Relatório do EP2 de MAC0210 - IME - USP

Gustavo Santos Morais - Matheus Barbosa Silva

13 de junho de 2020

Resumo

A aproximação numérica de funções a partir de interpolações tem aplicações na compressão e descompressão de imagens, dado que estas são representáveis em sistemas computacionais por funções de múltiplas variáveis. Para este fim, aplicam-se os métodos de interpolação bilinear ou bicúbico, os quais proveem resultados distintos para os mesmos dados iniciais. Assim, é desejável analisar o desempenho de cada método de acordo com as especificidades de cada imagem.

Sumário

1 Introdução

1.1 Objetivos

O objetivo deste trabalho é compreender como se aplica os métodos de diferenciação numérica na prática, através das operações de compressão e descompressão de imagens.

2 Materiais e métodos

Para o desenvolvimento das análises apresentadas, foram realizados testes diretamente com a interface criada para o EP, usando como entrada imagens de esquemas de cores e conteúdos diversos – entre elas, imagens em preto e branco, coloridas, geradas por funções de classe C^0, C^1 ou mais, e ainda imagens dissociadas de funções específicas conhecidas. Os erros em cada experimento foram compilados em arquivos de nome `Erros.txt`, juntamente com os parâmetros necesários para que se obtenham os mesmos resultados ao executar o programa com a imagem correspondente.

Também foram utilizados como apoio os websites sugeridos no enunciado do EP:

- Página da Wikipedia para interpolação Bilinear: `https://en.wikipedia.org/wiki/Bilinear_interpolation`
- Página da Wikipedia para interpolação Bicúbica: `https://en.wikipedia.org/wiki/Bicubicinterpolation`

3 Experimentos Controlados (”Zoológico”)

3.1 Imagens em Preto e Branco

Foi observado que, criando imagens preto e branco através de funções consideradas ”suaves”, obteve-se um bom resultado tanto na compressão da imagem, como na descompressão (pelo método bilinear e bicúbico). As imagens geradas nessas operações condiziam fortemente com a imagem original.

Com relação à descompressão, pode-se fazer uma comparação entre os métodos bilinear e bicúbico. Percebe-se um maior nível de detalhamento da imagem descomprimida quando feita pelo método bicúbico do que pelo método bilinear. Isso se deve pelo maior número de requisitos pedidos sobre a função em questão (como continuidade nas derivadas parciais). Outro fator relevante para a boa qualidade das imagens resultantes foi o fato dos parâmetros usados na execução do programa serem apropriados para obter um melhor resultado (mais detalhes no Cap. 6). Um exemplo disso está representado nas figuras 1, 2 e 3.

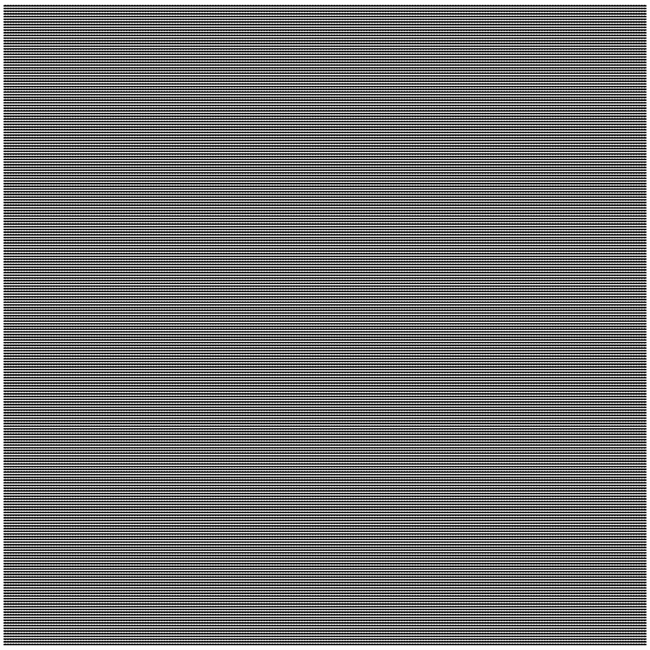

Figura 1: Imagem preta e branca (escala de cinza) gerada pela função $f(x, y) = (\sin x, \frac{\sin x+\sin y}{2}, \sin x)$.

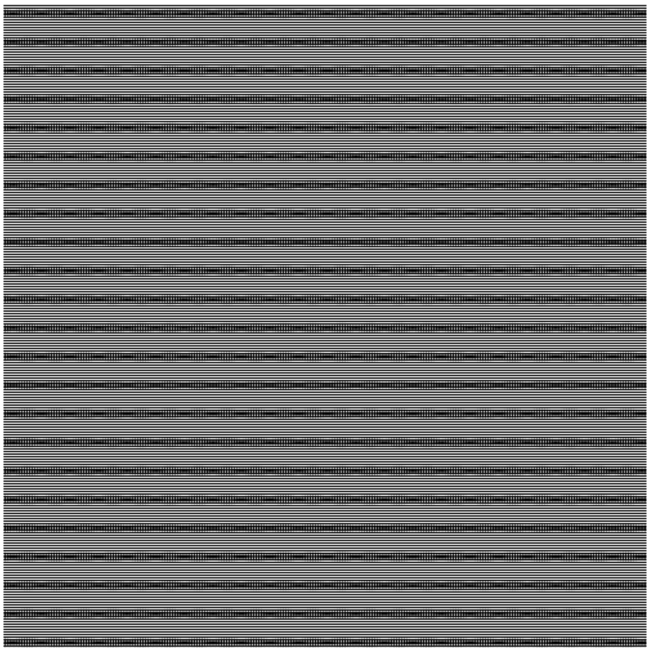

Figura 2: Descompressão da imagem comprimida pelo método bilinear com $k = 2$ e $h = 4$.

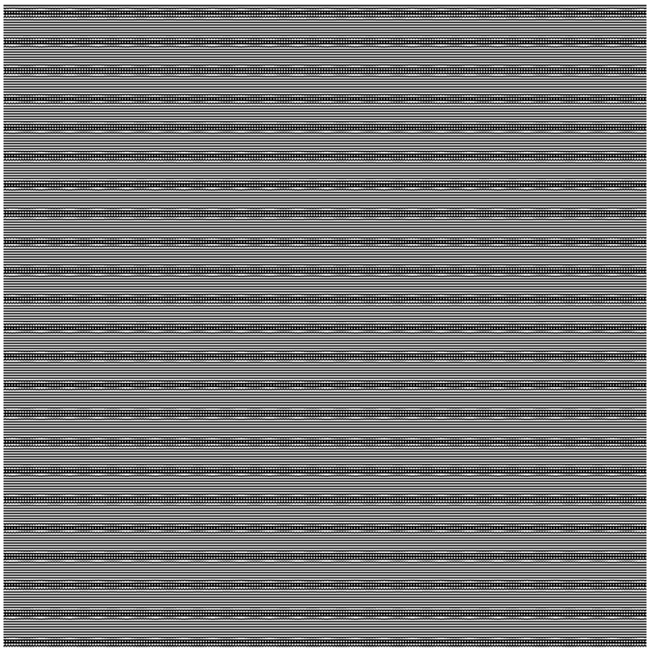

Figura 3: Descompressão da imagem comprimida pelo método bicúbico com $k = 2$ e $h = 4$.

3.2 Imagens Coloridas

O resultado das operações para imagens coloridas, geradas por funções "suaves", também foi bem satisfatório. Uma diferença notada em relação às imagens comprimidas e descomprimidas preto e branco é que, a tonalidade das cores muda um pouco em relação a imagem original. Mas no geral, as imagens resultantes possuem as mesmas cores, e são bem parecidas, como pode ser visto nas figuras 4 e 5.

3.3 Diferenciabilidade das funções

A diferenciabilidade das funções usadas para criar as imagens nos experimentos controlados (onde todas as imagens são geradas por funções conhecidas) tem efeito sobre os resultados obtidos na descompressão desde que se use parâmetros k e h grandes, dado que para k e h pequenos, a imagem original é pouco comprimida e, portanto, há mais dados para que as interpolações sejam obtidas de modo mais preciso. Note que é possível, portanto, obter melhores resultados diminuindo o valor do parâmetro h (o que geralmente requer a alteração do tamanho da imagem original).

Garantir a diferenciabilidade da função que gera a imagem é importante, em especial, para o **método bicúbico**, onde se faz necessária a aproximação de derivadas parciais de até segunda ordem. Usando-se k e h grandes, os quadrados usados como base da interpolação têm lados maiores e, caso haja algum trecho descontínuo da imagem entre eles, a aproximação feita pelo

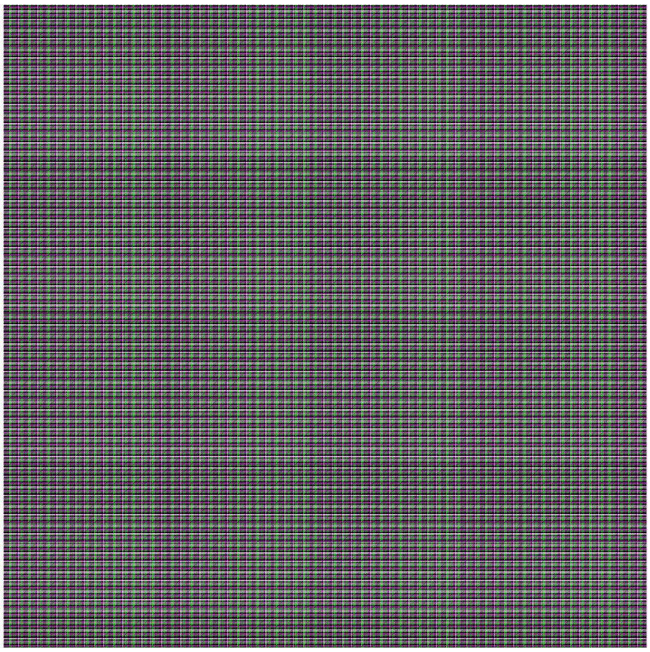

Figura 4: Imagem gerada pela função $f(x,y) = (tan(x), \frac{tan(x)+tan(y)}{2}, tan(y))$.

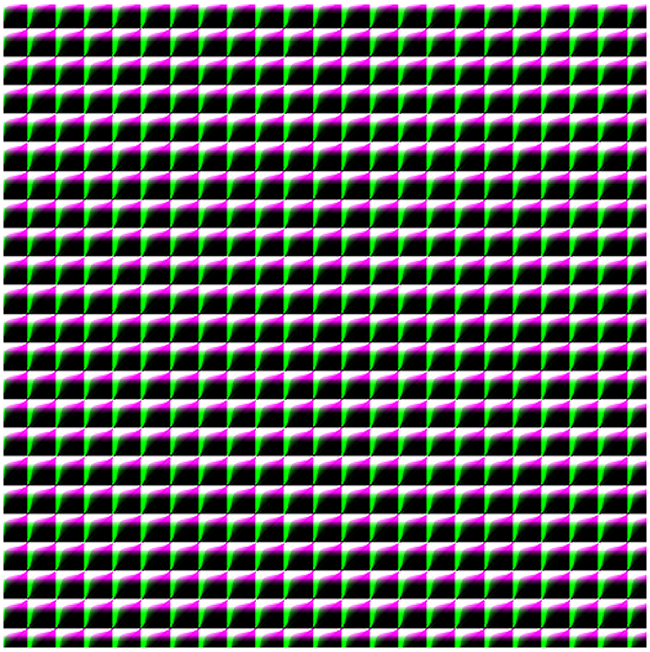

Figura 5: Descompressão pelo método bicúbico da imagem gerada pela função $f(x,y) = (tan(x), \frac{tan(x)+tan(y)}{2}, tan(y))$, com $k = 2$ e $h = 4$ e $Err_{Bicub} = 0.975085$.

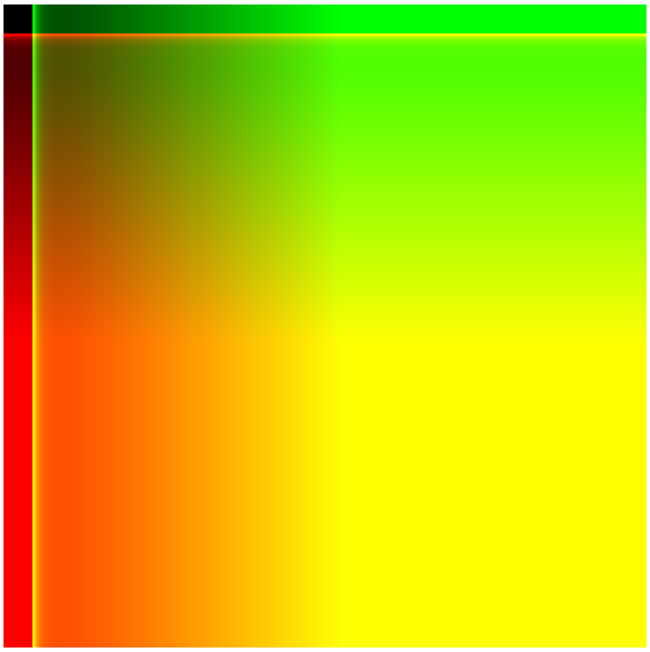

Figura 6: Imagem gerada pela função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y) = (x^2(\sin \frac{1}{x-20}), y^2(\sin \frac{1}{y-20}), 2)$, de classe C^0.

método bicúbico será pouca precisa pois este método impõe a continuidade dessas derivadas parciais (o que pode não ocorrer, no caso de funções de classe C^0 ou C^1).

Vale ressaltar que a diferenciabilidade da função é relevante apenas no intervalo utilizado na geração da imagem, isto é, em $[0, p]$, sendo p a largura/altura da imagem original. Portanto, resultados incompatíveis com a imagem original ocorrem, para o método bicúbico, quando a descontinuidade de alguma das derivadas parciais ocorre neste intervalo.

Nos exemplos apresentados nas figuras 6, 7 e 8 foi testada uma função de classe C^0 com derivadas parciais não contínuas em $x = 20$ ou $y = 20$ com $h = 10$. É possível observar que o menor erro ocorre na interpolação pelo método bilinear – o que era esperado, dado que este método não impõe algum tipo de continuidade às derivadas da função –, enquanto o método bicúbico passa a apresentar resultados destoantes da imagem original a partir do trecho descontínuo que não pode ser replicado por este método.

3.4 Comportamento do Erro

Para ambos os métodos analisados, o erro obtido depende principalmente do valor do parâmetro h, que pode interferir tanto de modo a diminuir ou aumentar o erro obtido na descompressão. Analisando individualmente cada um dos fatores que demonstraram influenciar no erro resultante:

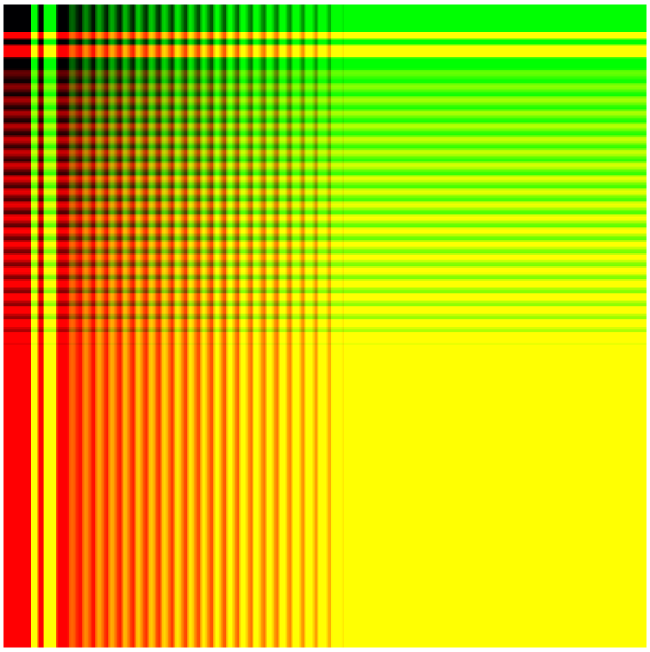

Figura 7: Resultado da compressão e interpolação da figura 6 pelo método bicúbico com $k = 8$, $Err_{Bicub} = 0.143140$.

- **Parâmetro h:** valores altos para este parâmetro parecem predispor a descompressão a erros maiores, dado que a compressão resulta em imagens cada vez menores para h crescente e, portanto, há menos pontos a serem usados como base para a interpolação. Assim, a função fica sujeita a maiores erros em diversos de seus trechos – o que não significa que estes de fato ocorram, mas sim que podem ocorrer e impactar de modo mais expressivo no resultado final;

- **Classe da função geradora da imagem:** como discutido anteriormente, funções de classe inferior a C^2 com descontinuidades de suas derivadas parciais em algum ponto do intervalo $[0, p]$ podem apresentar resultados adversos quando aplicados ao método bicúbico. Ainda, esse aspecto pode ter maior interferência no erro obtido de acordo com o valor do parâmetro h (novamente, quanto maior o valor desse parâmetro, ainda maiores podem ser os erros resultantes da descompressão).

4 Experimentos com Dados Irregulares ("Selva")

Nestes casos não é possível supor, geralmente, a continuidade das derivadas parciais, uma vez que a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ geradora da imagem é desconhecida.

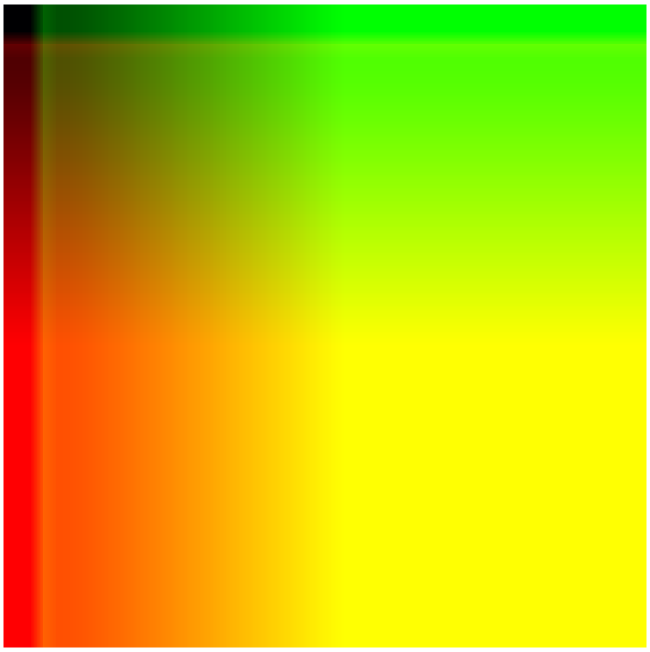

Figura 8: Resultado da compressão e interpolação da figura 6 pelo método bilinear com $k = 8$, $Err_{Bilin} = 0.054523$.

4.1 Imagens Coloridas

No caso das imagens coloridas em três canais (RGB) testadas, a precisão do resultado da descompressão demonstrou depender principalmente do parâmetro h empregado (maiores detalhes na seção de análise dos parâmetros).

Para o método bilinear, os resultados são, por vezes, pouco definidos – mesmo que semelhantes à imagem original (como na figura 10) e, geralmente, com erros menores que os observados ao utilizar o método bicúbico (como obtido na figura 12).

Na aplicação do método bicúbico é possível notar o aumento de nitidez com relação à imagem original e à imagem descomprimida pelo método bilinear. Os resultados desse método parecem ter, em geral, contornos mais definidos em comparação ao método bilinear. Este aspecto da descompressão de imagens pelo método bicúbico é normalmente designado pelo termo *acutance* e é perceptível entre as figuras 9 e 11. A maior parte das figuras coloridas obtidas com maiores diferenças aparentes com relação à imagem original (colorida) foi, também, obtida por este método (como exemplificado na figura 18) – dado que as imagens não são, necessariamente, geradas por funções de classe C^2.

4.2 Imagens em Preto e Branco

Para imagens em **escala de cinza** (onde cada pixel é representado por uma intensidade de luminosidade), o resultado é similar ao constatado em imagens coloridas, uma vez que é possível que a imagem tenha comportamento mais ou menos contínuo – o que interfere no comportamento da interpolação bicúbica – e esta é interpolada por completo como um canal de cor de uma imagem RGB.

Já para **imagens binárias** (onde cada pixel é representado por um bit indicador da cor preta ou branca), espera-se que as imagens sejam ainda mais descontínuas, dado que não existem gradações de cinza. Portanto, os resultados da descompressão de imagens binárias tendem a ter maiores erros que quaisquer de suas correspondentes usando outros esquemas de cores. A aplicação dos métodos analisados em imagem desses tipos geraria imagens não-binárias e com gradações de cores aparentes (principalmente no caso do método bicúbico), o que poderia ser corrigido pela determinação de um nível padrão que serviria de parâmetro para decidir quais dos valores gerados pelos métodos seriam associados a 0 ou 1.

4.3 Irregularidade dos dados

As imagens geradas por funções consideradas ”suaves”, em geral, produzem melhores resultados, pois todas as condições impostas pelos métodos de descompressão funcionam. No caso de imagens reais, supor que exista uma função ”suave”que consiga gerar essas imagens, seria no mínimo otimista. Para esse tipo de imagem, é muito provável que as condições impostas pelos métodos de descompressão não valerão, o que implica que o resultado final possui maiores chances de não ser satisfatório, a ponto de que a imagem gerada por essas operações não seja tão parecida com a imagem original, e que possua mais falhas do que o normal (como mudança de cores, maior número de serrilhamentos etc), como pode ser visto nas figuras 9, 10, e 11.

4.4 Comportamento do Erro

Para imagens reais, apesar de algumas vezes, a imagem resultante ter mais serrilhados do que o normal, o erro em relação a imagem original é consideravelmente pequeno. Isso também se deve pelo fato de que os exemplos usados como base para esta análise foram feitos gerando imagens com o valor do parâmetro h pequeno, o que acabou gerando melhores resultados (isso será melhor explicado no Cap. 6). Exemplos podem ser visto nas figuras 12 e 13.

5 Experimento Particular

5.1 Casos Irregulares

Para os casos irregulares, utilizou-se a figura 14 como base para realizar o processo descrito. Para ambos os métodos, testou-se uma descompressão com $k = 7$ e três descompressões com

Figura 9: Imagem real original.

Figura 10: Imagem descomprimida pelo método bilinear, com $k = 2$ e $h = 4$ e $Err_{Bilin} = 0.004943$.

Figura 11: Imagem descomprimida pelo método bicúbico, com $k = 2$ e $h = 4$ e $Err_{Bicub} = 0.018597$.

$k = 1$.

Ao aplicar o método bilinear, os resultados obtidos em cada um dos processos é muito semelhante. A figura 17 (resultado de três descompressões com $k = 1$) aparenta maior nitidez, mas ainda assim, tem erro ligeiramente maior que sua correspondente utilizando uma única descompressão com $k = 7$ (apresenta $Err_{Bilin} = 0.028184$). O erro resultante em ambos os processos é menor que o erro obtido usando o método bicúbico, o que – de acordo com o que se concluiu previamente –, se deve ao melhor desempenho (em geral) do método bilinear em imagens irregulares – isto é, descritas por funções desconhecidas ou de classe menor que C^2 –, dado que este método não impõe atributos à imagem que nem sempre são garantidos por estes casos irregulares.

Já para o método bicúbico, os resultados obtidos em cada um dos processos são mais discrepantes. Ao aplicar o método de descompressão bicúbico com $k = 7$, apenas os pontos da imagem comprimida são usados como base para a interpolação da imagem resultante, pontos esses que formam os vértices dos quadrados usados como "unidade interpolante"da imagem (isto é, o conjunto de pontos pertencentes a um quadrado é interpolado da mesma forma).

De outro modo, aplicando três vezes o processo de descompressão com $k = 1$, como na figura 17, em qualquer descompressão o espaço a ser preenchido é menor que o com $k = 7$, dado que há menos linhas e colunas para preencher a cada passo e, portanto, cada interpolação é feita de forma mais precisa já que o lado do quadrado em cada passo é menor que o lado do

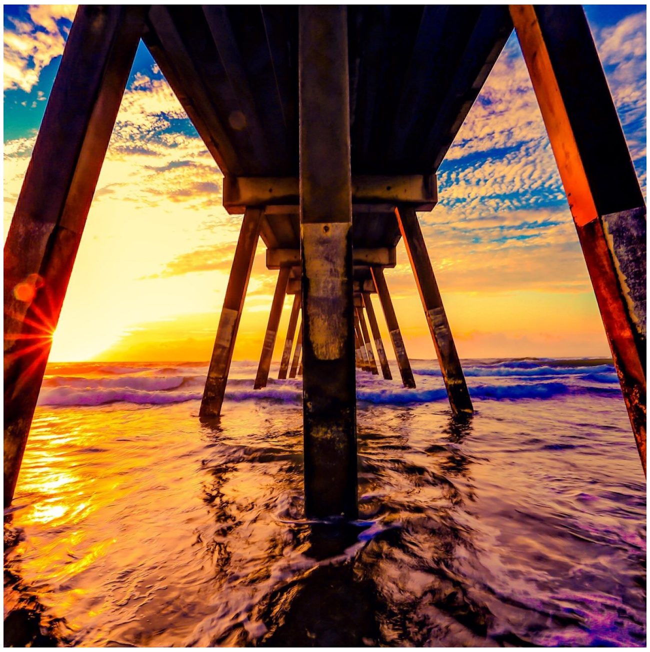

Figura 12: Erro da descompressão dessa imagem com $k = 2$ e $h = 4$: $Err_{Bilin} = 0.011804$; $Err_{Bicub} = 0.061406$.

quadrado usando $k = 7$.

5.2 Casos Controlados

Para os casos controlados, utilizou-se a figura 19 como base para realizar o processo descrito. Para ambos os métodos, testou-se uma descompressão com $k = 7$ e três descompressões com $k = 1$.

Os resultados observados foram semelhantes aos obtidos nos casos irregulares: os erros entre as descompressões bilineares são próximas (ainda assim, a imagem que realiza três descompressões com $k = 1$ tem maior nitidez aparente). Entretanto, o método bicúbico apresenta erro maior ao aplicar uma única descompressão com $k = 7$ – em ambos os casos, os erros resultantes são grandes e ocorrem, possivelmente, devido ao nível de detalhamento da imagem original.

As quatro descompressões citadas acima e seus respectivos erros podem ser encontrados no diretório `ExpPartFuncao` do EP.

Figura 13: Erro da descompressão dessa imagem com $k = 2$ e $h = 4$: $Err_{Bilin} = 0.004943$; $Err_{Bicub} = 0.018597$.

Figura 14: Imagem original com $p = 953$.

Figura 15: Imagem descomprimida três vezes pelo método bicúbico com $k = 1$ e $Err_{Bicub} = 0.102920$.

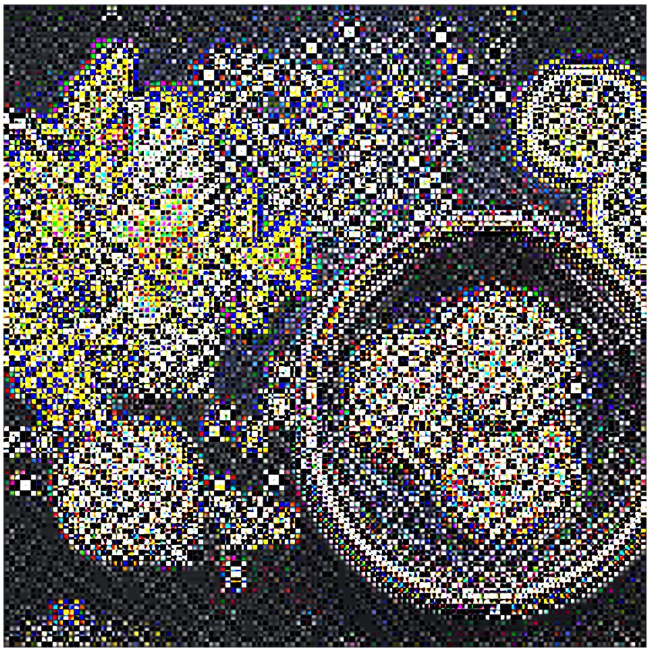

Figura 16: Imagem descomprimida pelo método bicúbico com $k = 7$ e $Err_{Bicub} = 0.347669$.

Figura 17: Imagem descomprimida três vezes pelo método bilinear com $k = 1$ e $Err_{Bilin} = 0.031270$.

6 Análise dos Parâmetros

No processo de descompressão de imagens, existem dois parâmentros que influenciam fortemente no resultado final, que são os parâmetros k e h.

O parâmetro k é o número de linhas e colunas que deve-se adicionar à imagem comprimida entre cada linha e coluna original, e isso implica que, quando essa imagem foi comprimida, retiraram-se k linhas e k colunas dela, entre cada linha e coluna. Dessa forma, é natural pensar que, quão menor for o k, maior será o conteúdo da imagem original restante na imagem comprimida. Logo, nesses casos o processo de descompressão não terá tanto trabalho, visto que a imagem perdeu pouco conteúdo (poucos pixels). Por outro lado, se o k for muito grande, a imagem comprimida terá perdido uma boa parte de seu conteúdo original, fazendo com que o processo de descompressão tenha uma responsabilidade maior, em relação a qualidade da imagem resultante. Resumindo, no geral, $k_{pequeno} \implies$ bons resultados e $k_{grande} \implies$ resultados piores.

Em relação ao h, o lado dos quadrados usados para interpolar os pontos das imagens, pode-se dizer que sua importância para a qualidade das imagens resultantes é a mesma que a de k, pois um depende do outro. Como pra cada imagem comprimida, precisa-se acrescentar k linhas e k colunas entre cada linha e coluna original, o h é sempre usado com valor igual a $k + 2$, porque os pixels acrescentados estariam entre os pixels ja existentes na imagem comprimida,

Figura 18: Descompressão da figura 9 pelo método bicúbico com $k = 8$ e $h = 10$ e $Err_{Bicub} = 0.287703$.

ou seja, para cada quadrado, o tamanho do lado seria o número de pixels a ser acrescentado mais as duas pontas ($h = k + 2$).

O que se deve frisar é que a influência desses parâmetros na imagem resultante não possui ligação com a "suavidade" dos dados da imagem, seja ela gerada por uma função ou uma imagem real. Mesmo que os dados da imagem original sejam totalmente descontinuos, se for usado um k pequeno na compressão e descompressão, provavelmente, o resultado não será tão ruim, devido aos motivos explicados acima.

Seguem alguns exemplos do que foi explicado, ilustrados nas figuras 18, 19 e 20.

Figura 19: Imagem gerada pela função $f(x,y) = (sen(x), \frac{sen(x)+sen(y)}{2}, sen(x))$.

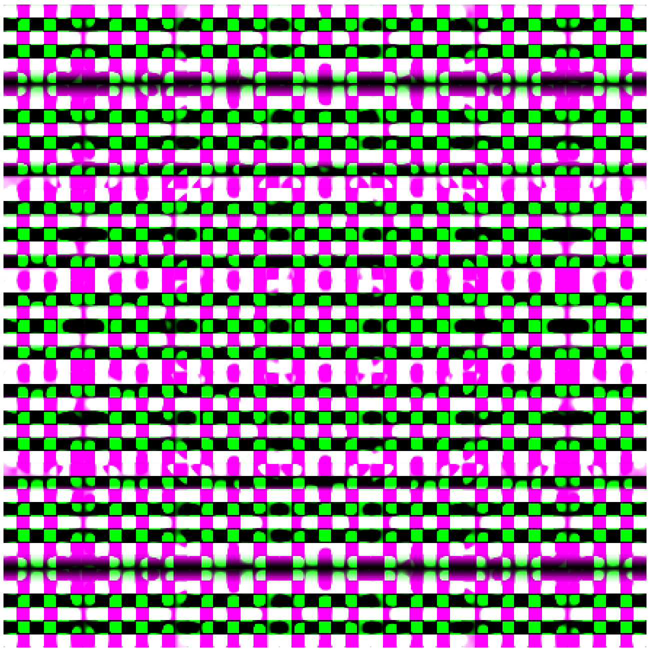

Figura 20: Descompressão da figura 19 pelo método bicúbico com $k = 8$ e $h = 10$ e $Err_{Bicub} = 1.171947$.