

Universidade Federal de Uberlândia
UFU

Trabalho Computacional

Geometria Analítica e Álgebra Linear

Prof.: Alexandre Campos
Alunos: Rafael Valentim Silva
Matheus José da Costa

Uberlândia
2017

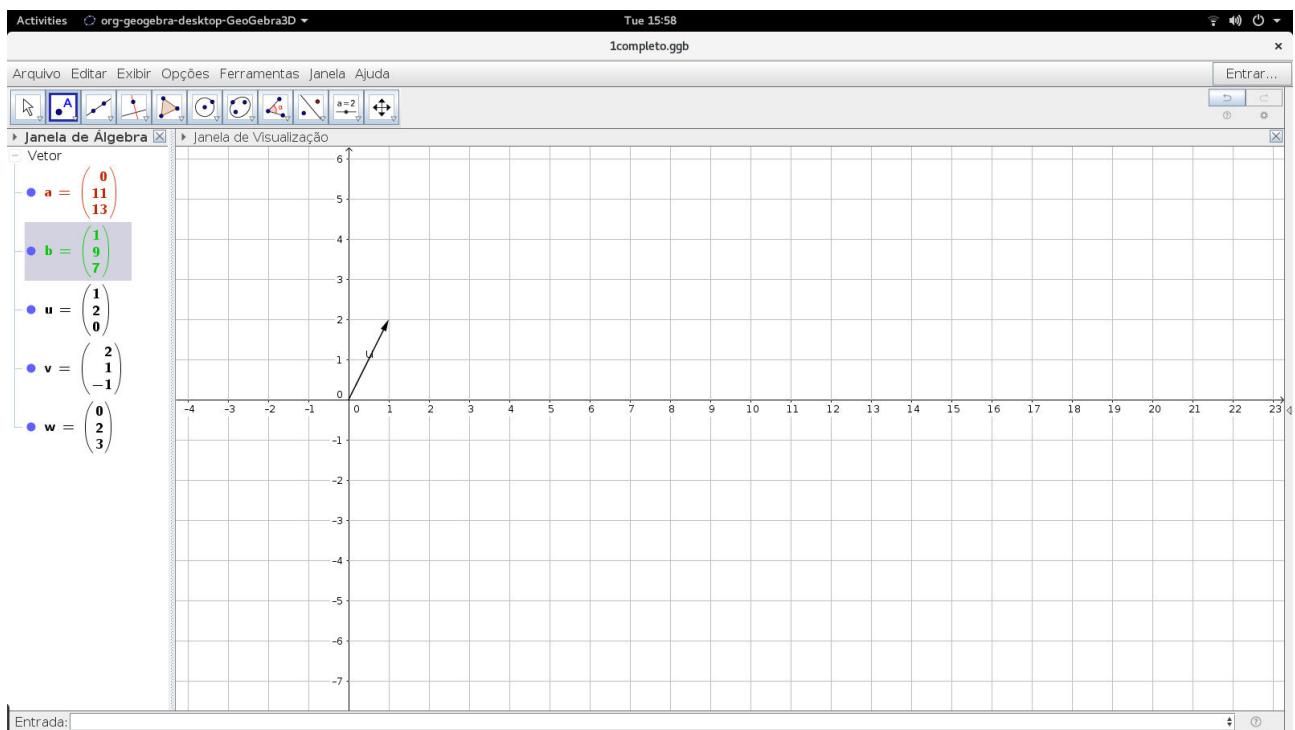
Vetores

1. Soma de vetores e multiplicação por escalar

Dados $\vec{u} = (1, 2, 0)$, $\vec{v} = (2, 1, -1)$ e $\vec{w} = (0, 2, 3)$, achar:

a) $2\vec{u} - \vec{v} + 4\vec{w}$

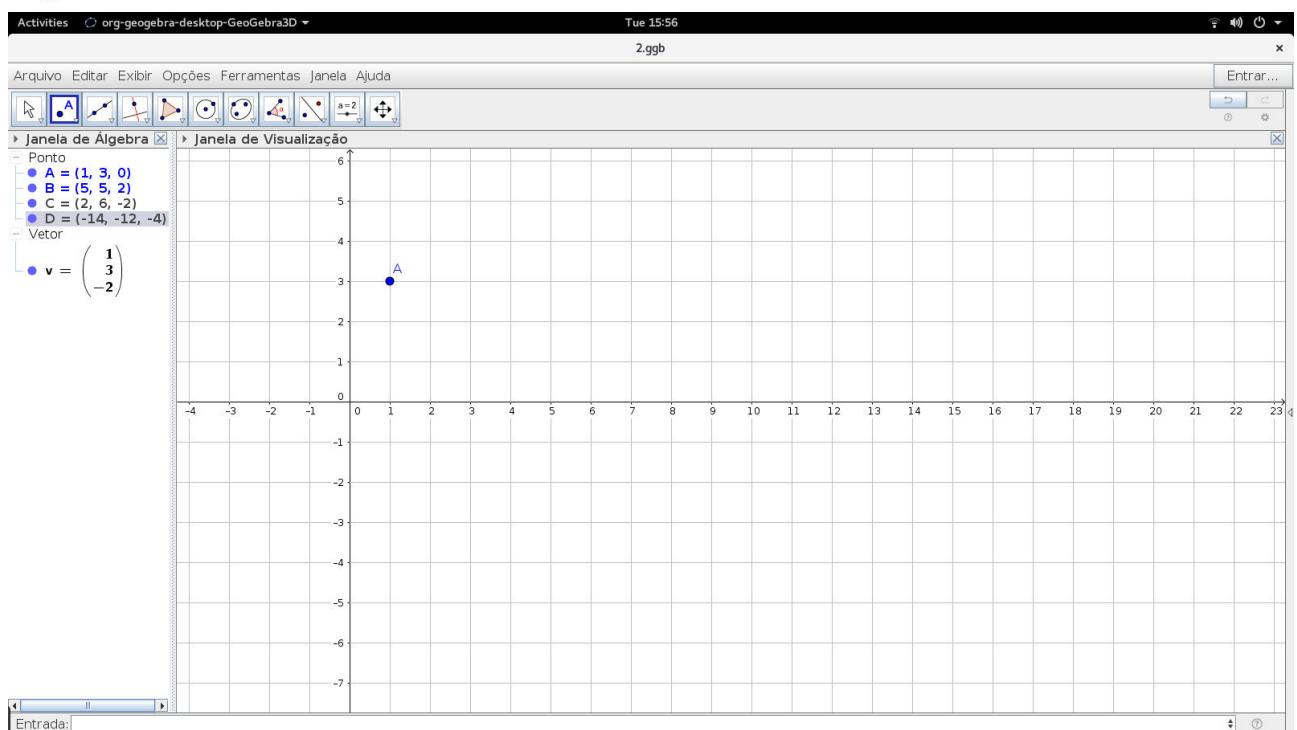
b) $3(\vec{u} + \vec{v}) - 2(2\vec{v} - \vec{w})$



Conhecidos $A = (1, 3, 0)$, $B = (5, 5, 2)$ e $\vec{v} = (1, 3, -2)$ calcular:

a) $A + \vec{v}$

b) $2A - 3B - \vec{v}$



2. Ângulo

```
rafael@rafael-Inspiron-5558:/media/rafael/5C075F69460F2978/GAAL/Vetores$ ./angulo
*****
Calculo do Angulo Entre Vetores
*****

Digite o primeiro vetor(x,y,z): 1,1,4
Digite o segundo vetor(x,y,z): -1,2,2
*****
0 angulo entre os dois vetores eh de aproximadamente 45.000
*****
Pressione 0 para sair ou qualquer tecla pra continuar...
```

LF UTF-8 C

3. Módulo

```
rafael@rafael-Inspiron-5558:/media/rafael/5C075F69460F2978/GAAL/Vetores$ ./modulo
*****
Calculo do Modulo de Um Vtor
*****

Digite o vtor(x,y,z): 1 4 3
*****
||v|| = 5.099
*****
Pressione 0 para sair ou qualquer tecla pra continuar...
```

LF UTF-8 C

4. Produto Escalar

- 1) Mostrar que os seguintes pares de vetores são ortogonais:
 - a) $\vec{u} = (1, -2, 3)$ e $\vec{v} = (4, 5, 2)$
 - b) \vec{i} e \vec{j}

```
rafael@rafael-Inspiron-5558:/media/rafael/5C075F69460F2978/GAAL/Vetores$ ./produto_escalar
*****
Calculo do Produto Escalar
*****

Digite o primeiro vtor(x,y,z): 1,-2,3
Digite o segundo vtor(x,y,z): 4,5,2
*****
<U,V> = 0.000
*****
Pressione 0 para sair ou qualquer tecla pra continuar...
```



```
*****  
Calculo do Produto Escalar  
*****  
  
Digite o primeiro vtor(x,y,z): 1,0,0  
Digite o segundo vtor(x,y,z): 0,1,0  
  
*****  
<U,V> = 0.000  
*****  
  
Pressione 0 para sair ou qualquer tecla pra continuar...
```

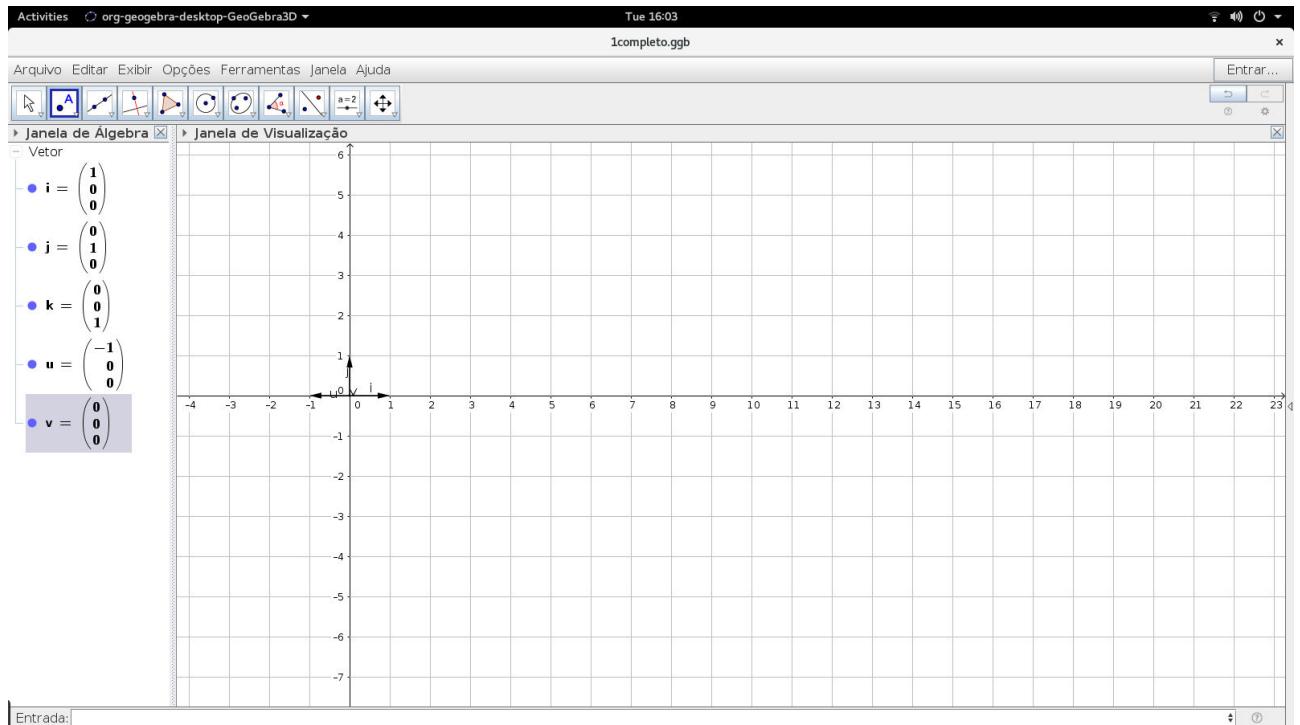
LF UTF-8 C

5. Produto Vetorial

Efetuar:

a) $(\vec{i} \times \vec{k}) \times (\vec{i} \times \vec{j}) =$

b) $(\vec{i} \times \vec{k}) \times (\vec{k} \times \vec{j}) \times (\vec{j} \times \vec{j}) =$

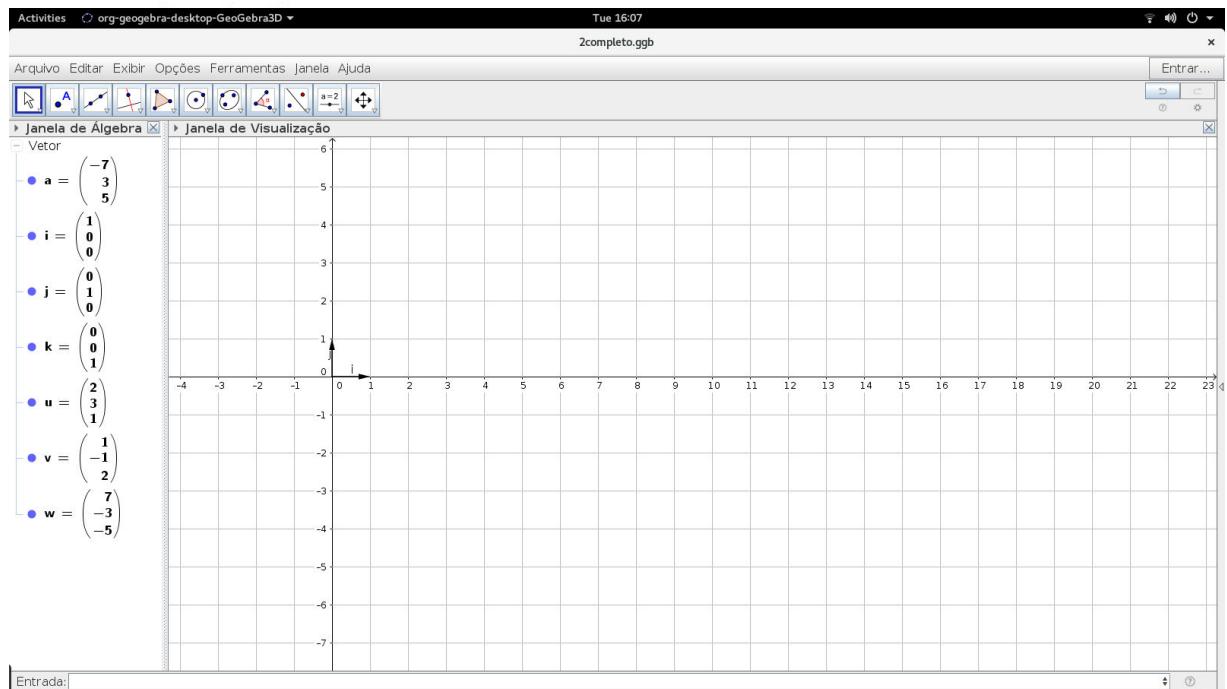


Conhecidos $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$ e $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$, pede-se:

a) $\vec{u} \times \vec{v}$

Resp.: $7\vec{i} - 3\vec{j} - 5\vec{k}$

b) $\vec{v} \times \vec{u}$

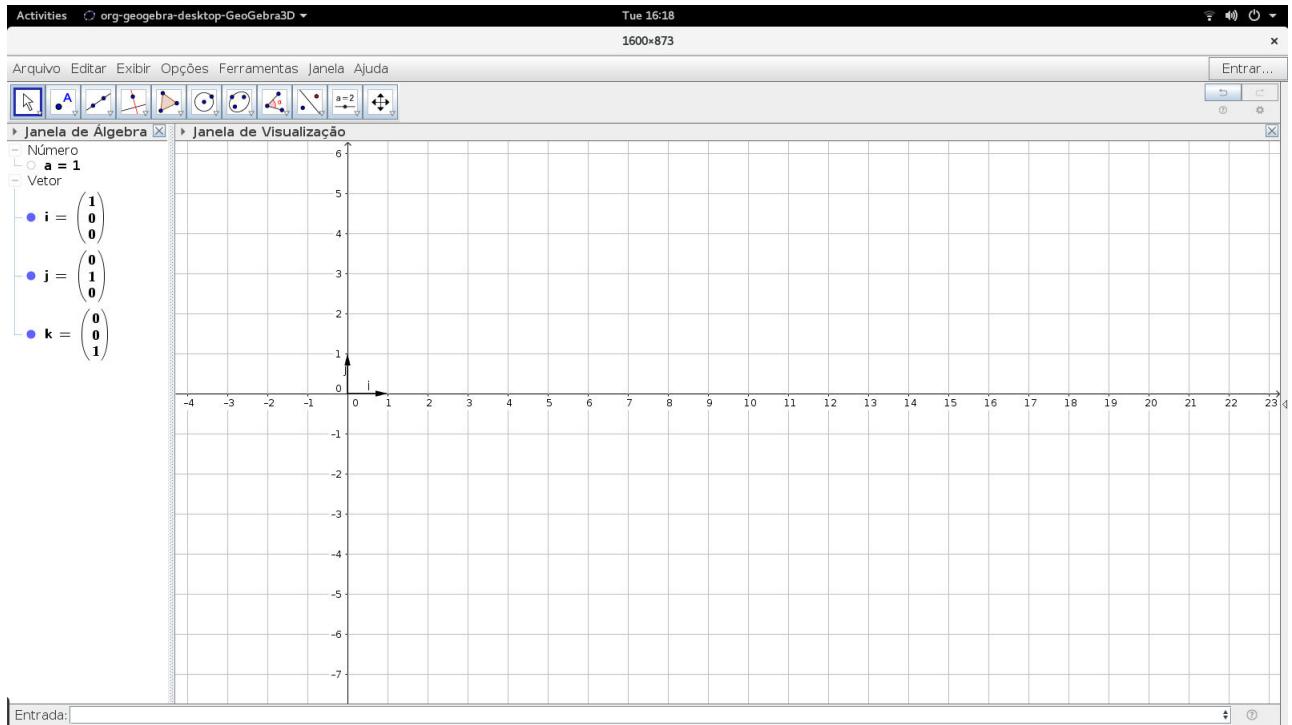


6. Produto Misto

9. Qual o volume do cubo determinado pelos \hat{i} , \hat{j} e \hat{k} ?

Solução:

$$V = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1 \text{ u.v.} \therefore V = 1 \text{ u.v}$$



12. Calcular o volume do tetraedro de base ABC e vértice P, sendo A(2, 0, 0), B(2, 4, 0), C(0, 3, 0) e P(2, -2, 9).

Qual a altura relativa ao vértice P?

Solução:

Cálculo do Volume:

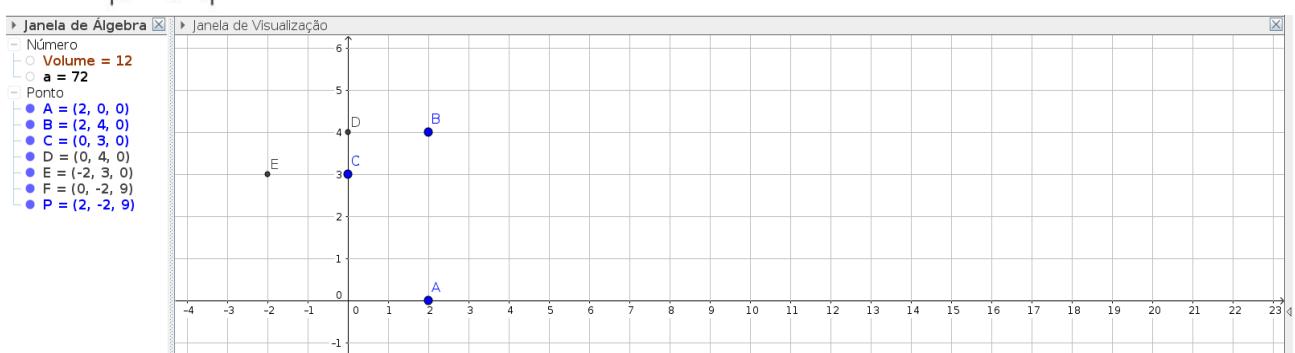
$$A(2, 0, 0) \quad B(2, 4, 0) \quad C(0, 3, 0) \quad P(2, -2, 9)$$

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (0, 4, 0)$$

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (-2, 3, 0)$$

$$\overrightarrow{AP} = P - A = (0, -2, 9)$$

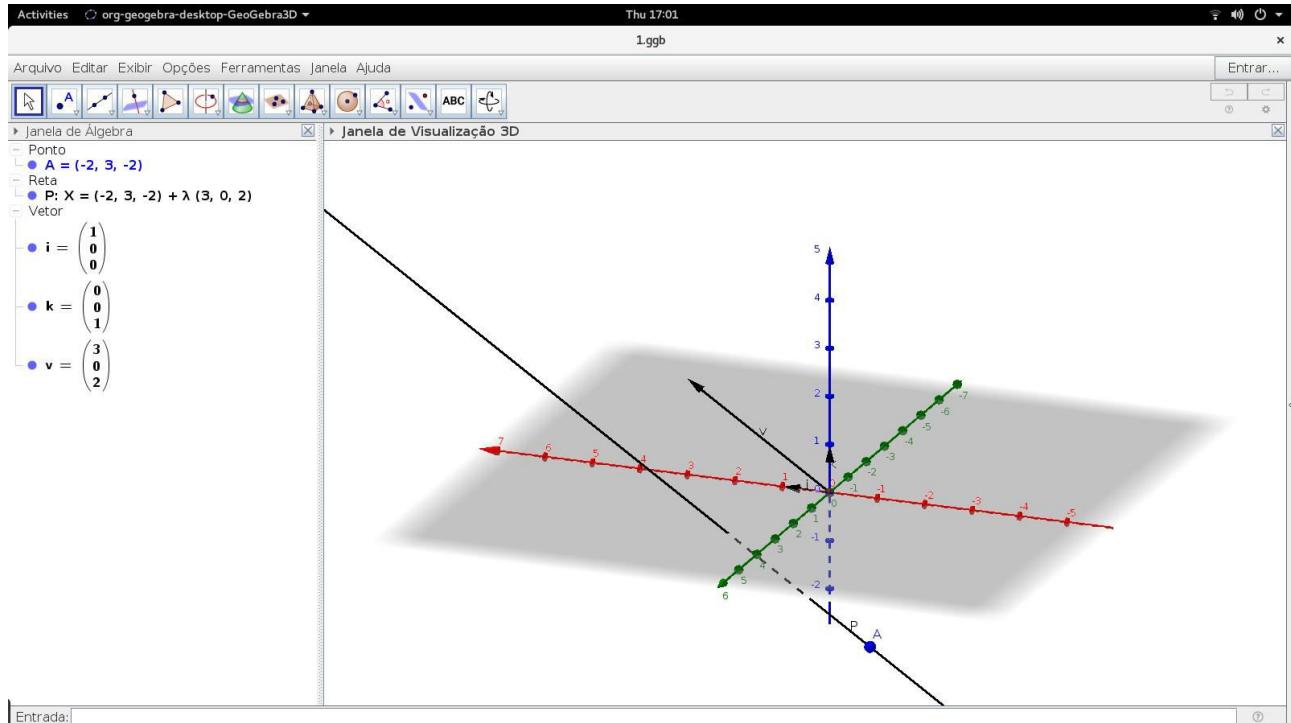
$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 0 & 4 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 9 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \times (72) = 12 \therefore V = 12 \text{ u.v}$$



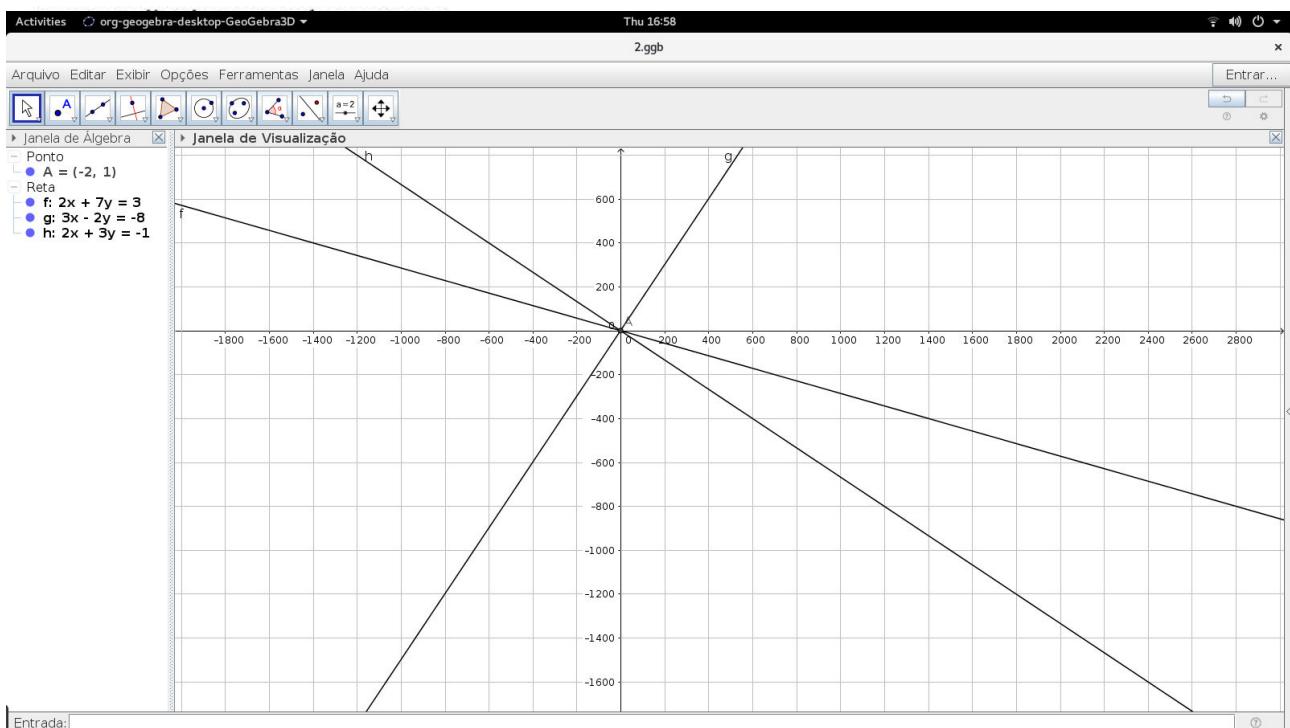
Retas

7. Posição Relativa

- 01. Determinar as equações da reta que passa pelo ponto $A(-2, 3, -2)$ e tem a direção do vetor $\vec{v} = 3\vec{i} + 2\vec{k}$.**



- 07. As retas (r) $2x + 7y = 3$ e (s) $3x - 2y = -8$ se cortam num ponto P. Achar a equação da reta**



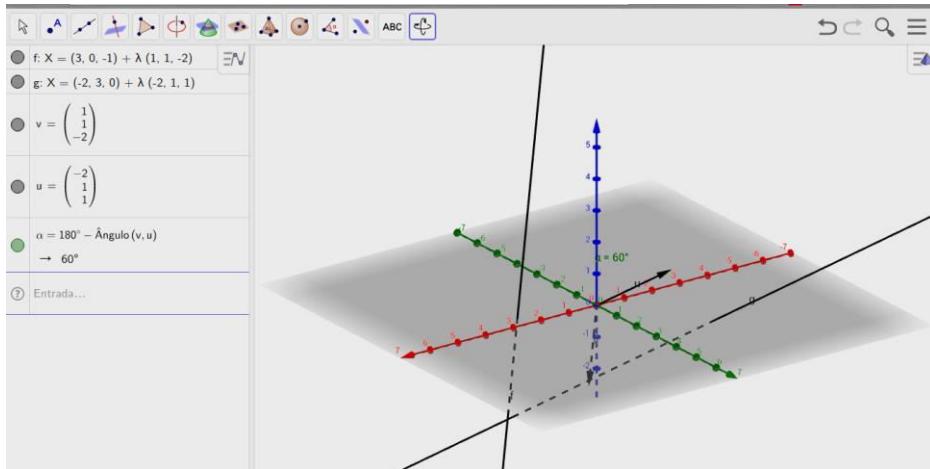
8. Ângulo entre duas retas

Calcular o ângulo entre as retas

$$r_1: \begin{cases} x = 3 + t \\ y = t \\ z = -1 - 2t \end{cases}$$

e

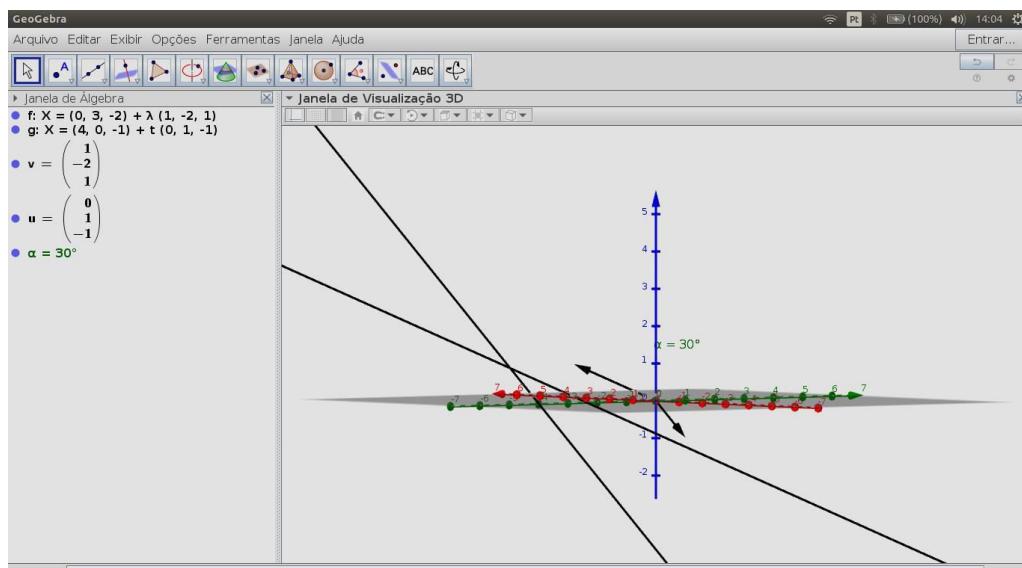
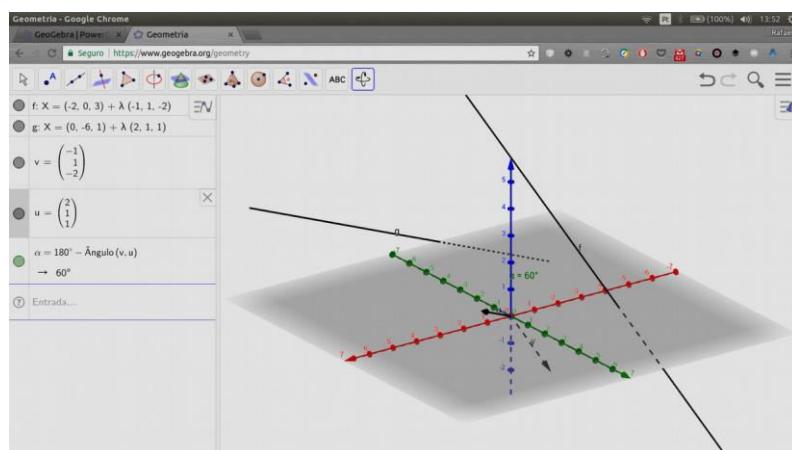
$$r_2: \frac{x + 2}{-2} = \frac{y - 3}{1} = \frac{z}{1}$$



21) Determinar o ângulo entre as seguintes retas:

a) $r_1: \begin{cases} x = -2 - t \\ y = t \\ z = 3 - 2t \end{cases}$ e $r_2: \frac{x}{2} = \frac{y + 6}{1} = \frac{z - 1}{1}$

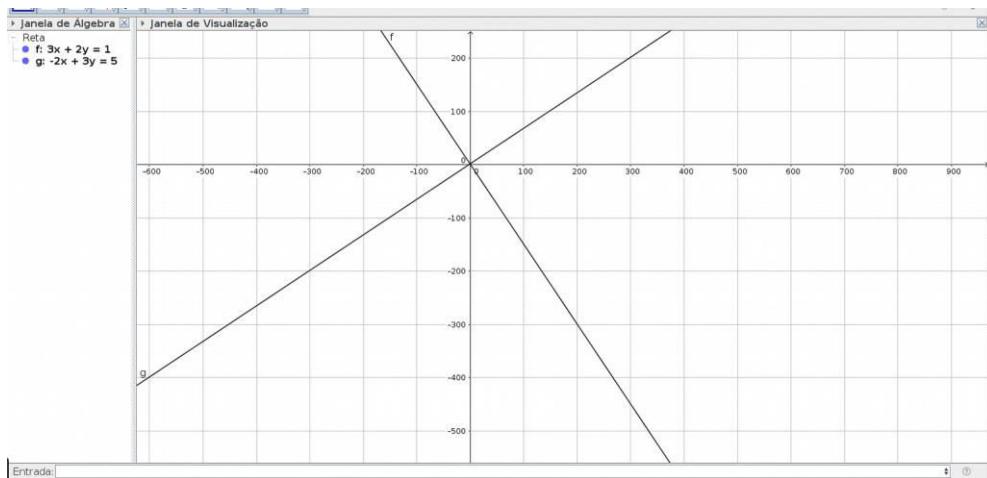
b) $r_1: \begin{cases} y = -2x + 3 \\ z = x - 2 \end{cases}$ e $r_2: y = \frac{z + 1}{-1}; x = 4$



9. Representação

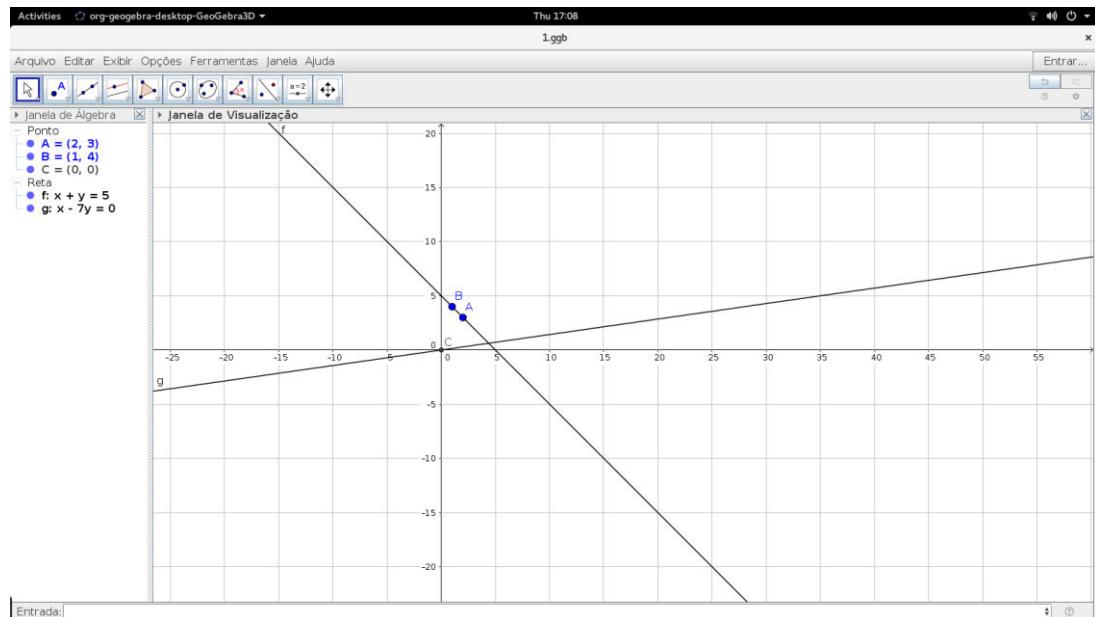
08. As retas $3x + 2y - 1 = 0$ e $-4x + 6y - 10 = 0$ são:

- a) paralelas
- b) coincidentes
- c) perpendiculares
- d) concorrentes e não perpendiculares
- e) n.d.a.



09. (USP) A equação da reta passando pela origem e paralela à reta determinada pelos pontos A(2; 3) e B(1; -4) é:

- a) $y = x$
- b) $y = 3x - 4$
- c) $x = 7y$
- d) $y = 7x$
- e) n.d.a



Planos

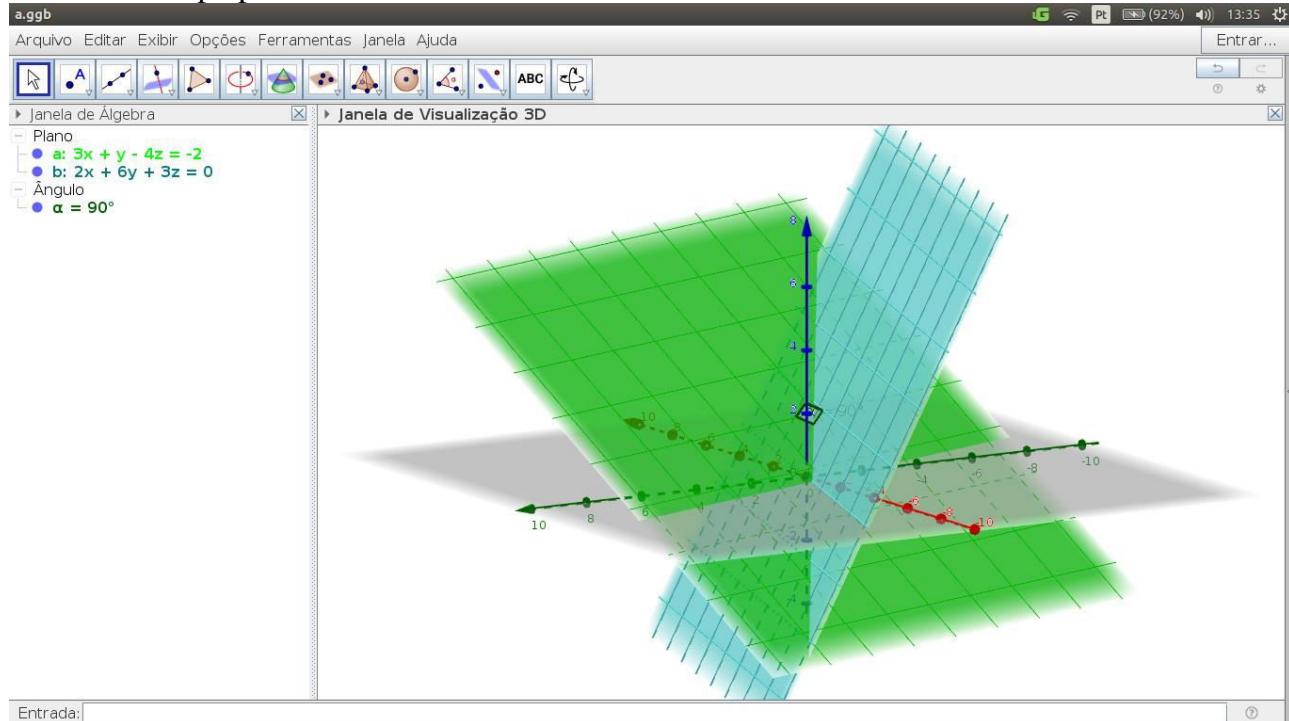
10. Posição Relativa

Verificar se π_1 e π_2 são planos perpendiculares:

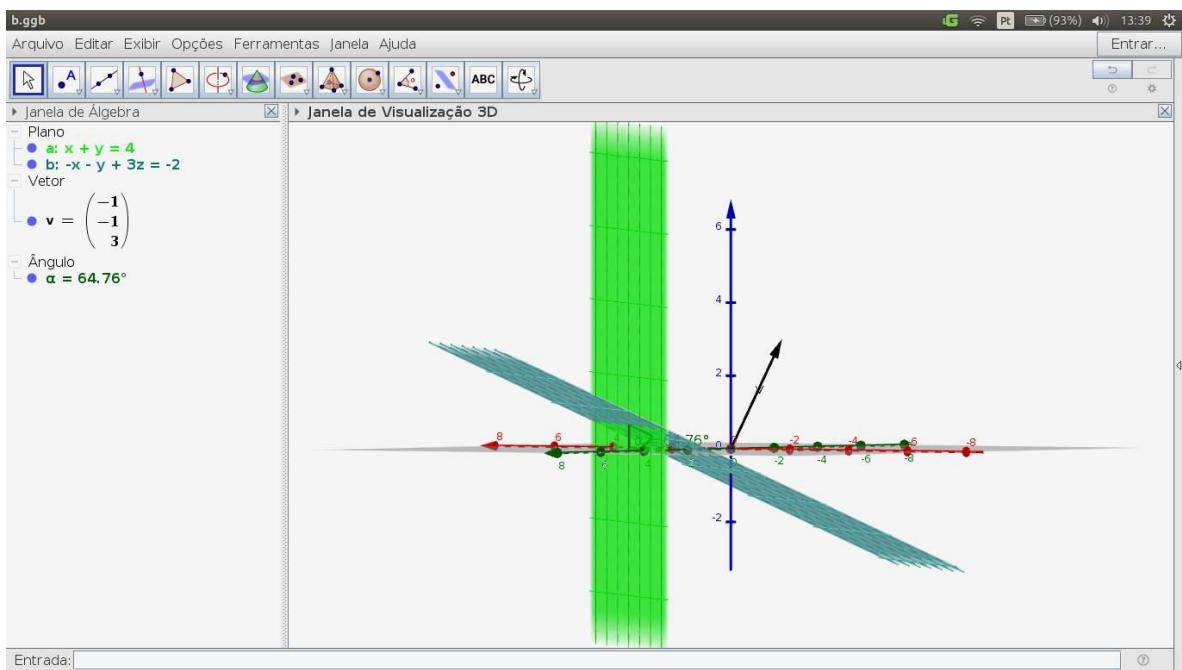
a) $\pi_1: 3x + y - 4z + 2 = 0$ e $\pi_2: 2x + 6y + 3z = 0$

b) $\pi_1: x + y - 4 = 0$ e $\pi_2: \begin{cases} x = 2 - h + 2t \\ y = h + t \\ z = t \end{cases}$

a. π_1 e π_2 são perpendiculares.



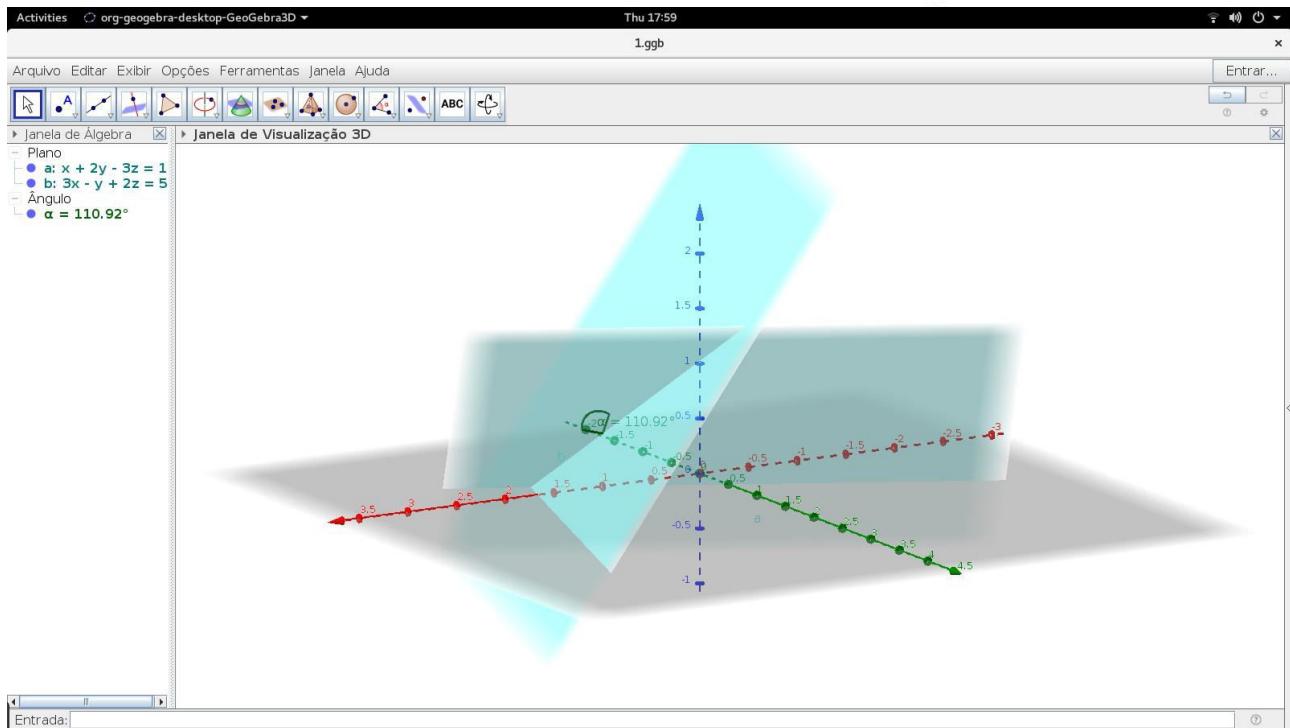
b. π_1 e π_2 não são perpendiculares, contudo são congruentes.



11. Ângulo entre planos

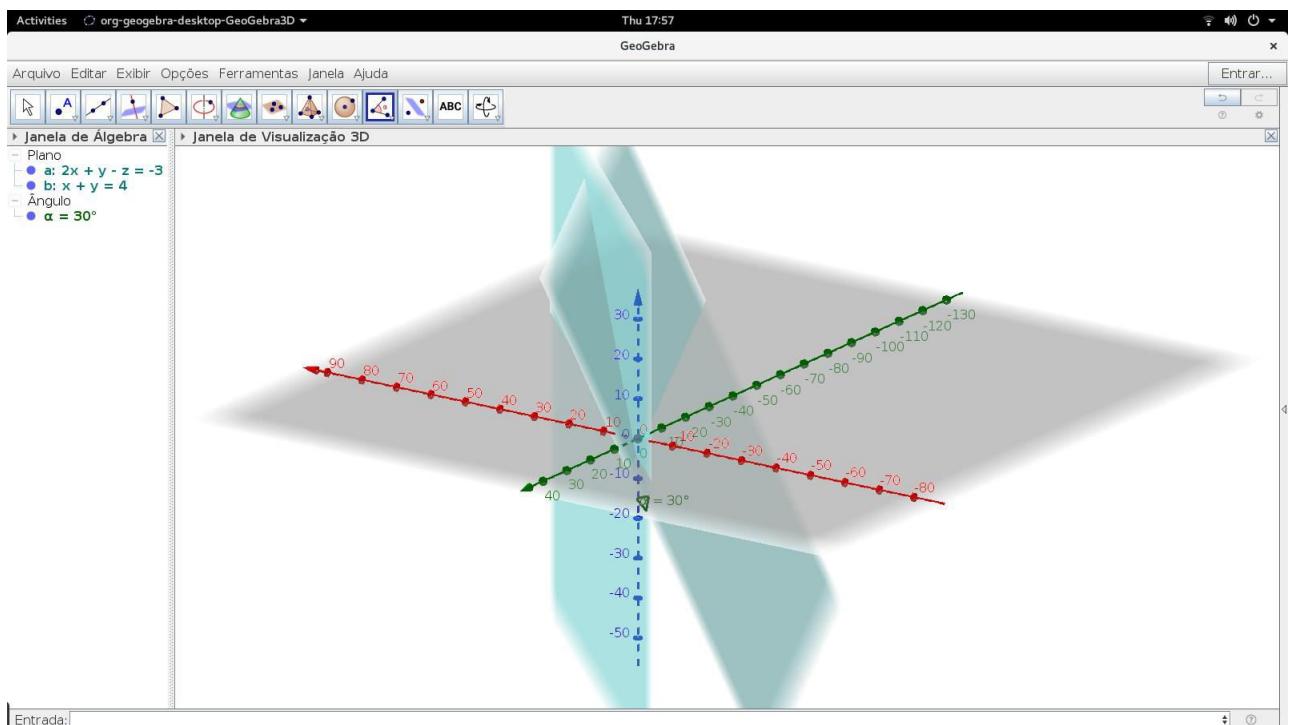
01. Dados os planos $\alpha_1: x + 2y - 3z - 1 = 0$ e $\alpha_2: 3x - y + 2z - 5 = 0$, obter:

- a equação dos planos bissetores;
- o ângulo agudo entre os planos α_1 e α_2 .



Determinar o ângulo entre os planos

$$\pi_1: 2x + y - z + 3 = 0 \quad \text{e} \quad \pi_2: x + y - 4 = 0.$$

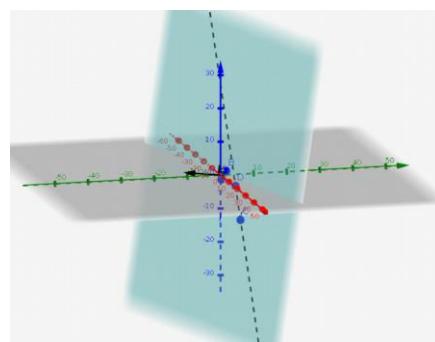
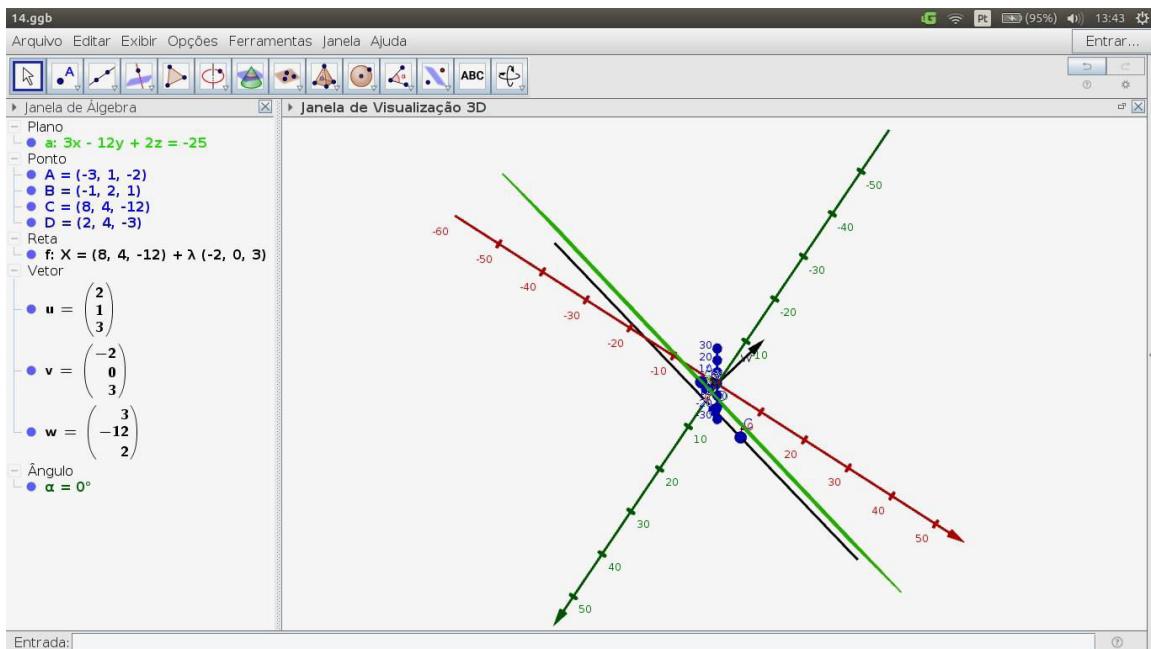
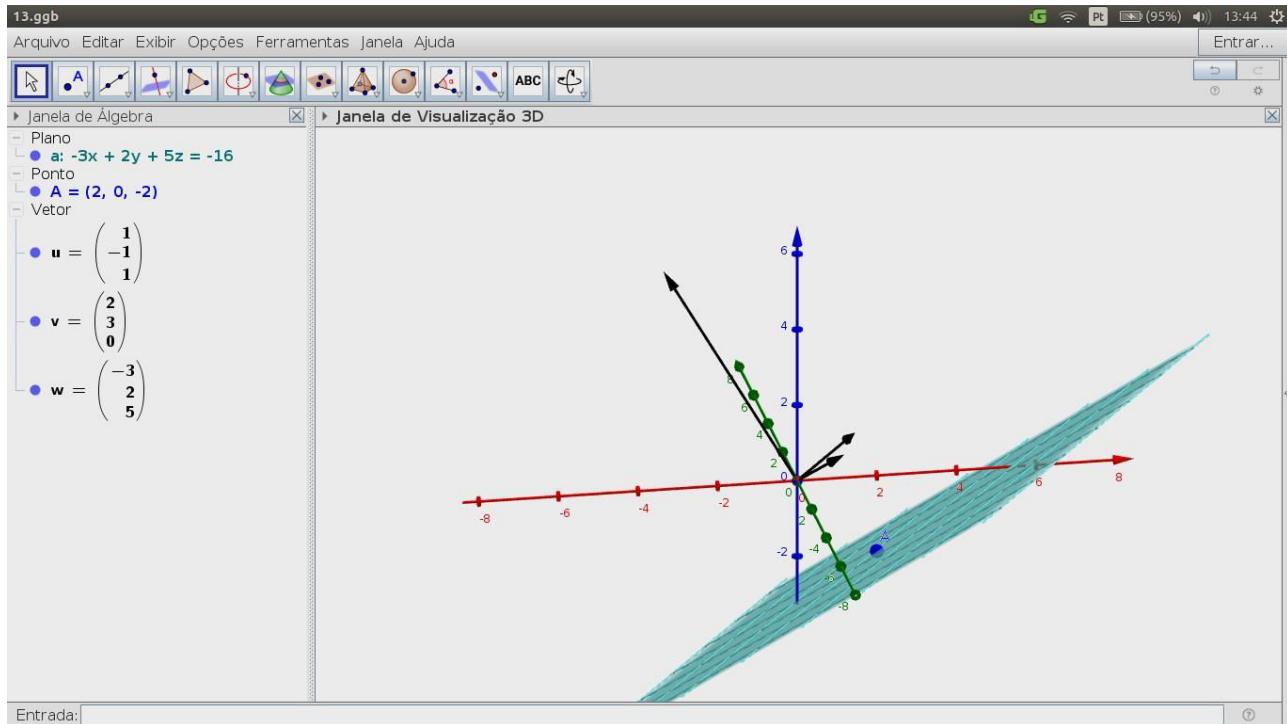


12. Representação

13) O plano passa por $A(2, 0, -2)$ e é paralelo aos vetores $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ e $\vec{v} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$.

14) O plano passa pelos pontos $A(-3, 1, -2)$ e $B(-1, 2, 1)$ e é paralelo à reta

$$r: \frac{x}{2} = \frac{z}{-3}; y = 4.$$

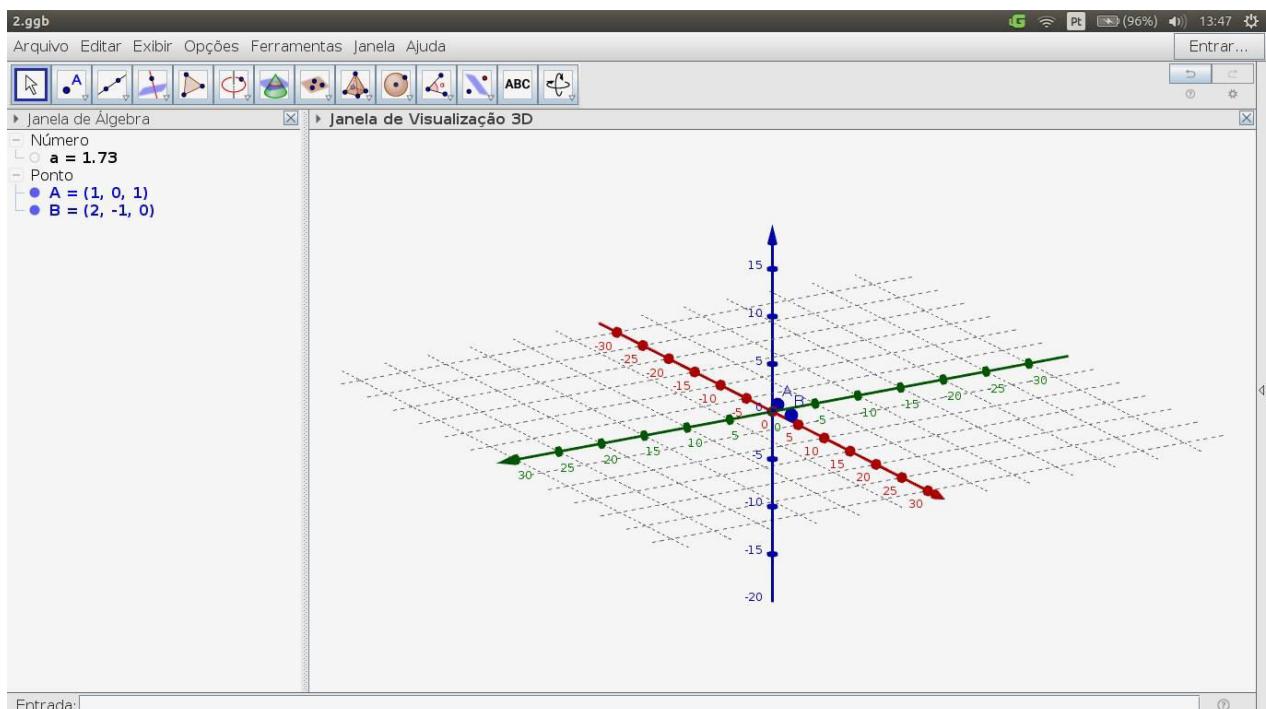
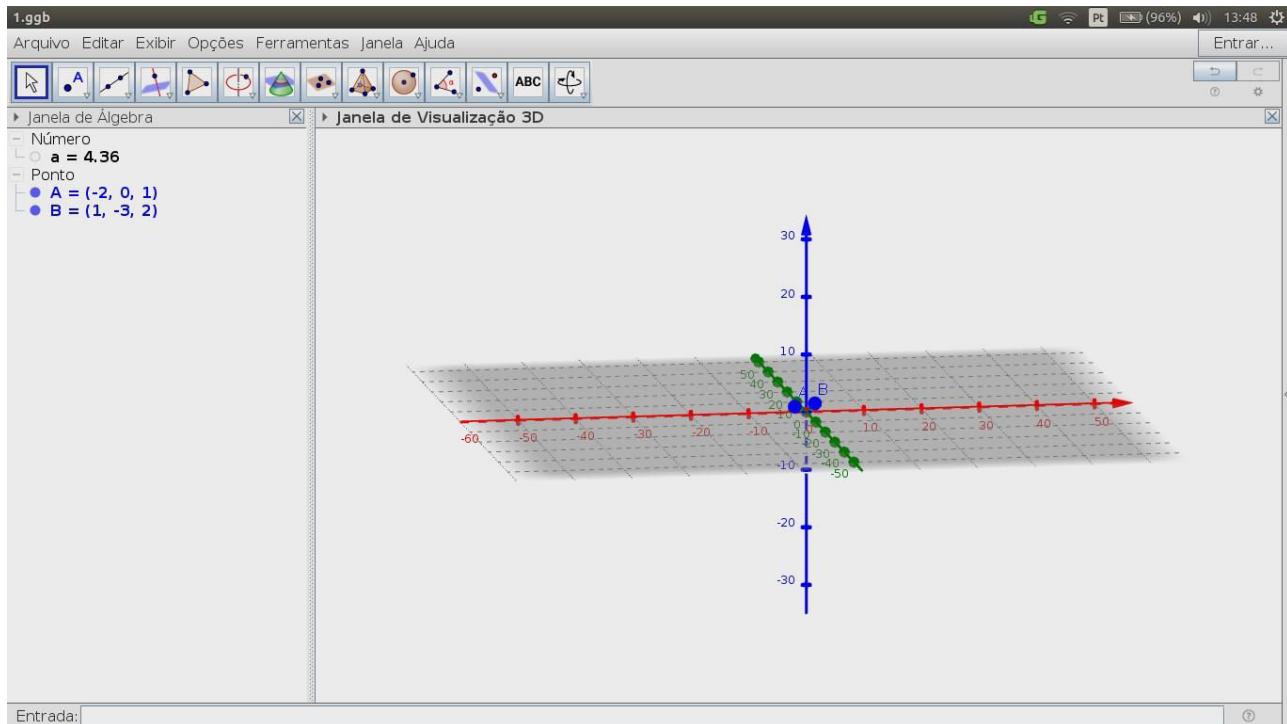


Distâncias

13. Entre Pontos

Achar a distância de P_1 a P_2 , nos casos:

- 1) $P_1(-2, 0, 1)$ e $P_2(1, -3, 2)$
- 2) $P_1(1, 0, 1)$ e $P_2(2, -1, 0)$

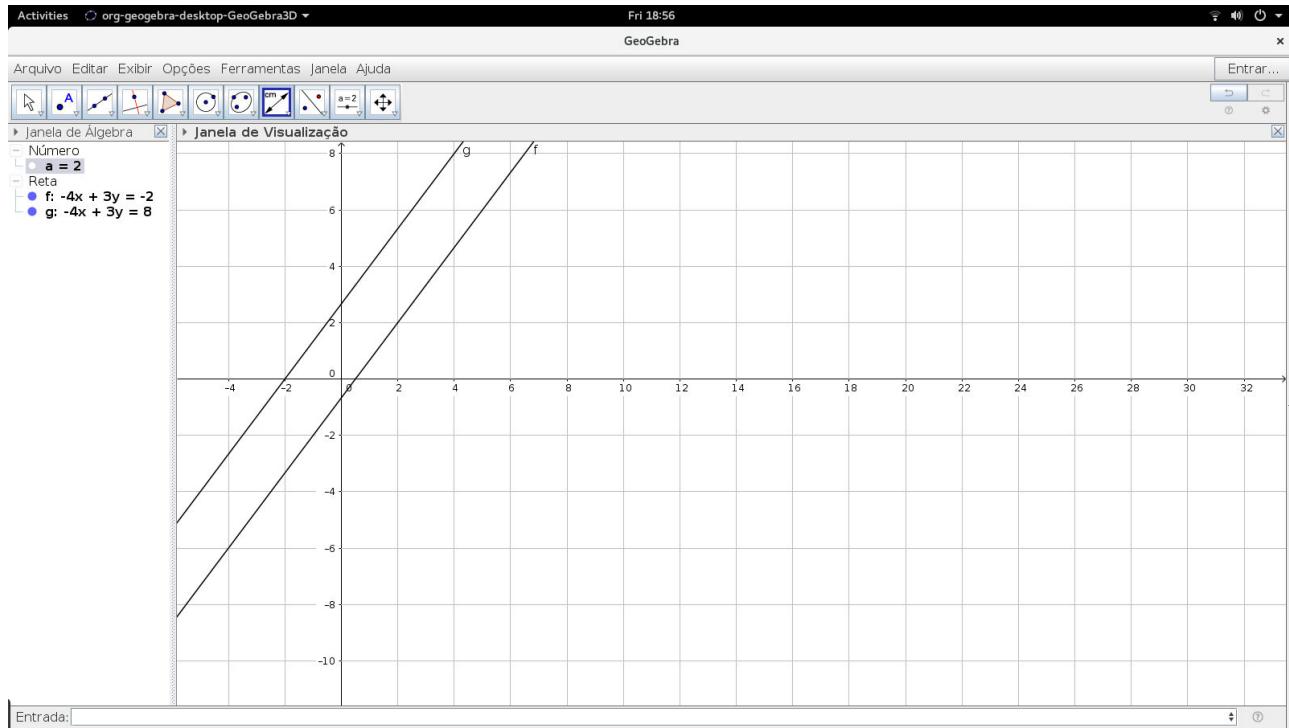


14. Entre Retas

Calcular a distância entre as retas:

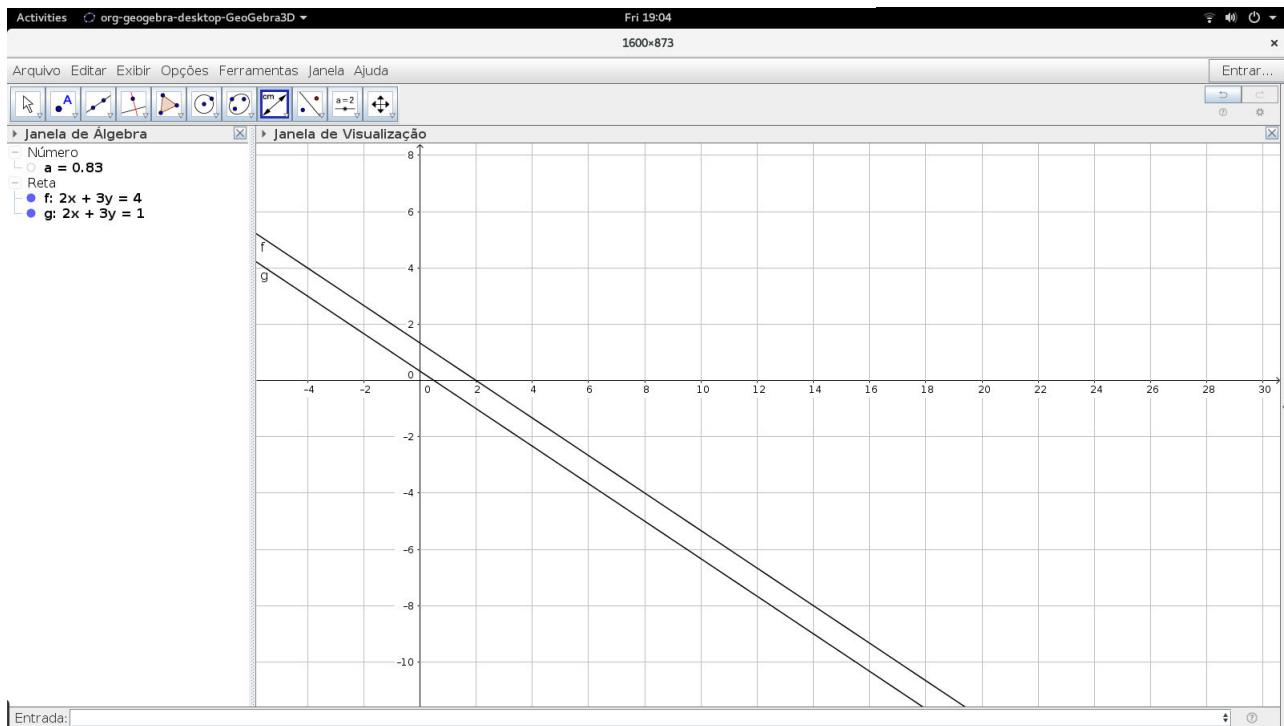
$$r: 2x + 3y = 4$$

$$r': 2x + 3y = 1$$



(Fuvest-SP)

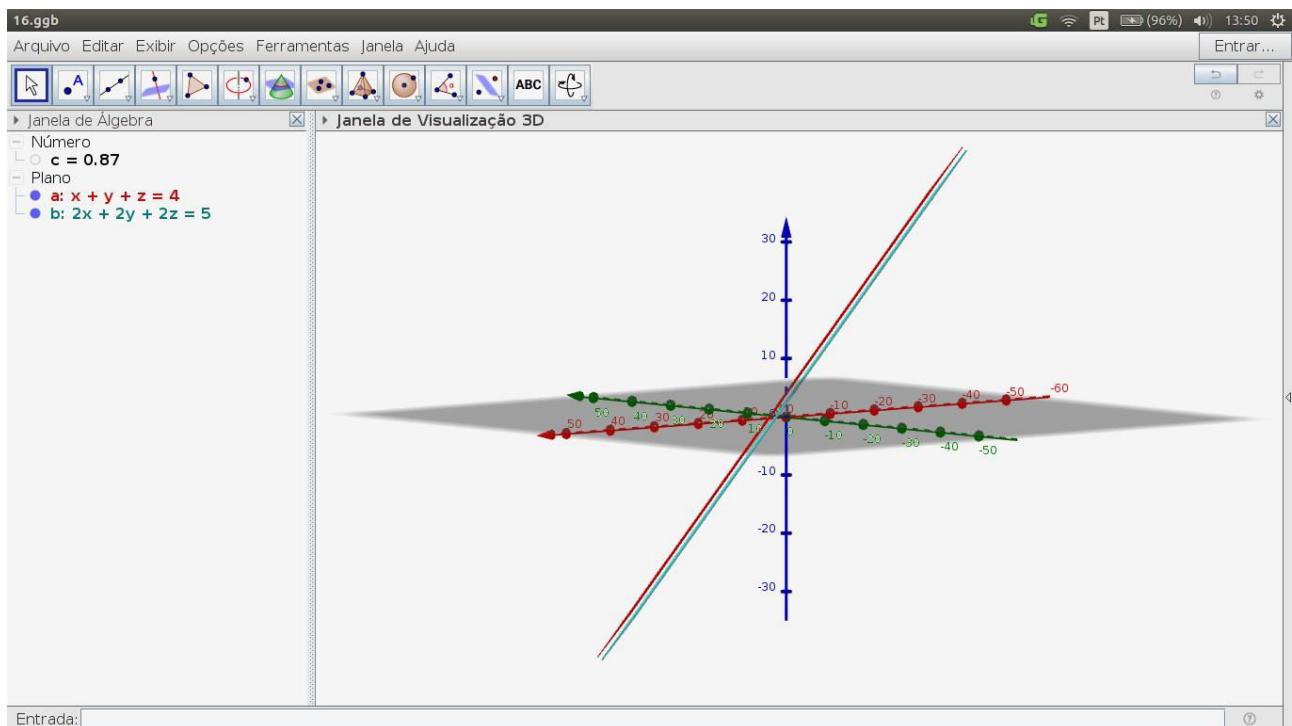
Calcule a distância entre a reta r_1 , de equação $3y = 4x - 2$, e a reta r_2 , de equação $3y = 4x + 8$, sabendo que $r_1 \parallel r_2$.



15. Entre Planos

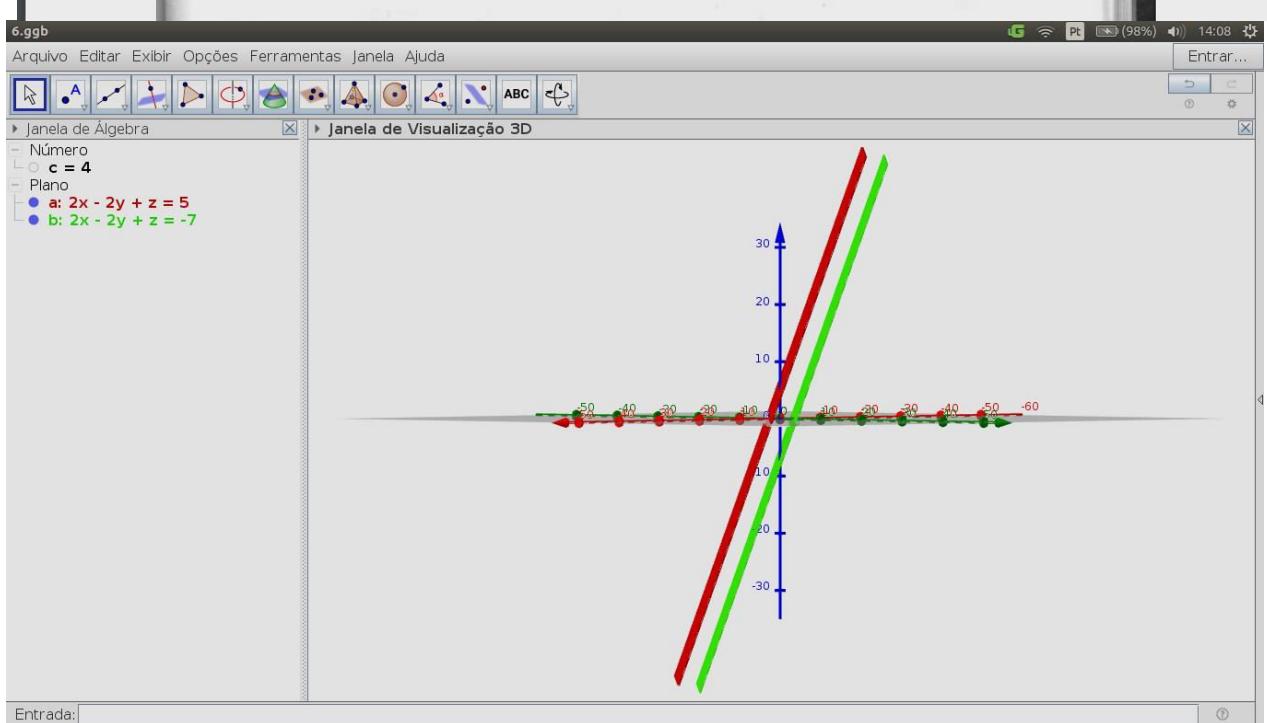
16) Calcular a distância entre os planos paralelos

$$\pi_1 : x + y + z = 4 \quad \text{e} \quad \pi_2 : 2x + 2y + 2z = 5$$



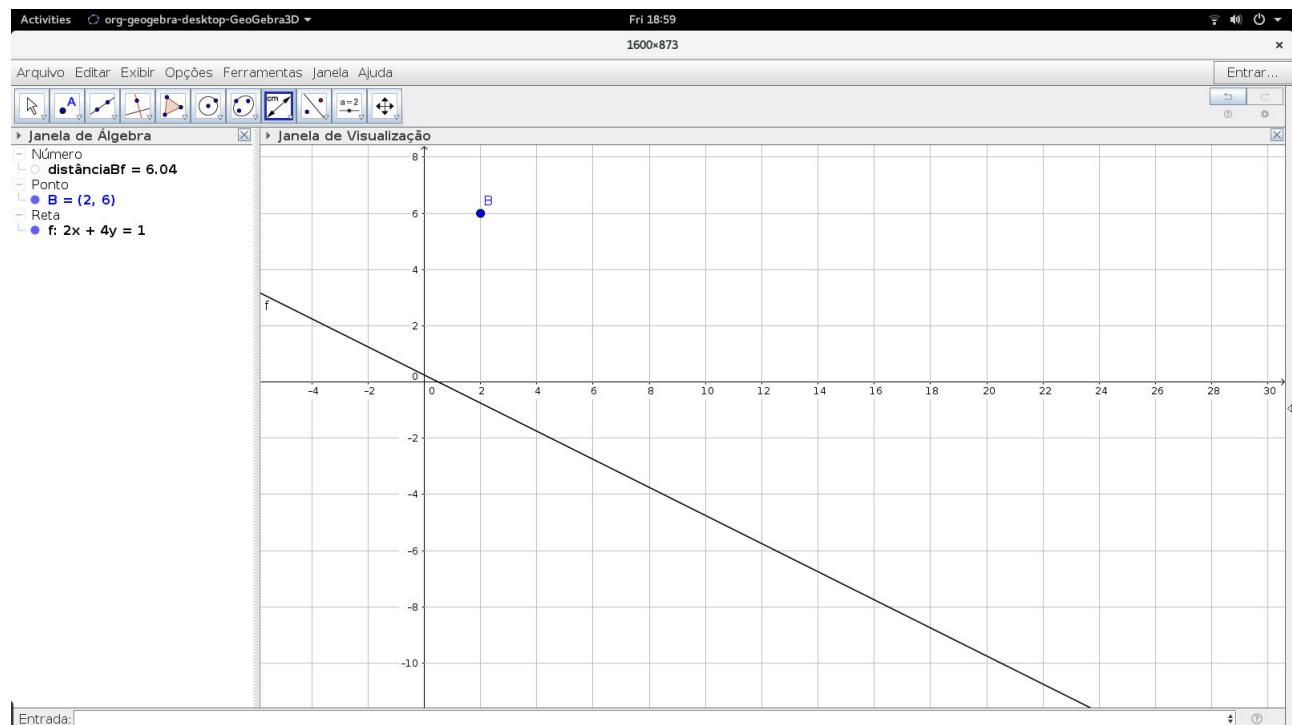
6) Calcular a distância entre os planos

$$\pi_1: 2x - 2y + z - 5 = 0 \quad \text{e} \quad \pi_2: 4x - 4y + 2z + 14 = 0$$

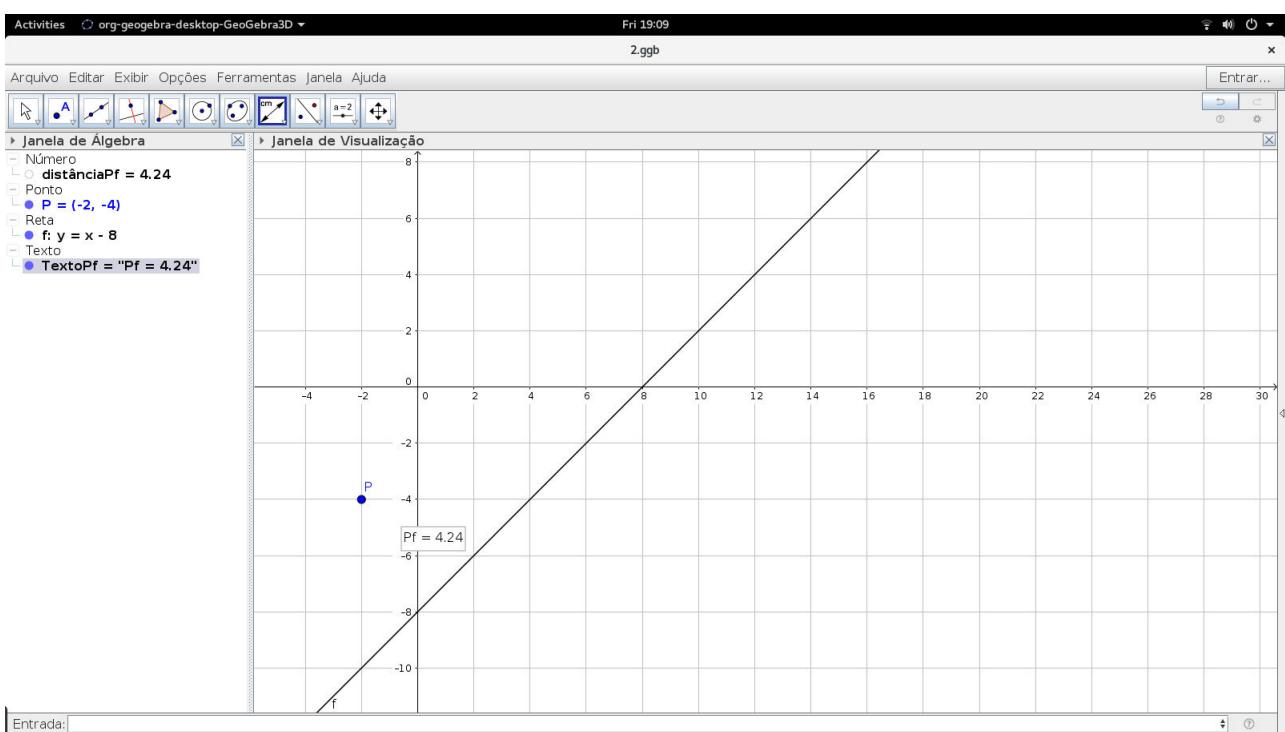


16. Entre Ponto e Reta

Dado o ponto B com coordenadas (2, 6) e reta s: $2x + 4y - 1 = 0$, determine a distância entre eles de acordo com os conceitos e fundamentos da Geometria Analítica.



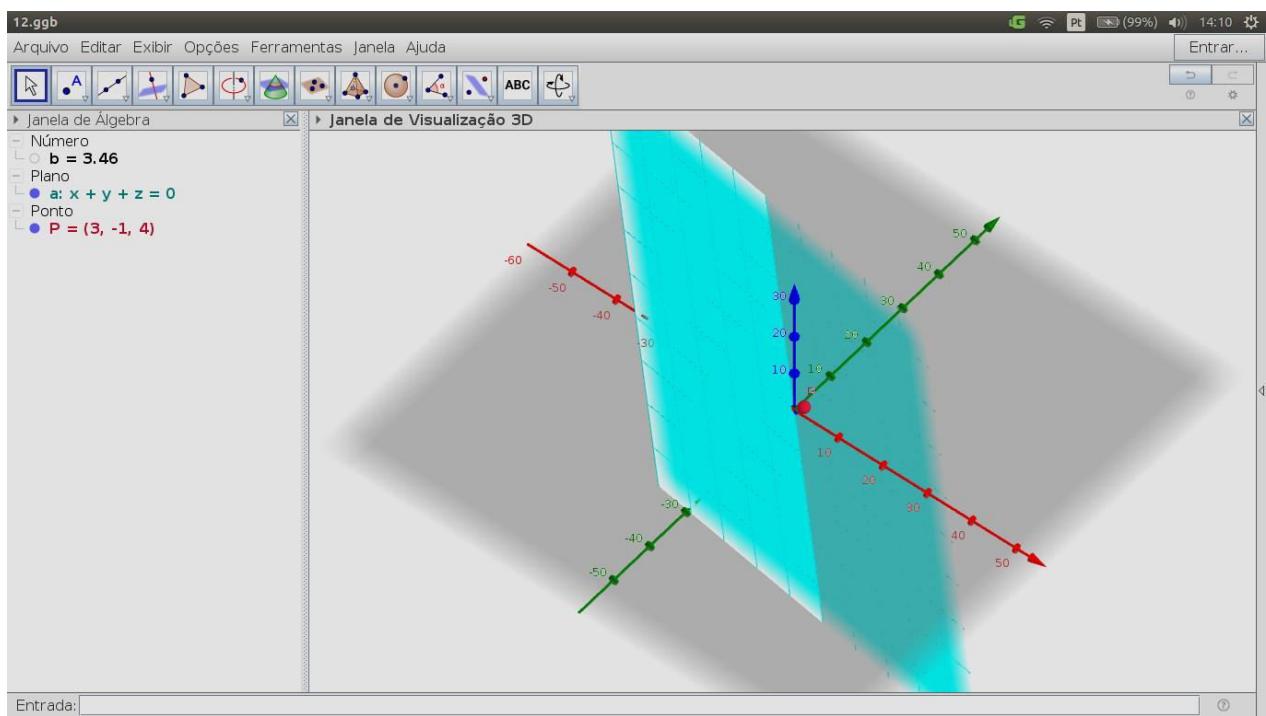
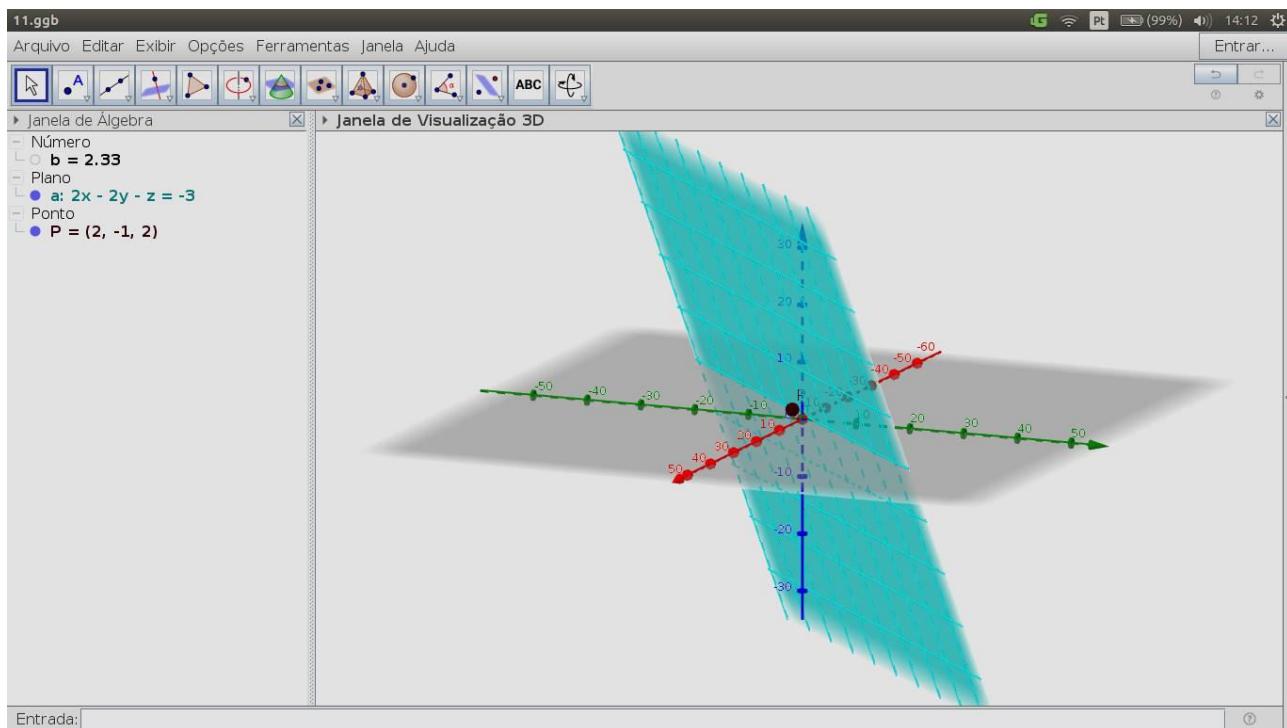
Calcule a distância da reta P à reta r, em cada um dos casos: • P(-2, -4) e r: $y = x - 8$



17. Entre Ponto e Plano

Achar a distância do ponto P ao plano π , nos casos:

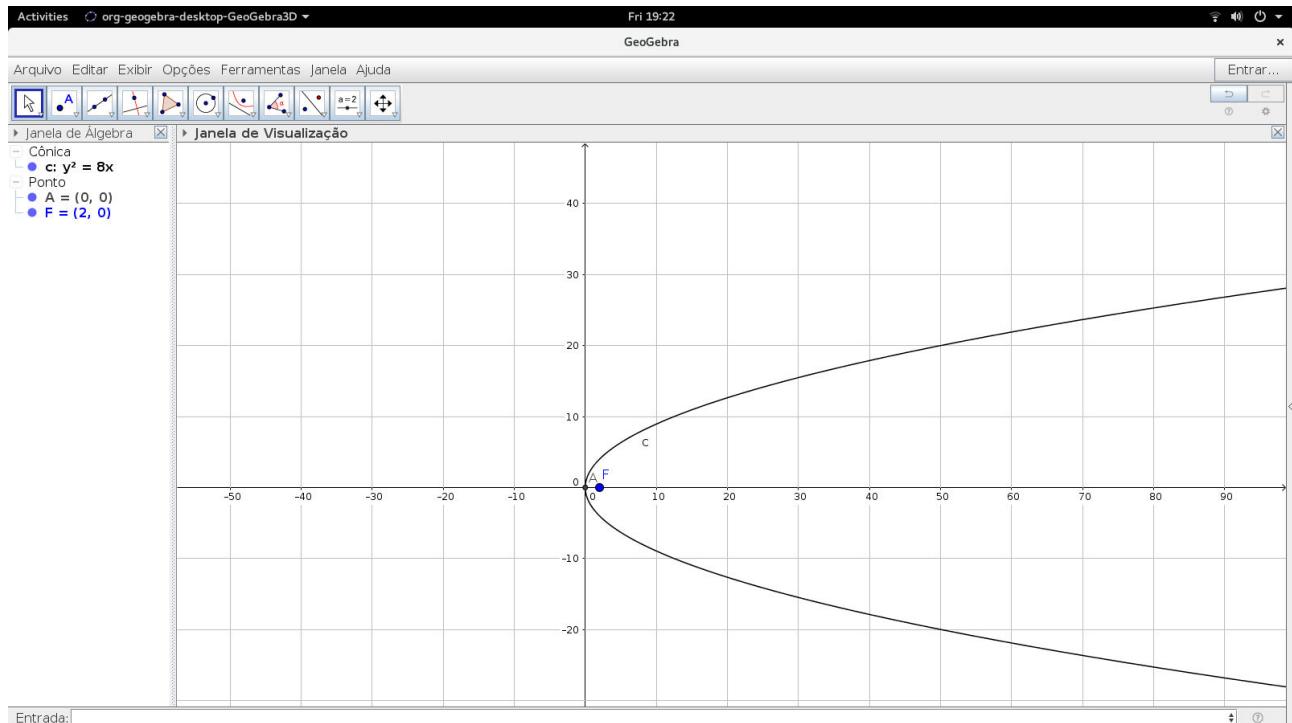
- 11) $P(2, -1, 2)$ $\pi : 2x - 2y - z + 3 = 0$
- 12) $P(3, -1, 4)$ $\pi : x + y + z = 0$



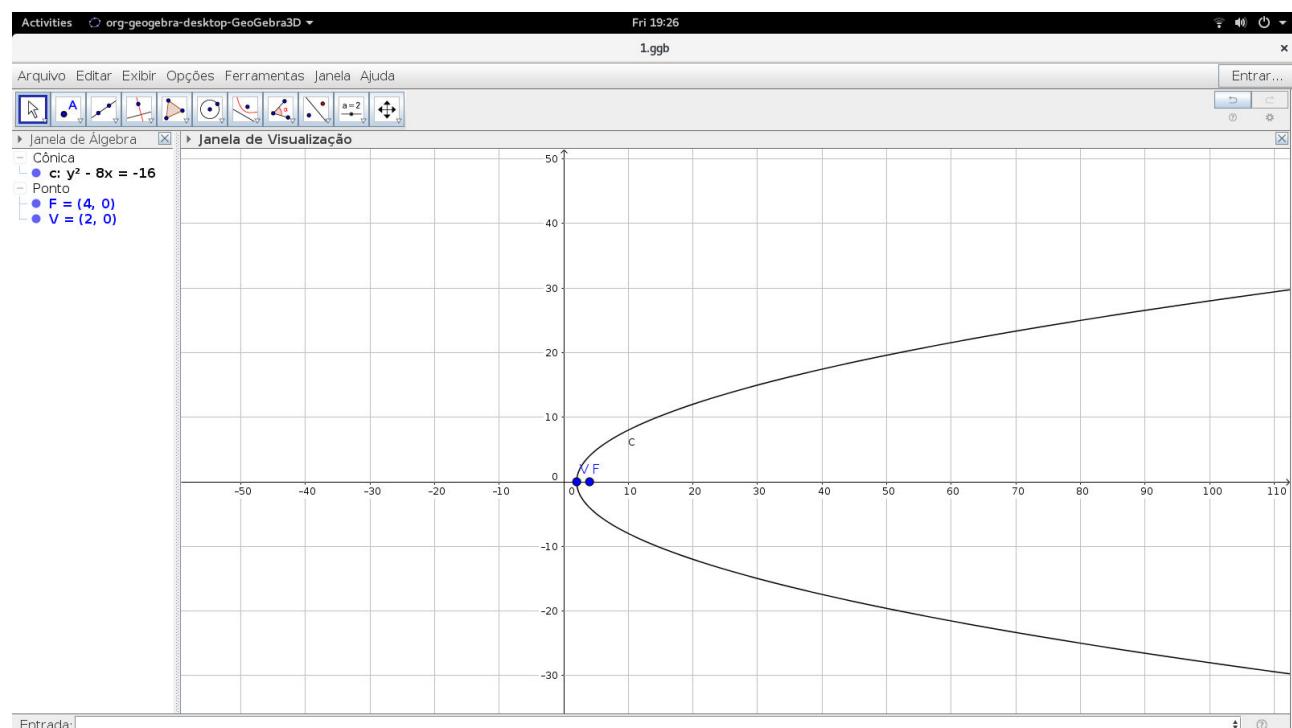
Cônicas

18. Parábola

1 - Qual a equação da parábola de foco no ponto $F(2,0)$ e vértice na origem?



2 - Qual a equação da parábola de foco no ponto $F(4,0)$ e vértice no ponto $V(2,0)$?

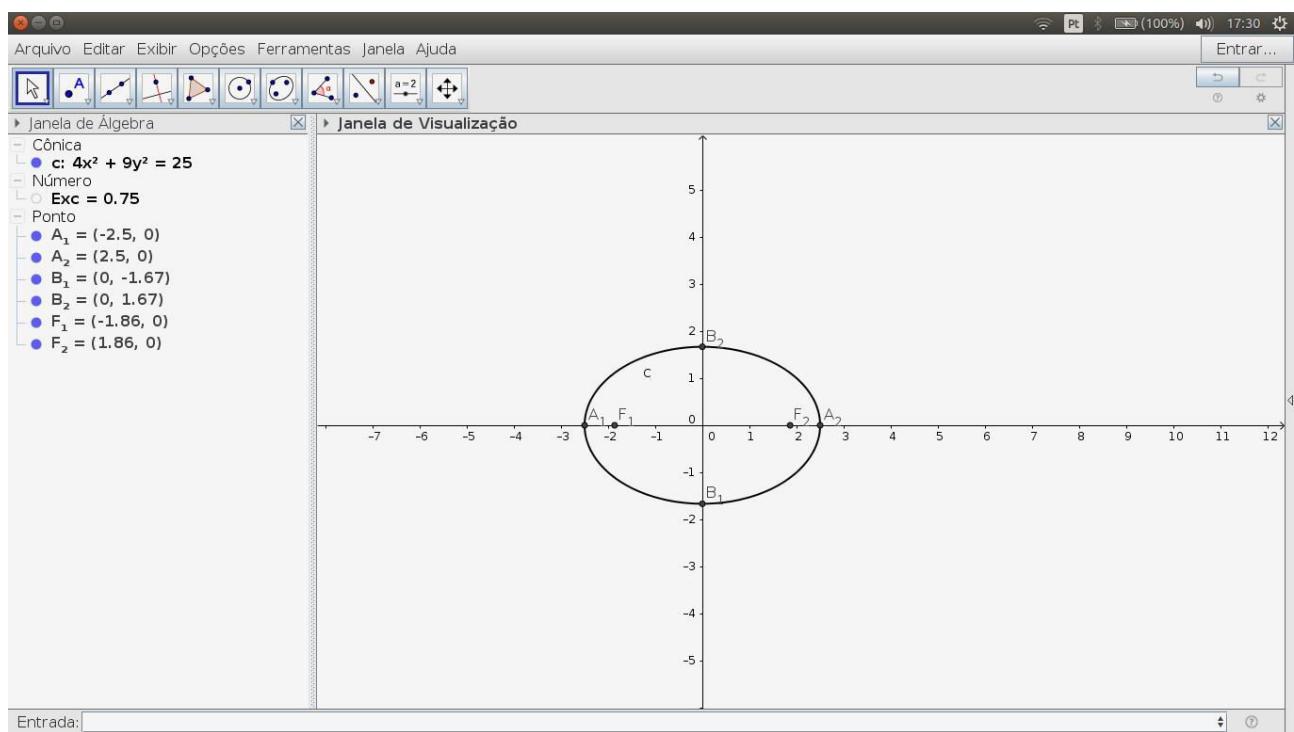
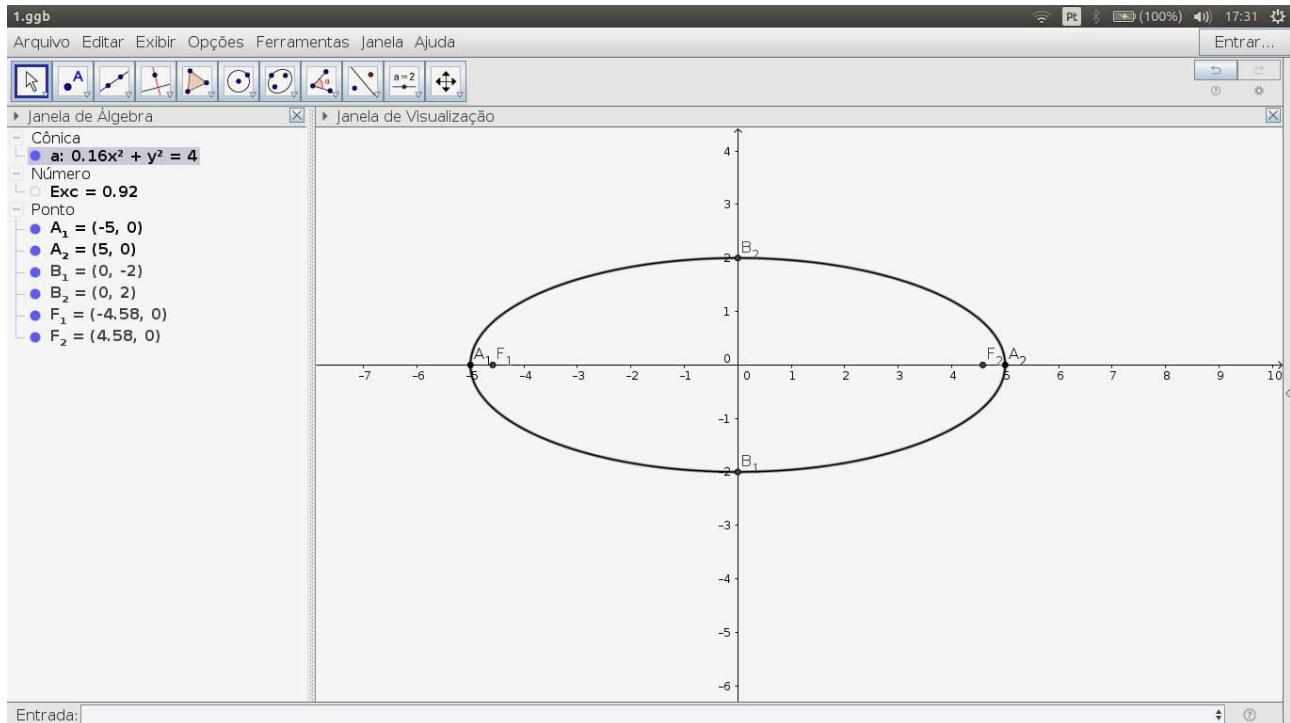


19. Elipse

Em cada um dos problemas de 1 a 10, esboçar o gráfico e determinar os vértices A_1 e A_2 , os focos e a excentricidade das elipses dadas.

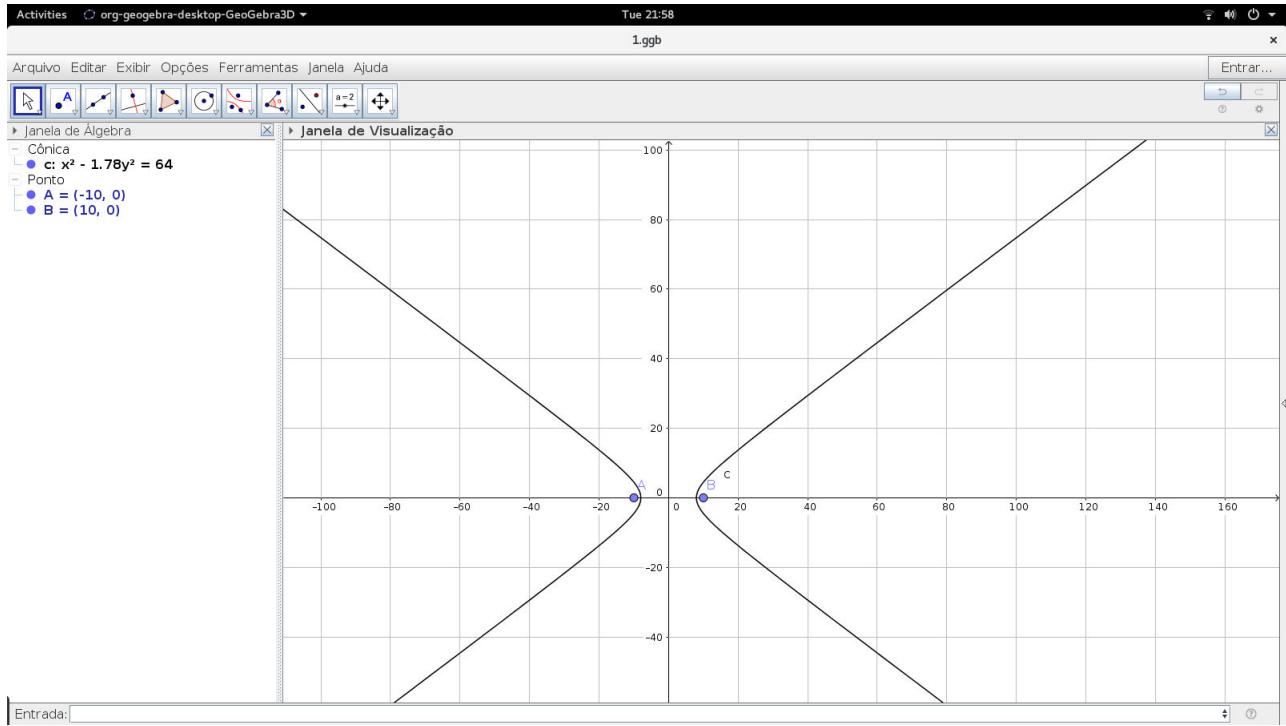
$$1) \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$$

$$6) 4x^2 + 9y^2 = 25$$



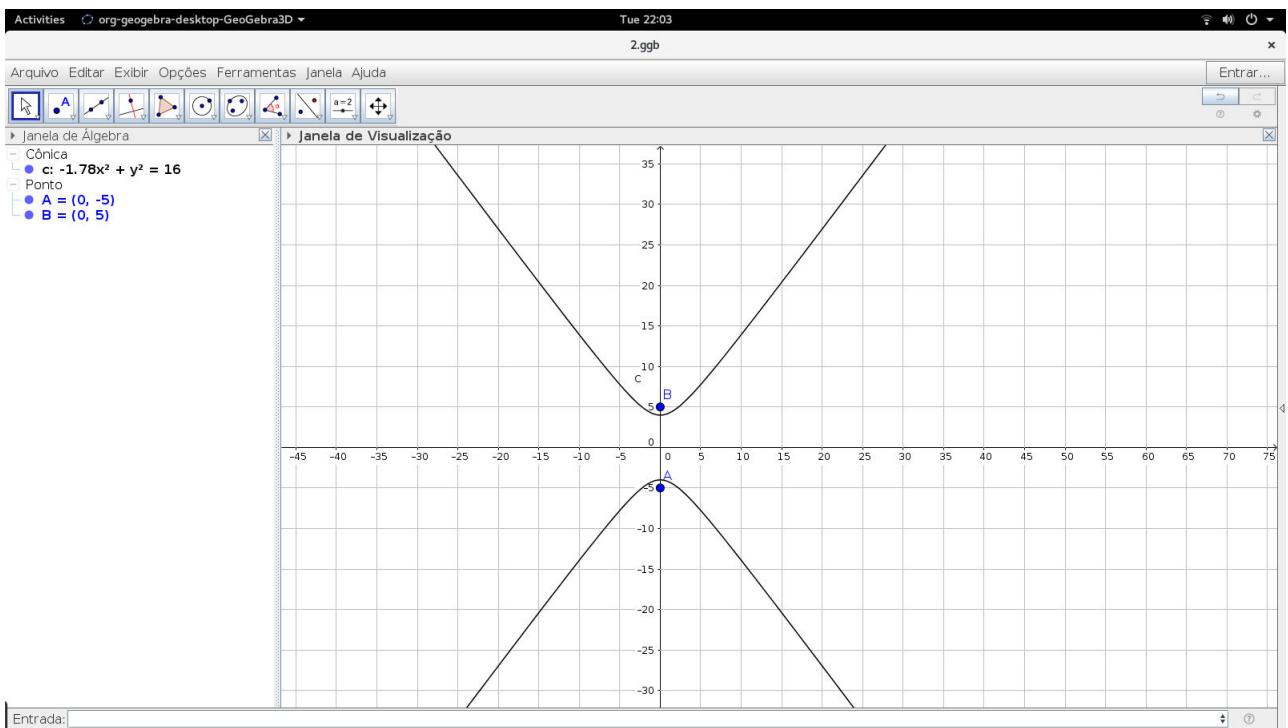
20. Hipérbole

Exemplo 1. Determine a equação da hipérbole com focos $F_1(-10, 0)$ e $F_2(10, 0)$ e eixo real medindo 16 unidades.



Exemplo 2. Determine as coordenadas dos focos da hipérbole de equação:

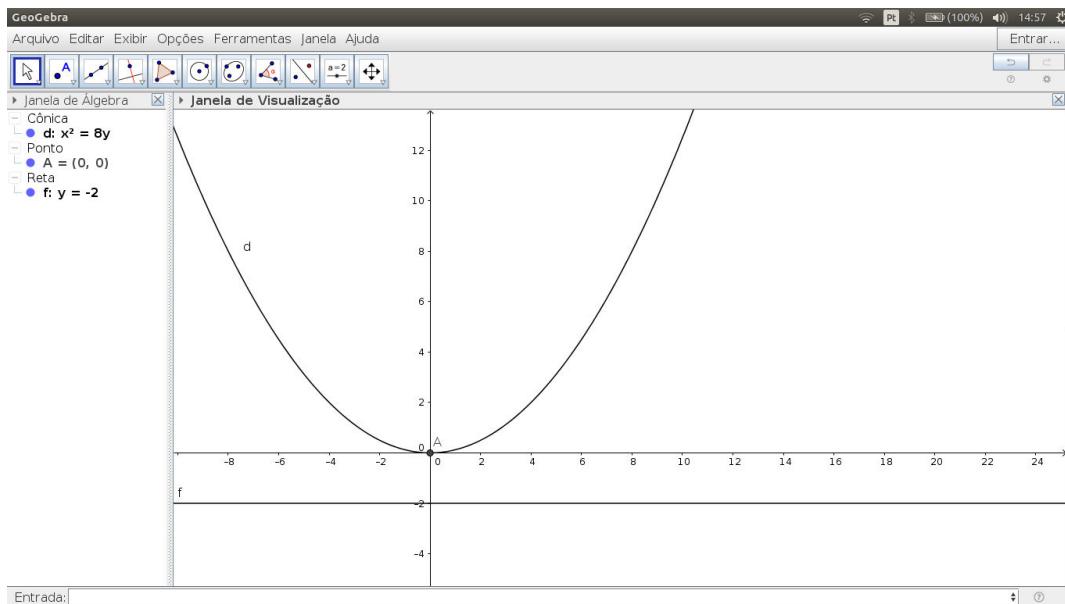
$$\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$$



21. Representação

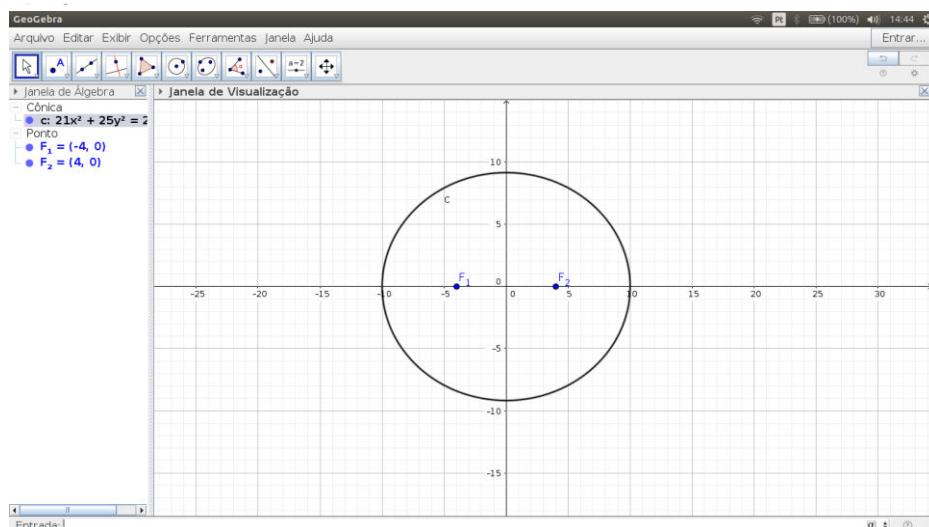
Nos problemas de 11 a 26, traçar um esboço do gráfico e obter uma equação da parábola que satisfaça as condições dadas.

- 11) vértice: V(0, 0); diretriz d: y = -2



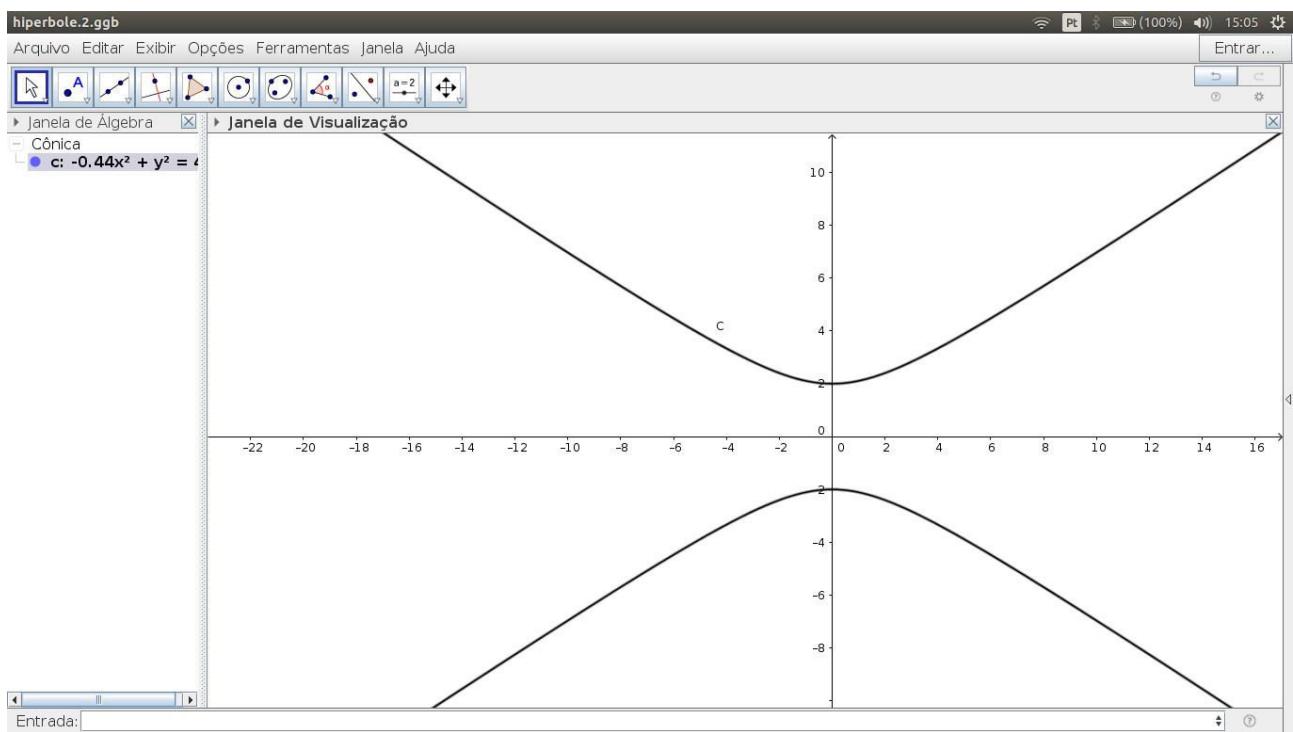
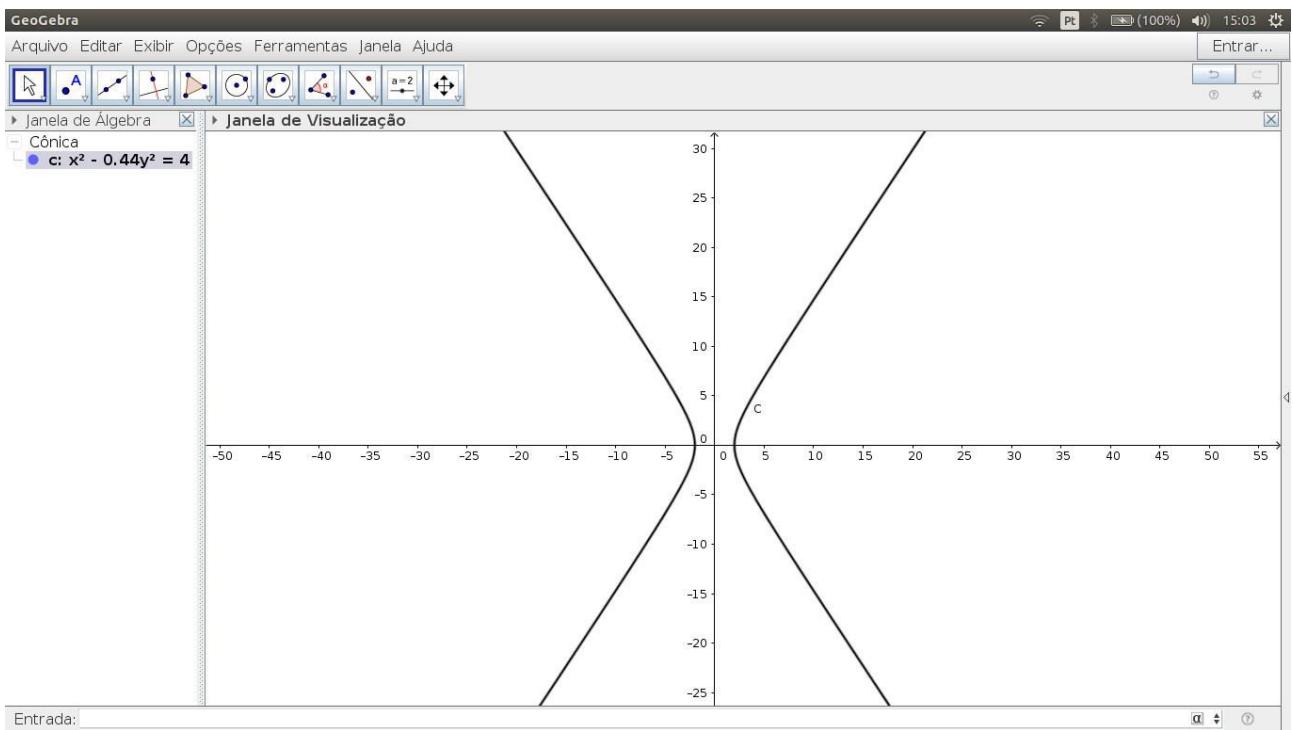
Em cada um dos problemas de 12 a 19, determinar uma equação da elipse que satisfaça as condições dadas. Esboçar o gráfico.

- 12) focos $F_1(-4, 0)$ e $F_2(4, 0)$, eixo maior igual a 10;



Em cada um dos problemas de 1 a 12, esboçar o gráfico e determinar os vértices, focos, a excentricidade e equações das assíntotas das hipérboles dadas.

$$1) \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1 \qquad 2) \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} = 1$$



Superfícies

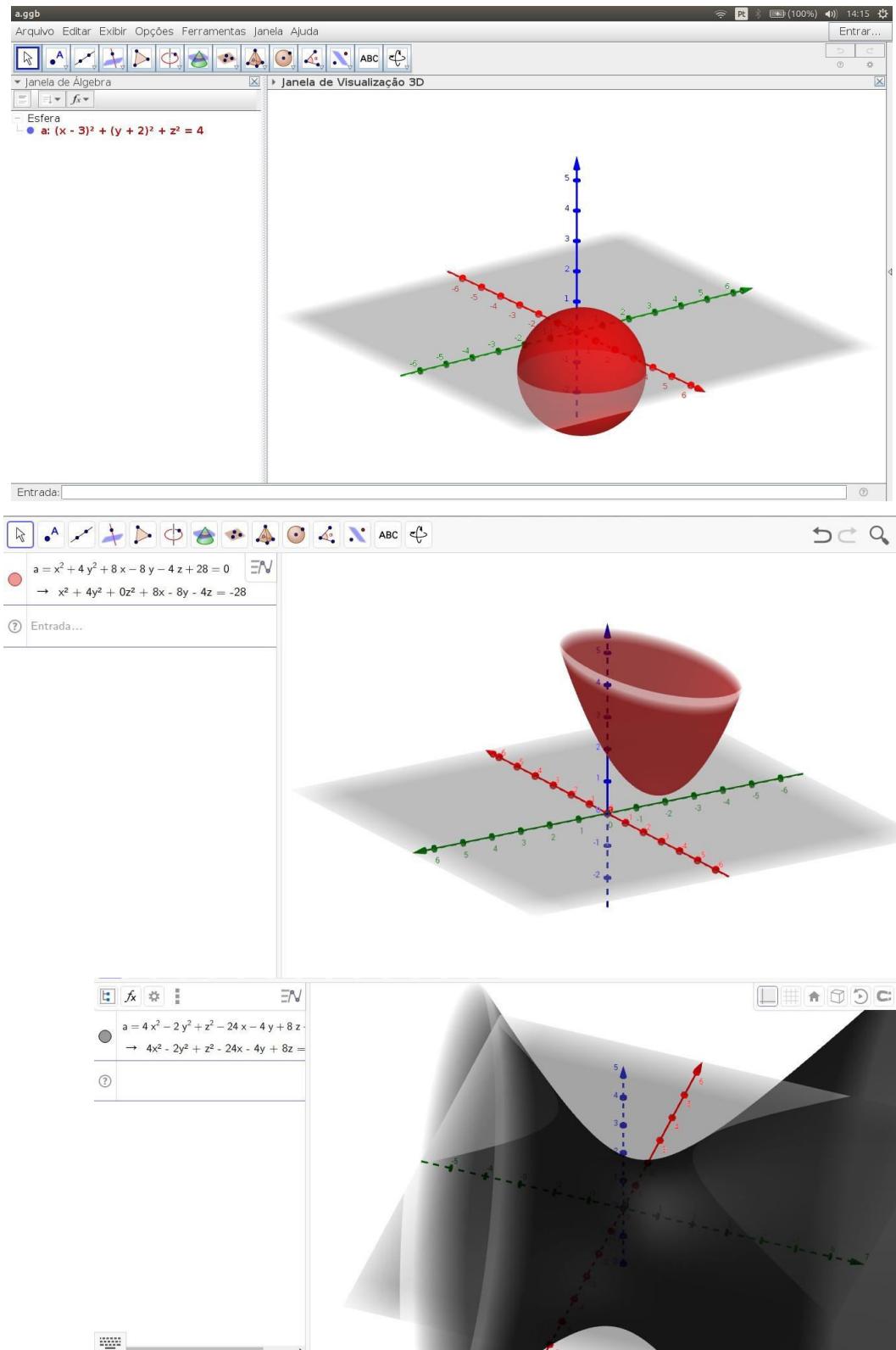
22. Representação

9) Identificar e descrever as superfícies de equações dadas.

a) $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y + 9 = 0$

b) $x^2 + 4y^2 + 8x - 8y - 4z + 28 = 0$

c) $4x^2 - 2y^2 + z^2 - 24x - 4y + 8z + 42 = 0$



Matrizes

23. Operações

Os problemas 1 a 6 referem-se às matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 9 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 7 & -8 \end{bmatrix}$$

1) Calcular $A + B$.

2) Calcular $A + C$.

The screenshot shows a software window with a toolbar at the top containing various icons for file operations, editing, and tools. The menu bar includes 'Arquivo', 'Editar', 'Exibir', 'Opções', 'Ferramentas', 'Janela', and 'Ajuda'. A status bar at the top right shows '1366x744', signal strength, battery level (99%), and the time '14:13'. Below the menu is a toolbar with icons for selection, zoom, and other functions. A dropdown menu is open, showing a list of operations:

- Lista
- o $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 9 \end{pmatrix}$
- o $B = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$
- o $C = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 7 & -8 \end{pmatrix}$
- o $\text{MultiAB} = \begin{pmatrix} 17 & -7 \\ 7 & 34 \end{pmatrix}$
- o $\text{MultiAC} = \begin{pmatrix} 33 & -20 \\ 33 & -82 \end{pmatrix}$
- o $\text{SomaAB} = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}$
- o $\text{SomaAC} = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

At the bottom left, there is an 'Entrada:' field with a small icon next to it.

24. Determinantes

(Vunesp) Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, o determinante da matriz $A \cdot B$ é:

a) -1

b) 6

c) 10

d) 12

e) 14

The screenshot shows the GeoGebra interface with the algebra window on the left and the visualization window on the right. In the algebra window, matrices A and B are defined as follows:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

A variable $a = 14$ is also defined, with the note "Número a: Determinante[A B]" below it. The visualization window shows a blank coordinate grid.

03. O produto $M \cdot N$ na matriz $M = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ pela matriz $N = (111)$:

a) não se define;

b) é uma matriz de determinante nulo;

c) é a matriz identidade de ordem 3;

d) é uma matriz de uma linha e uma coluna;

e) não é matriz quadrada.

RESPOSTA: B

The screenshot shows the GeoGebra interface with the algebra window on the left and the visualization window on the right. In the algebra window, matrices M and N are defined as follows:

$$M = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$N = (1 \ 1 \ 1)$$

A variable $a = 0$ is also defined, with the note "Número a: Determinante[M N]" below it. The visualization window shows a blank coordinate grid.

25. Inversa

$$1) A = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 11 \end{bmatrix}$$

$$2) B = \begin{bmatrix} 9 & 7 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$3) C = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -6 & -8 \end{bmatrix}$$

$$4) E = \begin{bmatrix} -3 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & -5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$5) F = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -2 & -4 & -5 \\ -3 & -5 & -6 \end{bmatrix}$$

The screenshot shows the GeoGebra software interface with the file name "arq.ggb" at the top. The menu bar includes Arquivo, Editar, Exibir, Opções, Ferramentas, Janela, Ajuda, Entrar..., and a date/time stamp of 14:21. Below the menu is a toolbar with icons for selection, zoom, and other functions. A list of objects is displayed under the heading "Lista":

- o $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 11 \end{pmatrix}$
- $B = \begin{pmatrix} 9 & 7 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$
- o $C = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -6 & -8 \end{pmatrix}$
- o $E = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & -5 & 4 \end{pmatrix}$
- o $F = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -2 & -4 & -5 \\ -3 & -5 & -6 \end{pmatrix}$
- o $\text{Inversa}_A = \begin{pmatrix} 11 & -7 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$
- o $\text{Inversa}_B = \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ -5 & 9 \end{pmatrix}$
- o $\text{Inversa}_C = \begin{pmatrix} -0.4 & 0.1 \\ 0.3 & -0.2 \end{pmatrix}$
- o $\text{Inversa}_E = \begin{pmatrix} -4.67 & -3 & -4.33 \\ -2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
- o $\text{Inversa}_F = \begin{pmatrix} -4.67 & -3 & -4.33 \\ -2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

At the bottom left is an "Entrada:" input field.

Sistemas

(Calcule Mais - 2012)
Resolva o sistema abaixo:

$$\begin{cases} x+y=3 \\ x-y=1 \end{cases}$$

- a) $S = \{(-2,1)\}$
- b) $S = \{(2,1)\}$
- c) $S = \{(2,1)\}$
- d) $S = \{(-2,-1)\}$
- e) $S = \{(2,0)\}$

Activities Sun 10:54 org-geogebra-desktop-GeoGebra3D GeoGebra

Arquivo Editar Exibir Opções Ferramentas Janela Ajuda Entrar...

Janela de Álgebra Janela de Visualização

- Lista

- o $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
- o $\text{matrix1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

- Número

- $a = 1$
- $b = 1$
- $c = 1$
- $d = -1$
- $e = 3$
- $f = 1$

- Texto

- $\text{texto1} = " \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ Valor de X = } 2 \text{ Valor de Y = } 1"$
- $\text{texto2} = "Valor de X = 2Valor de Y = 1"$

a = 1 c = 1 e = 3
b = 1 d = -1 f = 1

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ Valor de X = 2
 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ Valor de Y = 1

Activities Sun 10:59 org-geogebra-desktop-GeoGebra3D 2.ggb

Arquivo Editar Exibir Opções Ferramentas Janela Ajuda Entrar...

Janela de Álgebra Janela de Visualização

- Lista

- o $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
- o $\text{matrix1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

- Número

- $a = 2$
- $b = 1$
- $c = 1$
- $d = 1$
- $e = 5$
- $f = 1$

- Texto

- $\text{texto1} = " \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \text{ Valor de X = } 4 \text{ Valor de Y = } -3"$
- $\text{texto2} = "Valor de X = 4Valor de Y = -3"$

a = 2 c = 1 e = 5
b = 1 d = 1 f = 1

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ Valor de X = 4
 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ Valor de Y = -3

Referências

Exercícios referentes aos temas **04, 08, 10, 12, 13, 17, 19, 21, 22** foram retirados do livro **Vetores e Geometria Analítica** do autor Paulo Winterle.

Os exercícios dos demais temas seguem, em ordem:

01. Álgebra Vetorial e Geometria Analítica, Jacir J. Venturi.

02.

03.

5. Álgebra Vetorial e Geometria Analítica, Jacir J. Venturi.

6. <https://www.passeidireto.com/arquivo/4083070/produto-vetorial-e-misto---exercicios-resolvidos>

7.

- Exercício 1:<http://www.coladaweb.com/exercicios-resolvidos/exercicios-resolvidos-de-matematica/estudo-dareta>
- Exercício 2: <https://pt.slideshare.net/cursoraizes/exercicios-resolvidos-aulas05e06>

09. <http://www.coladaweb.com/exercicios-resolvidos/exercicios-resolvidos-de-matematica/estudo-dareta>

11. Álgebra Vetorial e Geometria Analítica, Jacir J. Venturi.

14. <http://sabermatematica.com.br/distancia-entre-retas-paralelas.html>

15.

- Exercício 1: Vetores e Geometria Analítica, Paulo Winterle,
- Exercício 2: Geometria Analítica, Alfredo Steinbruch.

16. <http://mundoeducacao.bol.uol.com.br/matematica/distancia-entre-ponto-reto.htm>

18. <https://www.passeidireto.com/arquivo/4535052/parabola->

20.

- Exercício 1: <http://mundoeducacao.bol.uol.com.br/matematica/equacao-hiperbole.htm>
- Exercício 2: http://www.dmm.im.ufrj.br/projeto/rived/modulo_hiperbole/q2.htm

23. Introdução a Álgebra Linear, Alfredo Steinbruch e Paulo Winterle.

24.

- Exercício 1:<http://exercicios.mundoeducacao.bol.uol.com.br/exercicios-matematica/exercicios-sobre-determinante-matriz-ordem-1-2-ou-3.htm#questao-796>
- Exercício 2:<http://exercicios.mundoeducacao.bol.uol.com.br/exercicios-matematica/exercicios-sobre-determinante-matriz-ordem-1-2-ou-3.htm#questao-796>

25. Introdução a Álgebra Linear, Alfredo Steinbruch e Paulo Winterle.

26.

- Exercício1:
http://calculemais.com.br/exercicios_matematica/exercicios_de_matematica.php?id=15&d=sistemas_de_equacoes
- Exercício2:
http://calculemais.com.br/exercicios_matematica/exercicios_de_matematica.php?id=145&d=sistemas_de_equacoes-sistemas_de_equacoes-exercicio_2&prox_exerc=Vamos+para+o+Próximo