 25	0,19	1,78	-0,40	2,79	1,55	0,27	1,76	0,14	4,54	3,17
Linha 26	2,43	4,55	1,28	7,29	1,09	-1,30	3,56	2,40	2,03	6,54
Linha 27	1,34	2,75	0,78	2,59	0,23	-1,45	2,69	0,61	0,43	3,96
Linha 28	1,29	2,00	0,65	3,53	1,00	-0,38	2,72	0,57	2,25	3,74
Linha 29	10,00	2,35	4,03	-8,85	-35,11	-34,12	7,23	59,90	4,53	-32,42
Linha 30	-1,00	1,27	1,13	0,63	-4,08	-3,83	-0,35	1,53	3,64	3,29
Linha 31	1,23	1,76	0,71	2,83	1,60	1,42	3,60	0,71	0,12	3,07
Linha 32	0,02	2,52	-0,29	3,57	0,93	-0,04	3,27	1,43	5,17	2,57
Linha 33	1,00	1,12	-0,81	0,28	4,05	4,06	2,67	-2,59	6,91	5,91
Linha 34	1,60	3,27	1,38	5,23	0,32	-0,02	3,17	2,15	3,31	8,67
Linha 35	7,85	8,13	1,92	7,70	2,90	-0,45	5,26	7,74	7,24	12,47
Linha 36	-0,36	2,79	1,98	2,27	2,32	-0,28	1,39	6,34	-9,80	1,02
Linha 37	1,04	3,47	0,32	3,96	-0,51	2,45	3,61	-1,62	14,27	7,39
Linha 38	1,94	4,18	0,81	4,84	1,03	-1,86	2,69	-0,53	2,34	5,77
Linha 39	2,92	5,80	0,75	10,98	2,52	-1,92	6,53	2,92	4,35	8,39
Linha 40	-0,17	1,30	0,49	0,90	-1,12	-1,63	-0,02	-1,02	0,20	0,67

Tabela A.1: Colunas 1 a 10 da matriz de covariância.



	C11	C12	C13	C14	C15	C16	C17	C18	C19	C20
Linha 1	2,70	-0,25	1,57	0,45	0,15	2,06	1,12	0,50	1,89	1,51
Linha 2	5,20	2,00	2,16	3,71	1,01	3,74	3,05	1,63	3,75	3,03
Linha 3	0,86	-0,41	1,11	1,14	0,30	0,86	1,14	0,35	1,06	0,60
Linha 4	9,46	4,83	3,16	8,03	1,41	4,82	3,91	1,15	4,81	4,51
Linha 5	2,84	0,39	2,02	2,30	0,53	1,11	1,17	0,89	2,80	0,64
Linha 6	-0,53	-0,35	-1,19	-4,15	0,40	-1,40	0,35	-1,12	0,46	-0,28
Linha 7	6,83	1,87	3,06	4,91	0,85	2,38	3,55	0,47	3,70	3,58
Linha 8	2,92	0,75	1,17	3,50	0,14	0,91	-0,29	0,13	2,05	2,45
Linha 9	6,12	5,94	-0,14	-1,24	0,54	1,80	1,90	0,83	2,97	0,92
Linha 10	8,16	2,91	3,91	1,85	1,36	5,75	3,51	0,29	5,96	3,40
Linha 11	12,18	4,91	3,84	8,08	1,89	4,24	3,03	0,89	5,06	5,32
Linha 12	4,91	9,13	1,24	3,48	1,34	1,11	1,32	-0,21	3,39	2,48
Linha 13	3,84	1,24	7,82	2,98	0,60	2,57	2,04	0,38	3,27	1,17
Linha 14	8,08	3,48	2,98	40,71	-0,71	4,26	1,29	4,46	0,16	4,44
Linha 15	1,89	1,34	0,60	-0,71	4,44	0,71	1,96	-0,17	2,07	1,35
Linha 16	4,24	1,11	2,57	4,26	0,71	5,65	2,11	1,40	2,98	2,67
Linha 17	3,03	1,32	2,04	1,29	1,96	2,11	6,73	0,85	5,11	0,62
Linha 18	0,89	-0,21	0,38	4,46	-0,17	1,40	0,85	3,95	1,29	2,16
Linha 19	5,06	3,39	3,27	0,16	2,07	2,98	5,11	1,29	10,11	2,25
Linha 20	5,32	2,48	1,17	4,44	1,35	2,67	0,62	2,16	2,25	9,73
Linha 21	2,73	1,11	1,29	1,10	0,28	1,49	1,76	0,67	2,80	1,96
Linha 22	1,49	2,47	1,35	-1,32	1,05	0,76	1,87	-0,29	2,29	0,48
Linha 23	3,39	2,13	0,86	-0,76	1,25	2,65	2,24	0,42	2,04	1,30
Linha 24	1,36	-0,86	1,79	2,30	-0,09	0,98	1,33	0,22	0,94	0,93
Linha 25	2,69	1,78	0,02	2,93	1,59	1,49	2,28	0,65	2,78	1,98
Linha 26	6,93	1,89	3,36	5,81	2,06	4,95	3,64	1,24	3,99	3,77
Linha 27	2,74	0,31	1,00	1,09	1,59	2,66	3,18	1,67	3,80	1,81
Linha 28	3,73	0,28	1,18	0,93	0,81	1,86	1,70	1,24	1,10	1,99
Linha 29	-28,39	37,42	24,79	51,78	-3,19	-50,09	53,90	-5,33	37,83	-49,57
Linha 30	-0,25	0,20	-0,30	4,34	2,13	2,33	3,06	1,65	-0,84	0,46
Linha 31	3,33	0,53	1,39	2,59	1,36	0,85	1,61	-0,67	2,21	0,25
Linha 32	4,53	5,11	0,76	3,93	1,83	1,78	1,58	0,84	3,39	4,80
Linha 33	2,48	1,27	0,29	-4,09	-0,99	0,44	1,26	0,18	2,71	-1,91
Linha 34	6,16	0,97	2,11	3,64	2,80	3,71	3,10	0,44	3,85	2,77
Linha 35	1,47	-2,40	1,66	-7,95	2,90	4,49	10,34	4,18	10,40	2,44
Linha 36	2,71	2,57	1,63	4,11	-2,08	3,17	-2,28	-0,89	2,23	6,91
Linha 37	5,74	6,37	-0,49	1,58	0,97	2,44	2,67	-0,42	3,70	0,31
Linha 38	3,80	1,36	2,15	4,20	0,83	4,99	2,30	1,78	2,12	3,03
Linha 39	10,78	2,41	4,61	9,47	1,83	6,35	4,24	2,81	3,56	5,56
Linha 40	1,20	0,81	1,29	0,24	0,81	0,21	1,56	0,81	2,48	1,43

Tabela A.2: Colunas 11 a 20 da matriz de covariância.

	C21	C22	C23	C24	C25	C26	C27	C28	C29	C30
Linha 1	0,80	-0,32	1,07	0,43	0,19	2,43	1,34	1,29	10,00	-1,00
Linha 2	1,52	0,84	2,00	1,40	1,78	4,55	2,75	2,00	2,35	1,27
Linha 3	-0,12	0,73	0,64	0,65	-0,40	1,28	0,78	0,65	4,03	1,13
Linha 4	2,73	1,26	3,62	1,08	2,79	7,29	2,59	3,53	-8,85	0,63
Linha 5	0,42	0,69	0,69	-0,21	1,55	1,09	0,23	1,00	-35,11	-4,08
Linha 6	0,16	1,40	-0,38	-0,26	0,27	-1,30	-1,45	-0,38	-34,12	-3,83
Linha 7	1,10	1,12	0,68	1,42	1,76	3,56	2,69	2,72	7,23	-0,35
Linha 8	-0,01	-4,26	0,63	-0,82	0,14	2,40	0,61	0,57	59,90	1,53
Linha 9	2,39	2,24	4,17	-2,85	4,54	2,03	0,43	2,25	4,53	3,64
Linha 10	2,65	3,04	3,37	1,50	3,17	6,54	3,96	3,74	-32,42	3,29
Linha 11	2,73	1,49	3,39	1,36	2,69	6,93	2,74	3,73	-28,39	-0,25
Linha 12	1,11	2,47	2,13	-0,86	1,78	1,89	0,31	0,28	37,42	0,20
Linha 13	1,29	1,35	0,86	1,79	0,02	3,36	1,00	1,18	24,79	-0,30
Linha 14	1,10	-1,32	-0,76	2,30	2,93	5,81	1,09	0,93	51,78	4,34
Linha 15	0,28	1,05	1,25	-0,09	1,59	2,06	1,59	0,81	-3,19	2,13
Linha 16	1,49	0,76	2,65	0,98	1,49	4,95	2,66	1,86	-50,09	2,33
Linha 17	1,76	1,87	2,24	1,33	2,28	3,64	3,18	1,70	53,90	3,06
Linha 18	0,67	-0,29	0,42	0,22	0,65	1,24	1,67	1,24	-5,33	1,65
Linha 19	2,80	2,29	2,04	0,94	2,78	3,99	3,80	1,10	37,83	-0,84
Linha 20	1,96	0,48	1,30	0,93	1,98	3,77	1,81	1,99	-49,57	0,46
Linha 21	4,42	1,25	1,13	0,87	1,17	2,69	1,62	0,98	-7,04	-1,06
Linha 22	1,25	6,06	1,12	0,21	2,12	0,74	1,30	0,54	-46,09	0,70
Linha 23	1,13	1,12	7,28	0,55	1,11	3,60	2,37	1,57	-39,23	1,43
Linha 24	0,87	0,21	0,55	4,08	-0,09	2,49	1,64	-0,17	-6,49	-0,17
Linha 25	1,17	2,12	1,11	-0,09	7,04	1,24	2,21	1,14	-35,42	0,41
Linha 26	2,69	0,74	3,60	2,49	1,24	8,78	3,42	2,37	-60,47	3,60
Linha 27	1,62	1,30	2,37	1,64	2,21	3,42	6,78	1,79	-34,96	3,67
Linha 28	0,98	0,54	1,57	-0,17	1,14	2,37	1,79	3,71	-26,21	0,87
Linha 29	-7,04	-46,09	-39,23	-6,49	-35,42	-60,47	-34,96	-26,21	13147,44	-77,00
Linha 30	-1,06	0,70	1,43	-0,17	0,41	3,60	3,67	0,87	-77,00	24,42
Linha 31	0,76	0,71	0,21	0,78	0,98	2,37	0,73	0,90	12,31	-2,11
Linha 32	1,89	2,10	1,83	0,09	3,51	2,60	2,24	0,27	-2,14	1,33
Linha 33	-0,40	0,80	-1,53	-0,08	1,18	-2,44	1,34	1,18	-56,25	0,23
Linha 34	1,54	2,23	3,38	2,58	3,02	5,94	4,10	2,56	-84,38	4,13
Linha 35	-1,88	0,61	-0,12	3,60	1,73	2,81	0,12	-0,72	-183,81	-0,46
Linha 36	7,61	-1,87	5,01	5,56	1,76	9,49	8,18	5,02	183,37	-0,25
Linha 37	2,82	3,33	5,70	-0,90	5,57	1,15	2,94	2,13	70,11	1,05
Linha 38	1,45	0,84	2,61	1,46	2,06	5,22	2,91	2,44	-65,23	3,06
Linha 39	3,62	0,14	5,42	2,34	2,71	9,91	4,88	4,98	-111,35	2,99
Linha 40	1,21	-0,15	0,82	1,03	0,07	2,34	2,27	-0,25	12,91	1,18

Tabela A.3: Colunas 21 a 30 da matriz de covariância.

	C31	C32	C33	C34	C35	C36	C37	C38	C39	C40
Linha 1	1,23	0,02	1,00	1,60	7,85	-0,36	1,04	1,94	2,92	-0,17
Linha 2	1,76	2,52	1,12	3,27	8,13	2,79	3,47	4,18	5,80	1,30
Linha 3	0,71	-0,29	-0,81	1,38	1,92	1,98	0,32	0,81	0,75	0,49
Linha 4	2,83	3,57	0,28	5,23	7,70	2,27	3,96	4,84	10,98	0,90
Linha 5	1,60	0,93	4,05	0,32	2,90	2,32	-0,51	1,03	2,52	-1,12
Linha 6	1,42	-0,04	4,06	-0,02	-0,45	-0,28	2,45	-1,86	-1,92	-1,63
Linha 7	3,60	3,27	2,67	3,17	5,26	1,39	3,61	2,69	6,53	-0,02
Linha 8	0,71	1,43	-2,59	2,15	7,74	6,34	-1,62	-0,53	2,92	-1,02
Linha 9	0,12	5,17	6,91	3,31	7,24	-9,80	14,27	2,34	4,35	0,20
Linha 10	3,07	2,57	5,91	8,67	12,47	1,02	7,39	5,77	8,39	0,67
Linha 11	3,33	4,53	2,48	6,16	1,47	2,71	5,74	3,80	10,78	1,20
Linha 12	0,53	5,11	1,27	0,97	-2,40	2,57	6,37	1,36	2,41	0,81
Linha 13	1,39	0,76	0,29	2,11	1,66	1,63	-0,49	2,15	4,61	1,29
Linha 14	2,59	3,93	-4,09	3,64	-7,95	4,11	1,58	4,20	9,47	0,24
Linha 15	1,36	1,83	-0,99	2,80	2,90	-2,08	0,97	0,83	1,83	0,81
Linha 16	0,85	1,78	0,44	3,71	4,49	3,17	2,44	4,99	6,35	0,21
Linha 17	1,61	1,58	1,26	3,10	10,34	-2,28	2,67	2,30	4,24	1,56
Linha 18	-0,67	0,84	0,18	0,44	4,18	-0,89	-0,42	1,787	2,81	0,81
Linha 19	2,21	3,39	2,71	3,85	10,40	2,23	3,70	2,12	3,56	2,48
Linha 20	0,25	4,80	-1,91	2,77	2,44	6,91	0,31	3,03	5,56	1,43
Linha 21	0,76	1,89	-0,40	1,54	7,61	-1,88	2,82	1,45	3,62	1,21
Linha 22	0,71	2,10	0,80	2,23	-1,87	0,61	3,33	0,84	0,14	-0,15
Linha 23	0,21	1,83	-1,53	3,38	5,01	-0,12	5,70	2,61	5,42	0,82
Linha 24	0,78	0,09	-0,08	2,58	5,56	3,60	-0,90	1,46	2,34	1,03
Linha 25	0,98	3,51	1,18	3,02	1,76	1,73	5,57	2,06	2,71	0,07
Linha 26	2,37	2,60	-2,44	5,94	9,49	2,81	1,15	5,22	9,91	2,34
Linha 27	0,73	2,24	1,34	4,10	8,18	0,12	2,94	2,91	4,88	2,27
Linha 28	0,90	0,27	1,18	2,56	5,02	-0,72	2,13	2,44	4,98	-0,25
Linha 29	12,31	-2,14	-56,25	-84,38	183,37	-183,81	70,11	-65,23	-111,35	12,91
Linha 30	-2,11	1,33	0,23	4,13	-0,25	-0,46	1,05	3,06	2,99	1,18
Linha 31	5,89	1,27	0,96	3,53	1,51	-0,64	-0,17	0,65	2,12	0,42
Linha 32	1,27	8,25	-2,07	1,85	-1,45	1,46	4,09	1,84	3,31	1,88
Linha 33	0,96	-2,07	54,82	2,80	5,32	-1,82	5,40	0,11	1,12	-3,32
Linha 34	3,53	1,85	2,80	11,64	3,48	1,64	1,41	3,41	7,56	0,53
Linha 35	1,51	-1,45	5,32	3,48	148,34	-5,52	5,67	7,60	11,39	0,57
Linha 36	-0,64	1,46	-1,82	1,64	-5,52	48,32	-8,53	3,01	0,93	-1,92
Linha 37	-0,17	4,09	5,40	1,41	5,67	-8,53	38,07	3,32	2,24	-0,65
Linha 38	0,65	1,84	0,11	3,41	7,60	3,01	3,32	6,59	7,03	0,38
Linha 39	2,12	3,31	1,12	7,56	11,39	0,93	2,24	7,03	18,33	1,29
Linha 40	0,42	1,88	-3,32	0,53	0,57	-1,92	-0,65	0,38	1,29	9,53

Tabela A.4: Colunas 31 a 40 da matriz de covariância.



\_\_\_\_\_

Neste apêndice, encontra-se o algoritmo para o método de Nelder-Mead utilizado.

[illegible]

[illegible]

$$S = S';$$

```
while dist >= tol
    aux = 0;
    %ordenação
    for i=1:(n+1)
        v = S(:,i);
        fv(i) = retorno1(v);
    end
    [f,ind]=sort(fv);
    % centróide
    xm = (sum(S,2)-S(:,ind(n+1)))/n;
    fxm = retorno1(xm);
    % reflexão
    xr = xm + (xm - S(:,ind(n+1)));
    fxr = retorno1 (xr);
    x1 = S(:,ind(1));
    fx1 = retorno1 (x1);
    xn = S(:,ind(n));
    fxn = retorno1 (xn);
    if (fx1 <= fxr) & (fxr < fxn)
```

---

```
S(:,ind(n+1)) = xr;
aux = 1;
end
%expansão
if aux == 0
if (fxr < fx1)
xe = xm + 2*(xm - S(:,ind(n+1)));
fxe = retorno1 (xe);
if (fxe < fxr)
S(:,ind(n+1)) = xe;
aux = 1;
else
S(:,ind(n+1)) = xr;
aux = 1;
end
end
end
%contração
if aux == 0
if (fxr >= fxn)
%contração interna
if (fxn <= fxr) & (fxr < fv(ind(n+1)))
xc = xm + 0.5*(xm - S(:,ind(n+1)));
fxc = retorno1 (xc);
if (fxc <= fxr)
S(:,ind(n+1)) = xc;
aux = 1;
end
end
%contração externa
if (fxr >= fv(ind(n+1)))
```



---

```

xc = xm - 0.5*(xm - S(:,ind(n+1)));
fxc = retorno1 (xc);
if (fxc < fv(ind(n+1)))
S(:,ind(n+1)) = xc;
aux = 1;
end
end
end
end
%redução
if aux == 0
for i=1:(n+1)
A(:,i) = 0.5*(S(:,i)+S(:,ind(1)));
end
S = A;
end
%Nova imagem
for i=1:(n+1)
v = S(:,i);
fv(i) = retorno1 (v);
end
%critério de parada
soma = 0;
for i=1:(n+1)
soma = soma + (fv(i)-fxm) ^ 2;
end
soma = soma/(n+1);
dist = sqrt(soma);
%contador
k = k+1;
end

```



## ALGORITMO - FUNÇÃO OBJETIVO DO PROBLEMA REFORMULADO

---

Por fim, a subrotina com a função que contém as restrições incorporadas na função é apresentada abaixo.

```
function f = retorno1(x)
% função que recebe x e devolve
% a sua imagem na letra f
% Nome da função: retorno1(x)
global flag
%Coletando tamanho do x
n=length(x);
% vetor que possui o retorno médio
% de cada ação, extraído da tabela da bovespa.
% substituindo os W's.
mu = [0.15; 0.13; 0.12; 0.38; 0.30; 0.20; 0.02; 0.24; 0.19; 0.49; ...
      0.01; -0.38; 0.01; 0.25; 0.30; 0.05; 0.29; 0.07; 0.18; -0.21; ...
      0.33; -0.28; 0.34; 0.18; 0.11; 0.45; 0.07; -0.05; 33.97; 0.25; ...
      0.10;   -0.16; 0.29; 0.92; 0.44; 0.02; 0.55; 0.01; 0.37; 0.17];
% Nivel de retorno esperado:
```

---

```

ret = 1.0;
%Podemos utilizar outros valores para retorno
%Parâmetros de penalização
rho1 = 10;
rho2 = 10;
rho3 = 1000;
%Matriz de Covariância
%Ela será obtida por meio da tabela da Bovespa
%correlacionando as séries históricas das ações
%selecionadas para estudo.
%Calculada a parte no Excel. Substituindo os W's:
CovR = [3.30 2.30 0.54 2.09 0.81 -1.24 1.89 0.70 0.74 2.73 2.70 -0.25 1.57
0.45 0.15 2.06 1.12 0.50 1.89 1.51 0.80 -0.32 1.07 0.43 0.19 2.43 1.34 1.29
10.00 -1.00 1.23 0.02 1.00 1.60 7.85 -0.36 1.04 1.94 2.92 -0.17; ...
2.30 5.29 1.19 5.06 1.21 -0.31 3.44 1.33 3.19 5.57 5.20 2.00 2.16 3.71
1.01 3.74 3.05 1.63 3.75 3.03 1.52 0.84 2.00 1.40 1.78 4.55 2.75 2.00 2.35
1.27 1.76 2.52 1.12 3.27 8.13 2.79 3.47 4.18 5.80 1.30; ...
0.54 1.19 1.93 0.76 0.32 0.06 0.76 -0.28 -0.47 1.75 0.86 -0.41 1.11 1.14
0.30 0.86 1.14 0.35 1.06 0.60 -0.12 0.73 0.64 0.65 -0.40 1.28 0.78 0.65 4.03
1.13 0.71 -0.29 -0.81 1.38 1.92 1.98 0.32 0.81 0.75 0.49; ...
2.09 5.06 0.76 11.34 1.78 -0.14 5.85 2.79 5.13 8.94 9.46 4.83 3.16 8.03
1.41 4.82 3.91 1.15 4.81 4.51 2.73 1.26 3.62 1.08 2.79 7.29 2.59 3.53 -8.85
0.63 2.83 3.57 0.28 5.23 7.70 2.27 3.96 4.84 10.98 0.90; ...
0.81 1.21 0.32 1.78 7.77 1.57 1.80 0.51 2.90 1.58 2.84 0.39 2.02 2.30
0.53 1.11 1.17 0.89 2.80 0.64 0.42 0.69 0.69 -0.21 1.55 1.09 0.23 1.00 -35.11
-4.08 1.60 0.93 4.05 0.32 2.90 2.32 -0.51 1.03 2.52 -1.12; ...
-1.24 -0.31 0.06 -0.14 1.57 10.99 1.74 0.20 0.12 0.89 -0.53 -0.35 -1.19
-4.15 0.40 -1.40 0.35 -1.12 0.46 -0.28 0.16 1.40 -0.38 -0.26 0.27 -1.30 -1.45
-0.38 -34.12 -3.83 1.42 -0.04 4.06 -0.02 -0.45 -0.28 2.45 -1.86 -1.92 -1.63; ...

```

---

1.89 3.44 0.76 5.85 1.80 1.74 11.25 0.34 0.26 6.19 6.83 1.87 3.06 4.91  
0.85 2.38 3.55 0.47 3.70 3.58 1.10 1.12 0.68 1.42 1.76 3.56 2.69 2.72 7.23  
-0.35 3.60 3.27 2.67 3.17 5.26 1.39 3.61 2.69 6.53 -0.02; ...

0.70 1.33 -0.28 2.79 0.51 0.20 0.34 20.76 2.56 0.49 2.92 0.75 1.17 3.50  
0.14 0.91 -0.29 0.13 2.05 2.45 -0.01 -4.26 0.63 -0.82 0.14 2.40 0.61 0.57  
59.90 1.53 0.71 1.43 -2.59 2.15 7.74 6.34 -1.62 -0.53 2.92 -1.02; ...

0.74 3.19 -0.47 5.13 2.90 0.12 0.26 2.56 27.13 7.66 6.12 5.94 -0.14 -1.24  
0.54 1.80 1.90 0.83 2.97 0.92 2.39 2.24 4.17 -2.85 4.54 2.03 0.43 2.25 4.53  
3.64 0.12 5.17 6.91 3.31 7.24 -9.80 14.27 2.34 4.35 0.20; ...

2.73 5.57 1.75 8.94 1.58 0.89 6.19 0.49 7.66 18.04 8.16 2.91 3.91 1.85  
1.36 5.75 3.51 0.29 5.96 3.40 2.65 3.04 3.37 1.50 3.17 6.54 3.96 3.74 -32.42  
3.29 3.07 2.57 5.91 8.67 12.47 1.02 7.39 5.77 8.39 0.67; ...

2.70 5.20 0.86 9.46 2.84 -0.53 6.83 2.92 6.12 8.16 12.18 4.91 3.84 8.08  
1.89 4.24 3.03 0.89 5.06 5.32 2.73 1.49 3.39 1.36 2.69 6.93 2.74 3.73 -28.39  
-0.25 3.33 4.53 2.48 6.16 1.47 2.71 5.74 3.80 10.78 1.20; ...

-0.25 2.00 -0.41 4.83 0.39 -0.35 1.87 0.75 5.94 2.91 4.91 9.13 1.24 3.48  
1.34 1.11 1.32 -0.21 3.39 2.48 1.11 2.47 2.13 -0.86 1.78 1.89 0.31 0.28 37.42  
0.20 0.53 5.11 1.27 0.97 -2.40 2.57 6.37 1.36 2.41 0.81; ...

1.57 2.16 1.11 3.16 2.02 -1.19 3.06 1.17 -0.14 3.91 3.84 1.24 7.82 2.98  
0.60 2.57 2.04 0.38 3.27 1.17 1.29 1.35 0.86 1.79 0.02 3.36 1.00 1.18 24.79  
-0.30 1.39 0.76 0.29 2.11 1.66 1.63 -0.49 2.15 4.61 1.29; ...

0.45 3.71 1.14 8.03 2.30 -4.15 4.91 3.50 -1.24 1.85 8.08 3.48 2.98 40.71  
-0.71 4.26 1.29 4.46 0.16 4.44 1.10 -1.32 -0.76 2.30 2.93 5.81 1.09 0.93  
51.78 4.34 2.59 3.93 -4.09 3.64 -7.95 4.11 1.58 4.20 9.47 0.24; ...

0.15 1.01 0.30 1.41 0.53 0.40 0.85 0.14 0.54 1.36 1.89 1.34 0.60 -0.71  
4.44 0.71 1.96 -0.17 2.07 1.35 0.28 1.05 1.25 -0.09 1.59 2.06 1.59 0.81 -3.19  
2.13 1.36 1.83 -0.99 2.80 2.90 -2.08 0.97 0.83 1.83 0.81; ...

2.06 3.74 0.86 4.82 1.11 -1.40 2.38 0.91 1.80 5.75 4.24 1.11 2.57 4.26  
0.71 5.65 2.11 1.40 2.98 2.67 1.49 0.76 2.65 0.98 1.49 4.95 2.66 1.86 -50.09  
2.33 0.85 1.78 0.44 3.71 4.49 3.17 2.44 4.99 6.35 0.21; ...

---

1.12 3.05 1.14 3.91 1.17 0.35 3.55 -0.29 1.90 3.51 3.03 1.32 2.04 1.29  
1.96 2.11 6.73 0.85 5.11 0.62 1.76 1.87 2.24 1.33 2.28 3.64 3.18 1.70 53.90  
3.06 1.61 1.58 1.26 3.10 10.34 -2.28 2.67 2.30 4.24 1.56; ...

0.50 1.63 0.35 1.15 0.89 -1.12 0.47 0.13 0.83 0.29 0.89 -0.21 0.38 4.46  
-0.17 1.40 0.85 3.95 1.29 2.16 0.67 -0.29 0.42 0.22 0.65 1.24 1.67 1.24 -5.33  
1.65 -0.67 0.84 0.18 0.44 4.18 -0.89 -0.42 1.78 2.81 0.81; ...

1.89 3.75 1.06 4.81 2.80 0.46 3.70 2.05 2.97 5.96 5.06 3.39 3.27 0.16  
2.07 2.98 5.11 1.29 10.11 2.25 2.80 2.29 2.04 0.94 2.78 3.99 3.80 1.10 37.83  
-0.84 2.21 3.39 2.71 3.85 10.40 2.23 3.70 2.12 3.56 2.48; ...

1.51 3.03 0.60 4.51 0.64 -0.28 3.58 2.45 0.92 3.40 5.32 2.48 1.17 4.44  
1.35 2.67 0.62 2.16 2.25 9.73 1.96 0.48 1.30 0.93 1.98 3.77 1.81 1.99 -49.57  
0.46 0.25 4.80 -1.91 2.77 2.44 6.91 0.31 3.03 5.56 1.43; ...

0.80 1.52 -0.12 2.73 0.42 0.16 1.10 -0.01 2.39 2.65 2.73 1.11 1.29 1.10  
0.28 1.49 1.76 0.67 2.80 1.96 4.42 1.25 1.13 0.87 1.17 2.69 1.62 0.98 -7.04  
-1.06 0.76 1.89 -0.40 1.54 7.61 -1.88 2.82 1.45 3.62 1.21; ...

-0.32 0.84 0.73 1.26 0.69 1.40 1.12 -4.26 2.24 3.04 1.49 2.47 1.35 -1.32  
1.05 0.76 1.87 -0.29 2.29 0.48 1.25 6.06 1.12 0.21 2.12 0.74 1.30 0.54 -46.09  
0.70 0.71 2.10 0.80 2.23 -1.87 0.61 3.33 0.84 0.14 -0.15; ...

1.07 2.00 0.64 3.62 0.69 -0.38 0.68 0.63 4.17 3.37 3.39 2.13 0.86 -0.76  
1.25 2.65 2.24 0.42 2.04 1.30 1.13 1.12 7.28 0.55 1.11 3.60 2.37 1.57 -39.23  
1.43 0.21 1.83 -1.53 3.38 5.01 -0.12 5.70 2.61 5.42 0.82; ...

0.43 1.40 0.65 1.08 -0.21 -0.26 1.42 -0.82 -2.85 1.50 1.36 -0.86 1.79  
2.30 -0.09 0.98 1.33 0.22 0.94 0.93 0.87 0.21 0.55 4.08 -0.09 2.49 1.64 -0.17  
-6.49 -0.17 0.78 0.09 -0.08 2.58 5.56 3.60 -0.90 1.46 2.34 1.03; ...

0.19 1.78 -0.40 2.79 1.55 0.27 1.76 0.14 4.54 3.17 2.69 1.78 0.02 2.93  
1.59 1.49 2.28 0.65 2.78 1.98 1.17 2.12 1.11 -0.09 7.04 1.24 2.21 1.14 -35.42  
0.41 0.98 3.51 1.18 3.02 1.76 1.73 5.57 2.06 2.71 0.07; ...

2.43 4.55 1.28 7.29 1.09 -1.30 3.56 2.40 2.03 6.54 6.93 1.89 3.36 5.81  
2.06 4.95 3.64 1.24 3.99 3.77 2.69 0.74 3.60 2.49 1.24 8.78 3.42 2.37 -60.47  
3.60 2.37 2.60 -2.44 5.94 9.49 2.81 1.15 5.22 9.91 2.34; ...

---

1.34 2.75 0.78 2.59 0.23 -1.45 2.69 0.61 0.43 3.96 2.74 0.31 1.00 1.09  
1.59 2.66 3.18 1.67 3.80 1.81 1.62 1.30 2.37 1.64 2.21 3.42 6.78 1.79 -34.96  
3.67 0.73 2.24 1.34 4.10 8.18 0.12 2.94 2.91 4.88 2.27; ...

1.29 2.00 0.65 3.53 1.00 -0.38 2.72 0.57 2.25 3.74 3.73 0.28 1.18 0.93  
0.81 1.86 1.70 1.24 1.10 1.99 0.98 0.54 1.57 -0.17 1.14 2.37 1.79 3.71 -26.21  
0.87 0.90 0.27 1.18 2.56 5.02 -0.72 2.13 2.44 4.98 -0.25; ...

10.00 2.35 4.03 -8.85 -35.11 -34.12 7.23 59.90 4.53 -32.42 -28.39 37.42  
24.79 51.78 -3.19 -50.09 53.90 -5.33 37.83 -49.57 -7.04 -46.09 -39.23 -6.49  
-35.42 -60.47 -34.96 -26.21 13147.44 -77.00 12.31 -2.14 -56.25 -84.38 183.37  
-183.81 70.11 -65.23 -111.35 12.91; ...

-1.00 1.27 1.13 0.63 -4.08 -3.83 -0.35 1.53 3.64 3.29 -0.25 0.20 -0.30  
4.34 2.13 2.33 3.06 1.65 -0.84 0.46 -1.06 0.70 1.43 -0.17 0.41 3.60 3.67  
0.87 -77.00 24.42 -2.11 1.33 0.23 4.13 -0.25 -0.46 1.05 3.06 2.99 1.18; ...

1.23 1.76 0.71 2.83 1.60 1.42 3.60 0.71 0.12 3.07 3.33 0.53 1.39 2.59  
1.36 0.85 1.61 -0.67 2.21 0.25 0.76 0.71 0.21 0.78 0.98 2.37 0.73 0.90 12.31  
-2.11 5.89 1.27 0.96 3.53 1.51 -0.64 -0.17 0.65 2.12 0.42; ...

0.02 2.52 -0.29 3.57 0.93 -0.04 3.27 1.43 5.17 2.57 4.53 5.11 0.76 3.93  
1.83 1.78 1.58 0.84 3.39 4.80 1.89 2.10 1.83 0.09 3.51 2.60 2.24 0.27 -2.14  
1.33 1.27 8.25 -2.07 1.85 -1.45 1.46 4.09 1.84 3.31 1.88; ...

1.00 1.12 -0.81 0.28 4.05 4.06 2.67 -2.59 6.91 5.91 2.48 1.27 0.29 -4.09  
-0.99 0.44 1.26 0.18 2.71 -1.91 -0.40 0.80 -1.53 -0.08 1.18 -2.44 1.34 1.18  
-56.25 0.23 0.96 -2.07 54.82 2.80 5.32 -1.82 5.40 0.11 1.12 -3.32; ...

1.60 3.27 1.38 5.23 0.32 -0.02 3.17 2.15 3.31 8.67 6.16 0.97 2.11 3.64  
2.80 3.71 3.10 0.44 3.85 2.77 1.54 2.23 3.38 2.58 3.02 5.94 4.10 2.56 -84.38  
4.13 3.53 1.85 2.80 11.64 3.48 1.64 1.41 3.41 7.56 0.53; ...

7.85 8.13 1.92 7.70 2.90 -0.45 5.26 7.74 7.24 12.47 1.47 -2.40 1.66 -7.95  
2.90 4.49 10.34 4.18 10.40 2.44 7.61 -1.87 5.01 5.56 1.76 9.49 8.18 5.02  
183.37 -0.25 1.51 -1.45 5.32 3.48 148.34 -5.52 5.67 7.60 11.39 0.57; ...

-0.36 2.79 1.98 2.27 2.32 -0.28 1.39 6.34 -9.80 1.02 2.71 2.57 1.63 4.11  
-2.08 3.17 -2.28 -0.89 2.23 6.91 -1.88 0.61 -0.12 3.60 1.73 2.81 0.12 -0.72  
-183.81 -0.46 -0.64 1.46 -1.82 1.64 -5.52 48.32 -8.53 3.01 0.93 -1.92; ...

---

```

1.04 3.47 0.32 3.96 -0.51 2.45 3.61 -1.62 14.27 7.39 5.74 6.37 -0.49
1.58 0.97 2.44 2.67 -0.42 3.70 0.31 2.82 3.33 5.70 -0.90 5.57 1.15 2.94 2.13
70.11 1.05 -0.17 4.09 5.40 1.41 5.67 -8.53 38.07 3.32 2.24 -0.65; ...

1.94 4.18 0.81 4.84 1.03 -1.86 2.69 -0.53 2.34 5.77 3.80 1.36 2.15 4.20
0.83 4.99 2.30 1.78 2.12 3.03 1.45 0.84 2.61 1.46 2.06 5.22 2.91 2.44 -65.23
3.06 0.65 1.84 0.11 3.41 7.60 3.01 3.32 6.59 7.03 0.38; ...

2.92 5.80 0.75 10.98 2.52 -1.92 6.53 2.92 4.35 8.39 10.78 2.41 4.61 9.47
1.83 6.35 4.24 2.81 3.56 5.56 3.62 0.14 5.42 2.34 2.71 9.91 4.88 4.98 -111.35
2.99 2.12 3.31 1.12 7.56 11.39 0.93 2.24 7.03 18.33 1.29; ...

-0.17 1.30 0.49 0.90 -1.12 -1.63 -0.02 -1.02 0.20 0.67 1.20 0.81 1.29
0.24 0.81 0.21 1.56 0.81 2.48 1.43 1.21 -0.15 0.82 1.03 0.07 2.34 2.27 -0.25
12.91 1.18 0.42 1.88 -3.32 0.53 0.57 -1.92 -0.65 0.38 1.29 9.53];

%Vetor cheio de 1's para a restrição
ni = ones(n,1);

%Cálculo da função
parcela1 = (( x'*mu - ret )^2);%retorno verdadeiro - retorno esperado
parcela2 = (( x'*ni - 1)^2);
parcela3 = ((min(0,x))'*min(0,x));

if flag ==1 %permite exibir os resultados no final
disp('Valor de retorno');disp(x'*mu)
disp('Valor do risco');disp(sqrt(x'*CovR*x))
disp('Valor da primeira restricao - erro retorno:'); disp(parcela1)
disp('Valor da segunda restricao - soma - 1 = 0:'); disp(parcela2)
disp('Valor da terceira restricao - x>=0:'); disp(parcela3)
end

f = x'*CovR*x + rho1*parcela1 + rho2*parcela2 + rho3*parcela3;%minimizar risco + rest.
%=====

```