

# Relatório do EP1 de MAC0209 - IME - USP

Agnaldo N. de Oliveira - Gustavo S. Moraes - Matheus B. Silva

30 de maio de 2020

## Resumo

Este trabalho envolve o estudo e simulação de 3 movimentos:

- Movimento Retilíneo Uniforme e Uniformemente Variado
- Queda Livre
- Lançamento de um Projétil

Mostra-se como pode-se resolver problemas (no caso, o cálculo de diferentes movimentos), que poderiam ser difíceis, usando métodos analíticos, mas que ficam mais simples com uso de outros métodos, como o Método de Euler. Os resultados desses estudos serão avaliados, como forma de comprovar a efetividade desse método.

## Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>2</b>
1.1	Motivação . . . . .	3
1.2	Objetivos . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Materiais e métodos</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Modelagem</b>	<b>4</b>
3.1	Movimento Retilíneo Uniforme e Uniformemente Variado . . . . .	4
3.2	Queda Livre . . . . .	5
3.3	Lançamento de um Projétil . . . . .	6
<b>4</b>	<b>Resultados Experimentais</b>	<b>7</b>
4.1	Movimento Retilíneo Uniforme e Uniformemente Variado . . . . .	7
4.2	Queda Livre . . . . .	12
4.3	Lançamento de um Projétil . . . . .	15
<b>5</b>	<b>Conclusão</b>	<b>18</b>

# 1 Introdução

A produção de conhecimentos acerca da física moderna é associada ao fazer científico desde sua origem, onde integrou um movimento de racionalização e desmistificação do conhecimento humano que propiciou o desenvolvimento da ciência durante o período Iluminista. Desde então, o estudo da física tem ganhado relevância a partir de grandes cientistas como Galileu Galilei – dito um dos primeiros físicos modernos da humanidade –, e dedica-se à compreensão da natureza e seus fenômenos com rigor e precisão matemática. Tais princípios que originaram a física moderna a muito se assemelham à atividade científica, e por isso, seu progresso associa-se ao desenvolvimento da própria concepção de ciência e método científico.

Neste contexto, a modelagem proporcionada pela física moderna para a compreensão de fenômenos naturais teve suas aplicações expandidas pela evolução de técnicas computacionais. Dada a precisão finita do computador e conveniência da simplificação de diversos modelos matemáticos que não podem ser transportados diretamente a estes sistemas, os métodos de aproximação tornaram-se, então, ferramentas ainda mais elementares na solução e visualização de problemas variados.

O **método de Euler**, nome dado à técnica de integração baseada em equações diferenciais ordinárias elaborada por Leonhard Euler, serve como ferramenta de grande utilidade prática e, também, computacional. Técnicas como o método de Euler e outras aproximações apresentam, em muitos casos, implementação computacional menos complexa do que a resolução direta (analítica) e, ainda assim, permitem descrever e aproximar funções de modo eficiente próximo a um ponto de interesse.

A vasta aplicação da física moderna em tópicos de grande relevância, como: balística (para o lançamento de projéteis) e cinemática (para o estudo do deslocamento de corpos de acordo com fatores derivados, como velocidade e aceleração), demonstra que a análise das aproximações aplicadas nessas simulações é de suma importância para definir o sucesso ou fracasso de experimentos, a correta estruturação de conclusões e diversos outros aspectos inerentes à atividade científica e que atingem dimensões além da esfera acadêmica.

Assim, ao aliar técnicas computacionais a leis e observações da física, é possível estruturar um panorama do funcionamento da atividade científica, onde deve-se, usualmente, estimar e controlar erros de medição, conhecer tópicos de áreas do conhecimentos diversas (como a balística e dinâmica citadas) e, partindo das estruturas estabelecidas, ser capaz de inferir e analisar dados para, então, produzir resultados adequados.

## 1.1 Motivação

No estudo do cálculo, em muitos casos não é possível ou é muito custoso obter o comportamento de uma integral de uma função. Como aproximar estas funções é um tema de grande importância em diversas pesquisas e áreas de estudo, é necessário que exista um método de aproximação eficiente que substitua o cálculo direto de uma integral. Em muitos desses casos, é possível empregar o método de Euler, uma técnica de integração baseada em equações diferenciais ordinárias elaborada por Leonhard Euler. Nesse projeto, são realizados vários experimentos para analisar a eficácia do método de Euler para conseguir valores aproximados de integrais de funções.

## 1.2 Objetivos

O projeto tem como objetivo principal a simulação de diferentes aplicações reais de quatro modelos distintos de física. Sendo os modelos respectivamente M.R.U., M.R.U.V., queda livre e lançamento de um projétil. Foram utilizados dois métodos para análise de dados nos modelos, o método de Euler e o método analítico. Os experimentos foram realizados para mostrar o quanto precisa é a aproximação dos dados analisados utilizando o método de Euler em relação ao método analítico.

## 2 Materiais e métodos

Os materiais usados, em geral, foram websites para melhor entendimento dos movimentos estudados:

- Para o MRU e MRUV, usamos o Jupyter Notebook mostrado em aula como base:  
<https://colab.research.google.com/drive/15uV8ioXXr4dHu6iYEek9E9cR0fm8US1m?authuser=1>
- Para a queda livre, visitamos alguns sites para entender melhor sobre as fórmulas usadas:  
<https://www.fisicalab.com/en/section/free-fall>  
<https://brasilescola.uol.com.br/fisica/queda-livre.htm>

Também foram usados os slides disponibilizados pelos professores da disciplina:

[https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/5111132/mod\\_resource/content/0/computationalScience-2-euler-quedaLivre-small.pdf](https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/5111132/mod_resource/content/0/computationalScience-2-euler-quedaLivre-small.pdf)

- Para o lançamento de projétil, foram assistidas algumas vídeo-aulas para que fosse possível compreender mais profundamente os movimentos escolhidos:  
<http://eaulas.usp.br/portal/video.action?idItem=5394>  
<http://eaulas.usp.br/portal/video.action?idItem=5389>

## GRANTT CHART DO EP - MAC0209

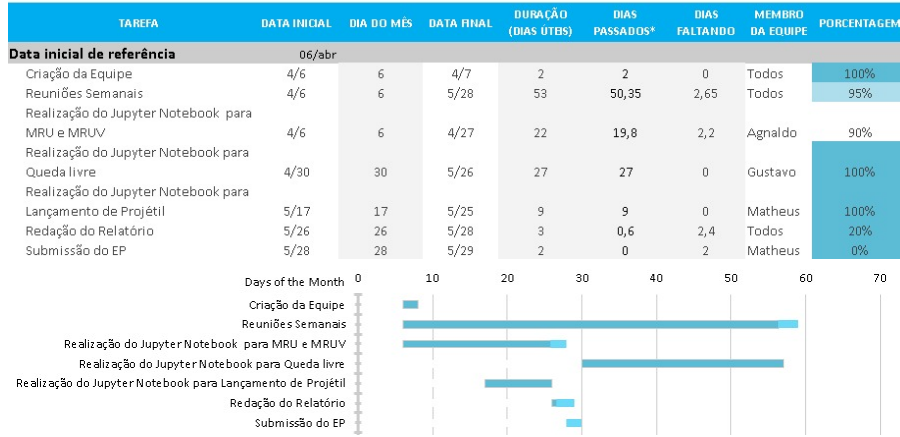


Figura 1: Gantt chart adotado para o desenvolvimento do projeto.

Em relação às simulações, foram usados os Jupyter Notebooks mostrados em aula como referência para que fossem feitas as simulações dos movimentos escolhidos:  
<https://colab.research.google.com/drive/1IpMYPv5TQh1uhAoNoXfZnP5xto1i0mZU?authuser=1>

O cronograma do andamento do trabalho está descrito na figura 1.

## 3 Modelagem

### 3.1 Movimento Retilíneo Uniforme e Uniformemente Variado

O movimento retilíneo uniforme foi analisado em um único eixo ( $x$ ), ele descreve o movimento de uma partícula com uma determinada velocidade  $v$  fixa ao longo de uma trajetória. Para a modelagem é necessário encontrar a coordenada  $x$  da partícula em um dado instante  $t$ .

A velocidade do ponto em um certo instante do tempo é definido por  $v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = v$ . Dado que a velocidade é constante, integrando essa função obtém-se a posição analiticamente:

$$x(t) = x_0 + vt$$

Também é possível aproximar  $x(t)$  pelo método de Euler, usando uma aproximação por diferenças finitas, como a seguir:

$$x'(t) \approx \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \implies \frac{x_t - x_{t-1}}{\Delta t} \approx v \implies x_t \approx x_{t-1} + v\Delta t$$

O movimento retilíneo uniformemente variado foi também analisado em uma direção (no eixo  $x$ ), ele descreve o movimento de uma partícula com velocidade  $v$  que é alterada em função

de uma aceleração  $a$ . Para a modelagem é necessário encontrar a coordenada  $x$  e a velocidade  $v$  da partícula em um dado instante  $t$ .

A aceleração do ponto em um certo instante do tempo é definido por  $a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = a$ . Dado que a aceleração é constante, integrando essa função obtém-se a velocidade analiticamente:

$$v(t) = v_0 + at$$

Também é possível aproximar  $v(t)$  pelo método de Euler usando uma aproximação por diferenças finitas, como a seguir:

$$v'(t) \approx \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} \implies \frac{v_t - v_{t-1}}{\Delta t} \approx a \implies v_t \approx v_{t-1} + a\Delta t$$

Ao integrar a função  $v(t)$ , obtém-se a posição  $x(t)$  analiticamente:

$$x(t) = x_0 + v_0t + \frac{at^2}{2}$$

E também é possível aproximar  $x(t)$  usando o método de Euler:

$$x'(t) \approx \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \implies \frac{x_t - x_{t-1}}{\Delta t} \approx v_0 + at \implies x_t \approx x_{t-1} + v_0\Delta t + at\Delta t$$

Tais equações foram empregadas em `EP1-SIMUL1.ipynb` juntamente a uma animação usando visualização gráfica que ilustra o movimento descrito acima.

### 3.2 Queda Livre

O movimento de queda livre consiste em um ponto que cai de uma altura  $h$ , com aceleração  $-g$ , onde  $g$  é a aceleração da gravidade e a aceleração da partícula tem sinal oposto pois sua velocidade tem sentido contrário ao sentido do eixo  $y$ . O movimento acontece apenas no eixo  $y$ . O ponto começa com uma velocidade inicial nula, e aumenta a sua velocidade apenas sob influência da aceleração  $-g$ .

Para calcular a posição do ponto analiticamente, supôs-se velocidade inicial igual a 0, e foi calculada a sua posição depois de cair de uma altura  $h$  (representado como `params[2]`, a altura inicial) com uma aceleração  $-g$ , depois de  $t$  instantes de tempo; ou seja,  $y(t) = h + (\frac{-gt^2}{2})$ . Essa fórmula deriva de  $y(t) = y_0 + v_0t + \frac{at^2}{2}$ , mas como supôs-se velocidade inicial igual a 0, o termo  $v_0t$  é eliminado, resultando na fórmula como foi descrita anteriormente.

Para calcular a posição do ponto por Euler:  $\frac{dy(t)}{dt} = v \implies \Delta y = v\Delta t$ . Usando a suposição do método de que  $dy(t) \approx y_t - y_{t-1}$ , então (usando que  $v = -gt$ ):

$$y_t \approx y_{t-1} + ((-gt)\Delta t)$$

Para calcular a velocidade analiticamente, multiplica-se a aceleração pelos instantes de tempo, uma vez que a velocidade do ponto dependerá apenas dessa aceleração. Ou seja,  $v =$

$-gt$ .

Para calcular a velocidade por Euler, aplica-se o mesmo processo, mas aqui  $a = \frac{dv(t)}{dt}$ . Usando dos mesmos passos, conclui-se que  $v_t = v_{t-1} + (a\Delta t) \implies v_t = v_{t-1} + (-g\Delta t)$ .

Tais equações foram empregadas em **EP1-SIMUL2.ipynb** juntamente a uma animação usando visualização gráfica que ilustra o movimento descrito acima.

### 3.3 Lançamento de um Projétil

O lançamento de um projétil é, aqui, analisado em duas dimensões (nos eixos  $x$  e  $y$ ), e descreve o movimento de uma partícula lançada por uma fonte com uma velocidade escalar inicial  $v_0$  correspondente a uma velocidade vetorial  $\vec{v}_0$  com inclinação  $\theta$  com relação ao eixo  $x$ . A modelagem deste movimento exige a determinação da coordenada da partícula no plano em um dado instante  $t$  e, para tanto, a trajetória é desmembrada em dois movimentos distintos, um em cada eixo.

Observa-se que no eixo  $x$ , a aceleração desempenhada é constante nula, isto é:  $\frac{d^2x(t)}{dt^2} = 0$  e, portanto, a velocidade desempenhada pela partícula durante o movimento modelado é, também, constante. Assim, a partícula imprime um movimento do tipo retilíneo uniforme (M.R.U.) sobre este eixo:  $\frac{dx(t)}{dt} = v_x(t) = v_0 \cos(\theta)$ , onde  $\theta$  é o ângulo de lançamento do projétil,  $v_0$  é a velocidade escalar e  $v_0 \cos(\theta)$  é a velocidade desempenhada no eixo  $x$ .

Portanto, analiticamente (integrando  $v(t)$ ):

$$x(t) = x_0 + v_0 \cos(\theta)t$$

Também é possível aproximar  $x(t)$  pelo método de Euler usando uma aproximação por diferenças finitas, como a seguir:

$$x'(t) \sim \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \implies \frac{x_t - x_{t-1}}{\Delta t} \approx v_0 \cos(\theta) \implies x_t \approx x_{t-1} + v_0 \cos(\theta)\Delta t$$

No eixo  $y$ , a partícula move-se sofrendo a aceleração constante da gravidade ( $g$ ), isto é:  $\frac{d^2y(t)}{dt^2} = -g$  e a velocidade da partícula nesse trajeto será, portanto:  $\frac{dy(t)}{dt} = v_y(t) = v_0 \sin(\theta) - gt$ , onde  $v_0 \sin(\theta)$  é a velocidade inicial no eixo  $y$ . A partir daí é possível obter  $y(t)$  pelo método de Euler ou analiticamente.

Analiticamente (integrando  $v_y(t)$ ), obtém-se a posição da partícula no eixo  $y$ :

$$y(t) = y_0 + v_0 \sin(\theta)t - \frac{gt^2}{2}$$

E pelo método de Euler:

$$y'(t) \sim \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t} \implies \frac{y_t - y_{t-1}}{\Delta t} \approx v_0 \sin(\theta) - gt \implies y_t \approx y_{t-1} + v_0 \sin(\theta)\Delta t - g\Delta t$$

Tais equações foram empregadas em **EP1-SIMUL3.ipynb** juntamente a uma animação usando visualização gráfica que ilustra o movimento descrito acima.

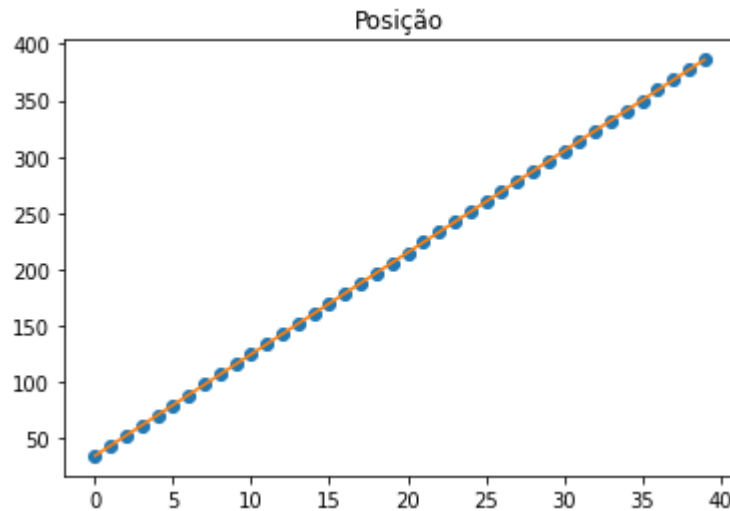


Figura 2: Gráfico da posição do movimento retilíneo uniforme.

## 4 Resultados Experimentais

### 4.1 Movimento Retilíneo Uniforme e Uniformemente Variado

Nos experimentos foi possível notar que a diferença entre o método de aproximação de Euler é bem pequena em relação ao método analítico. No M.U.V primeiro foi construído um gráfico que mostra essa diferença em um determinado tempo  $t$ , sendo o método de Euler representado pelos pontos, e o analítico representado pela reta. Como visto na figura 2, a diferença entre os valores obtidos pelos dois métodos é mínima. Aumentando o valor da velocidade  $v$ , obtém-se o resultado apresentado na figura 3. E ao diminuir o valor de  $v$ , o resultado obtido é o que consta na figura 4.

Logo, a alteração do valor de  $v$  não influencia na aproximação dos valores usando o método de Euler, somente na **inclinação** da reta.

Foram também realizadas duas simulações em um asfalto (desconsiderando o atrito com o solo). Uma pelo método de Euler e outra pelo método analítico, obteve-se o resultado representado na figura 5. Nota-se que, nesta figura, os dois pontos finais das trajetórias estão em posições extremamente próximas.

No caso do M.R.U.V., foram construídos dois gráficos, um para a posição e o outro para velocidade. Da mesma forma que o M.R.U., os pontos dos gráficos são as representações do método de Euler e as retas são as representações do método analítico, como na figura 6. Note que há uma diferença mínima entre os valores encontrados pelo método de Euler em relação ao método analítico. Aumentando o valor da aceleração  $a$ , obtém-se o resultado ilustrado na figura 7. E ao diminuir o valor de  $a$ , o resultado obtido é o exibido na figura 8.

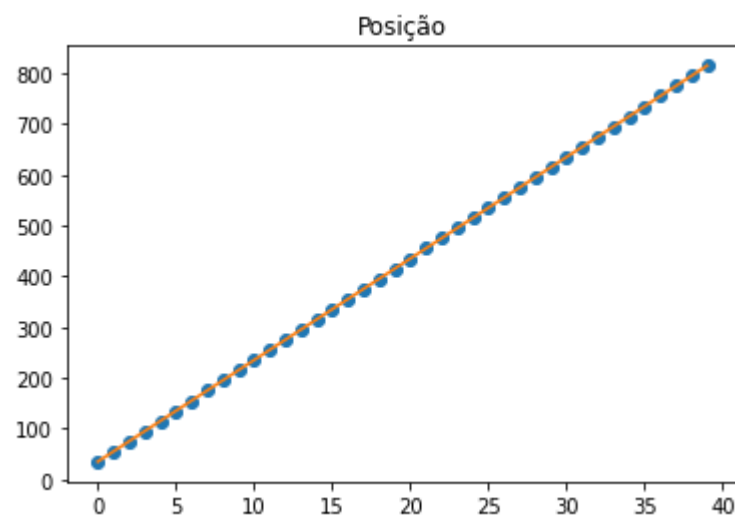


Figura 3: Gráfico da posição do movimento retilíneo uniforme.

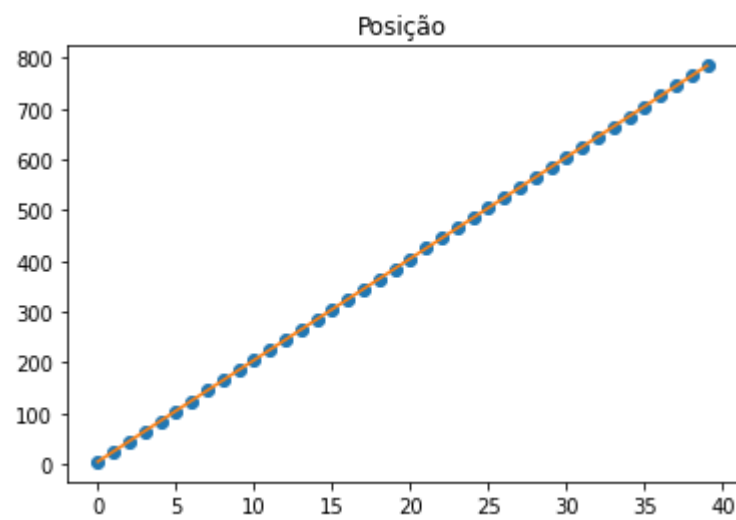


Figura 4: Gráfico da posição do movimento retilíneo uniforme.



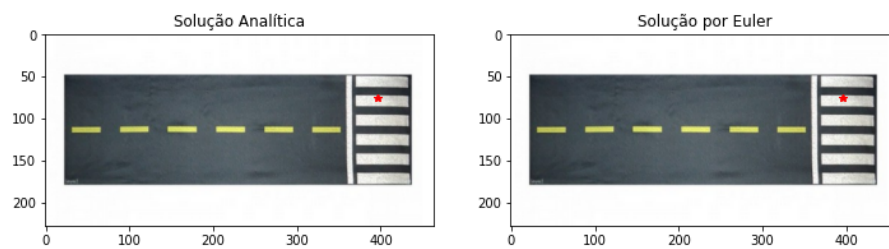


Figura 5: Simulação do movimento retilíneo uniforme.

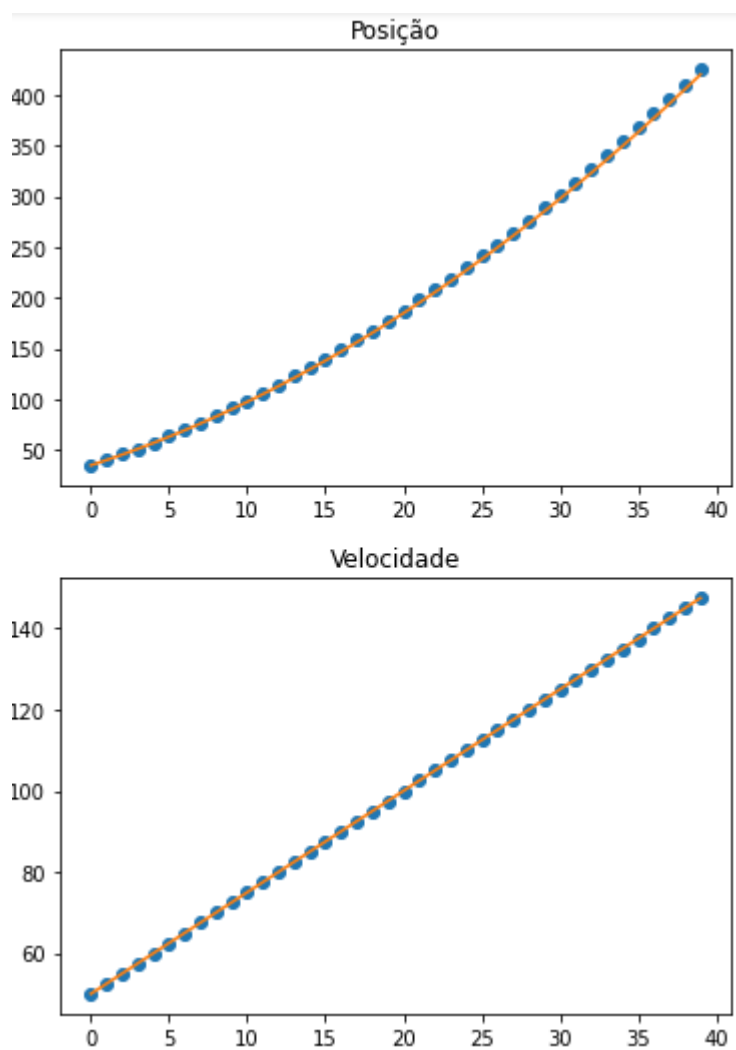


Figura 6: Gráfico da posição e velocidade do movimento retilíneo uniformemente variado.

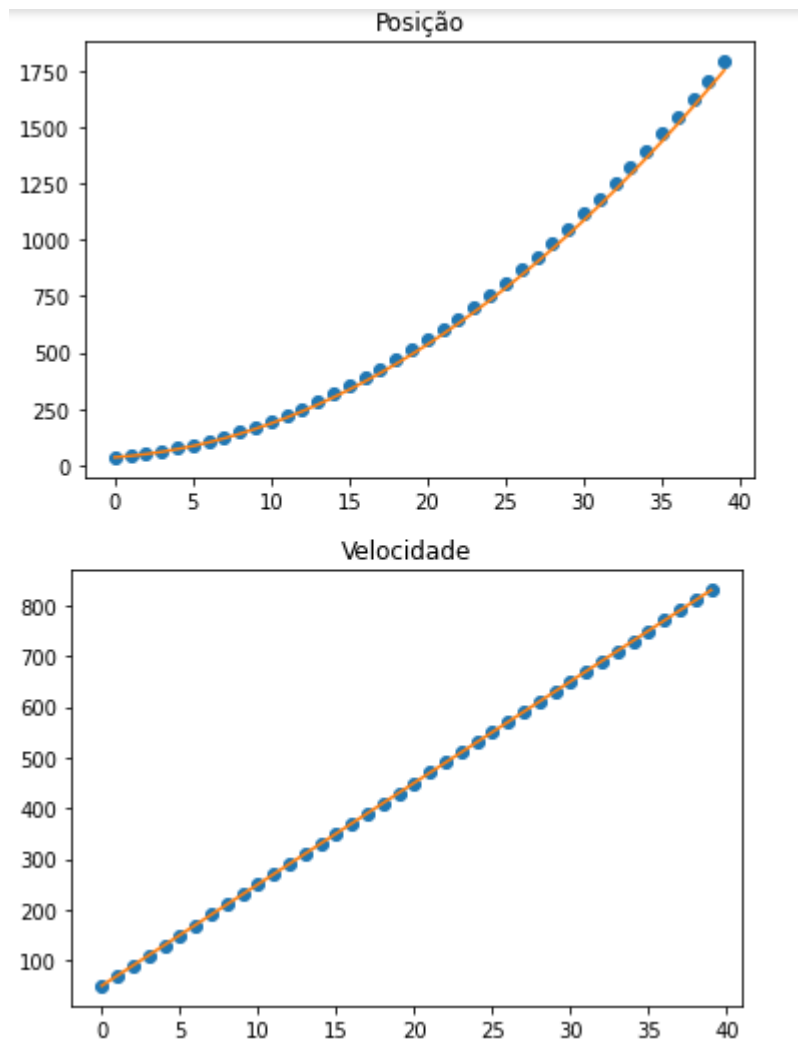


Figura 7: Gráfico da posição e velocidade do movimento retilíneo uniformemente variado.

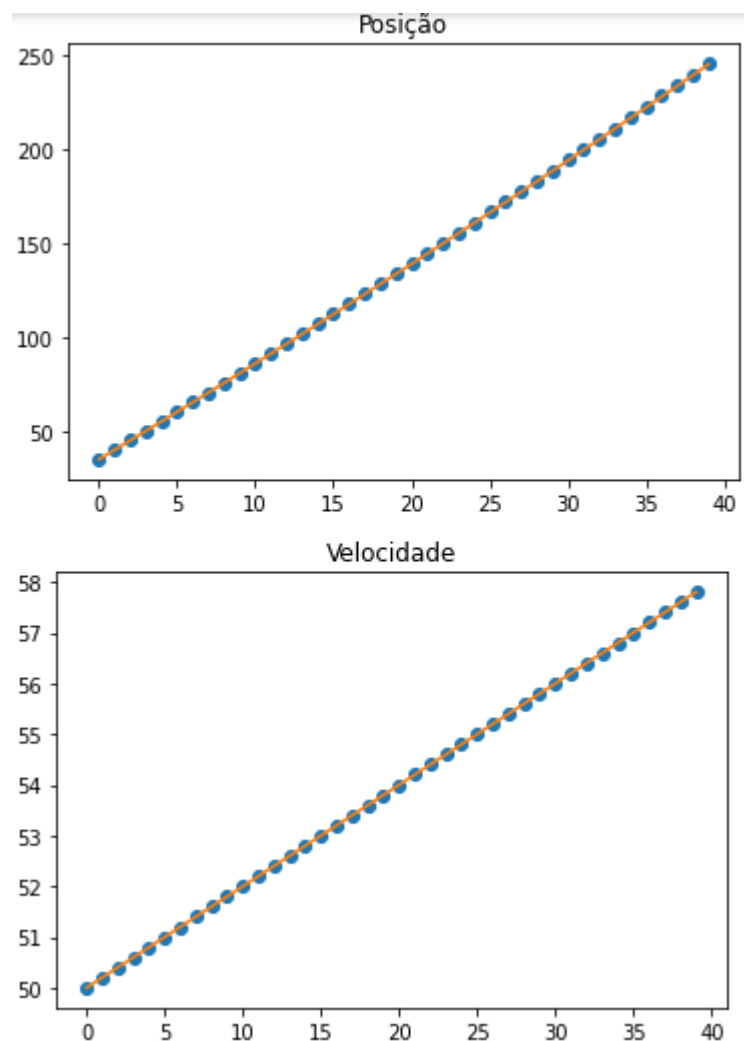


Figura 8: Gráfico da posição e velocidade do movimento retilíneo uniformemente variado.

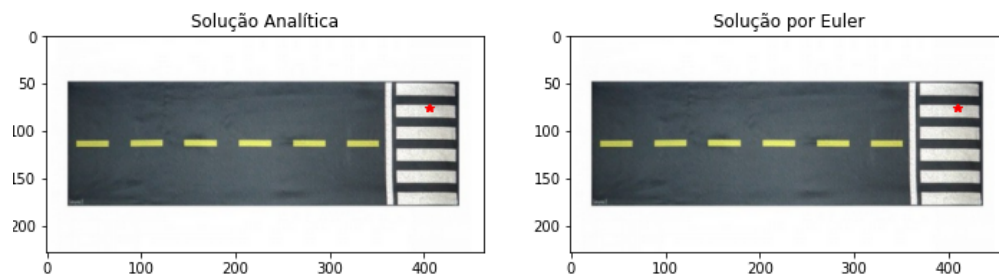


Figura 9: Simulação do movimento retilíneo uniformemente variado.

Logo, a alteração do valor de  $a$  não influencia na aproximação dos valores usando o método de Euler, mas sim interfere na "abertura" da parábola que descreve a trajetória da partícula. A animação gráfica produzida para o movimento descrito é exibida na figura 9.

## 4.2 Queda Livre

Na queda livre, os parâmetros mais influentes são a aceleração ( $-g$ ), o tempo ( $t$ ) e a velocidade ( $v$ ).

No cálculo da posição do ponto, não se usa a velocidade; logo, apenas a aceleração e o tempo influenciaram na mudança de posição.

A altura inicial ( $y$ ) não tem tanta relevância aqui, e com isso, pode-se concluir que, tanto pelo método analítico como pelo método de Euler, pelo fato de ambos dependerem dos mesmos parâmetros, é obtida uma boa aproximação, como pode ser visto nas figuras 10 e 11.

No cálculo da velocidade, pode-se observar uma diferença entre o cálculo analítico e por Euler. Pelo método analítico, foi usada uma fórmula que diz que a velocidade do ponto no decorrer do tempo, muda apenas sobre a ação da aceleração  $-g$ . Já pelo método de Euler, usamos a velocidade no instante de tempo anterior para calcular a velocidade do próximo instante de tempo. Essa diferença causará mudanças no gráfico, o que mostra que, quão maior for a velocidade inicial, maior será a diferença da velocidade entre os dois métodos, como pode ser visto na figura 12.

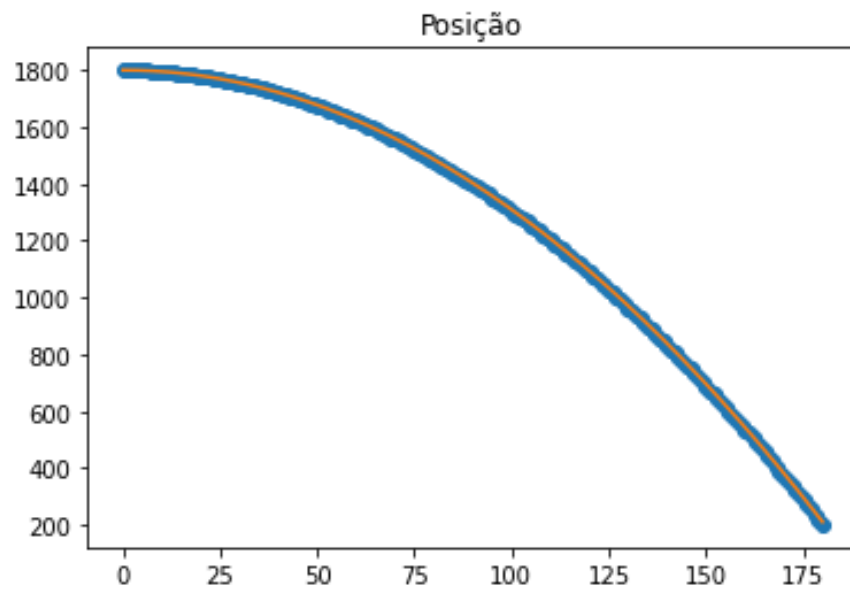


Figura 10: Gráfico da posição do ponto em relação ao tempo. A parte amarela refere-se ao cálculo analítico e a azul ao cálculo por Euler.

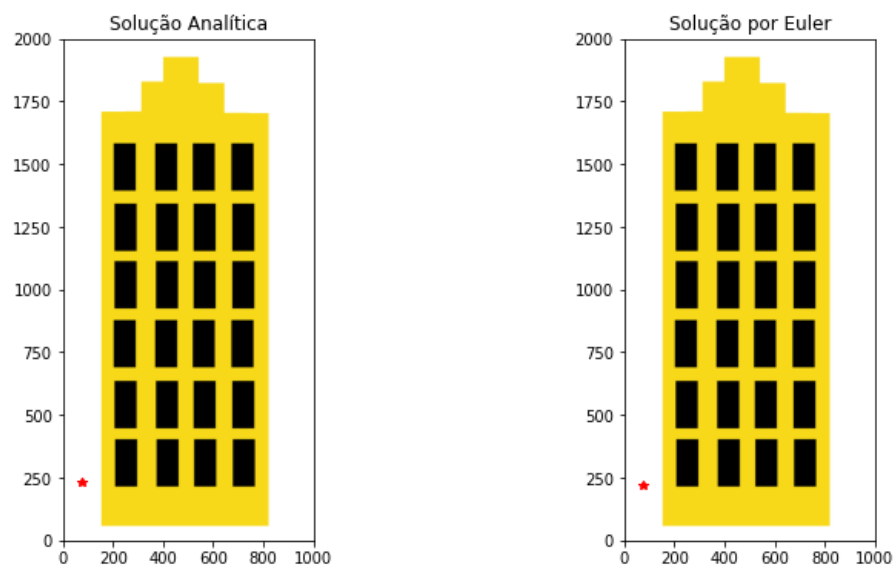


Figura 11: Resultados da simulação usando os pontos calculados analiticamente e por Euler.

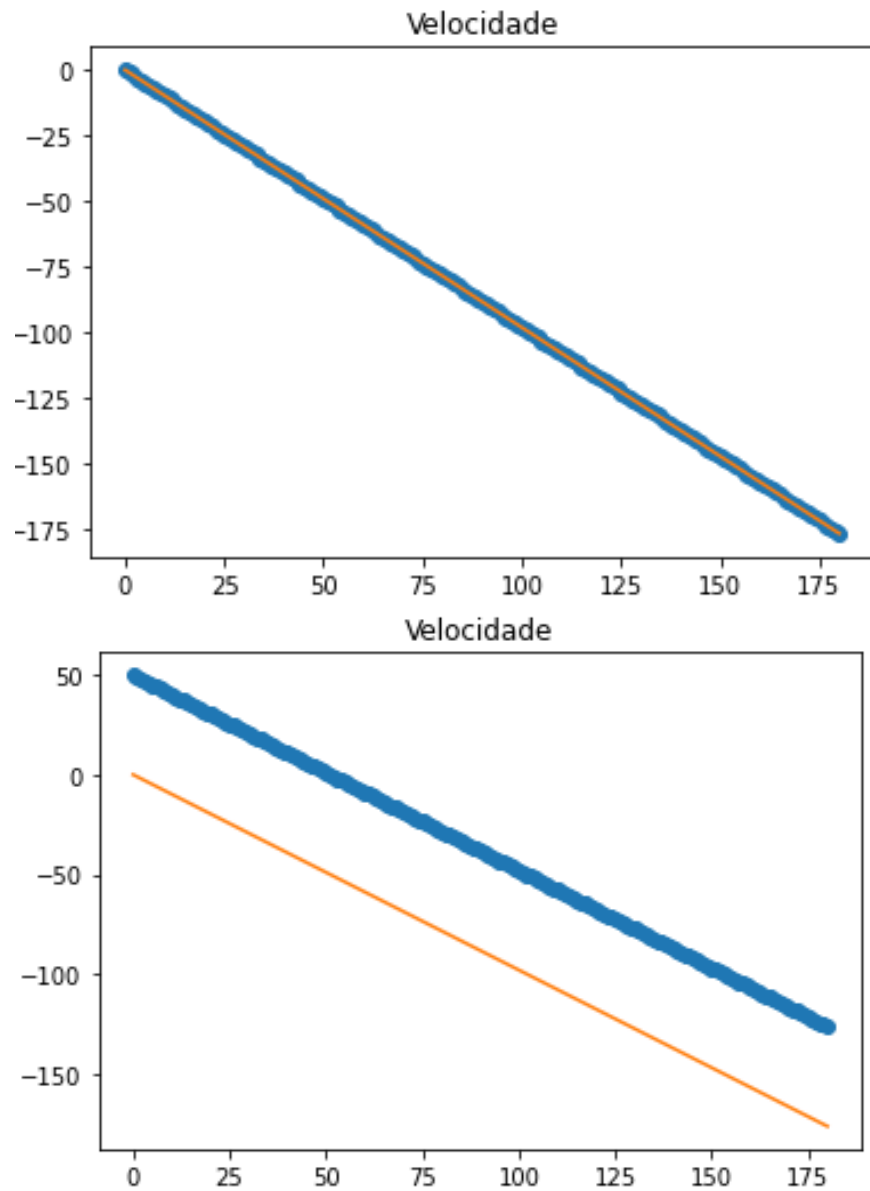


Figura 12: Gráfico comparativo entre a velocidade calculada analiticamente e por Euler. O primeiro representa a comparação dos dois quando a velocidade inicial é igual a 0. No segundo, a velocidade inicial é igual a 50 (note a diferença entre os resultados).

### 4.3 Lançamento de um Projétil

Experimentalmente, nota-se que a trajetória desenvolvida pela partícula no plano  $xOy$  esboça o formato de uma parábola com eixo de simetria vertical cujo ponto de máximo varia de acordo com a inclinação e velocidade da partícula no instante inicial,  $t = 0$ .

Outro fator importante para os resultados obtidos graficamente é o valor de  $\Delta t$ , dado que com valores maiores para este parâmetro, o erro nas aproximações tende a aumentar com o acréscimo de  $t$ . Dentre os parâmetros próprios da representação do movimento (estes são  $\theta$ ,  $\vec{v}_0$ ,  $(x_0, y_0)$ ), cada um deles interfere na trajetória do projétil:

- $\Delta t$ : espaçamento de tempo em que se calcula um novo termo da sequência de pontos  $(x_i, y_i)$ , determina a suavidade da curva exibida graficamente e interfere na precisão da aproximação. Nas figuras 16 e 17, comparam-se aproximações com  $\Delta t$  distintos e é possível notar, então, a disparidade nos aspectos citados (principalmente quanto à precisão das aproximações);
- $\vec{v}_0$ : a velocidade vetorial determina o ponto de máximo da parábola (no formato vetorial, a velocidade  $\vec{v}_0$  leva em conta o ângulo  $\theta$  de lançamento do projétil). Nas figuras 13, 14 e 15 são apresentados gráficos com três velocidades instantâneas iniciais distintas. Note que o ponto de máximo difere em cada uma das figuras e, em especial, quando  $\vec{v}_0 = \vec{0}$ , o ponto inicial de lançamento  $(x_0, y_0)$  é o máximo da parábola que descreve a trajetória da partícula;
- $a$ : aceleração constante igual a  $-g$ , responsável pela parábola ter formato com sua concavidade voltada para baixo (é o coeficiente que acompanha  $t^2$  e, portanto, seu sinal determina a concavidade da parábola).
- $(x_0, y_0)$ : pontos iniciais do trajeto, trocá-los por qualquer outro ponto representa apenas uma translação da parábola no plano.

Em todas as figuras a seguir, os pontos em azul representam os valores calculados pelo método de Euler, enquanto a linha contínua em laranja representa uma interpolação realizada pela ferramenta gráfica para ligar os valores calculados analiticamente.

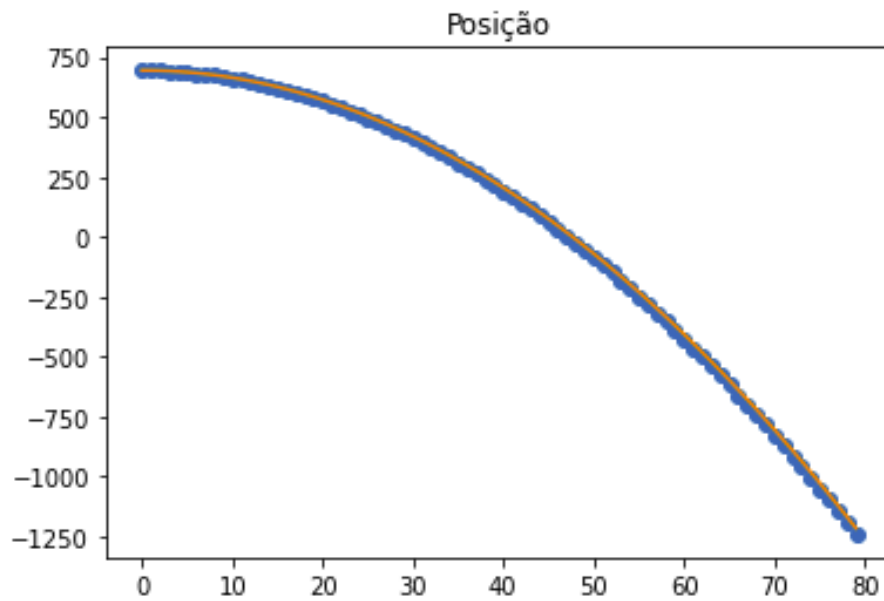


Figura 13: Gráfico do deslocamento de um projétil disparado com velocidade escalar igual a zero e  $\Delta t = 0.2$ .

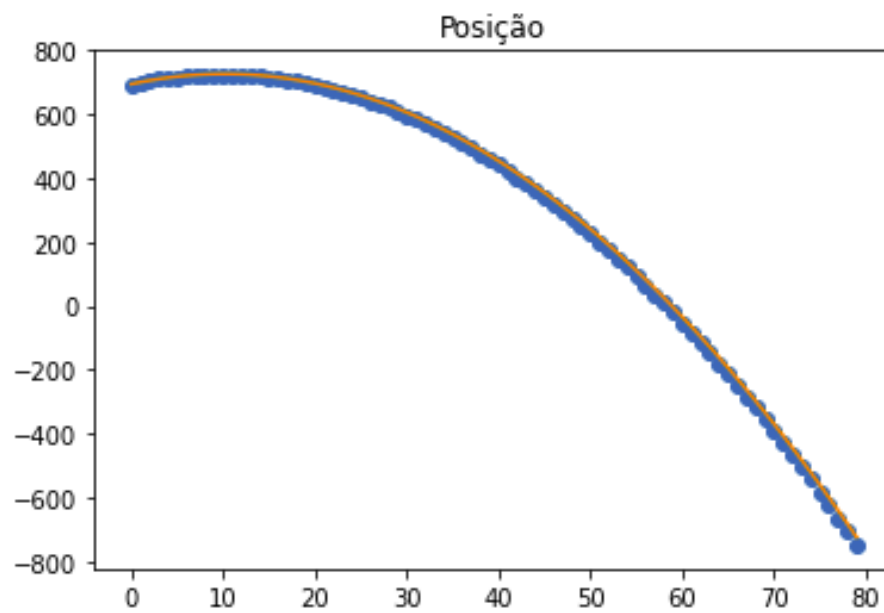


Figura 14: Gráfico do deslocamento de um projétil disparado com velocidade escalar igual a 50m/s e  $\Delta t = 0.2$ .



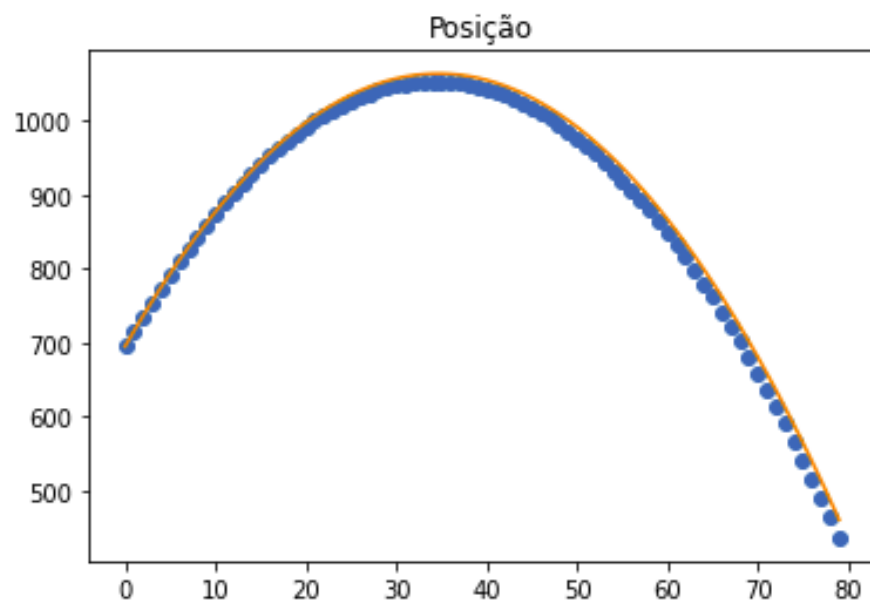


Figura 15: Gráfico do deslocamento de um projétil disparado com velocidade escalar igual a 170m/s e  $\Delta t = 0.2$ .

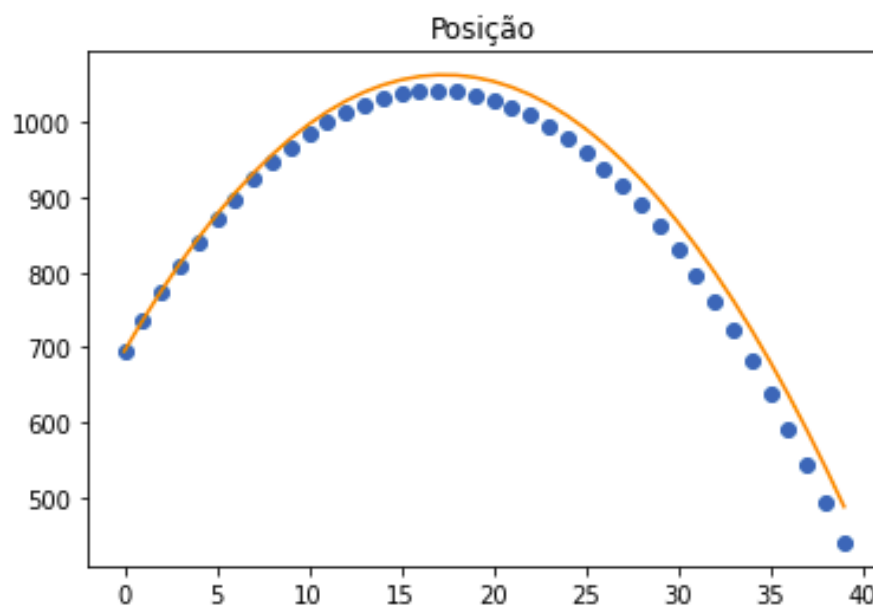


Figura 16: Gráfico do deslocamento de um projétil disparado com velocidade escalar igual a 170m/s e  $\Delta t = 0.5$ .

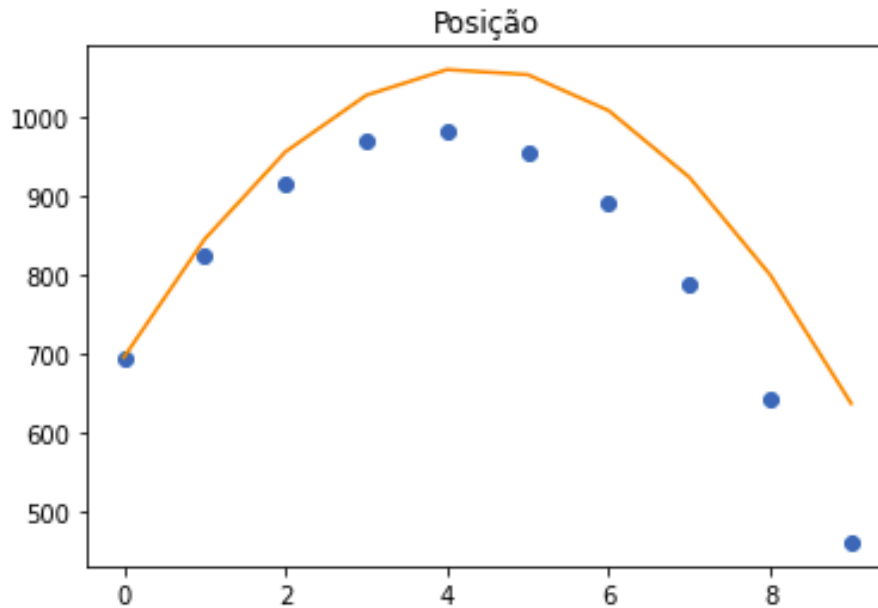


Figura 17: Gráfico do deslocamento de um projétil disparado com velocidade escalar igual a 170m/s e  $\Delta t = 2$ .

## 5 Conclusão

A aplicação do método de Euler para aproximações a partir de equações diferenciais ordinárias apresenta múltiplas simplificações na implementação computacional de integração de funções. Sua eficiência é constatada nos resultados observados na análise experimental dos movimentos modelados, onde se nota que a utilização do método de Euler para aproximar a integral de uma função pode apresentar resultados muito satisfatórios de acordo com um nível de precisão necessário ao problema, podendo esta técnica ser adaptável e melhorada a partir de sua aplicação em intervalos ( $\Delta t$ ) cada vez menores.

Quanto à eficiência deste método de aproximação (isto é, sua precisão e acurácia com relação ao resultado analítico), observam-se erros relativos pequenos próximos ao ponto inicial, mas que podem ter seu comportamento modificado de acordo com o comportamento da função aproximada pelo método. Ainda que os resultados produzidos pelo método sejam diretamente dependentes do tamanho do passo  $\Delta t$  dado, esse tipo de aproximação pode ser estendido a outros métodos de aproximação e consegue produzir uma sequência de pontos que se comporta de modo semelhante à função analítica aproximada.

Portanto, como constatado nas análises experimentais, o método analisado produz resultados compatíveis com o esperado para os movimentos estudados sob diversas condições e pode ser aprimorado para que – a partir de medições mais constantes ou maior poder computacional para desempenhar mais cálculos – produza resultados ainda mais próximos ao valor real e que

aproximem de forma ainda melhor as aplicações modeladas.

## **Contribuições dos Autores**

Todos os autores, em conjunto, realizaram a modelagem de todos os modelos. Agnaldo Nunes realizou a simulação dos modelos M.R.U. e M.R.U.V., além de ter escrito a motivação e os objetivos. Gustavo Santos realizou a simulação do modelo de queda livre, compilou os materiais e métodos empregados no projeto e criou o diagrama de Gantt. Matheus Barbosa realizou a simulação do modelo de lançamento de projétil, além de ter escrito a introdução e conclusão. Todos os autores escreveram, leram, revisaram e aprovaram esse manuscrito. Cada integrante analisou e redigiu o relatório experimental de seu respectivo movimento simulado.